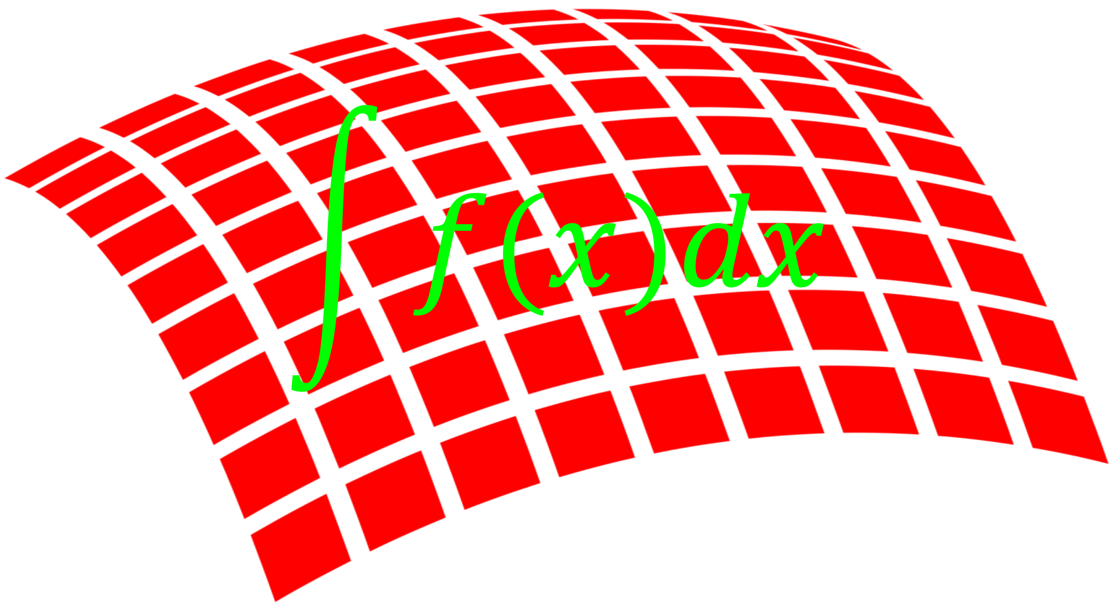
JILID 1
EDISI 1

BUKU
INTEGRAL TAK-TENTU



Disusun Oleh :
Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd

2019

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur saya ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena dengan pertolongan-Nya saya dapat menyelesaikan bahan ajar “INTEGALTAK-TENTU”Jilid 1 Edisi pertama. Penulis menyadari betul banyak rintangan dan hambatan dalam proses pembuatan buku ini, akan tetapi Puji Tuhan di dalam pembuatan buku ini saya berhasil menyelesaikannya dengan baik.

Adapun tujuan penyusunan ini adalah untuk memenuhi kebutuhan dasar dari setiap pembaca buku integral. Penyusunan buku ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penulis menyadari bahwa buku ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan buku ini di lain waktu. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya siswa siswi, mahasiswa dan masyarakat umum yang ingin mempelajari Integral. Akhir kata saya ucapkan terimakasih dan salam buat kita semua.

Jakarta, 21 Februari 2019

Jitu Halomoan Lumban toruan, S.Pd., M.Pd

BAB 1
INTEGRAL

1.1 Integral Tak Tentu (Anti Turunan)

Peradaban akan maju dengan mengembangkan sejumlah operasi-operasi penting dalam matematika yang dapat dihubungkan dalam kehidupan sehari-hari. Di dalam kehidupan sehari-hari banyak operasi yang saling balikan seperti jika saya memakai baju maka saya dapat melepasnya, operasi tersebut adalah operasi yang saling anti. Dalam Matematika ada pasangan operasi yang saling anti, seperti penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, pemangkatan dan penarikan akar. Operasi integral juga merupakan operasi anti dari turunan, sehingga dapat dikatakan bahwa integral adalah anti turunan.

Definisi

Kita sebut F suatu anti turunan dari f pada selang I jika $DF = f$ pada I – yakni, jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I. (Jika x suatu titik ujung dari I, $F'(x)$ hanya perlu berupa turunan satu sisi)

Kita telah menggunakan istilah "suatu anti turunan" ketimbang "anti turunan". Kenapa demikian? Anda segera akan mengetahuinya. Dalam kalkulus diferensial telah kita pelajari bahwa jika diketahui rumus fungsi $f(x) = x^n + C$ dimana C adalah konstanta, maka turunannya adalah $f'(x) = nx^{n-1}$. Operasi untuk mendapatkan kembali fungsi $f(x)$ jika diketahui $f'(x)$ dinamakan operasi integral, dilambangkan dengan "$\int$". Dengan demikian $\int nx^{n-1}\,dx = x^n + C$. Dari pengertian integral yang merupakan anti turunan, maka untuk membuktikan bahwa $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, cukup dibuktikan bahwa $D_x[F(x) + C] = f(x)$ dimana D_x adalah operator turunan. Disini $f(x)$ d

Teorema (1.1) Aturan Pangkat

Jika *n* adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini cukup dengan membuktikan bahwa turunan dari ruas kanan sama dengan integran ruas kiri. Karena

$$D_x\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n + 0 = x^n,$$ maka Teorema (1.1) terbukti.

Contoh 1 $\int 7 \, dx = 7\int x^0 \, dx$

$$= 7\frac{x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$= 7x + C$$

Contoh 2 $\int x^5 dx = \frac{1}{5+1}x^{5+1} + C$

$$= \frac{x^6}{6} + C$$

Contoh 3 $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Contoh 4 $\int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C$

$$= \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C$$

Contoh 5 $\int x^{\frac{11}{3}}dx = \frac{x^{\frac{11}{3}+1}}{\frac{11}{3}+1} + C$

$$= \frac{3x^{\frac{14}{3}}}{14} + C$$

C ontoh 6 $\int x^{\frac{7}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9} + C$

$$= \frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9} + C$$

Contoh 7 $\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

Contoh 8 $\int \sqrt[11]{2x}dx = \int (2x)^{\frac{1}{11}}dx$

$$= \frac{(2x)^{\frac{1}{11}+1}}{2(\frac{1}{11}+1)} + C$$

$$= \frac{11(2x)^{\frac{12}{11}}}{24} + C$$

1.2 Sifat Integral Tak Tentu

INTEGRAL TAK-TENTU BERSIFAT LINEAR Ingat kembali bahwa D_x adalah suatu operator linear. Integral tak tentu mempuyai sifat-sifat yang dapat didasarkan pada sifat-sifat turunan. Berikut ini adalah teorema-teorema yang menyatakan sifat-sifat integral tak tentu.

Teorema (1.2)

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx, \text{dengan } k \text{ suatu konstanta}$$

Bukti:

$$D_x\left[k\int f(x)dx\right] = k\,D_x\left[\int f(x)dx\right]$$
$$= k\,f(x)$$

Contoh 9 $\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx$

$$= 5\tfrac{1}{4+1}x^{4+1} + C$$
$$= x^5 + C$$

Contoh 10 $\int 5\,dx \;= 5\int 1dx$

$$= 5[x + C_1]$$
$$= 5x + C$$

Contoh 11 $\int 11x^{11}\,dx = 11\dfrac{1}{11+1}x^{11+1} + C$

$$= \frac{11}{12}x^{12} + C$$

Teorema (1.3)

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Bukti:

$$D_x \left[\int f(x)dx \; + \; \int g(x)dx\right] = D_{\text{x}} \int f(x)dx \; + D_x \int g(x)dx \; = \; f(x) + \; g(x)$$

Contoh 12

$$\int [(3x^2 + 2) + (8x^3 + 4)]dx = \int (3x^2 + 2)dx + \int (8x^3 + 4)dx$$
$$= \left(\frac{3}{2+1} x^{2+1} + 2x + C_1\right) + \left(\frac{8}{3+1} x^{3+1} + 4x + C_2\right)$$
$$= (x^3 + 2x) + (2x^4 + 4x) + C_1 + C_2$$
$$= \; 2x^4 + x^3 + 6x + C$$

Contoh 13

$$\int [(6x^2 + 3) + (12x^3 + 6)]dx = \int (6x^2 + 3)dx + \int (12x^3 + 6)dx$$
$$= \left(\frac{6}{2+1} x^{2+1} + 3x + C_1\right) + \left(\frac{12}{3+1} x^{3+1} + 6x + C_2\right)$$
$$= (2x^3 + 3x) + (3x^4 + 6x) + C_1 + C_2$$
$$= 3x^4 + 2x^3 + 9x + C$$

Contoh 14

$$\int [(8x^7 + 10) + (15x^4 + 50)]dx = \int (8x^7 + 10)dx + \int (15x^4 + 50)dx$$
$$= \left(\frac{8}{7+1} x^{7+1} + 10x + C_1\right) + \left(\frac{15}{4+1} x^{4+1} + 50x + C_2\right)$$
$$= (x^8 + 10x) + (3x^5 + 50x) + C_1 + C_2$$
$$= x^8 + 3x^5 + 60x + C$$

Teorema (1.4)

$$\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

Bukti:

$$D_x \left[\int f(x)dx - \int g(x)dx\right] = D_\mathrm{x} \int f(x)dx - D_x \int g(x)dx \ = \ f(x) - \ g(x)$$

Contoh 15

$$\begin{aligned}\int [(3x^4 + 2) - (8x^2 + 4)]dx &= \int (3x^4 + 2)dx - \int (8x^2 + 4)dx \\ &= \left(\frac{3}{4+1}x^{4+1} + 2x + C_1\right) - \left(\frac{8}{2+1}x^{2+1} + 4x + C_2\right) \\ &= \left(\frac{3}{5}x^5 + 2x\right) - \left(\frac{8}{3}x^3 + 4x\right) + C_1 - C_2 \\ &= \frac{3}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 - 2x + C\end{aligned}$$

Contoh 16

$$\begin{aligned}\int [(7x^2 + 3) - (10x^4 + 5)]dx &= \int (7x^2 + 3)dx - \int (10x^4 + 5)dx \\ &= \left(\frac{7}{2+1}x^{2+1} + 3x + C_1\right) - \left(\frac{10}{4+1}x^{4+1} + 5x + C_2\right) \\ &= \left(\frac{7}{3}x^3 + 3x\right) - \left(\frac{10}{5}x^5 + 5x\right) + C_1 - C_2 \\ &= -2x^5 + \frac{7}{3}x^3 - 2x + C\end{aligned}$$

Contoh 17

$$\begin{aligned}\int [(11x^7 + 9) - (7x^5 - 9)]dx &= \int (11x^7 + 9)dx - \int (7x^5 - 9)dx \\ &= \left(\frac{11}{7+1}x^{7+1} + 9x + C_1\right) - \left(\frac{7}{5+1}x^{5+1} - 9x + C_2\right) \\ &= \left(\frac{11}{8}x^8 + 9x\right) - \left(\frac{7}{6}x^6 - 9x\right) + C_1 - C_2 \\ &= \frac{11}{8}x^8 - \frac{7}{6}x^6 + 18x + C\end{aligned}$$

1.3. ATURAN PANGKAT YANG DIPERUMUM

Ingat kembali pada Aturan Rantai yang diterapkan pada pangkat suatu fungsi. Jika $u = g(x)$ adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan r suatu bilangan rasional $(r \neq -1)$, maka

$$D_x\left[\frac{u^{r+1}}{r\ +1}\right] = u^r . D_x u$$

atau, dalam cara penulisan fungsional,

$$D_x\left(\frac{[g(x)]^{r+1}}{r\ +1}\right) = [g(x)]^r . g'(x)$$

Dari sini kita peroleh suatu aturan penting untuk integral tak tentu.

Teorema (1.5) Aturan Pangkat Yang Diperumum

Andaikan g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1. Maka

$$\int [g(x)]^r\, g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Contoh 18

$$\int (x^8 + 12x)^{28}(8x^7 + 12)\, dx$$

Misalkan $g(x) = x^8 + 12x,$ maka $g'(x) = 8x^7 + 12$. Jadi, menurut Teorema (1.5).

$$\int (x^8 + 12x)^{28}(8x^7 + 12)\, dx = \int [g(x)]^{28} g'(x) dx$$

$$= \frac{[g(x)]^{29}}{29} + C$$

$$= \frac{(x^8 + 12)^{29}}{29} + C$$

1.4. Soal Isian

Diskusikanlah dengan teman sekelompok anda soal-soal integral di bawah ini.

1. $\int x^5 dx \quad = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C$

   $= \cdots \ldots \ldots \ldots$

2. $\int 6x^2 dx \quad = \cdots \ldots \ldots \ldots$

   $= 2x^3 + C$

3. $\int 5x \, dx \quad = \cdots \ldots \ldots \ldots$

   $= \frac{5}{2} x^2 + C$

4. $\int \sqrt{x^3} \, dx \quad = \int x^{\frac{3}{2}} \, dx$

   $= \cdots \ldots \ldots \ldots$

   $= \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + C$

   $= \cdots \ldots \ldots$

5. $\int \frac{1}{2x^3} dx \quad = \int \frac{1}{2} x^{-3} dx$

   $= \frac{1}{2} \int x^{-3} dx$

   $= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

   $= -\frac{1}{4x^2} + C$

$$6. \int (2x-4)^3 dx = \frac{1}{2(3+1)}(2x-4)^{3+1} + C$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$7. \int \left(\frac{5x}{2} - 2\right)^4 dx = \frac{5}{2(4+1)}\left(\frac{5x}{2} - 2\right)^{4+1} + C$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$= \left(\frac{5x}{4} - 1\right)^5 + C$$

$$8. \int (5x-8)^4 \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \frac{1}{25}(5x-8)^5 + C$$

$$9. \int (7x-1)^3 \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \frac{1}{28}(7x-1)^4 + C$$

$$10. \int (3x+6) \, dx = \frac{1}{3(1+1)}(3x+6)^{1+1} + C$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 + C$$

11. $\int (3 - \frac{1}{2}x)^9 \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots$

$= -\frac{1}{5}\left(3 - \frac{1}{2}x\right)^{10} + C$

12. $\int \left[2x\left(3 - \frac{1}{x}\right)\right]^3 dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots$

$= \frac{1}{24}(6x - 2)^4 + C$

13. $\int (2x - 1)^3 \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots$

$= \frac{1}{8}(2x - 1)^4 + C$

14. $\int \frac{3}{x^4 \sqrt[10]{x^5 \sqrt[3]{x}}} dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= 9\sqrt[3]{x} + C$

15. $\int x\sqrt{x^2 - 3 + 2} \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \sqrt{(x^2 - 3 + 2)^3} + C$

16. $\int (\tan x - \sec x)^2 \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= 2\tan x - 2\sec x - x + C$

17. $\int \sin^4 x \cos x \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

18. $\int \frac{7 \sec \ 3x}{\cot 3x} dx \quad = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \frac{7}{3 \cos 3x} + C$

19. $\int \sin^2 x \sin 2x \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= x - \sin^3 x + \frac{2}{5} \sin^5 x + C$

20. $\int \frac{\sin 3x \cos 3x}{\sec 3x} \ dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= -\frac{2}{3} \cos^3 3x + C$

1.5. Soal Tambahan

Tentukan hasil integral di bawah ini.

1. $\int (3 - \frac{1}{8}x)^7 dx$

2. $\int (-\frac{1}{17}x - 8)^9 \, dx$

3. $\int (4x - 1)^4 \, dx$

4. $\int (17x + 9)^{16} \, dx$

5. $\int (\frac{1}{3}x - 23)^9 \, dx$

6. $\int (-\frac{1}{17}x + 31)^5 \, dx$

7. $\int (\frac{1}{17}x + 3)^{12} \, dx$

8. $\int (-\frac{1}{23}x - 3)^8 \, dx$

9. $\int \sec^2 10x \;\; dx$

10. $\int (-4) \csc^2 5x \, dx$

11. $\int (\sin x + 3\cos x) \, dx$

12. $\int \cos^4 3x \sin 3x \, dx$

13. $\int (-20) \csc^2 9x \, dx$

14. $\int 5\cos\ (4x+1)\,dx$

15. $\int 6\cos\ (6x+1)\,dx$

16. $\int 15\cos\ (5x+1)\,dx$

17. $\int \frac{10\text{ Sec }3x}{\text{Cot }3x}$

18. $\int (\cos x + 5\sin x)\,dx$

19. $\int (-\cos x - 23\sin x)\,dx$

20. $\int (\sin x + 3\cos x)\,dx$

21. $\int (\cos x + 3\sin x)\,dx$

BAB 2
PENGINTEGRALAN DENGAN SUBSTITUSI

Himpunan fungsi-fungsi yang ada pada bahan ajar yang Anda pengang sekarang terdiri atas apa yang dinamakan fungsi-fungsi elementer yaitu fungsi konstanta, fungsi pangkat dan fungsi trigonometri. Berikut fungsi-fungsi yang diperoleh dengan penjumlahan, pengurangan, pengalian, pembagian, komposisi.

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$g(x) = (1 + \cos^4 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$h(x) = \frac{3^{x^2-2x}}{\ln(x^2+1)} - \sin[\cos(\cosh x)]$$

Diferensial suatu fungsi elementer dapat dilakukan langsung dengan aturan yang telah kita kenal, hasilnya selalu fungsi elementer. Pengintegralan adalah persoalan yang berbeda sekali, melibatkan sedikit teknik, banyak sekali akal dan yang lebih celaka lagi, hasilnya bukan selalu fungsi elementer.

2. 1. SUBSTITUSI DALAM INTEGRAL TAK-TENTU

Andaikan Anda menghadapi suatu integral tak tentu. Apabila itu bentuk baku atau berbentuk rumus, maka dengan mudah Anda dapat menuliskan hasilnya. Apabila tidak berbentuk rumus, maka langkah pertama carilah sebuah metode substitusi yang dapat diintegralkan. Anda harus banyak berlatih untuk mengetahui bentuk-bentuk metode substitusi yang tepat dengan fungsi yang dapat diintegralkan. Dengan demikian Anda tidak lagi ketergantungan terhadap bentuk baku atau berbentuk rumus.

2.2. ***Konstanta*, *pangkat***

1. $\int k \, du = ku + C$

2. $\int u^r \, du = \begin{cases} \dfrac{u^r + 1}{r + 1} + C, r \neq -1 \\ \ln|u| + +C, r \neq -1 \end{cases}$

2.3. ***Eksponen***

1. $\int e^u \, du = e^u + C$

2. $\int a^u \, du = \dfrac{a^u}{\text{In } a} + C, \quad a \neq 1, a > 0$

2.4. ***Fungsi Trigonometri***

1. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$

2. $\int \text{Cos } u \, du = \sin u + C$

3. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

4. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

5. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

6. $\int \cos u \cot u \, du = -\csc u + C$

7. $\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$

8. $\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$

9. $\int e^u \, du = e^u + C$

2.5. ***Fungsi Aljabar***

1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

2. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

3. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$

Teorema (2.1)

Untuk menentukan $\int f(x)\, dx$, dapat mensubstitusi $u = g(x)$ dengan g fungsi yang dapat diintegralkan. Apabila substitusi itu mengubah $f(x)dx$ menjadi $h(u)\, du$ dan apabila H sebuah anti turunan h, maka

$$\int f(x)\, dx = \int h(u)\, du = H(u) + C = H\big(g(x)\big) + C$$

Contoh 1. Tentukan $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\, dx$

Misalkan $u = x^2$.

Maka $du = 2x\, dx$

Sehingga $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x^2)} .\ 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x^2)} .\ 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan\ (x^2) + C$$

Contoh 2. Tentukan $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\, dx$

Ingatlah bentuk $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

Misalkan $u = 3x$.

Maka $du = 3\, dx$

Sehingga $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}\, du$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{u}}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Contoh 3. Tentukan $\int \frac{3}{\sqrt{5-16x^2}}\, dx$

Misalkan $u = 4x$.

Maka $du = 4\, dx$

Sehingga $\int \frac{3}{\sqrt{5-16x^2}}\, dx = \frac{3}{4}\int \frac{1du}{\sqrt{5-\ u^2}}$

$$= \frac{3}{4}\sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= \frac{3}{4}\sin^{-1}\left(\frac{4x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Contoh 4. Tentukan $\int \frac{6e^{1/x}}{x^2} dx$

Ingat $\int e^u \ du$

Misalkan $u = \frac{1}{x}$.

Maka $du = \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$

Sehingga $\int \frac{6e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \ dx = -6 \int e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \ dx\right)$

$$= -6 \int e^u \, du$$

$$= -6e^u + C$$

$$= -6e^{\frac{1}{x}} + C$$

Contoh 5. Tentukan $\int \frac{9e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \ dx$

Ingat $\int e^u \, du$

Misalkan: $u = \frac{1}{x}$

Maka $du = \frac{-1}{x^2} \ dx$

Sehingga $\int \frac{9e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \ dx = -9 \int e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \ dx\right)$

$$= -9 \int e^u \, du$$

$$= -9e^{\frac{1}{x}} + C$$

Contoh 6. Tentukan $\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\ dx$

Ingat $\int \frac{1}{a^2+u^2}\ du$

Misalkan $u = 3e^x$.

Maka $\quad du = 3e^x\ dx$

Sehingga $\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+9e^{2x}}(3e^x\ dx)$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+u^2}\ du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3e^x}{2}\right) + C$$

Contoh 7. Tentukan $\int x^3\sqrt{x^4+12}\, dx$

Misalkan $\mathrm{u} = \mathrm{x}^4 + 12$, $\quad$ maka $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = 4\mathrm{x}^3$

Sehingga $\int x^3\sqrt{x^4+12}\ dx = \frac{1}{4}\int (x^4+12)^{1/2}\ (4x^3\ dx)$

$$= \frac{1}{4}\int (x^4+12)^{\frac{1}{2}}\, d(x^4+12)$$

$$= \frac{1}{6}\ (x^4+12)^{\frac{3}{2}} + C$$

Contoh 8. Tentukan $\int x^2\sqrt{x^3+11}\ dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = x^3 + 11$.

Maka $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$

Sehingga $\int \mathrm{x}^2\sqrt{\mathrm{x}^3+11}\ \mathrm{dx} = \dfrac{1}{3}\int (x^3+11)^{1/2}(3x^2\ dx)$

$$= \frac{1}{3}\int (x^3+11)^{\frac{1}{2}}\, d(x^3+11)$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+11)^{3/2} + C$$

Contoh 9. Tentukan $\int \dfrac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\ dt$.

Misalkan $u = \tan t$.

Maka $\dfrac{du}{dv} = \sec^2 x$

Sehingga $\int \dfrac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\ dt = \int a^{\tan t}\sec^2 t\ dt$

$$= \int a^{\tan t}\ d(\tan t)$$

$$= \frac{a^{\tan t}}{\mathrm{In}\ a} + C$$

Contoh 10. Tentukan $\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25}\, dx$

Penyelesaian

Suatu integral yang penyebutnya berbentuk suatu kuadrat kerap kali dapat diubah menjadi bentuk baku setelah melengkapkannya menjadi sebuah kuadrat. Ingat bahwa $x^2 + bx$ menjadi suatu kuadrat dengan menambahkan $(\frac{b}{2})^2$

Sehingga $\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25}\, dx = \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9 + 16}\, dx$

$$= 7 \int \frac{1}{(x-3)^2 + 4^2}\, d(x-3)$$

$$= \frac{7}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$$

Contoh 11. Tentukan $\int \frac{x^2 - x}{x + 1}\, dx$

Penyelesaian

Apabila integran hasil bagi dua suku banyak (yaitu suatu fungsi rasional) dan derajat pembilang sama atau melebihi derajat penyebut, lakukanlah pembagian pembilang oleh penyebut terlebih dahulu

Hasil bagi $\frac{x^2 - x}{x+1} = x - 2 + \frac{2}{x+1}$

Maka $\int \frac{x^2 - x}{x + 1}\, dx = \int (x - 2)\, dx + 2 \int \frac{1}{x + 1}\, dx$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \int \frac{1}{x+1}\, d(x+1)$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ \text{In}\ |x + 1| + C$$

Contoh 12. Tentukan $\int \sec x \, dx$

Penyelesaian

Perubahan-perubahan yang kita lakukan pada contoh 10 dan 11 tampak masuk akal, dan dapat dipahami, tetapi contoh 12 ini agak lain, seperti yang terlihat di bawah ini

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \, \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sec x + \tan x} \, d(\sec x + \tan x)$$

$$= \text{In} \, |\sec x + \tan x| + C$$

Contoh 13. Tentukan $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = \sqrt{x}$.

Maka $u^2 = x$ dan

$2 \, u \, du = dx$

Sehingga $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\cos u}{\sqrt{x}} . 2 \, u \, du$

$$= \int \frac{\cos u}{\sqrt{x}} . 2 \sqrt{x} \, du$$

$$= 2 \int \cos u \, du$$

$$= 2 \sin u + C$$

$$= 2 \sin \sqrt{x} + C$$

Contoh 14. Tentukan $\int \frac{t^2 \cos\ (t^3 - 2)}{\sin^2 (t^3 - 2)}\ dt$

Misalkan $u = \sin\ (t^3 - 2)$.

Maka $\frac{du}{dt} = 3t^2 \cos\ (t^3 - 2)$ dan

$$dt = \frac{du}{3t^2 \cos\ (t^3 - 2)}$$

Sehingga $\int \frac{t^2 \cos (t^3 - 2)}{\sin^2 (t^3 - 2)}\ dt = \int \frac{t^2 \cos\ (t^3 - 2)}{u^2} . \frac{du}{3t^2 \cos\ (t^3 - 2)}$

$$= \frac{1}{3} \int u^{-2}\ du$$

$$= \frac{1}{3} . -\frac{1}{u} + C$$

$$= -\frac{1}{3\,u} + C$$

$$= -\frac{1}{3 \sin\ (t^3 - 2)} + C$$

Contoh 15. Tentukan $\int \frac{\cos\ (\ln\ 4x^2)}{x}\ dx$

Misalkan $u = \ln\ 4x^2$.

Maka $\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}$

Sehingga $\int \frac{\cos\ (\ln\ 4x^2)}{x}\ dx = \int \frac{\cos u}{x} . \frac{x\ du}{2}$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u\ du$$

$$= \frac{1}{2} \sin\ (\ln 4x^2) + C$$

2.6. Soal Isain

Tentukan integral berikut,mendikusikan dengan kelompok masing-masing.

1. $\int e^{-x}\ dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\frac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int e^{-x}\ dx \quad = \cdots \dots \dots \dots.$

$= \cdots \dots \dots \dots.$

$= \cdots \dots \dots \dots.$

$= -e^{-x} + C$

2. $\int (e^{x})^{-2}\, dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\frac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int (e^{x})^{-2}\, dx = \cdots \dots \dots \dots.$

$= \cdots \dots \dots \dots.$

$= \cdots \dots \dots \dots.$

$= \frac{-1}{2}\ (ex)^{-2} + C$

3. $\int (1 - 2x)^{3}\, dx$

Misakan $u = \cdots$

Maka $\frac{du}{dx} = \cdots$

$= \cdots \dots \dots \dots.$

$= \cdots \dots \dots \dots.$

$= \frac{-1}{8}\ (1 - 2x)^{4} + C$

4. $\int \sin^3 x \; cos x \; dx = \cdots$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int \sin^3 x \; cos x \; dx = \cdots$ … … ….

$= \cdots$ … … ….

$= \dfrac{1}{4} \sin^4 x + C$

5. $\int (2x - 1)(3x^2 - 3x + 5)^8 \; dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int (2x - 1)(3x^2 - 3x + 5)^8 \; dx = \cdots$ … … ….

$= \cdots$ … … ….

$= \cdots$ … … ….

$= \frac{1}{27} (3x^2 - 3x + 5)^9 + C$

6. $\int 10x \; (8x^2 - 1)^4 \; dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int 10x \; (8x^2 - 1)^4 \; dx = \cdots$ … … ….

$= \cdots$ … … ….

$= \dfrac{1}{8} (8x^2 - 1)^5 + C$

7. $\int x\sqrt{x^2+1}$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int x\sqrt{x^2+1} \quad = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

8. $\int 4x^3(x^4-1)^3 \; dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int 4x^3(x^4-1)^3 \; dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \dfrac{1}{4}(x^4-1)^4 + C$

9. $\int 3x\sqrt{2x^2+5}\, dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int 3x\sqrt{2x^2+5}\, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \frac{1}{2}(2x^2+5)\sqrt{2x^2+5} + C$

10. $\int 2(3x+1)^4\, dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int 2(3x+1)^4\, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots .$

$= \dfrac{2}{15}(3x+1)^5 + C$

11. $\int 7(x+1)^7\, dx$

Misalkan $u = \cdots$

Maka $\dfrac{du}{dx} = \cdots$

Sehingga $\int 7(x+1)^7\, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots .$

$= \dfrac{7}{8}(x+1)^8 + C$

2.7 Soal Tambahan

Tentukan integral berikut dengan menggunakan teknik integral Substitusi dan sejenisnya.

1. $\int x-1)^4 \; dx$
2. $\int \sqrt{2x} \; dx$
3. $\int x\,(x^2+1)^4 \; dx$
4. $\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{x^2+1}$
6. $\int \frac{e^x}{1+2e^x} \; dx$
7. $\int \frac{x}{x^2+1} \; dx$
8. $\int \frac{x^2}{x^2+1} \; dx$
9. $\int 3t\sqrt{2+t^2}\,dt$
10. $\int \frac{5e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \; dx$
11. $\int \frac{x}{x^4+1} \; dx$
12. $\int \frac{\tan z}{\cos z} \; dz$
13. $\int \frac{e^{\sin z}}{\sec\; z} \; dz$
14. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \; dx$
15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$
16. $\int \frac{2x^2+x}{x+1} \; dx$
17. $\int \frac{x^3+2x^2}{x-2} \; dx$
18. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{1-\sin^2 x} \; dx$
19. $\int \frac{\cos\,(\text{In}\;4x^{2)}\;dx}{x}$
20. $\int \frac{\csc^2(\ln x)}{x} \; dx$
21. $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$
22. $\int \frac{z+2}{\cot\,(z^2+4z-3)} \; dz$

23. $\int \frac{5e^{2x}}{\sqrt{1-\;e^{2x}}} \; dx$

35. $\int \csc 2t \; dt$

24. $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

25. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}\,dx$

26. $\int \frac{\sin(4t-1)}{1-\sin^2(4t-1)}\,dx$

27. $\int \frac{t^2\cos(t^3-2)}{\sin^2(t^3-2)}\,dt$

28. $\int \frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1+\cot 2t}}\,dt$

29. $\int \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$

30. $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4-e^{6t}}}\,dt$

31. $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$

32. $\int \frac{dx}{9x^2+18x+10}$

33. $\int \frac{\sec^2 2y}{9+\tan^2 2y}\,dy$

34. $\int \frac{x+1}{9x^2+18x+10}\,dx$

36. $\int e^x \sec e^x\,dx$

37. $\int e^2\sec^2(e^x)\,dx$

38. $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$

39. $\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx$

40. $\int \frac{\sec^2 2y}{9+\tan^2 2y}\,dy$

41. $\int \frac{5}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

42. $\int \frac{dt}{2t\sqrt{4t^2-1}}$

43. $\int \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

46 $\int \frac{3-x}{\sqrt{16+6x-x^2}}\,dx$

MODUL 3
INTEGRAL TRIGONOMETRI

Integral trigonometri atau sering dikenal dengan fungsi trigonometri adalah fungsi yang memuat trigonometri. Pada bagian modul pertama sudah dibahas integral adalah anti turunan fungsi, dalam menentukan integral trigonometri tidak jauh berbeda dengan menentukan integral tak tentu lainya yang sudah dijelaskan di awal bahan ajar ini. Dalam integral trigonometri apabila kita menggunakan metode substitusi dan dibarengi dengan pemakaian kesamaan trigonometri yang tepat, maka kita dapat mengintegralkan berbangai bentuk trigonometri.

3.1. Enam jenis integral yang sering muncul

1. $\int \sin^n x \, dx$ dan $\int \cos^n x \, dx$
2. $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$
3. $\int \tan^n x \, dx$ dan $\int \cot^n x \, dx$
4. $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ dan $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$
5. $\int \sin mx \cos nx \, dx$ dan $\int \cos mx \sin nx \, dx$
6. $\int \sin mx \sin nx \, dx$ dan $\int \cos mx \cos nx \, dx$

3. 2. **Rumus-rumus identitas fungsi trigonometri**

a. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

c. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

d. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2\mathrm{x}}{2}$

e. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

f. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 2x$

g. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

h. $\sin \mathrm{mx} \,.\, \cos \mathrm{nx} = \dfrac{1}{2}[\sin (m+n)x + \sin (m-n)x]$

i. $\sin \mathrm{mx} \,.\, \sin \mathrm{nx} = -\dfrac{1}{2}[\cos (m+n)x - \cos (m-n)x]$

j. $\cos \mathrm{mx} \,.\, \cos \mathrm{nx} = \dfrac{1}{2}[\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]$

Di dalam menyelesaikan soal integral fungsi trigonometri langkah pertama yang harus diingat dan dipahami adalah rumus identitas trigonometri. Dengan memahami identitas trigonometri maka sangat membantu dalam menyelesaikan integral fungsi trigonometri.

JENIS 1 $\int \sin^{n} x\, dx, \int \cos^{n} x\, dx$

Perhatikan pertama apabila *n* bilangan bulat ganjil dan positif. Setelah kita mengeluarkan faktor sin *x* atau cos *x*, gunakan persamaan salah satu identitas trigonometri yaitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Contoh 1 (*n* Ganjil dan Positif)

Tentukan $\int \sin^5 x \, dx$

Misalkan $u = \cos x$.

Maka $\frac{du}{dx} = -\sin x$

Sehingga $\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4)(\sin x)\left(\frac{du}{-\sin x}\right)$$

$$= \int (-1 + 2u^2 - u^4) du$$

$$= -u + \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 + C$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\cos^5 x + C$$

Contoh 2 $\int \sin^{n} x\, dx, \int \cos^{n} x\, dx.$ (n Genap dan Positif)

n genap dan positif, maka digunakan rumus setengah sudut

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

1). $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

2). $\int \cos^4 x\, dx = \int \cos^4 x\, dx$

$$= \int (\cos^2 x)^2\, dx$$

$$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)^2 dx$$

$$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \int [(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)]\, dx$$

$$= \int [(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x)]\, dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

JENIS 2 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Apabila *m* atau *n* ganjil positif sedangkan eksponen yang lain bilangan sebarang, kita keluarkan sin x atau cos x dan menggunakan indentitas trigonometri yang pertama dalam tabel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Contoh 3 (*m* atau *n* Ganjil)

Tentukan $\int \sin^2 x \ \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \ \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \, . \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \, (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)(\cos x) \, dx$$

Misalkan $u = \sin x$

Maka $\frac{du}{dx} = -\cos x$

Sehingga $\int \sin^2 x \ \cos^3 x \, dx = \int (\sin^2 x - \sin^4 x)(\cos x)(\frac{du}{-\cos x})$

$$= -\int (u^2 - u^4)(\, du)$$

$$= -\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 - C$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x - C$$

Contoh 4 $\int \sin^{m} x \cos^{n} x \, dx$, ($m$ dan n Genap)

m dan n genap dan positif, maka hal ini menggunakan rumus setengah sudut

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Tentukan $\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\,(1+ \ 2\cos^2 x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \ \cos^2 2x - \ \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int (1+\cos 2x)\, dx - \int (\cos^2 2x)\, dx - \int (\cos^3 2x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(x+\frac{1}{2}\sin 2x) - \frac{1}{2}(x+\frac{1}{4}\sin 4x) - \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{16}(2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ \frac{\sin^3 2x}{3}) + C$$

JENIS 3 $\int \tan^{n} x\, dx, \int \cot^{n} x\, dx$

Dalam kasus tangen, keluarkan faktor $\tan^2 x$ dan kemudian gunakan kesamaan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Dalam kasus kotangen, keluarkan faktor $\cot^2 x$ dan kemudian gunakan kesamaan $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

Contoh 5. Tentukan $\int \tan^5 x\, dx$.

$$\int \tan^5 x\, dx = \int \tan^3 x \tan^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan^3 x \sec^2 x)\, dx - \int \tan^3 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

Contoh 6 Tentukan $\int \cot^4 x\, dx$.

$$\int \cot^4 x\, dx = \int (\csc^2 x - 1)\cot^2 x\, dx$$

$$= \int (\cot^2 x \csc^2 x)\, dx - \int (\cot^2 x)\, dx$$

$$= -\frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + C$$

Contoh 7 $\int \tan^{m} x \sec^{n} x\, dx \quad (n \text{ Genap}, m \text{ sebarang})$

Tentukan $\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x\, dx$.

$$\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x\, dx = \int \left(\tan^{-\frac{3}{2}} x\right)(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

$$= \int \left(\tan^{-\frac{3}{2}} x\right)\sec^2 x\, dx + \int \left(\tan^{\frac{1}{2}} x\right)\sec^2 x\, dx$$

$$= -2\tan^{-\frac{1}{2}} x + \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C$$

Contoh 8 $\int \tan^{m} x \sec^{n} x \, dx \quad (m \text{ Ganjil}, n \text{ Sebarang})$

1). Tentukan $\int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \, dx$.

$$\int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \, dx = \int (\tan^2 x)(\sec^{-\frac{3}{2}} x)(\sec x \tan x) \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{3}{2}} x \, d(\sec x)$$

$$= \int \sec^{\frac{1}{2}} x \, d(\sec x) - \int \sec^{-\frac{3}{2}} d(\sec x)$$

$$= \frac{2}{3} \sec^{\frac{3}{2}} x + 2 \sec^{-\frac{1}{2}} x + C$$

2). Tentukan $\int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{3}} x \, dx$.

$$\int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \, dx = \int (\tan^2 x)(\sec^{-\frac{4}{3}} x)(\sec x \tan x) \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{4}{3}} x \, d(\sec x)$$

$$= \int \sec^{\frac{1}{2}} x \, d(\sec x) - \int \sec^{-\frac{4}{3}} d(\sec x)$$

$$= \frac{2}{3} \sec^{\frac{3}{2}} x + 2 \sec^{-\frac{3}{2}} x + C$$

JENIS 5 $\int \sin mx \; \cos nx \, dx$

Integral jenis ini digunakan dalam teori arus listrik bolak-balik, teori perpindahan panas, dan dalam teori-teori yang menggunakan daret Fourier. Untuk menyelesaikan integral tersebut kita gunakan kesamaan.

$\sin mx \; \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m + n)\, x + \sin(m - n)]$

Contoh 9. Tentukan $\int \sin 4x \cos\; 2x \; dx$.

$$\int \sin 4x \cos\; 2x \; dx = \frac{1}{2}\int [\sin(4x + 2x) + \sin(4x - 2x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(4x + 2x)dx + \frac{1}{2}\int \sin(4x - 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(6x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(2x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Untuk $\sin mx \; \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m + n)\, x - \cos(m - n)]$

Contoh 10. Tentukan $\int \sin 6x \sin 2x \; dx$.

$$\int \sin 6x \sin 2x \; dx = -\frac{1}{2}\int [\cos(6x + 2x) + \cos(6x - 2x)]\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos(4x + 2x)dx + \frac{1}{2}\int \cos(6x - 2x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos(8x)\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(4x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{8}\sin\,(4x) + C$$

3.3. Soal Isian

Hitung integral trigonometri di bawah ini.

1. $\int \sin^4 x \, dx$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

Sehingga $\int \sin^4 x \, dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)^2$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \int [(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)] \, dx$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

2. $\int \cos^4 x \, dx$

$$= \int (\cos^2 x)^2 \, dx$$

$$= \cdots \ldots \ldots$$

Sehingga $\int \cos^4 x \, dx = \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x) \, dx$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots$$

$$= \int [(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x)] \, dx$$

$$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

3. $\int \sin^3 x \, dx$

$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$

Misalkan u = cos x

Maka $\frac{du}{dx} = \cdots \cdots \cdots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

Sehingga $\int \sin^3 x \, dx = -\int (1 - u^2) \, du$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

4. $\int \cos^3 x \, dx$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

Misalkan u = sin x

Maka $\frac{du}{dx} = \cos x$

Sehingga $\int \cos^3 x \, dx = \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

$= u - \frac{1}{3} u^3 + C$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots.$

5. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

$= \int \sin^3 x \cos^2 x \ \cos x \, dx$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

Misalkan u = sin x

Maka $\frac{du}{dx} = \cos x$

Sehingga $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx \quad = \cdots \ldots \ldots ....$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

$= \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{6} u^6 + C$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

6. $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

Misalkan u = cos x

Maka $\frac{du}{dx} = -\sin x$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

Sehingga $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx \ = -\int u^4 \ (1 - u^2) \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

$= \cdots \ldots \ldots ....$

$= -\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C$

7. $\int \sin 4x \cos 2x \ dx$

Sehingga $\int \sin 4x \cos 2x \ dx = \frac{1}{2} \int \sin(4x + 2x)\, dx + \int \cos(4x - 2x)\, dx$

$$= \frac{\dots}{\dots} \left[\int \dots(\dots) + \dots(\dots) \right] \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \sin(6x)\, dx + \int \cos(2x) \right] dx$$

$$= \frac{\dots}{\dots} \left[- \frac{\dots}{\dots} \dots \dots + \frac{\dots}{\dots} \dots \dots \right] + \cdots$$

$$= -\frac{1}{12} \cos 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

8. $\int \sin^2 x \, dx$

Sehingga $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$

$$= \frac{\dots}{\dots} \int \dots - \frac{\dots}{\dots} \int (\dots \dots x)(\dots) \dots$$

$$= \frac{\dots}{\dots} \int \dots - \frac{\dots}{\dots} \int \dots \dots x \dots (\dots)$$

$$= \cdots \dots \dots \dots . \dots \dots \dots \dots.$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

9. $\int \sin 3x \cos 4x \; dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin x + \sin 7\,x)\; dx$$

$$= \frac{\dots}{\dots}\int (-\dots x - \frac{\dots}{\dots}\dots\dots x) + \cdots$$

$$= \cdots \dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots$$

$$= \cdots \dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots$$

$$= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos\;7x}{14} + C$$

10. $\int \cos 5x \cos 4x \; dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(5x + 4x)dx + \int \cos(5x - 4x)\; dx$$

$$= \cdots \dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots$$

$$= \cdots \dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots$$

$$= \cdots \dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots$$

$$= \frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

3.4.Soal Tambahan

Tentukan integral trigonometri dibawah ini.

1. $\int \sin^3 x \, dx$
2. $\int \cos^3 x \, dx$
3. $\int \cos^2 x \, dx$
4. $\int \sin^4 5x \, dx$
5. $\int (\sin^3 t)\sqrt{\cos t} \, dt$
6. $\int \sin^7 3x \cos^2 3x \, dx$
7. $\int \tan^6 2x \, dx$
8. $\int \cos^5 x \sin x \, dx$
9. $\int \tan^7 x \sec^2 x \, dx$
10. $\int \sec^6 x \, dx$
11. $\int \sin^4 x \cos x \, dx$
12. $\int \cos^7 x \, dx$
13. $\int \sin^7 x \, dx$

18. $\int \sin 4x \cos 2x \, dx$
19. $\int \cos 6x \cos 3x \, dx$

20. $\int \sin 3x \cos x \, dx$

21. $\int \sin 10x \sin 5x \, dx$

22. $\int \cos 7x \cos 2x \, dx$

23. $\int \sin 12x \sin 9x \, dx$

24. $\int \sin 17x \cos 11x \, dx$

BAB 4

SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN

Bentuk akar dalam integran sering kali menimbulkan kesulitan untuk memecahkan integral yang bersangkutan. Dengan suatu substitusi yang tepat bentuk akar itu dapat dirasionalkan.

4.1. Integral yang memuat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Apabila di dalam integran ada bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$**,** substitusi u = $\sqrt[n]{ax+b}$ dapat merasionalkan integran.

Contoh 1. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$

Misalkan $u = \sqrt[3]{x-4}$.

Maka $u^3 = x-4$

$3u^2\,du = dx$

Sehingga $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int (u^3+4)\,u\,.\,3u^2\,du$

$$= \int (3u^6 + 12u^3)\,du$$

$$= \frac{3}{7}(x-4)^{\frac{3}{7}} + \frac{12}{4}(x-4)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{7}(x-4)^{\frac{3}{7}} + 3(x-4)^{\frac{4}{3}} + C$$

Contoh 2. Tentukan $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

Misalkan $u = \sqrt{x}$.

Maka $u^2 = x$ dan

$2u\, du = dx$

Sehingga $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u} du$

$$= 2\int \frac{1}{u-1} du$$

$$= 2\int \frac{1}{u-1} d(u-1)$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{x}-1\right) + C$$

Contoh 3. Tentukan $\int \mathrm{x}\sqrt{\mathrm{x}-4}\,\mathrm{dx}$

Misalkan $u = \sqrt{x-4}$.

Maka $u^2 = x-4$

$dx = 2u\, du$

Sehingga $\int x\sqrt{x-4}\ dx = \int (u^2+4)\ (\ u\ )\ 2u\ du$

$$= \int (u^2+4)\, 2u^2\ du$$

$$= \int 2u^4\ du + \int 8u^2 du$$

$$= \frac{2}{5}u^5 + \frac{8}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}} + C$$

Contoh 4. Tentukan $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x + 1}}\, dx$

Misalkan $u = \sqrt{x+1}$.

$$u^2 = x + 1$$

$$x = u^2 - 1$$

Maka $dx = 2u\, du$

Sehingga $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x + 1}}\, dx = \int \frac{(u^2 - 1)^2 + 2\,(u^2 - 1)}{u}\, 2u\, du$

$$= \int [(u^4 - 2u^2 + 1) + (2u^2 - 2)]\ 2\, du$$

$$= \int [u^4 - 1]\ 2\, du$$

$$= \int (2u^4 - 2)\, du$$

$$= \int 2u^4\, du - \int 2\, du$$

$$= \frac{2}{5} u^5 - 2\,u + C$$

$$= \frac{2}{5}(x + 1)^{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{x + 1} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x + 1)^2 \sqrt{x + 1} - 2\sqrt{x + 1} + C$$

Contoh 5. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x-4}\ dx$

Misalkan $u \ = \ \sqrt[3]{x-4}$.

$u^3 = x - 4$

Maka $\quad dx = 3u^2\ du$

Sehingga $\int x\sqrt[3]{x-4}\ dx = \int (u^3 + 4\ )\ u\ .\ 3u^2\ du$

$$= 3\int (u^6 + 4u^3)\ du$$

$$= 3\left[\frac{u^7}{7} + \ u^4\right] + C$$

$$= \frac{3(x-4)^{\frac{7}{3}}}{7} + 3(x-4)^{\frac{4}{3}} + C$$

Contoh 6. Tentukan $\int x\sqrt[4]{x-3}\ dx$

Misalkan $u \ = \ \sqrt[4]{x-3}$.

$u^4 = x - 3$

Maka $\quad dx = 4u^3\ du$

Sehingga $\int x\sqrt[4]{x-}\ dx = \int (u^4 + 3\ )\ u\ .\ 4u^3\ du$

$$= \int (4u^8 + 12u^4)\ du$$

$$= \left[4\,\frac{u^9}{9} + \ \frac{12}{5}u^5\right] + C$$

$$= \frac{4(x-3)^{\frac{9}{4}}}{9} + \frac{12}{5}(x-3)^{\frac{4}{3}} + C$$

4.2. Integral yang memuat $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$,

Untuk merasionalkan bentuk akar-akar tersebut kita gunakan masing-masing subsitusi berikut :

1. $x = a \sin\ t$, untuk $\sqrt{a^2 - x^2}$
2. $x = a \tan\ t$, untuk $\sqrt{a^2 + x^2}$
3. $x = a \sec\ t$, untuk $\sqrt{x^2 - a^2}$

Untuk melihat akibat substitusi tersebut, perhatikanlah bahwa :

1. $$\begin{aligned} a^2 - x^2 &= a^2 - a^2 \sin^2 t \\ &= a^2(1 - \sin^2 t) \\ &= a^2 \cos^2 t \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} a^2 + x^2 &= a^2 + a^2 \tan^2 t \\ &= a^2 (1 + \tan^2 t) \\ &= a^2 \sec^2 t \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x^2 - a^2 &= a^2 \sec^2 t - a^2 \\ &= a^2 (\sec^2 t - 1) \\ &= a^2 \tan^2 t \end{aligned}$$

Daerah asal kita batasi sedemikian rupa sehingga subsitusi (1), (2), dan (3) memiliki invers seperti:

a) $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$ untuk ($-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$)

b) $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec t$ untuk ($-\pi/2 < t < \pi/2$)

c) $\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\, a \tan t$ untuk ($0 \leq t \leq \pi,\ t \neq \pi/2$)

Tujuan dari penggunaan substitusi trigonometri adalah untuk menghilangkan akar tersebut dalam integran. Kita dapat melakukan hal ini dengan menggunakan identitas trigonometri.

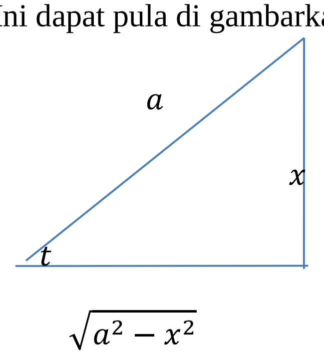
Contoh 1. Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Kita gunakan substitusi $x = a \sin t,\quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Maka $dx = a\cos t\, dt$ dan

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$

Ini dapat pula di gambarkan



Sehingga $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a\cos t\, .\, a\cos t\, dt$

$$= \int \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\ dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C$$

Oleh karena $x = a \sin t$ ekuivalen dengan $\frac{x}{a} = \sin t$ dan t kita batasi sehingga sinus memiliki invers,

Maka $t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

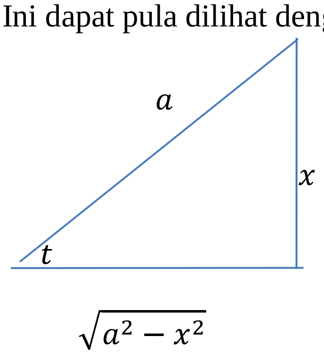
Juga dengan sebuah kesamaan oleh :

$$\cos t = \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$= \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

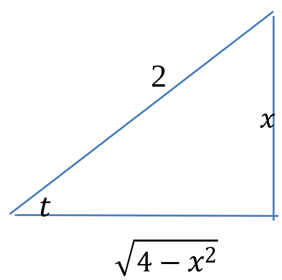
$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Ini dapat pula dilihat dengan:



$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Contoh 2. Tentukan $\int \frac{\sqrt{4-\ x^2}}{x^2}\, dx$



Misalkan $\quad x = 2\ \sin\ t,\ -\frac{\pi}{2} \le\ t\ \le \frac{\pi}{2}.$

Maka $\qquad dx = 2\cos t\, dt$

dan $\sqrt{4-\ x^2} = 2\cos t$

Sehingga $\int \frac{\sqrt{4-\ x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\,(2\cos t)\, dt$

$$= \int \cot^2 t\, dt$$

$$= \int (\csc^2 t\ -\ 1)\, dt$$

$$= -\cot\ t + C$$

Oleh karena $\sin t = \frac{x}{2}$ maka $t = \ \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Juga diperoleh $\cot\ t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

Sehingga $= \int \frac{\sqrt{4-\ x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{4-\ x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Contoh 3. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{9\ +\ x^2}}$

Misalkan $x = 3\ \tan\ \ t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

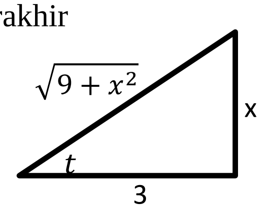
Maka $dx = 3\sec^2 t\,dt$ dan $\sqrt{9 + x^2} = 3\sec\ t$

Sehingga $\int \frac{dx}{\sqrt{9\ +\ x^2}} = \int \frac{3\sec^2 t}{3\ \sec\ t}\ dt$

$$= \int \sec t\ dt$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C$$

Langkah terakhir



Oleh karena $\tan t = \frac{x}{3}$ maka dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$\sec\ t = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3}$$

Sehingga $\int \frac{dx}{\sqrt{9\ +\ x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{9 + x^2} + x}{3}\right| + C$

$$= \ln\left|\sqrt{9 + x^2} + x\right| - \ln 3 + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{9 + x^2} + x\right| + C$$

Contoh 4. Tentukan $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx$

Misalkan $x = 2 \sec t$, dengan $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Selang t ini kita peroleh berhubung selang x adalah $2 \leq x \geq 4$. Hal ini penting sebab kita dapat menghilangkan tanda nilai mutlak yang muncul apabila kita menyederhanakan $\sqrt{x^2-a^2}$. Dalam kasus kita dapatkan

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4} &= \sqrt{4 \sec^2 t - 4} \\ &= \sqrt{4 \tan^2 t} \\ &= 2\,|\tan t\,| \\ &= 2 \tan t\end{aligned}$$

Sekarang kita gunakan teorema mengenai substitusi dalam integral tentu yang mengharuskan perubahan batas-batas integral. Jadi kita peroleh

Sehingga $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx = \int \frac{2 \tan t}{2 \sec t}\, 2 \sec t \tan t\, dt$

$$\begin{aligned}&= 2 \int \tan^2 t\, dt \\ &= 2 \int (\sec^2 t - 1)\, dt \\ &= 2 \tan t - 2t + C\end{aligned}$$

Contoh 5. Tentukan $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx$

Misalkan $x = 2 \sin t$.

Maka $dx = 2 \cos t \, dt$

$2 \cos t = \sqrt{4 - x^2}$

Sehingga $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dt = \int \frac{2 \cos t}{4 \sin^2 t} (2 \cos t) \, dt$

$$= \int \text{ctg}^2 t \, dt$$

$$= -\text{ctg}\, t - t + C$$

$$= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Contoh 6. Tentukan nilai dari $\int \frac{\sqrt{25 - t^2}}{t^2} dt$

Misalkan $t = 2 \sin x$.

Maka $dt = 2 \cos x \, dx$

$\sqrt{25 - t^2} = 2 \cos x$

Sehingga $\int \frac{\sqrt{25 - t^2}}{t^2} dt = \int \frac{2 \cos x}{4 \sin^2 x} (2 \cos x) \, dx$

$$= \int \text{ctg}^2 x \, dx$$

$$= -\text{ctg}\, x - x + C$$

4.3. Integral dengan Melengkapkan Menjadi Kuadrat

Apabila sebuah bentuk kuadrat $Ax^2 + Bx + C$ muncul di bawah akar dalam integran, kita dapat melengkapkannya menjadi kuadrat sebelum kita menggunakan subsitusi trigonometri.

Contoh 1. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}}$

Penyelesaian

$$x^2 + 2x + 26 = x^2 + 2x + 1 + 25 = (x+1)^2 + 25$$

Andaikan $u = x + 1$ dan $du = dx$.

Maka $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 25}}$

Andaikan kemudian $u = 5\tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Maka $du = 5\, sec^2\, t\, dt$

dan $\sqrt{u^2 + 25} = \sqrt{25\,(tan^2\, t + 1)} = 5 \sec\, t$

Sehinga $\int \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{\mathrm{u}^2 + 25}} = \int \frac{5\ \sec^2\ \mathrm{t\,dt}}{5\ \sec\ \mathrm{t}}$

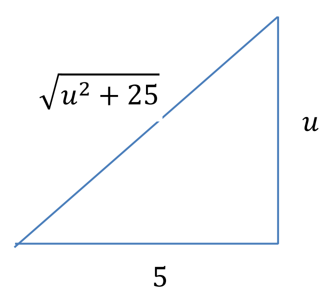
$$= \sec\, t\, dt$$

$$= \ln|\sec\, t + \tan\, t| + Cu^2 + 25$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+25}}{5} + \frac{u}{5}\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{u^2 + 25} + u\right| - \ln 5 + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 26} + x + 1\right| + C$$



$u = 5\tan t$

Contoh 2. Tentukan $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}}$

Untuk menyelesaikan integral yang kedua ini, kita tulis

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$$

Integral yang pertama pada ruas kanan dapat diselesaikan dengan substitusi $u = x^2 + 2x + 26$. Integral yang kedua telah kita hitung diatas, kita peroleh

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = 2\sqrt{x^2+2x+26}\,2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1\right| + C$$

Contoh 3. Tentukan $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10}\,dx$.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+2x+1)+9}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+2x+1)+3^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x+1)^2+3^2}\,d\,(x+1)$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$$

Contoh 4. Tentukan $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + 4}\, dx.$$

$$= \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + 2^2}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 2^2}\, d\,(x + 1)$$

$$= \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{3}\right) + C$$

Contoh 5. Tentukan $\int \frac{x + 3}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}\, dx.$

$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}\, dx = \int \frac{x + 3}{\sqrt{9 - (x^2 - 4x + 4)}}\, dx$$

$$= \int \frac{x - 2 + 5}{\sqrt{3^2} - (x - 2)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{x - 2}{\sqrt{3^2 - (x - 2)^2}}\, dx + 5 \int \frac{1}{\sqrt{3^2 - (x - 2)^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{x - 2}{\sqrt{3^2 - (x - 2)^2}}\, d\,(x - 2) + 5 \int \frac{1}{\sqrt{3^2 - (x - 2)^2}}\, d\,(x - 2)$$

Perhatikan suku pertama menghasilkan bentuk

$$\int \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = -\sqrt{a^2 - u^2} + C \ldots\ldots\ldots (i)$$

Sedangkan suku ke dua menghasilkan bentuk

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \ldots\ldots\ldots\ (ii)$$

$Dari\ (i)\ dan\ (ii)\ diperoleh$:

Sehingga $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}\, dx = -\sqrt{9 - (x-2)^2} + 5 \sin^{-1} \frac{x-2}{3} + C$

Contoh 6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$

$$\int \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx = \int \frac{x - 9 + 5}{\sqrt{9 - (x^2 + 4x + 4)}}\, dx$$

$$= \int \frac{x - 9}{\sqrt{3^2 - (x + 2)^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{x - 9}{\sqrt{3^2 - (x + 2)^2}}\, dx + 5 \int \frac{1}{\sqrt{3^2 - (x + 2)^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{x - 9}{\sqrt{3^2 - (x + 2)^2}}\, d\,(x-9) + 5 \int \frac{x - 9}{\sqrt{3^2 - (x + 2)^2}}\, d\,(x-9)$$

$= -\sqrt{9 - (x+2)^2} + 5 \sin^{-1} \frac{x-9}{3} + C$

4.4 Soal Isian

Lengkapilah integral berikut dengan subsitusi yang merasionalkan

1. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{2t+7}}$

Misalkan $u = \sqrt{2t+7}$

$u^2 = \cdots$

$2\,t = \cdots$

$t \ = \cdots$

Maka $\frac{du}{dt} = \cdots$

Sehingga $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{2t+7}} = \int \frac{\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)}{u}\,du$

$$= \int \frac{\frac{\cdots}{2u}}{u}\,du$$

$$= \int \frac{\ldots .^{\cdots} - 7u}{2u}\left(\frac{\ldots .}{\ldots .}\right)\,du$$

$$= \int \frac{u^2 - \cdots}{\ldots .}\,du$$

$$= \int \frac{\cdots}{2u}\,du - \int \frac{\cdots}{2u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \ldots du - \frac{7}{2}\int \frac{1}{\ldots .}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \ldots du - \frac{7}{2}\int \ln u$$

$$= -\frac{\cdots}{\cdots}\ldots^{\cdots} - \frac{7}{2}\ln u + C$$

2. $\int 4x\sqrt{x-1}\ dx$

Misalkan $u = \sqrt{x-1}$

$u^2 = \cdots$

Maka $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\dots}$

Sehingga $\int 4x\sqrt{x-1}\ dx = \int 4 \dots\dots\dots(\dots\dots)(2u\ du)$

$= \int 4\ \dots^{\cdots} + u\ (2u\ du)$

$= \int \dots u^{\cdots} + 2\dots^{\cdots}\ du$

$= \int \dots u^{\cdots}\ du + \int 2\ \dots^{\cdots}\ d$

$= \frac{\dots}{\dots}u^{\dots} + \frac{\dots}{\dots}u^{\dots} + C$

3. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\ dx$

Misalkan $x = 3\sin t$

Maka $dx = 3\cos t\ dt$

$\sqrt{9-x^2} = 3\cos t$

Sehingga $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\ dx = \int \frac{\dots\dots\dots}{9\dots\dots}\dots\dots\cos t\ dt$

$= \int \dots\dots\dots\dots\dots\dots dt$

$= \int (\ \dots\dots\dots^{\dots\dots} t - 1\ )\ dt$

$= -\cot t - \cdots + C$

4. $\int 7\ t\ (2t+1)^{\frac{1}{2}}\ dt$

Misalkan $u \quad = \sqrt{2t+1}$

$$u^2 = \cdots$$

Maka $\quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\dots\dots.}$

$$\dots\dots = dt$$

Sehingga $\int 7\ t\ (2t+1)^{\frac{1}{2}}\ dt = \int 7\ \left(\frac{\dots\dots\dots^{\dots\dots} - \dots\dots\dots..}{\dots\dots\dots\dots.}\right)(u)(\dots\dots du)$

$$= \int \frac{\dots\dots^{\dots\dots} - 7}{\dots\dots.}(2\dots\dots^{\dots\dots})du$$

$$= \int (\ \dots\dots^{\dots} - 7u^2\ )\ du$$

$$= \int \dots\dots\dots^{\dots\dots}\ du \int \dots\dots\dots^{\dots\dots}\ du$$

$$= \frac{7}{5}\dots^{\dots} - \frac{\dots}{\dots}u^3 + C$$

$$= \frac{7}{5}\dots^{\dots} - \frac{\dots}{\dots}(2t+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

5. $\int x^2\sqrt{2x+1}\ dx$

Misalkan $u = \sqrt{\ldots\ x + ..}$

$$u^2 = \ldots x + \ldots$$

$$x = u^2 - 1$$

Maka 2 ... $du = dx$

Sehingga $\int x^2\sqrt{2x+1}\ dx = (\ldots^{\cdots} - 1)u\ 2u\ du$

$$= \int (\ \ldots^{\cdots} - u\ )\ (\ 2u\ du\ )$$

$$= \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + C$$

6. $\int \frac{x\ +\ 4}{\sqrt{x^2+4x+5}}\ dx$

$$= \int \frac{x\ + \cdots - 5}{\sqrt{9 - (\ \ldots^{\cdots} + 4x + \cdots)}}\ dx$$

$$= \int \frac{x + \cdots - 5}{\sqrt{\ldots^{\cdots} -\ (\ x + \cdots\ )^{\cdots}}}\ dx$$

$$= \int \frac{x+9}{\sqrt{3^2 -\ (x + \cdots)^{\cdots}}}\ dx - 5\ \int \frac{1}{\sqrt{3^2 - (\ x + \cdots)^{\cdots}}}\ dx$$

$$= \int \frac{x+9}{\sqrt{3^2 - (\ x + \cdots\ )^{\cdots}}}\ d\ (\ x+9\ ) - 5\ \int \frac{1}{\sqrt{3^2 - (\ x + \cdots\ )^{\cdots}}}\ d\ (\ x+9\ )$$

$$= -\sqrt{9 - (\ x+2\ )^2} + 5\ \sin^{-1}\frac{x+9}{3} + C$$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{x-9}}\ dx$

Misalkan $u\ =\ \sqrt{x-9}$.

$u^2\ = \cdots - \cdots$

$x\ \ =\ \ldots^{\cdots}\ +\ 9$

Maka $\ldots du\ \ = dx$

. Sehingga $\int \frac{x}{\sqrt{x-9}}\ dx = \frac{\ldots^{\cdots}+9}{u} \ldots du$

$= \int \frac{2\ \ldots^{\cdots} + 18\, u\, du}{u}$

$= \frac{\frac{2}{4}u^4 + 9u^2}{\frac{1}{2}u^2} + \cdots \ldots \ldots . \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots . \ldots \ldots \ldots \ldots$

8. $\int x\sqrt{x+3}\, dx$

Misalkan $u = \sqrt{x+3}$.

$u^2 = \cdots + \cdots$

Maka $\ldots du\ = dx$

Sehingga $\int x\sqrt{x+3}\, dx = \int (\ldots^{\cdots} - \cdots)(\ u\ )(\ 2\ u\ )du$

$= \int (u^3 - \cdots u\ )\ (\ 2u\ )du$

$= \int 2\ \ \ldots^{\cdots}\ \ du - \int 6\ \ \ldots^{\cdots}\ \ du$

$= \frac{2}{5}u^5 - 2\ u^3 \ldots\ldots\ldots$

9. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+7}}$

Misalkan $u = \sqrt{2x+7}$.

$u^2 = \cdots + \cdots$

Maka $dx = u\,du$

Sehingga $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+7}} = \int \frac{\left(\frac{\ldots^{\cdots} - 7}{}\right)\,du}{u}$

$= \int \frac{u^3 - \cdots}{2u}\left(\frac{1}{u}\right)\,du$

$= \int \frac{u^2 - 7}{2u}\,du$

$= \int \frac{u^2}{2u}\,du - \int \frac{\ldots}{2u}\,du$

$= \frac{1}{4}u^2 - \frac{7}{2}\ln u + C$

10. $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Misalkan $u = \sqrt{x+1}$.

$u^2 = \cdots + \cdots$

$x = u^2 - \cdots$

Maka $u\,du = dx$

Sehingga $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{[(u^2 - \cdots)^{\cdots} + 2\,(u^2 - \cdots)]\,u\,du}{u}$

$= \int [(\ldots^{\cdots} - 2\ \ldots^{\cdots} + 1) + (2\ \ldots^{\cdots} - 2)]\ 2\,du$

$= \int (2\,u^4 - 2)du = \frac{2}{5}u^5 - 2u + C$

11. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\,dx$

Misalkan $u = x^2 - 6x + 18.$

Maka $du = (\dots - \dots)\,dx$

$dx = \frac{\dots}{\dots - \dots}$

Sehingga $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\,dx = \int \frac{\dots. - \dots.}{x^2-6x+18}\,dx + \int \frac{\dots..}{x^2 - 6x + 18} =$

$$= \int \frac{du}{dx}\frac{1}{u}\;\frac{du}{2x-6} + \int \frac{5}{u^2+9}\,du$$

$$= \int \frac{\dots.. - \dots.}{u}\;\frac{du}{\dots..- \dots.} + \int \frac{5\,du}{u^2 + \left(\sqrt{9}\right)^2}$$

$$= \ln u + \frac{\dots}{\dots}\tan^{-1}\left(\frac{\dots}{\dots}\right) + C$$

$$= \ln(x^2 - 6x + 18) + \frac{5}{3}\tan^{-1}\frac{x-3}{3} + C$$

12. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx$

Misalkan $u^2 = 3x^2 + 9x - 1.$

Maka $\frac{du}{dx} = \cdots + \cdots$

$(2x+3)dx = \frac{1}{3}\,du$

Sehingga $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}\,du}{u^{\frac{1}{2}}}$

$$= \int \frac{\dots..}{\dots}\,u^{-\frac{\dots}{\dots}} = \frac{2}{3}(3x^2+9-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

4.5. Soal Tambahan

Hitung integral di bawah ini dengan menggunakan subsitusi yang merasionalkan.

1. $\int (2x^4 - 5)^6 x^3 \; dx$
2. $\int \frac{4x + 8}{x^2 + 4x + 25} \; dx$
3. $\int \sqrt{2x} \; dx$
4. $\int \sqrt{x^4 - 3x^2} \; dx$
5. $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} \; dx$
6. $\int x \sqrt[3]{4 - 5x} \; dx$
7. $\int x^5 \sqrt{1 + x^2} \; dx$
8. $\int 2t \sqrt{3 - 4t} \; dt$
9. $\int \frac{10 - 4x}{\sqrt[3]{(x - 2)(x - 3)}} \; dx$
10. $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$
11. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2t - 3}}$
12. $\int \frac{6x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} \; dx$
13. $\int \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{99}}$
14. $\int \sin x \; \cos^2 x \, dx$

15. $\int \cos 5x \ \sin^4 5x \, dx$

16. $\int x^2\sqrt{x - 4} \, dx$

17. $\int x^2\sqrt{2x^3 + 1} \, dx$

18. $\int \dfrac{dt}{t - \sqrt[2]{t}}$

19. $\int \dfrac{t \, dt}{\sqrt{2t + 7}}$

20. $\int \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 8}}$

21. $\int x\sqrt[3]{x + 4} \, dx$

22. $\int t\sqrt{t + 2} \, dt$

23. $\int x \, (x + 2)^{2/3} \, dx$

24. $\int t \, (t + 2)^{3/2} \, dt$

25. $\int \dfrac{\sqrt{1 - t^2}}{t} \, dt$

26. $\int \dfrac{x^2 \, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

27. $\int \dfrac{t}{\sqrt{2 - t^2}} \, dt$

28. $\int \dfrac{2x + 1}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$

29. $\int \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2x + 4} \, dx$

30. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} \, dx$

31. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} \, dx$

32. $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} \, dx$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{x + 9}} \, dx$

35. $\int x\sqrt{x - 6} \, dx$

36. $\int x^2\sqrt{2x^3 + 1} \, dx$

37. $\int x\sqrt{4 - x} \, dx$

BAB 5
INTEGRAL PARSIAL

5.1. Integral Parsial

Apabila pengintegralan dengan metode substitusi tidak berhasil, dengan menerapkan metode penggunaan ganda, yang lebih dikenal dengan pengintegralan parsial dapat memberikan hasil. Metode ini didasarkan pada pengintegralan rumus turunan hasil kali dua fungsi.

Andaikan $\mathrm{u} = \mathrm{u}(\mathrm{x})$ dan $\mathrm{v} = \mathrm{v}(\mathrm{x})$. Maka

$$\mathrm{D_x}[\mathrm{u}(\mathrm{x})\ \mathrm{v}(\mathrm{x})] = \mathrm{u}(\mathrm{x})\mathrm{v}'(\mathrm{x}) + \mathrm{v}(\mathrm{x})\ \mathrm{u}'(\mathrm{x})$$

Dengan mengintegralkan dua ruas persamaan tersebut, kita memperoleh

$$\mathrm{u}(\mathrm{x})\ \mathrm{v}'(\mathrm{x}) = \int \mathrm{u}(\mathrm{x})\ \mathrm{v}'(\mathrm{x})\ \mathrm{dx} + \int \mathrm{v}(\mathrm{x})\ \mathrm{u}'(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}$$

atau

$$\int \mathrm{u}(\mathrm{x})\ \mathrm{v}'(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{u}(\mathrm{x})\ \mathrm{v}(\mathrm{x}) - \int \mathrm{v}(\mathrm{x})\ \mathrm{u}'(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

Karena $\mathrm{dv} = \mathrm{v}'(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}$ dan $\mathrm{du} = \mathrm{u}'(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}$, persamaan terakhir dapat ditulis sebagai berikut :

Pengintegralan Parsial

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Rumus diatas memungkinkan kita memindahkan pengintegralan $u\ dv$ pada pengintegralan $v\ du$. Pengintegralan terakhir ini tergantung pada pemilihan u dan dv yang tepat.

Contoh 1. Tentukan $\int x \cos x \, dx$

Penyelesaian

Kita ingin menulis $x \cos dx$ sebagai $u \, dv$. Salah satu cara ialah memisalkan

$u = x$ dan

$dv = \cos x \, dx$

Jadi $du = dx$ dan

$$v = \int \cos x \, dx$$

$$v = \sin x$$

(kita dapat mnghilangkan konstanta pengintegralan) Jadi kalau kita ringkaskan substitusi ganda tersebut, kita peroleh

$$u = x \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \sin x$$

Rumus pengintegralan parsial menjadi

$$\int \underbrace{x}_{u} \, \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \, \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \, \underbrace{dx}_{du}$$

$$= \sin x + \cos x + C$$

Pengandaian u dan dv di atas tampak berhasil. Substitusi lain, misalnya sebagai berikut

$$u = \cos x \qquad dv = x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

Rumus pengintegralan parsial menghasilkan

$$\int \underbrace{\cos x}_{u} \, \underbrace{x \, dx}_{dv} = \underbrace{(\cos x)}_{u} \, \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \frac{x^2}{2} \, \underbrace{(-\sin x \, dx)}_{du}$$

Pengandaian tersebut memang betul akan tetapi dengan ini, integral pada ruas kanan menjadi lebih rumit. Oleh karena itu, penting sekali memilih u dan dv setepat mungkin.

Contoh 2. Tentukan $\int \ln x \, dx$

Penyelesaian

Kita gunakan substitusi ganda berikut

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad v = x$$

Sehingga $\int \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \frac{1}{x} dx$

$$= x \ln x - x + C$$

Contoh 3. Tentukan $\int \text{arc} \sin x \, dx$

Penyelesaian

Kita ambil substitusi ganda sebagai berikut

$$u = \text{arc} \sin x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad v = x$$

Sehinnga $\int \text{arc} \sin x \, dx = x \, \text{arc} \sin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= x \, \text{arc} \sin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x \, dx)$$

$$= x \, \text{arc} \sin x + \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= x \, \text{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Pengintegralan Parsial Berulang kerap kali perlu gunakan pengintegralan parsial beberapa kali

Contoh 4. Tentukan $\int x^2 \sin x\, dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = x^2$ dan $dv = \sin x\ dx$

Maka $du = x\,dx$ $v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$$

Dengan demikian tampak bahwa pangkat pada x dalam integral kedua berkurang. Ini berarti bahwa kita dapat menggunakan pengintegralan parsial lagi. Integral kedua ini telah kita hitung dalam Contoh 1. Dengan hasil yang kita peroleh di situ dapat menyelesaikan integral.

Sehingga $\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C$$

Contoh 5. Tentukan $\int e^x \sin x\, dx$

Penyelesaian

Misalkan

$u = e^x$ dan

$dv = \sin x\, dx$

Maka $du = e^x dx$ dan

$v = -\cos x$

Jadi, $\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$

Tampaknya tidak ada perubahan, akan tetapi dengan sekali lagi pengintegralan parsial pada integral kedua, yaitu andaikan $u = e^x$, dan $dv = \cos x\, dx$, maka $du = e^x dx$ dan $v = \sin x$.

Sehingga $\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + \int e^x \sin x\, dx$

Apabila hasil ini disubstitusikan ke dalam hasil pertama, kita peroleh

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

Dengan mengubah urutan suku akhir ke sebelah kiri dan mengumpulkan suku-sukunya, kita peroleh

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x) + C$$

Sehingga $\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$

Cara di atas berhasil oleh karena integral yang hendak kita cari, muncul lagi di ruas kanan.

Di bawah ini, ada contoh lain yang juga menggunakan metode yang sama.

Contoh 6. Tentukan $\int \sec^3\theta\, d\theta$

Penyelesaian

Misalkan $u = \sec\theta$

Maka $du = \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

dan $dv = \sec^2\theta\, d\theta$

$v = \tan\theta$

Sehingga $\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta \tan^2\theta\, d\theta$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta = \tan\theta\right| + C$$

Bila anda ingin memecahkan Contoh 6 dengan metode lain, Rumus Reduksi Suatu rumus yang berbentuk

$$\int f^n(x)dx = g(x) + \int f^k(x)\,dx$$

Dengan k < n dinamakan rumus reduksi oleh karena pangkat dari f berkurang Rumus demikian diperoleh kerap kali dengan menggunakan pengintegralan parsial

Jabarkanlah suatu rumus reduksi untuk $\int \sin^n x\ dx$

Misalkan $u = \sin^{n-1} x$ dan

$dv = \sin x\,dx.$

Kemudian $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx$ dan

$v = -\cos x$

Maka

Sehingga $\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$

Oleh karena $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, maka apabila $\cos^2 x$ dalam integral di ruas kanan diganti dengan $1 - \sin^2 x$, kita akhirnya dapat memperoleh

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}(1-\sin^2 x)\,dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx\end{aligned}$$

Dengan mengumpulkan integral pertama dengan integral yang terakhir, kita peroleh suatu rumus reduksi untuk $\int \sin^{n-1} x\ dx$ yang berlaku untuk $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx &= \frac{-\sin^{n-1} x\ \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \\ &= \frac{1}{n}\left[-\sin^{n-1} x\ \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx\right]\end{aligned}$$

Contoh 7. Tentukan $\int 2x(3x-5)^6 dx$

Penyelesaian

+/-	Turunkan	Integralkan
+	2x	$(3x-5)^6$
-	2	$\frac{1}{21}(3x-5)7 + C_1$
+	0	$\frac{1}{504}(3x-5)^8 + C_1x + C_2$

$$\int 2x\,(3x-5)^6 dx = 2x\,.\frac{1}{21}(3x-5)^7 + 2xC_1 - 2\,.\frac{1}{504}(3x-5)^8 - 2C_1x - C_2$$

$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 - \frac{2}{504}(3x-5)^8 - C_2$$

$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 - \frac{1}{252}(3x-5)^8 - C_2$$

Contoh 8. Tentukan $\int 6x\,(3x-1)^{\frac{-1}{3}}\,dx$

Penyelesaian

$$\int 6x\,(3x-1)^{-\frac{1}{3}}dx = 6x\,.\frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}} + 6xC_1 - 6\,.\frac{1}{10}(3x-1)^{\frac{5}{3}} + 6C_1x - C_2$$

$$= 3x(3x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}(3x-1)^{\frac{5}{3}} - C_2$$

+/-	Turunkan	Integralkan
+	6x	$(3x-1)^{-\frac{1}{3}}$
-	6	$\frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}} + C_1$
+	0	$\frac{1}{10}(3x-1)^{\frac{5}{3}} + C_1x + C_2$

Contoh 9. Tentukan $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Penyelesaian

+/-	Turunkan	Integralkan
+	x	$(x+1)^{\frac{1}{2}}$
-	1	$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C_1$
+	0	$\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}+C_1x+C_2$

Sehingga $\int x\sqrt{(1+x)}\,dx = x\,.\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C_1x1-.\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}-C_1x+C_2$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$$

Contoh 10. Tentukan $\int 4x\sqrt{3x-2}\,dx$

Penyelesaian

+/-	Turunkan	Integralkan
+	4x	$(3x-2)^{\frac{1}{2}}$
-	4	$\frac{2}{9}(3x-2)^{\frac{3}{2}}+C_1$
+	0	$\frac{4}{135}(3x-2)^{\frac{5}{2}}+C_1x+C_2$

Maka $\int 4x\sqrt{3x-2}\,dx = 4x\,.\frac{2}{9}(3x-2)^{\frac{3}{2}}+4xC_1 - 4\,.\frac{4}{135}(3x-2)^{\frac{5}{2}}-4xC_1x-4C_2$

$$= \frac{8}{9}x(3x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{135}(3x-2)^{\frac{5}{2}} - 4C_2$$

Contoh 11. Tentukan $\int x^2 \cos x\, dx$

Penyelesaian

+/-	Turunkan	Integralkan
+	x^2	$\cos x$
-	$2x$	$-\sin x + C_1$
+	2	$-\cos x + C_1 x + C_2$
-	0	$\sin x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_1 x + C_3$

Sehingga $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2x.(-\cos x) + 2(-\sin x)$

$$= x^2 \sin x - (-2x \cos x) + 2\sin x + C_3$$

$$= x^2 \sin x + x \cos x - 2\sin x + C_3$$

Contoh 12. Tentukan $\int 3x \cos 2x\, dx$

Penyelesaian

+/-	Turunkan	Integralkan
+	$3x$	$\cos 2x$
-	3	$\frac{1}{2}\sin 2x + C_1$
+	0	$-\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2$

$$\int 3x \cos 2x\, dx = 3x . \frac{1}{2} \sin 2x + 3xC_1 - \frac{3}{4} .(-\cos 2x) - 3xC_1 - 3C_2$$

$$= \frac{3}{2} x \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x - 3C_2$$

Contoh 13. Tentukan $\int (\mathrm{x}+3)\cos(2\mathrm{x}-\pi)\ \mathrm{dx} = . . .$

Penyelesaian

+/-	Turunan	Integral
+	$x+3$	$\cos(2x-\pi)$
-	1	$\frac{1}{2}\sin(2x-\pi)+C_1$
+	0	$-\frac{1}{4}\cos(2x-\pi)+C_1x+C_2$

$$= 16\left\{(x+3)\left[\frac{1}{2}\sin(2x-\pi)\right]+(x+3)C_1-1\left[-\frac{1}{4}\cos(2x-\pi)\right]-C_1x\right\}+C_2$$

$$= 8(x+3)\sin(2x-\pi)+4\cos(2x-\pi)+C_2$$

Contoh 14. Tentukan $\int (3\mathrm{x}+2)\cos(3\mathrm{x}+2)\ \mathrm{dx}$

Penyelesaian

+/-	Turunan	Integral
+	$3x+2$	$\cos(3x+2)$
-	3	$\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C_1$
+	0	$-\frac{1}{9}\cos(3x+2)+C_1x+C_2$

$$= (3x+2)\tfrac{1}{3}\sin(3x+2)+(3x+2)C_1+(3)\tfrac{1}{9}\cos(3x+2)-3C_1x-3C_2$$

$$= \left(x+\frac{2}{3}\right)\sin(3x+2)+\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C$$

5.2. Soal Isian

Tentukan Integral Parsial di bawah ini.

1. $\int 6x\,(3x-1)^{-\frac{1}{3}}dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = 6x.$

Maka $du = 6dx$

Dan $dv = (3x-1)^{-\frac{1}{3}}$

$$v = \frac{1}{3\left(-\frac{1}{8}+1\right)}(3x-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}}$$

Sehingga $\int 6x\,(3x-1)^{-\frac{1}{3}}dx = 6x.\frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}} - \int \frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}}.6dx$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= 3x\,(3x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}(3x-1)^{\frac{5}{3}} + C$

2. $\int x\sqrt{x+1}dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = x.$

Maka $du = dx$

dan $dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$

Sehingga $\int x\sqrt{x+1}\,dx = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$

3. $\int 2x(3x-5)^6dx$

Penyelesaian

Sehingga $\int 2x(3x-5)^6dx = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \frac{2}{21}x(3x-5) - \frac{1}{252}(3x-5)8 + C$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

4. $\int x^2 e^x dx =$

+/-	U	Dx
+	…….	e^x
-	……	
+	2	$e^x + \cdots \ldots + \cdots$
-	0	

5. $\int x^3 \; e^x dx =$

+/-	U	Dx
+	……..	e^x
-		e^x+……+…
+	6	………+…….+…
-	0	$e^x + \cdots +..$

6. $\int xe^{2x} dx =$

+/-	U	Dx
+	……..	e^{2x}
-	1	….+…+….
+	0	….+….+…

7. $\int x^2 e^{3x} dx =$

+/-	U	Dx
+	……	e^{3x}
-	……	…..+…+…
+	……	……+….+…+..
-	0	$\frac{1}{27} e^{3x} + \cdots . + \cdots ..$

8. $\int x^3 e^{5x} dx =$

+/-	U	Dx
+	……..	
-	…….	$\frac{1}{5} e^{5x} + \cdots + \cdots .$
+	……..	……+….+…+….
-	6	…..+….+…+….
+	0	$\frac{1}{125} e^{5x}$..+….+…+….

5.3.Soal Tambahan

Tentukanlah integral Parsial di bawah ini.

1. $\int (x+3)\ \cos(2x-\pi)\, dx$

2. $\int 6x(3x-3)^{-\frac{1}{3}}\, dx$

3, $\int (6x+7)\sin\ (5x+2)\, dx$

4. $\int x^3 \cos x\, dx$

5. $\int (8x-1)\cos\ (2x)\, dx$

6. $\int x^3(x+7)^5\, dx$

7. $\int (x^2+1)\cos\ x\ dx$

8. $\int (x-1)(x+3)^4\, dx$

9. $\int 10x\,(8x^2-1)^{4}\, dx$

10. $\int (4x-3)(\ 6x^2-6x+10)^{10}\, dx$

11. $\int (x-3)\sqrt{x+1}\ dx$

12. $\int 7x^2\sqrt[3]{x+1}\, dx$

13. $\int (x-4)\cos(4x-\pi)\, dx$

14. $\int (4x-4)(6x^2-1)^3\, dx$

15. $\int 20x\ \sqrt[4]{x+3}\, dx$

16. $\int (9x-4)(x^2+2x+1)^6 \, dx$

17. $\int x^2 \sin\,(6x+2) \, dx$

18. $\int (x^5-6) \sin\, x \, dx$

19. $\int 2x\sqrt{x^2-4} \, dx$

20. $\int x^4 \sqrt{x+7} \, dx$

21. $\int 3x\,(x-7)^5 \, dx$

22. $\int -2x \cos\,(x+3) \, dx$

23. $\int x \cos x \, dx$

24. $\int 3x\,(x^2+5)^5 dx$

25. $\int 2x \sin\,(x^2+3) \, dx$

26. $\int x^2 \sin\, x \, dx$

27. $\int -x\sqrt{x+7} \, dx$

28. $\int 3x \sin 6x \, dx$

29. $\int (4x+2) \cos\,(2x+5) \, dx$

30. $\int x\,(x+4)^5 \, dx$

BAB 6
PENGINTEGRALAN FUNGSI RASIONAL

Fungsi rasional adalah fungsi yang memiliki bentuk $\mathrm{v(x)} = \frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{d(x)}}$. Dengan p dan d merupakan polinomial dan d(x) ≠ 0. Domain dari v(x) adalah semua bilangan real, kecuali pembuat nol. Fakta menunjukkan bahwa tiap fungsi rasional sejati dapat ditulis sebagai jumlah fungsi-fungsi rasional sejati yang sederhana. Fungsi f dan g di bawah ini dinamakan fungsi rasional sejati oleh karena derajat pembilang kurang dari derajat penyebut.

Contoh fungsi rasional sejati

$$f(x) = \frac{2}{(x\ +\ 1)^3} \qquad g(x) = \frac{2x\ +\ 2}{x^2\ -\ 4x\ +\ 8}$$

Fungsi rasional tidak sejati selalu dapat ditulis sebagai jumlah fungsi suku banyak dan fungsi rasional sejati.

$$h(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}$$

Hasil di atas kita peroleh dengan melakukan pembagian pembilang oleh penyebut. Karna fungsi suku banyak mudah diintegralkan, maka persoalan mengintegralkan fungsi rasional terletak pada persoalan mengintegralkan fungsi rasional sejati. Tetapi apakah fungsi rasional sejati selalu dapat diintegralkan? Dalam teori, jawabannya selalu dapat, walaupun pencariannya tidak selalu mudah. Perhatikan kasus f dan g di atas.

Contoh 1. Tentukan $\int \frac{2}{(x+1)^3}$

Penyelesaian

Gunakan substitusi $u = x + 1$. Maka $du = dx$

Sehingga $\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = \int \frac{2}{u^3}\,dx$

$$= \int 2u^{-3}$$

$$= 2\int u^{-3}\,du$$

$$= \frac{-1}{u^2} + C$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} + C$$

Contoh 2. Tentukan $\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx$

Penyelesaian

Pikirkan dahulu substitusi $u = x^2 - 4x + 8$.

Maka $du = (2x-4)dx$

Sehingga $\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \int \frac{6\,dx}{x^2-4x+8}$

$$= \ln|x^2-4x+8| + 6\int \frac{1\,dx}{x^2-4x+8}$$

Dalam integral kedua, lengkapkanlah menjadi kuadra murni, sebagai berikut.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,d(x-2)$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Sehingga $\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \ln|x^2-4x+8| + 3\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + K$

6.1. PENJABARAN MENJADI PECAHAN PARSIAL (FAKTOR LINEAR)

Menjumlahkan pecahan merupakan latihan baku aljabar. Misalnya,

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x^2-1}$$

Untuk keperluan kita, yang hendak kita pelajari ialah pengerjaan yang sebaliknya. Kita perhatikan penyebut dan mempelajari berbagai kasus.

Contoh 3. Jabarkanlah $(3x-1)\,/\,(x^2-x-6)$ menjadi pecahan parsial dan kemudian tentukan integralnya yang tak tentunya.

Penyelesaian:

Karena $x^2-x-6=(x+2)\,(x-3)$ maka penjabaran pecahan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

(1) $\frac{3x-1}{(x+2)\,(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$, Tugas kita sekarang ialah menentukan A dan B sehingga (1) menjadi suatu kesamaan. Untuk ini kita hilangkan pecahan, sehingga kita memperoleh

(2) $3x-1=A(x-3)+B(x+2)$, dengan kesetaraan (ekivalensi).

(3) $3x-1=(A+B)x+(-3A+2B)$

Oleh karena (3) suatu kesamaan, jika dan hanya jika apabila koefisien pangkat yang sama di ruas kiri dan ruas kanan sama.

$$A+B=3$$
$$-3A+2B=-1$$

Dari dua persamaan tersebut, kita peroleh $A=\frac{7}{5}$ dan $B=\frac{8}{5}$.

Jadi $$\frac{3x-1}{x^2-x-6}=\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{\frac{7}{5}}{x+2}+\frac{\frac{8}{5}}{x-3}$$

Sehingga $$\int\frac{3x-1}{x^2-x-6}dx=\frac{7}{5}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x-3}dx$$
$$=\frac{7}{5}\ln|\,x+2\,|+\frac{8}{5}\ln|\,x-3\,|+C$$

Jika anda mengalami kesulitan untuk menentukan *A* dan *B*. Oleh karena (2) harus merupakan suatu kesamaan yang berarti bahwa (2) harus berlaku untuk semua *x*, maka kita dapat mengambil $x = 3$ dan $x = -2$, sehingga

$$8 = A.0 + B.5$$
$$-7 = A.(-5) + B.0$$

Dari dua persamaan ini kita peroleh langsung $B = \frac{8}{5}$ dan $A = \frac{7}{5}$. Perhitungan *A* dan *B* di atas tampak mungkin aneh, tetapi secara matematika, betul. Persamaan (1) ternyata suatu kesamaan (yang berlaku untuk semua *x* kecuali untuk $x = -2$ dan $x = 3$ jika dan hanya jika persamaan yang ekuivalen dengannya, yaitu (2). Coba anda terangkan mengapa demikian. Jadi ini tergantung pula pada fakta bahwa kedua ruas persamaan (2), yang berbentuk suku banyak linear, adalah identik apabila mereka bernilai sama pada dua titik sebarang.

Contoh 4. Tentukan $\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}\, dx$

Penyelesaian

Uraian penyebut adalah $x\,(x + 1)\,(x - 3)$.

Maka $\frac{5x + 3}{x\,(x + 1)\,(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 3}$

Kita berusaha menemukan *A*,*B*,*C*.

$$5x + 3 = A\,(x + 1)\,(x - 3) + B\,(x)\,(x - 3) + C\,(x)\,(x + 1)$$

Jika kita substitusikan nilai $x = 0, x = -1$ dan $x = 3$, kita peroleh

$$3 = A(-3)$$
$$-2 = B(4)$$
$$18 = C(12)$$

Atau $A = -1, B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{3}{2}$, sehingga

$$\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x + 1}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x - 3}\, dx$$
$$= -\ln|\,x\,| - \tfrac{1}{2}\ln|\,x + 1\,| + \tfrac{3}{2}\ln|\,x - 3\,| + C$$

Contoh 5: Tentukan $\int \frac{x}{(x-3)^2}\ dx$

Penyelesaian

Sekarang penjabaran menjadi pecahan parsial adalah,

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

Kita akan mencari *A* dan *B*. Setelah penyebut-penyebut dihilangkan kita peroleh

$$x = A(x-3) + B$$

Jika kita substitusikan dengan nilai yang sesuai $x = 3$ dan nilai x lain sebarang, misalnya $x = 0$. Kita peroleh $B = 3$ dan $A = 1$, sehingga

Sehingga $\int \frac{x}{(x-3)^2}\ dx = \int \frac{1}{x-3}\ dx + 3\int \frac{1}{(x-3)^2}\ dx$

$$= \ln\ |\ x-3\ | - \frac{3}{x-3} + C$$

Contoh 6: Tentukan $\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2}\ dx$

Penyelesaian

Kita jabarkan pemecahan integran dengan cara berikut.

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Setelah pecahan-pecahan dihilangkan kita peroleh

$3x^2 - 8x + 13 = A\ (x-1)^2 + B\ (x+3)(x-1) + C\ (x+3)$

Dengan substitusi $x = 1,\ x = -3$ dan $x = 0$ kita memperoleh $C = 2,\ A = 4$ dan $B = -1$, sehingga

$$\int \frac{3x^2\ -\ 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2}\ dx = 4\int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 4\ \ln|\ x+3\ | - \ln|\ x-1\ | - \frac{2}{x-1} + C$$

6. 2. PENJABARAN MENJADI PECAHAN PARSIAL (FAKTOR KUADRAT)

Apabila dalam uraian penyebut suatu pecahan kemungkinan ada faktor kuadrat, misalnya $x^2 + 1$, yang tak dapat lagi diuraikan menjadi faktor-faktor linear tanpa harus menggunakan bilangan kompleks.

Contoh 7. Tentukan $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$

Penyelesaian

Kita tulis pecahan tersebut sebagai

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Untuk menentukan konstanta *A*, *B*, dan *C* kita kalikan ruas kiri dan ruas kanan dengan $(4x+1)(x^2+1)$. Sehingga kita memperoleh

$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(4x + 1)$

Apabila kita ambil $x = -\frac{1}{4}, x = 0$ dan $x = 1$, kita mendapat

$$\frac{6}{16} + \frac{3}{4} + 1 = A\left(\frac{17}{16}\right) \qquad A = 2$$

$1 = 2 + C \qquad C = -1$

$4 = 4 + (B - 1)5 \quad B = 1$

Sehingga $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx = \int \frac{2}{4x+1} dx + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{4\,dx}{4x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\, 4x + 1 \,| + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - \tan^{-1} x + C$$

Contoh 8. Tentukan $\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx$

Penyelesaian

Penjabaran disini adalah

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx + C}{x^2+2} + \frac{Dx + E}{(x^2+2)^2}$$

Setelah itu kita lakukan perhitungan seperlunya, kita akan memperoleh

$A = 1,\ B = -1,\ C = 3,\ D = -5$, dan $E = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{x-3}{x^2+2}\,dx - 5\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2} \\ &= \ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{2(x^2+2)} + C\end{aligned}$$

Contoh 9**.** $Q(x)$ mengandung faktor kuadratik yang tidak dapat diuraikan, tak ada yang berulang.

Jika $Q(x)$ mempunyai faktor $ax^2 + bx + c$, dengan $b^2 - 4ac < 0$, maka bentuk untuk $R(x)/Q(x)$ akan memiliki sebuah suku yang berbentuk

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

dimana A dan B adalah konstanta yang akan ditentukan. Sebagai contoh, fungsi yang dinyatakan oleh $f(x) = 3x/[(x-3)(x^2+4)(x^2+9)]$ memiliki dekomposisi pecahan parsial yang berbentuk.

$$\frac{3x}{(x-3)(x^2+4)(x^2+9)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{Bx + C}{(x^2+4)} + \frac{Dx + E}{(x^2+9)}$$

dapat diintegralkan dengan melengkapkan kuadratnya dan menggunakan rumus

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Contoh 10. Tentukan $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx$

Penyelesaian:

Oleh karena $x^3 + 4x = x\,(x^2 + 4)$ tidak dapat difaktorkan lebih lanjut, maka kita tuliskan

$$\frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 + x - 8}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Kalikan dengan $x\,(x^2 + 4)$ untuk mendapatkan

$$2x^2 + x - 8 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

$$2x^2 + x - 8 = Ax^2 + Bx^2 + Cx + 4A$$

$$2x^2 + x - 8 = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Samakan koefisien sehingga diperoleh,

$Cx = x \rightarrow C = 1$ dan $4A = -8 \rightarrow A = -2$

serta $(A + B)x^2 = 2x^2 \rightarrow A + B = 2 \rightarrow -2 + B = 2 \rightarrow B = 4$

$$\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{4x + 1}{x^2 + 4}\right] dx$$

Untuk mengintegralkan suku kedua, pecahkan menjadi dua bagian,

Sehingga $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{4x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$

Subtitusikan $u_1 = x$ ke dalam integral yang pertama sehingga $du_1 = dx$ dan $u_2 = x^2 + 4$ ke dalam integral yang kedua sehingga $du_2 = 2xdx$. Lalu hitung integral ketiga menggunakan rumus

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \text{, dengan } \mathrm{a} = 2$$

Sehingga $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx = -2 \int \frac{du_1}{u_1} + 2 \int \frac{du_2}{u_2} + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$

$$\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx = -2 \ln|u_1| + 2 \ln|u_2| + \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx = -2 \ln|x| + 2 \ln|x^2 + 4| + \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Contoh 11 (Q (x) mengandung satu faktor kuadratik yang tak dapat diuraikan dan berulang).

Jika Q(x) mempunyai faktor $(ax^2 + bx + c)^r$ dengan $b^2 - 4ac < 0$ maka bukan pecahan parsial tunggal

$$\frac{A_x + B}{ax^2 + bx + C}$$

yang terjadi, melainkan jumlah

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + C} + \frac{A_2x + B_2}{ax^2 + bx + C} + \cdots + \frac{A_2x + B_2}{ax^2 + bx + C}$$

yang muncul dalam dekomposisi pecahan parsial dari R(x)/Q(x). Masing-masing suku dalam persamaan

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + C} + \frac{A_2x + B_2}{ax^2 + bx + C} + \cdots + \frac{A_2x + B_2}{ax^2 + bx + C}$$

dapat diintegralkan dengan pertama-tama melengkapkan kuadrat.

Conoh 12. Tentukan $\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$

Penyelesaian:

Bentuk dekomposisi pecahan parsialnya adalah

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)}$$

Kalikan dengan $(x-1)^2(x^2+1)$ sehingga diperoleh:

$x^2 - 2x - 1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx + D)(x-1)^2$

$x^2 - 2x - 1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1)$

$x^2 - 2x - 1 = A(x^3 - x^2 + x - 1) + B(x^2+1) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1)$

$x^2 - 2x - 1 = Ax^3 - Ax^2 + Ax - A + Bx^2 + B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D$

$x^2 - 2x - 1 = (A + C)x^3 + (B + D - A - 2C)x^2 + (A + C - 2D)x - A + B + D$

Samakan koefisiennya

$$(A + C)x^3 = 0x^3 \rightarrow A + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$(B + D - A - 2C)x^2 = x^2 \rightarrow B + D - A - 2C = 1 \ldots..(2)$$

$$(A + C - 2D)x = -2x \rightarrow A + C - 2D = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$-A + B + D = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

Lakukan eliminasi pada persamaan (1) dan (3)

$$\begin{array}{rl} A + C & = 0 \\ A + C - 2D & = -2 \quad \boxed{-} \\ \hline -2D = & -2 \\ D = 1 & \end{array}$$

Lakukan eliminasi pada persamaan (2) dan (4)

$$\begin{array}{rl} B + D - A - 2C & = 1 \\ -A + B + D & = -1 \quad \boxed{-} \\ \hline -2C & = 2 \\ C & = -1 \end{array}$$

Subtitusikan $C = -1$ ke persamaan (1)

$$A + C = 0 \rightarrow A + (-1) = 0 \rightarrow A = 1$$

Subtitusikan$A = 1$, $C = -1$ dan $D = 1$ ke persamaan (2)

$$B + D - A - 2C = 1$$

$$B + 1 - 1 - 2(-1) = 1$$

$$B = -2 + 1$$

$$B = -1$$

Sehingga $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)}\right] dx$

$$= \int \left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-x+1}{(x^2+1)}\right] dx \int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)}\,dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx$$

Subtitusikan $u_1 = x - 1$ ke dalam integral yang pertama dan kedua sehingga $du_1 = dx$ dan $u_2 = x^2 + 1$ ke dalam integral yang ketiga sehingga $du_2 = 2x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}du_2 = x\,dx$. Lalu hitung integral keempat menggunakan rumus:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Dengan a = 1

$$\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{du_1}{u_1} - \int {u_1}^{-2}du - \frac{1}{2}\int \frac{du_2}{u_2} + \int \frac{1}{(x^2+1)}dx$$

$$\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \ln(u_1) + {u_1}^{-1} - \frac{1}{2}\ln(u_2) + \tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \ln(x-1) + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + C$$

IKHTISAR

Untuk menjabarkan sebuah fungsi rasional $f(x) = p(x)/q(x)$ menjadi jumlah pecahan parsial, kita perlu melakukan langkah-langkah sebagai berikut

Langkah 1

Apabila *f(x)* tidak sejati, yaitu apabila derajat *p(x)* paling sedikit sama dengan derajat *q(x)*, bagilah terlebih dahulu *p(x)* dengan *q(x)*. Kita akan memperoleh

$$f(x) = \text{suku banyak} + \frac{N(x)}{D(x)}$$

Langkah 2

Uraikanlah *D(x)* menjadi hasil kali faktor-faktor linear dan kuadrat yang tak dapat lagi diuraikan menjadi faktor-faktor linear dengan koefisien riil. Menurut suatu teorema dalam aljabar hal ini selalu mungkin.

Langkah 3

Untuk tiap faktor yang berbentuk $(ax + b)^k$, penjabaran mungkin terbentuk

$$\frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

Langkah 4

Untuk tiap faktor yang berbentuk $(ax^2 + bx + c)^m$, penjabaran mungkin menjadi

$$\frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2 + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Langkah 5

Samakan $\frac{N(x)}{D(x)}$ dengan jumlah semua suku yang diperoleh dalam Langkah ke-3 dan ke-4. Banyaknya konstanta yang harus ditentukan harus sama dengan derajat penyebut, yaitu $D(x)$.

Langkah 6

Kalikan ruas kiri dan kanan persamaan yang diperoleh dalam Langkah 5 dengan $D(x)$. Kemudian tentukan konstanta yang harus dicari. Ini dapat diperoleh dengan dua jalan:

(1) Samakan koefisien dari suku yang derajatnya sama,

(2) Substitusikanlahnilai-nilai (yang sesuai) tertentu dalam variabel *x*.

6.3. Soal Isian

Tentukan integral fungsirasional dibawah ini.

1. $\int \frac{23x - 12}{(4x + 3)(x^2 - 5x + 6)} dx = \frac{A}{4x + 3} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x - 2} d$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

2. $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx \quad = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

3. $\int \frac{(x + 1)}{x^2 - 4x - 12} dx = \int \frac{(x + 1)}{(x - 6)(x + 2)} dx$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

4. $\int \frac{(x + 4)}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx = \int \frac{(x + 4)dx}{x(x - 2)^2}$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

5. $\int \frac{2x + 1}{4x^2 + 12x - 7}\, dx \quad = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+7}$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

6. $\int \frac{x + 1}{(x - 3)^2}\, dx \; = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \int \frac{1}{(x-3)} dx + 4 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

7. $\int \frac{1}{(x + 5)^2(x - 1)} dx = \int \frac{A}{x + 5} dx + \int \frac{B}{(x + 5)^2} dx + \int \frac{C}{(x - 1)} dx$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

8. $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} dx = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$$= \int \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} dx + \int \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

9. $\int \frac{2t^3 - t^2 + 3t - 1}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} dt = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$$= \int \frac{At + B}{(t^2 + 1)} dt + \int \frac{Ct + D}{(t^2 + 2)} dt$$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

10. $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{4x + 1}{x^2 + 4}\right] dx$$

6.5. Soal Tambahan

Tentukan integral fungsi rasional di bawah ini.

1. $\int \frac{2}{x^2 + 2x} dx$

2. $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$

3. $\int \frac{5x + 3}{x^2 - 9} dx$

4. $\int \frac{x - 6}{x^2 - 2x} dx$

5. $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4} dx$

6. $\int \frac{3x - 13}{x^2 + 3x - 10} dx$

7. $\int \frac{2x + 21}{2x^2 + 9x - 5} dx$

8. $\int \frac{17x - 3}{3x^2 + x - 2} dx$

9. $\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

10. $\int \frac{6x_{22x}^2 - 23}{(2x - 1)(x^2 + x - 6)} dx$

11. $\int \frac{3x^3}{x^2 + x - 2} dx$

12. $\int \frac{x^4 + 8x^2 + 8}{x^3 - 4x} dx$

13. $\int \frac{x + 1}{(x - 3)^2} dx$

14. $\int \frac{5x + 7}{x^2 + 4x + 4} dx$

15. $\int \frac{3x^2 - 21x + 32}{x^3 - 8x^2 + 16x} dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 19x + 10}{2x^4 + 5x^3}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 - 4x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x - 1)(x^2 + 9)}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x - 2)(x^2 + 1)}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{20x - 11}{(3x + 2)(x^2 - 4x + 5)}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{5x + 3}{x^2 - 9}\,dx$

DAFTAR PUSTAKA

Bronson, Richard dan Gabriel Costa. 2007. *Persamaan Diferensial*. Edisi Ketiga. Jakarta: Erlangga.

Dale Varberg., Edwin J. Purcell. 2001. *Kalkulus Jilid I (edisi 7).* Alih Bahasa I Nyoman Susila. Batam: Interaksara

Edwin J. Purcell., Dale Varberg. 1989. *Kalkulus dan Geometri Analitis* Jilid 2 (terjemahan I Nyoman Susila dkk). Bab 18. Jakarta: Erlangga.

Frank Ayres., J.C Ault. 1984. *Kalkulus Diferensial dan Integral* (Seri Buku Schaum). Alih Bahasa Lea Prasetyo. Jakarta: Erlangga.

Howard Anton, 1981. *Calculus with Analyitical Geometri*. New York: John Willey and Sons.

Louis Leithold, 1986. *Kalkulus dan Geometri Analitik.* Alih Bahasa S. Nababan. Jakarta: Erlangga.

Koko Martono, 1993. *Kalkulus Integral I.* Bandung: Alva Gracia.

Murray R.Spiegel. Pantur Silaban, Hans Wospakrik. 1985. *Transformasi Linear*. Jakarta:Erlangga.

Ruwanto, Bambang. 2002. Matematika untuk Fisika dan Teknik. Yogyakarta: Adicita Karya Nusa.

Salusu, A. 2003. Teori dan Penyelesaian Kalkulus Lanjutan. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Soedojo, Peter. 1995. Matematika Fisika dan Teknik. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

Spiegel, Murray R. 1963. Kalkulus Lanjutan Versi S1/Simetrik. Jakarta: Erlangga.

Tom M.Apostol, 1984. *Calculus.*New York:Jhon Willey and Sons.

Wilfred Kaplan. 1961. *Ordinary Differential Equations.* Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company, Inc.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd lahir di Sitampurung 26 November 1986, Siborong-borong, Taput, Propinsi Sumatra Utara. Saya merupakan anak kelima dari lima bersaudara. Penulis lahir dari pasangan suami istri Bapak Togu Lumbantoruan dan Ibu Ratima Br. Sianturi. Penulis sekarang bertempat tinggal di Jalan Matador Perum Griya Marza Blok C RT 01/RW 07 Jatirangga, Jatisampurna, Cibubur, Bekasi. Penulis menyelesaikan pendidikan dasar di Sekolah Dasar Negeri 2 Sitampurung (Kelas 1-6) dan lulus pada tahun 1999, lalu melanjutkan sekolah menengah pertama di SLTP Negeri 2 Siborong-borong dan lulus pada tahun 2002, melanjutkan pendidikan di SMA PGRI 20 Siborong-borong lulus pada tahun 2005, kemudian melanjutkan jenjang pendidikan S1 di Bidang Pendidikan Matematika di Universitas Kristen Indonesia (UKI) Jakarta dan lulus pada Tahun 2009, dan pada Tahun 2014 kemudian melanjutkan jenjang pendidikan S2 ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ) di program studi mengister matematika dan lulus pada Tahun 2017.

Saat ini penulis mengajar di Universitas Kristen Indonesia (UKI), Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP), Program studi Pendidikan Matematika. Buku integral-tak tentu adalah buku Jilid 1 Edisi 1 yang ditulis untuk mempermudah proses belajar mengajar di dalam kelas. Harapan saya dengan di bantu buku ini para pembaca yang ingin belajar integral akan lebih mudah memahami dan memperoleh hasil yang lebih baik. Saya sangat mengharapkan saran dan kritikan yang bersifat membangun untuk kemajuan bersama. Terimakasih, salam

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd