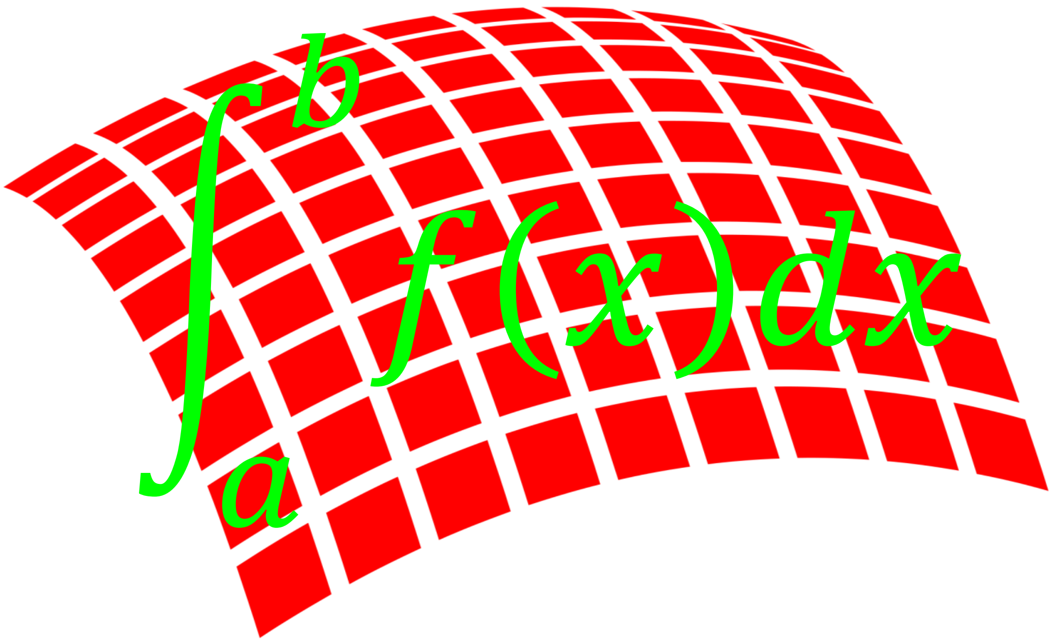
JILID 2
EDISI 1

BUKU
INTEGRAL-TENTU



Disusun Oleh :

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd

2019

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur saya ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena dengan pertolongan-Nya saya dapat menyelesaikan bahan ajar "INTEGAL TENTU"Jilid 2, Edisi pertama. Penulis menyadari betul banyak rintangan dan hambatan dalam proses pembuatan buku ini, akan tetapi Puji Tuhan di dalam pembuatan buku ini saya berhasil menyelesaikannya dengan baik.

Adapun tujuan penyusunan ini adalah untuk memenuhi kebutuhan dasar dari setiap pembaca buku integral. Penyusunan buku ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penulis menyadari bahwa buku ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan buku ini di lain waktu. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya siswa siswi, mahasiswa dan masyarakat umum yang ingin mempelajari Integral. Akhir kata saya ucapkan terimakasih dan salam buat kita semua.

Jakarta, 21 Februari 2019

Jitu Halomoan Lumban toruan, S.Pd., M.Pd

BAB 1
LUAS DAERAH BIDANG RATA

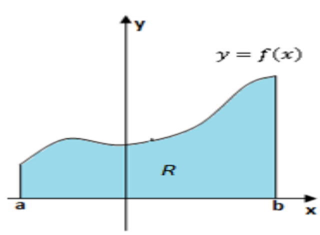
1.1. LUAS BIDANG RATA

Pembahasan singkat tentang luas di dalam diperlukan untuk memberikan dasar tentang defenisi integral tentu. Setelah konsep ini benar-benar dipahami,kita berbalik arah,dan mengunakan integral tentu untuk menghitung luas daerah-daerah yang bentuknya rumit. Seperti biasa kita mulai dengan kasus yang sederhana.

Contoh. $y = f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva pada bidang xy dan f kontinu dan tak-negatif pada selang (interval) $a \leq x \leq b$. Tinjaulah daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik dari $y = f(x)$, $x = a$. $x = b$ dan $y = 0$. Kita mengacu R, sebagai daerah di bawah $y = f(x)$ antara $x = b$. Luasnya, $A(R)$,ditentukan oleh :

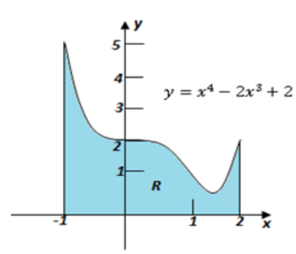
$$\boxed{A(R) = \int_a^b f(x)dx}$$

Defenisinya dapat ditinjau atau dilihat dari gambar di bawah ini.



Contoh 1. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian : Daerah R dapat dilihat pada Gambar.



$$A(R) = \int_{-1}^{2} x^4 - 2x^3 + 2\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{51}{10}$$

Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu $-x$, maka :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

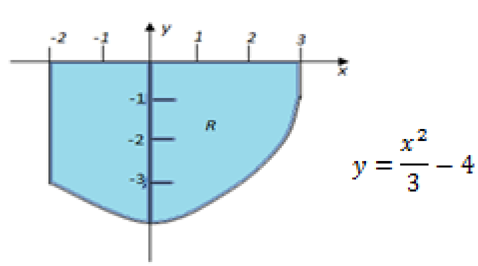
adalah bilangan yang negatif, sehingga tak dapat melukiskan suatu luas. Akan tetapi bilangan itu adalah negatif untuk luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x),\ x = a,\ x = b$ dan $y = 0$.

Contoh 2. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 4$, sumbu $x. x = -2$, dan $x = 3$.

Penyelesaian : Daerah R diperlihatkan pada Gambar.

$$\text{A(R)} = -\int_{-2}^{3} \left(\frac{x^2}{3} - 4\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{3} \left(\frac{x^2}{3} + 4\right) dx$$



$$= \left[\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right)$$

$$= \frac{145}{9}$$

Contoh 3. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{23}{4}$$

Perhatikan bahwa kita dapat menyatakan luas daerah itu sebagai satu integral dengan menggunakan lambang nilai mutlak, yaitu ;

$$\boxed{A(R) = \int_{-1}^{2} |x^3 - 3x^2 - x + 3|\, dx}$$

Tetapi penulisan ini bukan penyederhanaan dalam perhitungan, sebab untuk menghitung integral terakhir ini kita harus menulis integral ini sebagai dua integral seperti telah kita lakukan. Cara Berfikir Yang Dapat Membantu. Sampai kini baik untuk daerah-daerah sederhana sejenis yang ditinjau diatas, mudah sekali menuliskan integral yang benar. Bilamana kita meninjau daerah yang lebih rumit (misalnya, daerah di antara dua kurva), tugas pemilihan integral yang benar lebih sukar. Tetapi, terdapat suatu cara berfikir yang dapat sangat membantu. Pemikiran itu kembali ke defenisi luas dan integral tentu. Berikut cara berfikir tersebut dalam lima langkah.

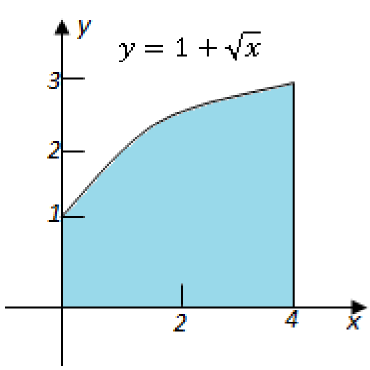
Langkah 1	Gambarlah daerah yang bersangkutan dan Potonglah menjadi jalur-jalur serta berilah nomor pada suatu jalur tertentu.
Langkah 2	Hampiri luas suatu jalur suatu tertentu tersebut dengan luas persegi panjang yang sesuai.
Langkah 3	Jumlahkan luas aproksimasi tersebut.
Langkah 4	Ambillah kemudian limit dan jumlah itu dengan jalan menunjukkan jalur ke nol lebar sehingga diperoleh suatu integral tertentu.

Untuk menjelaskannya, perhatikanlah contoh sederhana berikut ini.

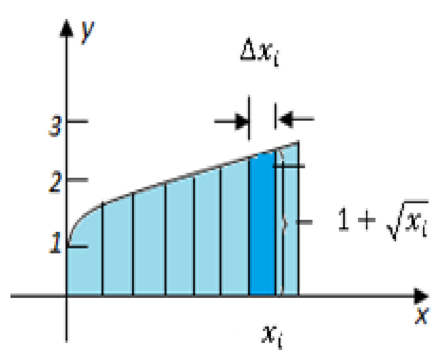
Contoh 4. Susunlah integral untuk luas daerah dibawah kurva $y = 1 + \sqrt{x}$ yang terletak antara garis dengan persamaan $x = 0$ dan $x = 4$.

Penyelesaian :

Gambar 1.1



Gambar 2.2.



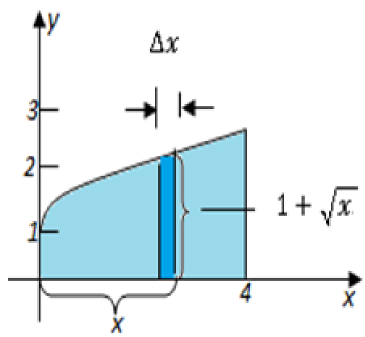
3. Apromaksimasi luas jalur

$$\Delta A_i \approx \left(1+\sqrt{x_i}\right)\Delta x_i$$

4. Jumlahkan : $A \approx \sum\left(1+\sqrt{x_i}\right)\Delta x_i$

m5. Ambil limitnya :

$$A = \int_0^4 \left(1+\sqrt{x}\right)dx$$

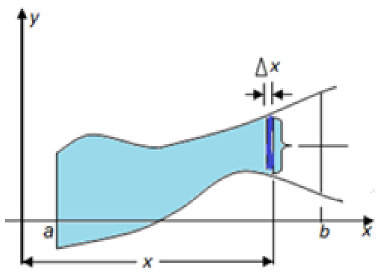


Gamabar 1.3

$$\Delta A = \left(1+\sqrt{x}\right)\Delta x$$

$$A = \int_0^4 \left(1+\sqrt{x}\right) dx$$

Setelah kita pahami benar prosedur lima langkah tersebut, kita dapat menyingkatnya menjadi tiga langkah yaitu*:* Potong-potong, (slice), aprokmasikan, integralkan. Ingatlah bahwa mengitegralkan berarti,menjumlahkan dan mengambil limit apabila panjang jalur menjadi nol. Dalam proses ini $\sum \Delta x$ berubah menjadi $\int dx$, pada gambar menunjukkan proses yang telah dipersingkat itu untuk soal yang sama. Daerah Antara Dua Kurva. Tinjaulah kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$. Kurva-kurva ini dan selang itu membatasi daerah yang terdapat pada gambar. Kita gunakan cara: Potong, aproksimasi, integralkan untuk menentukan luas daerah tersebut.



$$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]\Delta x$$

$y = f(x)$

$f(x) - g(x)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

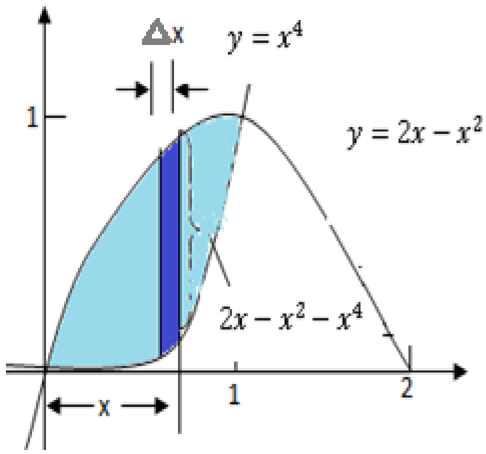
$y = g(x)$

Bahwa $f(x) - g(x)$ adalah tinggi jalur potong yang benar; walaupun kurva g berada di sebelah bawah sumbu x. Sebab dalam hal ini $g(x)$ negatif; jadi mengurangi dengan $g(x)$ berarti menjumlahkan dengan bilangan yang positif. Anda dapat melihat sendiri bahwa $f(x) - g(x)$ adalah tinggi jalur yang benar. Sekalipun $f(x)$ dan $g(x)$ adalah negatif.

Contoh 5. Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Penyelesaian

Kita mulai menentukan titik-titik potong kurva-kurva tersebut dan kemudian menggambarkannya. Jadi kita mencari akar-akar persamaan $2x - x^2 = x^4$.Suatu persamaan berderajat empat, yang biasanya tidak mudah terpecahkan. Akan tetapi, tampak bahwa $x = 0$ dan $x = 1$, adalah dua diantara akar-akarnya.Gambar daerah, potongan jalur dan aproksimasi serta integral yang bersangkutan dapat dilihat



$$\Delta A = (2x - x^2 - x^4)\Delta x$$

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)dx$$

Masih ada satu tugas lagi, yaitu menghitung integral.

$$= \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{7}{15}$$

Contoh 6. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabol $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian

Kita tentukan titik potong parabol dan garis koordinat y dari titik ini dapat diperoleh dan penulisan persamaan yang kedua sebagai $4x = 3y + 4$ dan kemudian dua ungkapan untuk $4x$ disamakan.

$$y^2 = 3y + 4$$

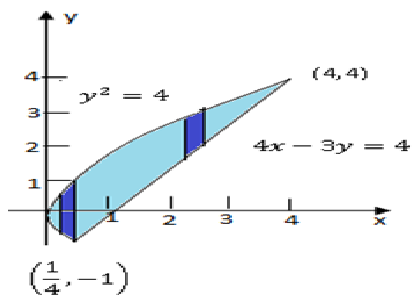
$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$(y - 4)(y + 1) = 0$$

$y = 4, -1$

Dengan demikian titik-titik potong tersebut adalah $(4{,}4)$ dan $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$.

Daerah yang harus dicari luasnya dapat dilihat pada Gambar.

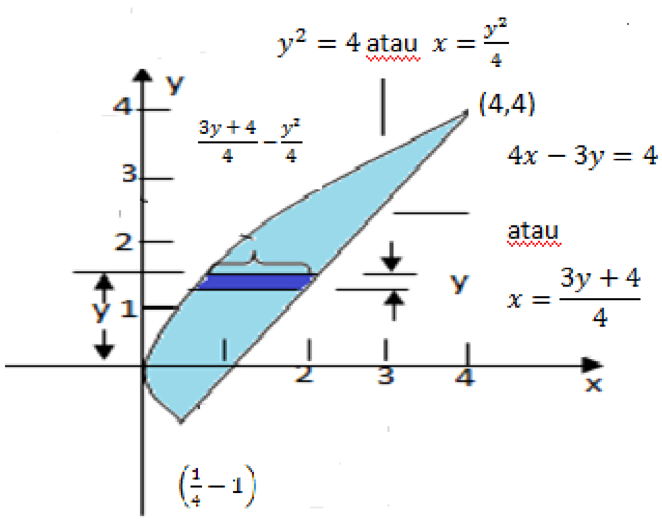


Daerah ini kita potong-potong menjadi jalur-jalur tegak (vertikal), seperti terlihat pada Gambar. Ada kesulitan sedikit, karena kurva batas bawah terdiri atas dua kurva. Di sebelah kiri sekali jalur-jalur merentang dari bagian bawah parabol hingga bagian atasnya, sedangkan untuk daerah sisanya jalur-jalur ini merentang dari garis hingga parabol. Jadi, apabila kita menggunakan jalur-jalur tegak, kita bagi daerah yang bersangkutan menjadi dua bagian, kemudian membentuk integral untuk masing-masing bagian, kemudian menghitungnya. Suatu penyelesaian yang jauh lebih sederhana ialah memotong daerah menjadi jalur-jalur yang datar, seperti dapat kita lihat pada Gambar. Dalam hal ini kita menggunakan y sebagai variabel dalam integral, dan bukan x. Perhatikan bahwa jalur-jalur yang datar itu selalu bermula pada parabol (di sebelah kiri) dan berakhir pada garis (di sebelah kanan).

Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu $-x$, maka :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

adalah bilangan yang negatif, sehingga tak dapat melukiskan suatu luas. Ingatlah bahwa mengitegralkan berarti,menjumlahkan dan mengambil limit apabila panjang jalur menjadi nol. Dalam proses ini $\sum \Delta x$ berubah menjadi $\int dx$, pada gambar menunjukkan proses yang telah dipersingkat itu untuk soal yang sama.



$$\Delta A \approx \left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]\Delta y, \quad A = \int_{-1} \left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right] dy$$

$$A = \int_{-1}^{4} \left[\frac{3y+4-y^2}{4}\right] dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{4} (3y+4-y^2)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]\begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}$$

$$= \left(24 + 16 - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)$$

$= 125 \approx 5{,}21$

Ada dua hal yang harus diperhatikan, yaitu :

1. Integral yang menyangkut penjaluran datar variabel y, bukan x.
2. untuk memperoleh integral, kita nyatakan x masing-masing dengan y dari dua persamaan yang diketahui. Kemudian kita kurangkan nilai x yang lebih kecil (kurva kiri) dari nilai x yang lebih besar (kurva kanan).

Jarak dan Perpindahan. Pandang suatu benda yang bergerak sepanjang garis lurus dengan kecepatan $v(t)$ pada saat t. Bila $v(t) \geq/0$, maka : $\boxed{\int_a^b v(t)dt}$

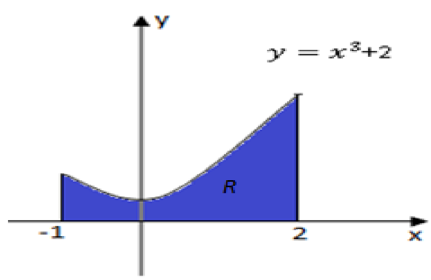
Menyatakan jarak yang ditempuh dalam selang waktu $a \leq t \leq b$. Namun, $v(t)$ dapat pula bernilai negative (yang berarti bahwa benda itu bergerak dalam arah sebaliknya), maka : $\boxed{\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)}$

Menyatakan perpindahan benda itu, yang berarti**,** jarak lurus dari tempat berangkat $s(a)$ ke tempat akhir $s(b)$. Untuk mendapatkan jarak keseluruhan yang ditempuh benda selama $a \leq t \leq b$, kita harus menghitung: $\boxed{\int_a^b v(t)dt}$

Luas daerah antara kurva kecepatan dan sumbu$-t$. Di sebelah kiri sekali jalur-jalur merentang dari bagian bawah parabol hingga bagian atasnya, sedangkan untuk daerah sisanya jalur-jalur ini merentang dari garis hingga parabol. Jadi, apabila kita menggunakan jalur-jalur tegak, kita bagi daerah yang bersangkutan menjadi dua bagian, kemudian membentuk integral untuk masing-masing bagian, kemudian menghitungnya.

Contoh 7. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian: Daerah R dapat dilihat pada Gambar.



$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^3 + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{16}{4} + 4\right) - \left(\frac{-1}{4} - 2\right)$$

$$= \frac{41}{4}$$

Contoh 8. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = x^2 - 2x + 4$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

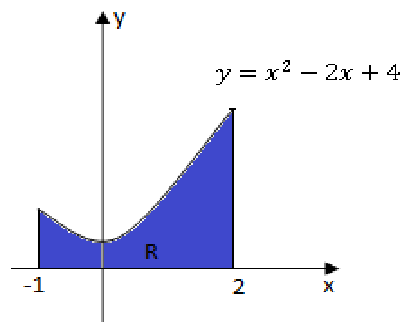
Penyelesaian:

.

$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 4\,)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{36}{3}$$



Gambar 1.4

Menyatakan perpindahan benda itu, yang berarti, jarak lurus dari tempat berangkat s(a) ke tempat akhir s(b). Untuk mendapatkan jarak keseluruhan yang ditempuh benda selama $a \leq t \leq b$, kita harus menghitung:

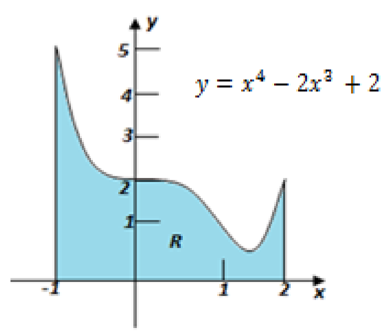
$$\boxed{\int_a^b |v(t)dt}$$

Luas daerah antara kurva kecepatan dan sumbu$-\,t$.

Contoh 9. Tentukan luas daerah R dibawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian :

$y = f(x), x = a, x = b, dan\ y = 0$



$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^3 \; - 2x^3 \; + 2)\, dx$$

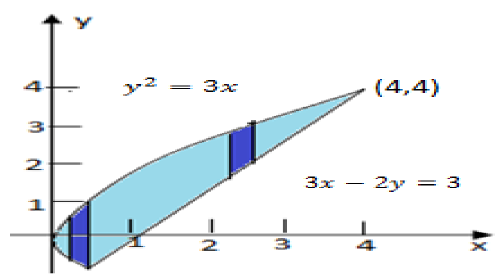
$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{51}{10}$$

Contoh 10. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabol $y^2 = 3x$ dan garis $3x - 2y = 3$.

Penyelesaian :



$y^2 = 2y + 3$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y - 3)(y + 1) = 0$

$y = 3, -1$

Menyatakan jarak yang ditempuh dalam selang waktu $a \le t \le b$. Namun, $v(t)$ dapat pula bernilai negative (yang berarti bahwa benda itu bergerak dalam arah sebaliknya), maka :

$$\boxed{\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)}$$

Menyatakan perpindahan benda itu, yang berarti, jarak lurus dari tempat berangkat $s(a)$ ke tempat akhir $s(b)$. Untuk mendapatkan jarak keseluruhan yang ditempuh benda selama $a \leq t \leq b$, kita harus menghitung:

$$\boxed{\int_a^b |v(t)dt}$$

Luas daerah antara kurva kecepatan dan sumbu$-t$.

Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu $-x$, maka : $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$

adalah bilangan yang negatif, sehingga tak dapat melukiskan suatu luas.

Contoh 11. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2 - 2x^3 - x + 2$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$ dan oleh garis $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 - x + 2)dx - \int_{1}^{2} (x^2 - 2x^2 - x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x^2}{1} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x^2}{1} + 3x\right]_{-1}^{2}$$

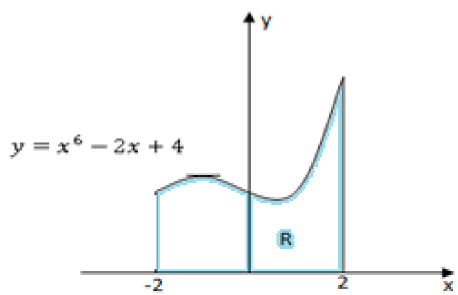
$$= 3 - \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{12}{3}$$

Di sebelah kiri sekali jalur-jalur merentang dari bagian bawah parabol hingga bagian atasnya, sedangkan untuk daerah sisanya jalur-jalur ini merentang dari garis hingga parabol. Jadi, apabila kita menggunakan jalur-jalur tegak, kita bagi daerah yang bersangkutan menjadi dua bagian, kemudian membentuk integral untuk masing-masing bagian, kemudian menghitungnya. Dalam hal ini kita menggunakan y sebagai variabel dalam integral, dan bukan x.

Contoh 12. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = x^6 - 2x + 4$ antara $x = -2$ dan $x = 2$.

Penyelesaian:



$$A(R) = \int_{-2}^{2} (x^6 - 2x + 4)$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} - x^2 + 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(\frac{128}{7} - 4 + 8\right) — (1287 + 4 - 8)$$

$$= \frac{367}{7}$$

1. 2. Soal Isian

1. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = 6x^2 + x + 4$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{2} 6x^2 + x + 4\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= (\ldots) - \left(\ldots + \tfrac{1}{2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{65}{2}$$

2. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = 8x^3 - 3x^2 - 1$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian:

$$A(R) = \int_{-1}^{2} 8x^3 - 3x^2 - 1\ dx$$

$$= \cdots$$

$$= (32 - \cdots - 2) - (\ldots)$$

$$= 18$$

3. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = 3x^2 + 4x + 4$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{2} 3x^2 + 4x + 4\,dx$$

$$= \cdots$$

$$= (\ldots + 8 + \cdots) - (\ldots)$$

$$= 27$$

4. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh

$y = \dfrac{3x^2}{2} - 2,$ sumbu x.

$x = -2$,dan $x = 3$.

Penyelesaian :

$$\text{A(R)} = -\int_{-2}^{3} \frac{3x^2}{2} - 2\,dx$$

$$= \left(\ldots + \frac{12}{2}\right) - (\ldots)$$

$$= \frac{55}{2}$$

5. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh

$y = \dfrac{6x^2}{2} - 8,$ sumbu x.

. $x = -2$ dan $x = 3$.

Penyelesaian :

$$\mathrm{A(R)} = -\int_{-2}^{3} \frac{6x^2}{2} - 8\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= (\ldots) - (\ldots)$$

$$= 75$$

6. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 2$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{1} 2x^3 - x^2 - 2x + 2\, dx - \int_{1}^{2} 2x^3 - x^2 - 2x + 2\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= -\frac{17}{6}$$

7. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 2x^2 - x + 4$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{1} x^3 - 2x^2 - x + 4\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= -\frac{9}{12}$$

8. Tentukan luas daerah antara kurva $y = 4x^3$ dan $y = x - 3x^3$.

Penyelesaian :

$$= \int_0^1 x - 3x^3 - 4x^3 dx$$

$$= \cdots$$

$$= -\frac{3}{2}$$

9. Tentukan luas daerah antara kurva $y = 3x^5$ dan $y = 2x - 3x^2$

Penyelesaian :

$$= \int_0^1 2x - 3x^2 - 3x^5\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= -\frac{1}{2}$$

10. Tentukan luas daerah antara kurva $y = 5x^4$ dan $y = 4x - x^3$

Penyelesaian :

$$= \int_0^1 4x - x^3 - 5x^4\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{3}{4}$$

11. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = 3x^2 - 2x + 4$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{2} 3x^2 - 2x + 4\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= 18$$

12. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = 10x^4 - 3x^2 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{2} 10x^4 - 3x^2 + 2\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= 63$$

13. Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = 6x^2 + 6x - 4$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian :

$$A(R) = \int_{-1}^{2} 6x^2 + 6x - 4\, dx$$

$$= \cdots$$

$$= 15$$

14. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh

$y = \frac{x^3}{4} + 6,$ sumbu x.

$x = -2$ dan $x = 3$.

Penyelesaian :

$$\text{A(R)} = -\int_{-2}^{3} {x^3}/{4} + 6\ dx$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{61}{16}$$

15. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh

$y = \frac{3x^2}{2} + 2,$ sumbu x.

$x = -2$ dan $x = 3$.

Penyelesaian :

$$A(R) = -\int_{-2}^{3} \frac{3x^2}{2} + 2\ \ dx$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{15}{2}$$

1.3. Soal Tambahan

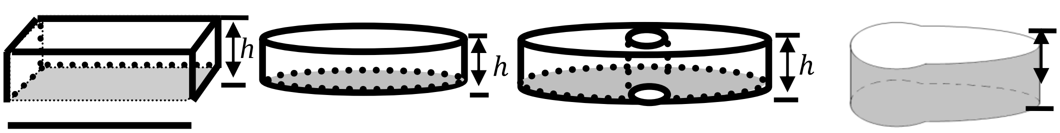
Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diketahui.Tunjuklah sebuah persegi-panjang dalam suatu jalur potongan, aproksimasilah luasnya, susunlah integral yang sesuai dan kemudian hitunglah luas daerah yang bersangkutan.

1. $y = 4 - \frac{1}{3}x^2$, $y = 0,$ antara $x =$ 0 dan $x = 3$.
2. $y = 4x - x^2$, $y = 0,$ antara $x = 1$ dan $x = 3$.
3. $y = x^2 \quad - 2x - 3$, $y = 0,$ antara $x = 0$ dan $x = 2$.
4. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10)$, $y = 0,$ antara $x = -2$ dan $x = 3$.
5. $y = x^3$, $y = 0, x = -1, x = 2$.
6. $y = \sqrt[3]{x, y} = 0$, $x = -1$, $x = 8$.
7. $y = \sqrt{x - 4}$, $y = 0$, $x = 8$.
8. $y = x^2 - 4x + 3$, $x - y - 1 = 0$.
9. $y = x^2, y = x + 2$.
10. $y = 2\sqrt{x, y} = 2x - 4, x = 0$.
11. $y = x^2 - 4x, y = -x^2$.
12. $y = x^2 - 2, y = 2x^2 + x - 4$.
13. $x = 6y - y^2$, $x = 0$.
14. $x = -y^2 + y + 2, x = 0$.
15. $x = 4 - y^2$, $x + y - 2 =$

BAB 2
VOLUME BENDA DALAM BIDANG

1.2 Volume Benda dalam Bidang (Lempengan, Cakram, Cincin)

Integral tentu dapat digunakan untuk menghitung luas. Tidak mengherankan oleh karena integral tersebut memang diciptakan untuk keperluan itu. Akan tetapi integral tersebut dapat digunakan untuk banyak persoalan lainnya. Hampir tiap besaran yang dapat dianggap sebagai hasil potongan sesuatu menjadi bagian-bagian lebih kecil, aproksimasi tiap bagian, penjumlahan dan pengambilan limit apabila tiap bagian mengecil, dapat diartikan sebagai suatu integral. Khusunya, hal ini benar untuk volume benda-benda tertentu yang akan kita bahas di bawah ini.



Gambar 2.1

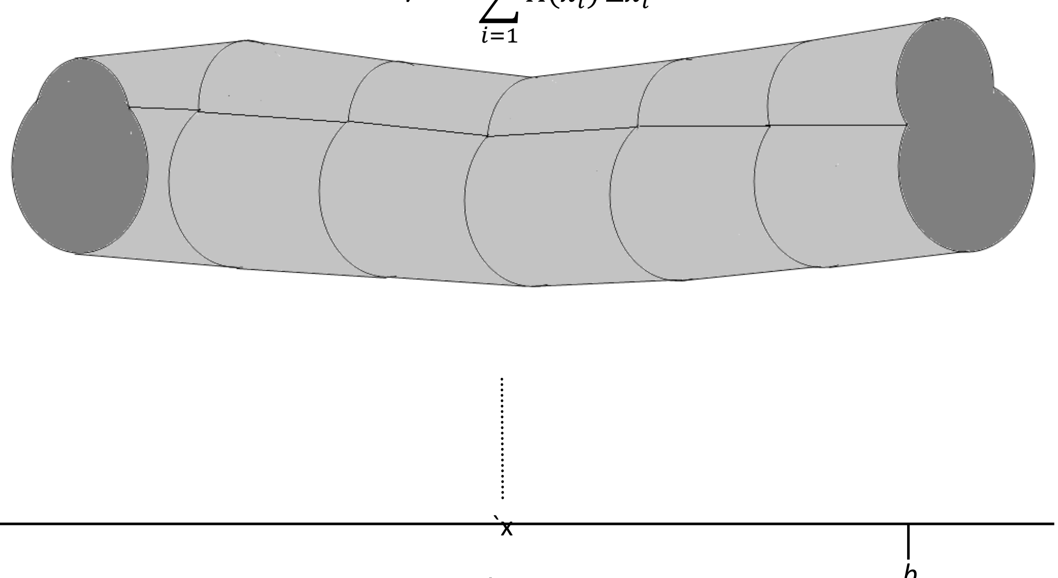
Apakah yang disebut volume? Kita muai dengan benda-benda sederhana, yaitu tabung lingkaran tegak dan sejenisnya. Empat di antaranya dapat dilihat pada Gambar 1. Dalam tiap kasus, benda itu diperoleh dengan cara menggerakan suatu daerah pada bidang (rata) sejauh h dengan arah yang tegak lurus pada daerah tersebut. Dalam tiap kasus itu, volume benda ditentu $V = A \cdot h$, daerah alas, dikalikan dengan tinggi h, yakni

Perhatikanlah sebuah benda yang bersifat bahwa penampang-penampang tegaklurusnya pada suatu garis tertentu memiliki luas tertentu. Misalnya garis tersebut adalah sumbu *x* dan andaikan bahwa luas penampang di *x* adalah A (*x*) dengan $a \leq x \leq b$ (Gambar 2). Selang [*a*, *b*] kita bagi dengan titik-titik bagi $\mathrm{a} = \mathrm{x}_0 < \mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2 \ldots < \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{b}$. Melalui titik-titik itu kita lukis bidang tegaklurus pada sumbu *x*. Dengan demikian kta peroleh pemotongan benda menjadi lempengan yang tipis-tipis (Gambar 3). Volume ΔV_i suatu lempeng dapat dianggap sebagai volume tabung, yaitu

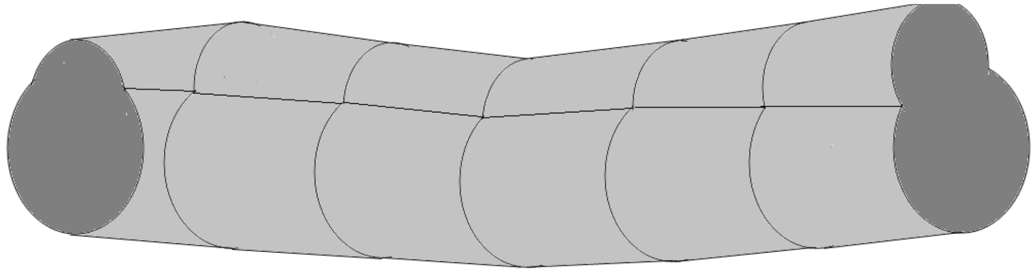
$$\Delta V_i \approx A(\bar{\mathrm{x}}_i)\, \Delta x_i\,, \qquad x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$$

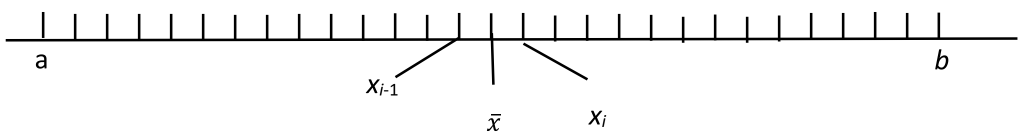
dan volume *V* benda dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$$



Gambar 2.2





Gambar 2.3

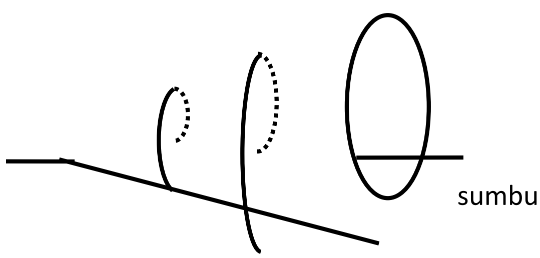
Apabila norma partisi kita tujukan ke nol, kita memperoleh suatu integral tentu; integral ini kita definisikan sebagai volume benda

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

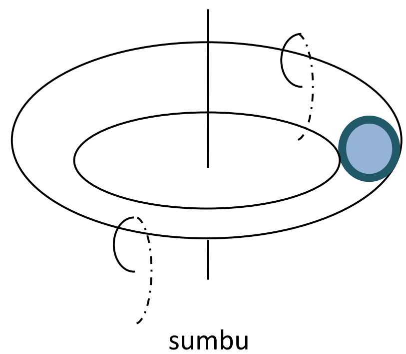
Dalam perhitungan volume-volume benda, sebaiknya anda jangan menggunakan rumus itu secara hafalan. Akan tetapi anda haruslah memahami proses yang menuju ke penemuan rumus tersebut. Seperti untuk luas, proses itu kita sebut pula, pemotongan, aproksimasi dan pengintegralan. Hal ini diperjelas dalam contoh di bawah ini.

Benda Putar : Metode Cakram

Apabila sebuah daerah rata, yang terletak seluruhnya pada satu bagian bidang yang terbagi oleh sebuah garis lurus tetap, diputar mengelilingi garis tersebut, daerah itu akan membentuk sebuah benda putar. Garis yang tetap tersebut dinamakan sumbu putar**.** Sebagai contoh, apabila daerah yang dibatasi oleh setengah lingkaran dan garis tengahnya, diputar mengelilingi garis tengah itu, maka daerah tersebut membentuk sebuah bola. Apabila daerah segitiga diputar mengelilingi salah satu kakinya, daerah itu akan membentuk sebuah kerucut Gambar 4. Apabila sebuah daerah lingkaran diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang lingkaran itu yang tidak memotongnya Gambar 5, maka diperoleh sebuah torus (ban). Dalam tiap hal, volume benda-benda itu dapat disajikan sebagai suatu integral tentu.



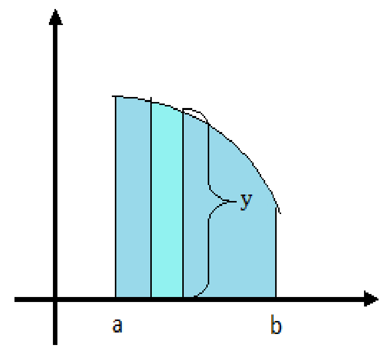
Gambar 2.4



Gambar 2.5

Gambar 4 merupakan contoh volume benda dalam bidang yang diputar mengelilingi sumbu x. Sedangkan, Gambar 5 merupakan contoh volume benda putar yang diputar mengelilingi sumbu y. Metode cakram berdasarkan rumus volume:

$$V = Luas\ Alas \times Tinggi$$



Gambar 2.6

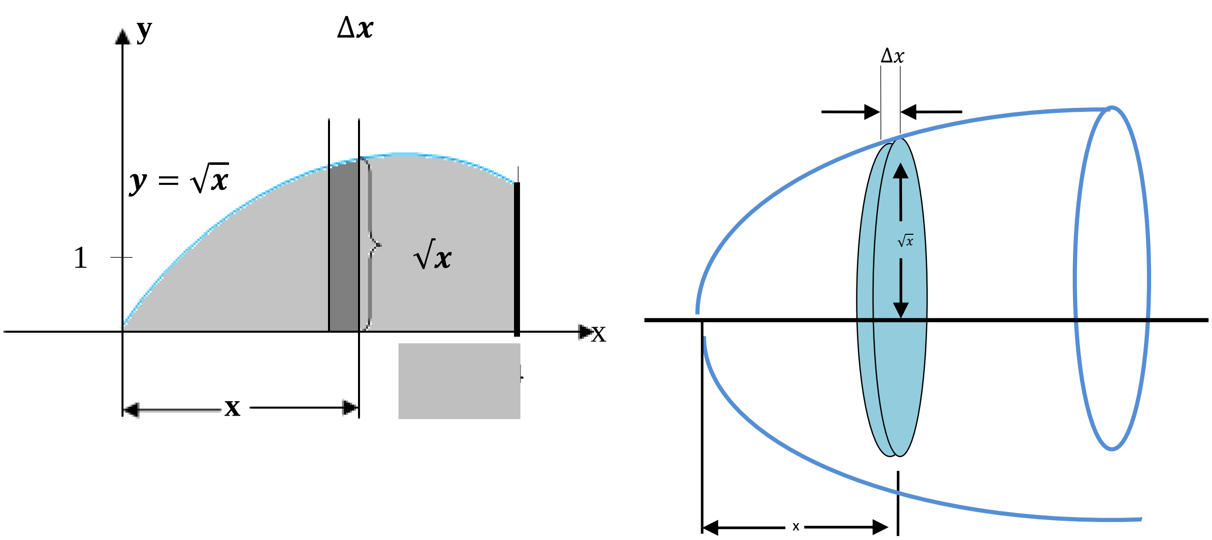
Luas alas berupa lingkaran, maka $Luas\ Alas = \pi r^2$, dimana r adalah jari-jari putaran. Sehingga, rumus volume dengan menggunakan metode cakram berdasarkan gambar di samping adalah

$$V = \int_a^b \pi r^2\, dx$$

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

Contoh 1.

Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh daerah *R* yang dibatasi oleh kurva *y* $=\sqrt{x}$, sumbu *x* dan garis *x* = 4 apabila *R* diputar mengelilingi sumbu *x*.



Gambar 2.7

$$\Delta v \approx \pi(\sqrt{x})^2 \Delta x$$

$$V = \int_0^4 \pi\, x\, dx$$

Penyelesaian

Pada bagian kiri Gambar 7 kita lihat daerah dengan sebuah jalur pemotongan. Apabila R diputar menglilingi sumbu x, daerah ini akan membentuk sebuah benda putar dan jalur tersebut membentuk sebuah cakram yang volumenya ΔV dapat kita aproksi masih dengan volume sebuah tabung dengan tinggi Δx_i dan dengan jari-jari alas $\Delta V \approx \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 \Delta x$, volume tabung ini adalah $\pi r^2 h$. Apabila volume tabung-tabung ini kita jumlahkan dan kemudian kita integralkan, maka

$$V = \pi \int_0^4 x \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$V = \pi \left(\frac{16}{2}\right)$$

$V = 8\pi$ satuan volume

$V \approx 25{,}13$ satuan volume

Contoh 2.

Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dengan $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x.

Penyelesaian

$$V = \pi \int_0^2 x \, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

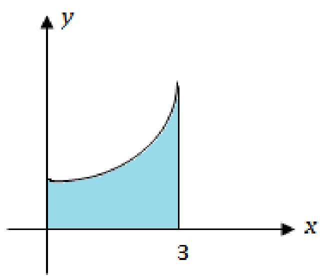
$V = 2\pi$ satuan volume

Contoh 3.

Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$ dengan $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu x.

Penyelesaian

$y = x^2 + 1$



Gambar 2.8

$$V = \pi \int_a^b A(x)\, dx$$

$$V = \pi \int_0^3 x^2 + 1\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 3\right]_0^3$$

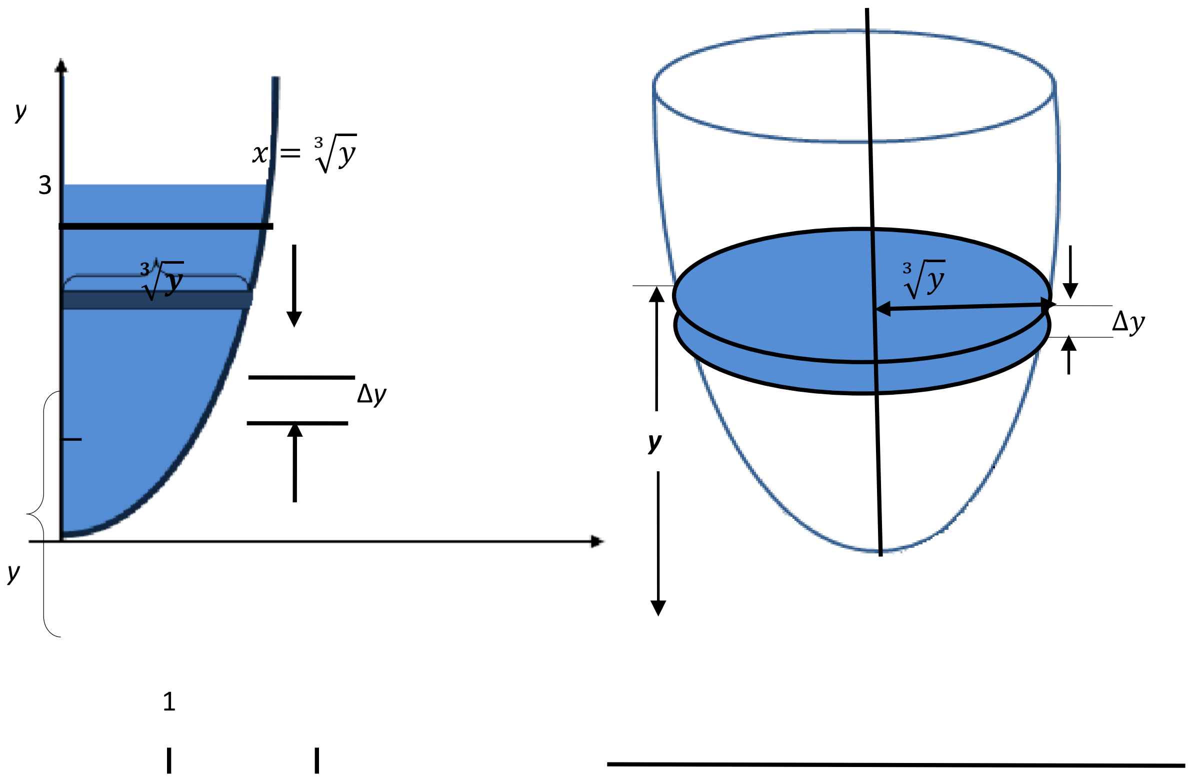
$$V = \pi \left(\frac{1}{3}(27) + 3 - 0\right)$$

$$V = \pi(12)$$

$V = 12\pi$ satuan volume

Contoh 4.

Tentukan volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu y, dan garis $y = 3$ diputar mengelilingi sumbu y.



$\Delta V \approx (\sqrt[3]{y})^2 \Delta$

Gambar 2.9

$$V = \int_0^3 \pi y^{2/3} dy$$

Penyelesaian

Dalam kasus ini, lebih mudah y digunakan sebagai variabel pengintegralan. Perhatikan bahwa $y = x^3$ setara dengan $x = \sqrt[3]{y}$ dan $\Delta V \approx \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \Delta y$ maka

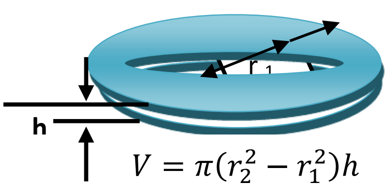
$$V = \pi \int_0^3 y^{2/3}\, dy$$

$$V = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^3$$

$$V = \frac{9\sqrt[3]{9}}{5}\pi$$

$V \approx 11{,}76$ satuan volume

Metode Cincin



Gambar 2.10

Ada kalanya apabila sebuah benda putar kita potong-potong tegak lurus pada sumbu putarnya, kita memperoleh sebuah cakram yang di tengahnya ada lubangnya. Daerah demikian kita sebut cincin. Lihat Gambar 10.

Contoh 5.

Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x^3 + 3$ dengan $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu x.

Penyelesaian

$$V = \pi \int_a^b A(x)\, dx$$

$$V = \pi \int_0^4 4x^3 + 3\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{4}{4}x^4 + 3x\right]_0^4$$

$$V = \pi\big((4)^4 + 3(4) - (0)^4 + 3(0)\big)$$

$$V = \pi(256 + 12)$$

$V = 268\pi$ satuan volume

Contoh 6.

Tentukan volume benda apabila daerah yang dibatasi oleh parabol-parabol $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu $-x$.

Penyelesaian

$$V = \pi \int_a^b A(x)\, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$V = \frac{48}{5}\pi$ satuan volume

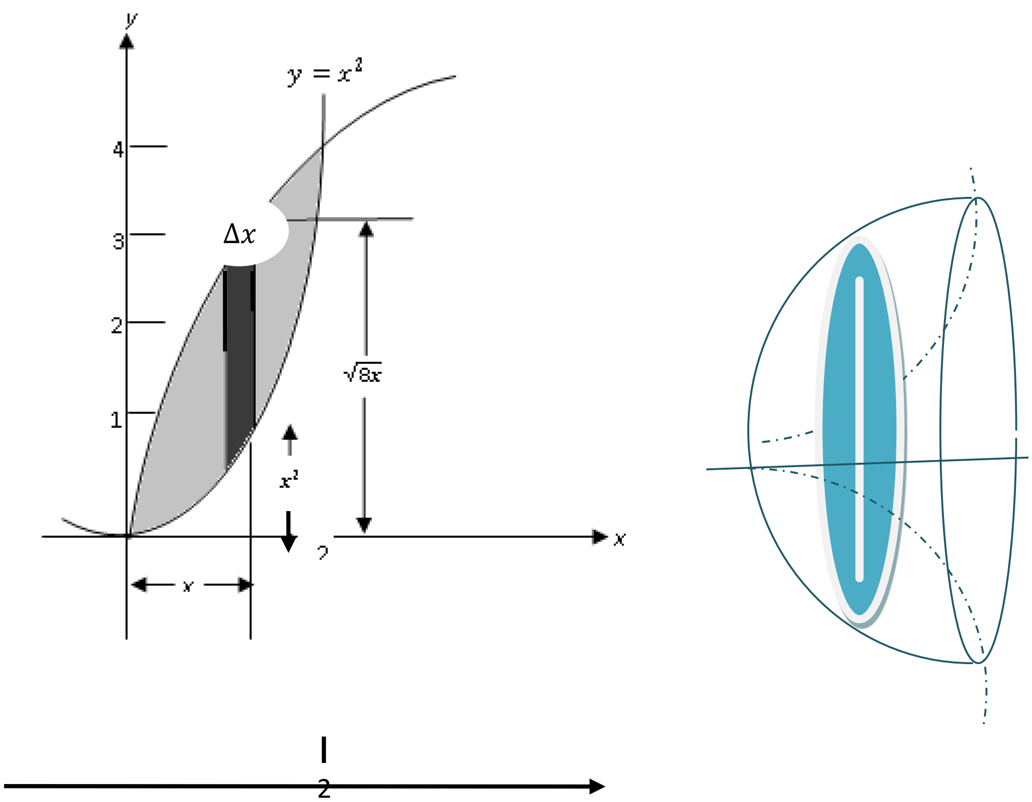
$V \approx 30{,}16$ satuan volume

Contoh 7.

Daerah setengah lingkaran yang dibatasi oleh kurva $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y diputar mengelilingi garis $x = -1$. Susunlah integral yang merumuskan volume benda putar itu.

$$\Delta v \approx \pi[(\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2]\Delta x$$

$$V = \int_0^2 \pi(8x - x^4)dx$$



Gambar 2.11

Penyelesaian

Jari-jari cincin adalah $\sqrt{4-y^2}+1$, sedangkan jari-jari dalam adalah 1. Lihat Gambar 11. Integral yang bersangkutan dapat disederhanakan. Bagian yang terletak di atas sumbu x, volumenya sama dengan bagian yang di bawah sumbu x. Jadi kita cukup mengintegralkan antara 0 dan 2 kemudian hasilnya dikalikan dua. Kita peroleh:

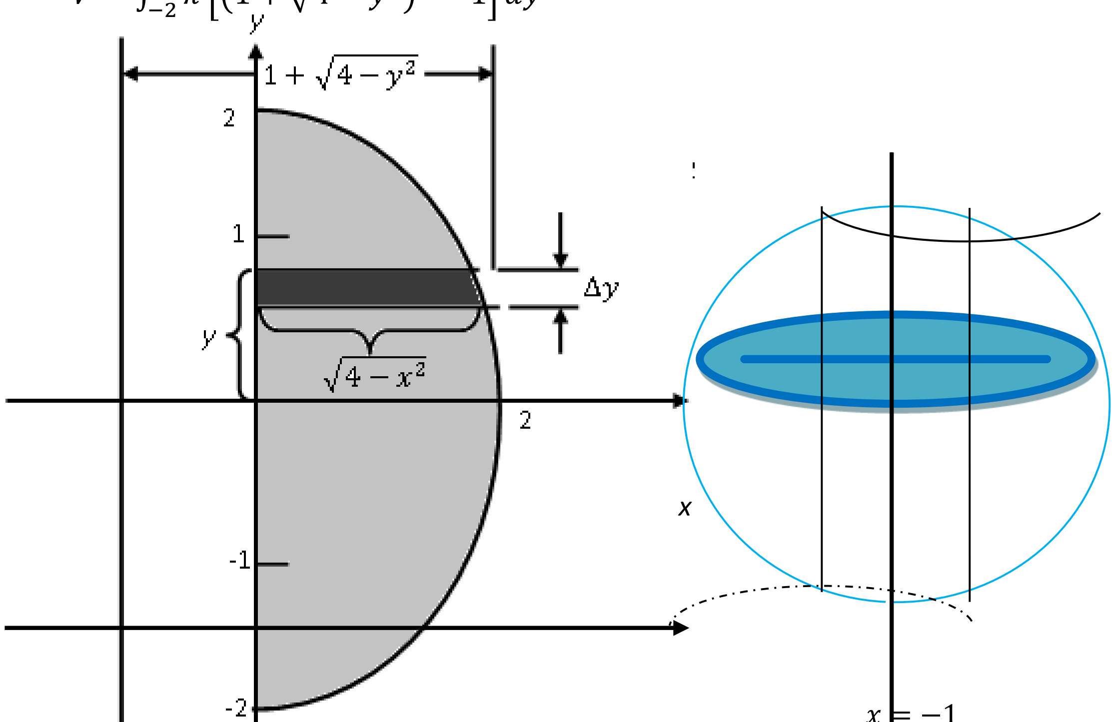
$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)^2 - 1 \right] dy$$

$$V = 2\pi \int_{0}^{2} \left[2\sqrt{4-y^2+4-y^2} \right] dy$$

Untuk menghitung integral tersebut lihatlah Soal 31.

$$\Delta v \approx \pi[1+\sqrt{4-y^2})^2 - 1]\Delta y$$

$$V = \int_{-2}^{2} \pi \left[\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)^2 - 1 \right] dy$$



Gambar 2.12

Benda Ruang Lain Yang Penampangnya Diketahui

Benda yang kita bahas memiliki daerah-daerah lingkaran sebagai penampang-penampang tegak. Metode yang kita gunakan tetap berlaku untuk benda-benda yang penampang tegaknya berbentuk bujur sangkar atau segitiga. Sesungguhnya yang kita perlukan ialah bahwa kita dapat menghitung luas penampang-penampang tersebut.

Contoh 8**.**

Buatlah gambar grafik dari data $y = x^2$, $x = 0$, dan $x = 2$ jika diputar mengelilingi sumbu x. Hitung volumenya.

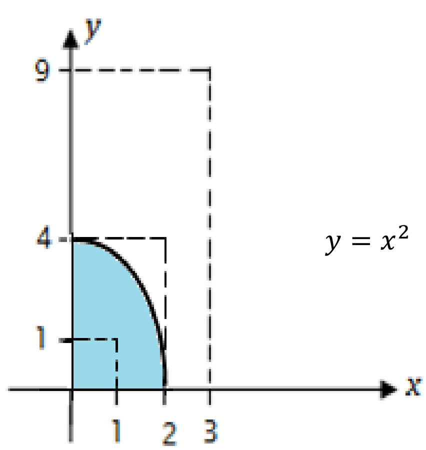
Penyelesaian

$y = x^2$

Substitusikan nilai x dimulai dari 0.

$x = 0$ maka $y = 0$.

$x = 1$ maka $y = 1$.



Gambar 13

Hitung volume.

$$V = \pi \int_a^b A(x)\, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^2\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{8}{3} - 0\right)$$

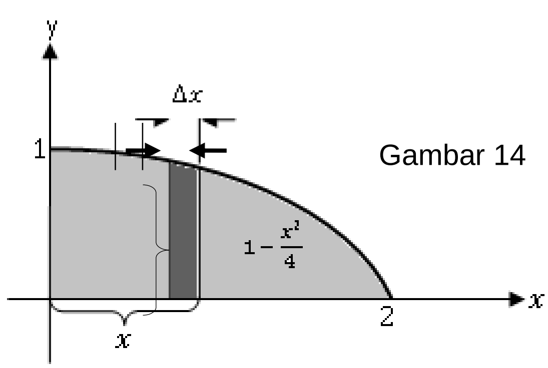
$$V = \frac{8}{3}\pi \text{ satuan volume}$$

Contoh 9.

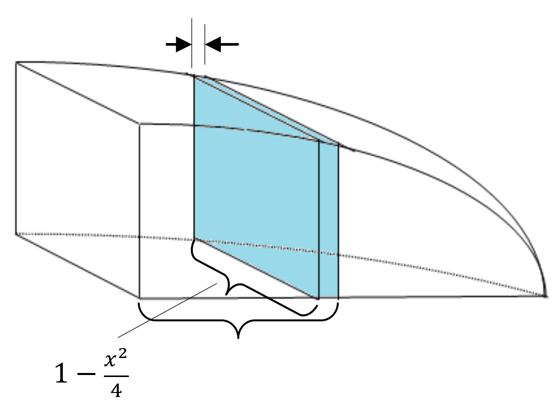
Andaikan alas sebuah benda adalah suatu daerah rata pada kuadran pertama yang dibatasi $y = \frac{-x^2}{4}$oleh sumbu x dan y. Andaikan penampang-penampang yang tegak lurus pada sumbu x berbentuk bujur sangkar. Tentukan volume benda ini.

Penyelesaian

Apabila kita potong-potong benda tegak lurus pada sumbu x kita peroleh lempeng-lempeng tipis yang berbentuk bujur sangkar.



Gambar 14



$$\Delta V \approx \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \Delta x$$

$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx$$

$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{16}\right) dx$$

$$V = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2$$

$$V = 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80}$$

$$V = \frac{4}{6} - \frac{2}{5}$$

$V = \frac{16}{15}$ satuan volume

$V \approx 1{,}07$ satuan volume

Contoh 10.

Buatlah gambar grafik dari persamaan $x = \sqrt{4 - y^2}$ bila diputar mengelilingi sumbu y. Hitunglah volumenya.

Penyelesaian

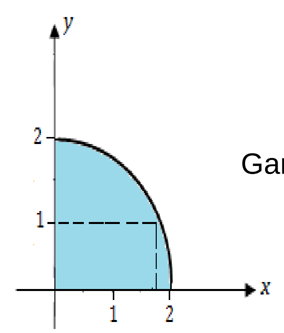
$x = \sqrt{4 - y^2}$

Substitusikan nilai y dimulai dari 0.

$y = 0$ maka $x = 2$.

$y = 1$ maka $x = 1{,}7$.

$y = 2$ maka $x = 0$



Gambar 15

$y = \sqrt{4 - x^2}$

$$x = \sqrt{4 - y^2}$$
$$x = (4 - y^2)^{1/2}$$

$$V = \pi \int_a^b A(y)\, dy$$

$$V = \pi \int_0^2 (4 - y^2)^{1/2}\, dy$$

$$V = \pi \left[\frac{2}{3}(4 - y^2)^{3/2}\right]_0^2$$

$$V = \frac{2}{3}\pi \left[\sqrt{(4 - y^2)^3}\right]_0^2$$

$$V = \frac{2}{3}\pi \left[\sqrt{(4 - 2^2)^3} - \sqrt{(4 - 0^2)^3}\right]$$

$$V = \frac{2}{3}\pi \left(\sqrt{0} - \sqrt{64}\right)$$

$$V = \frac{2}{3}\pi (-8)$$

$$V = \frac{-16}{3}\pi$$

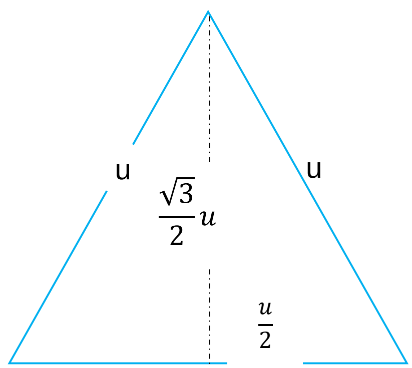
Karena volume tidak ada yang bernilai negatif, maka hasil harus dimutlakkan.

$$V = \left|\frac{-16}{3}\pi\right|$$

$V = \frac{16}{3}\pi$ satuan volume

Contoh 11.

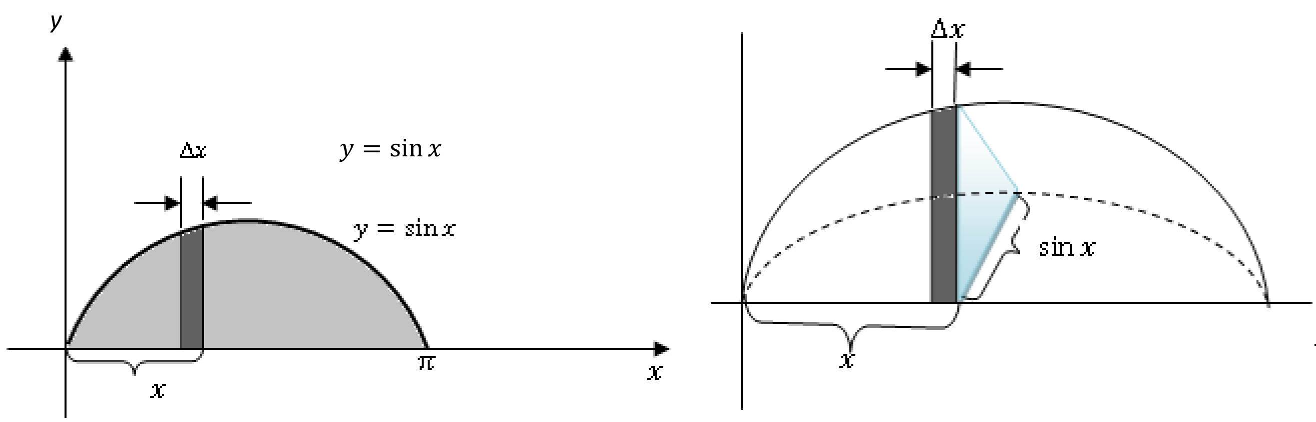
Alas sebuah benda diketahui merupakan daerah yang dibatasi oleh satu busur kurva $y = \sin x$ dan sumbu x. Tiap penampang yang tegaklurus pada sumbu x adalah sebuah segitiga sama sisi yang berdiri pada alasnya. Tentukan volume benda itu.



Gambar 2.16

$$A = \frac{1}{2}u\frac{\sqrt{3}}{2}u$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}u^2$$



Gambar 2.17

$$\Delta v \approx (\frac{\sqrt{3}}{4} sin^2 x)\Delta x$$

$$V = \int_0^\pi (\frac{\sqrt{3}}{4} sin^2\, x)\; dx$$

Penyelesaian

Kita ingat bahwa luas segitiga sama sisi dengan panjang sisi u adalah $\sqrt{3}\frac{u^2}{4}$. Untuk melakukan pengintegralan kita menggunakan $\sin^2 x = \frac{(1-\cos 2x)}{2}$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8} \int_0^\pi (1-\cos 2x) dx$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8} \left[\int_0^\pi 1\, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x\, .\; 2\, dx \right]$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right]_0^\pi$$

$V = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$ satuan volume

$V \approx 0{,}68$ satuan volume

Contoh 12.

Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 1$ antara $y = 0$ dan $y = 3$ jika diputar mengelilingi sumbu y.

Penyelesaian

$$V = \pi \int_a^b A(y)\; dy$$

$$V = \pi \int_0^3 (y+1)^{1/2} \; dy$$

$$V = \pi \; \left[\frac{2}{3}(y+1)^{3/2}\right]_0^3$$

$$V = \frac{2}{3}\pi\left[\sqrt{(y+1)^3}\right]_0^3$$

$V = \frac{2}{3}\pi(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3})$

$$V = \frac{2}{3}\pi(8-1)$$

$$V = \frac{2}{3}\pi(7)$$

$V = \frac{14}{3}\pi$ satuan volume

Contoh 13.

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika bidang datar yang dibatasi oleh kurva $y = x$, sumbu x, dari garis $x = 6$ diputar mengelilingi sumbu x.

Penyelesaian

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \; dx$$

$$V = \pi \int_0^6 (x)^2 \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^6$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{1}{3} \times 6^3\right) - \left(\frac{1}{3} \times 0^3\right)\right]$$

$$V = \pi[(72) - (0)]$$

$V = 72\pi$ satuan volume

Contoh 14.

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika bidang datar yang dibatasi oleh kurva $y = x^{-1}$, $x = -1$, dan $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu x.

Penyelesaian

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{3} [x^{-1}]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{3} x^{-2} \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{3}$$

$$V = \pi \left(\frac{-1}{-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)\right)$$

$$V = \pi \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$V = \frac{4}{3}\pi$ satuan volume

2.2 Soal Isian

1. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika bidang datar yang dibatasi oleh kurva $y = x$, sumbu x, dan garis $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360^{o}.

$$V = \pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{0}^{3} (x)^2 \, dx$$

$$V = \cdots$$

$$V = \cdots$$

$$V = \cdots$$

$V = 9\pi$ satuan volume

2. Tentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cincin silinder yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2^x$ diputar mengelilingi sumbu y.

$$V_y = \pi \int_{a}^{b} ({y_1}^2 - {y_2}^2) \, dy$$

$$V_y = \pi \int_{0}^{4} \left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{1}{2} y\right)^2 \right] dy$$

$$V_y = \cdots$$

$V_y = \cdots$

$V_y = \cdots$

$V_y = \cdots$

$V_y = \cdots$

$V_y = 2\pi\left(\frac{4}{3}\right)$

$V_y = \dfrac{8}{3}\pi$

$V_y = 2\frac{2}{3}\pi$ satuan volume

3. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh sumbu y. Kurva $y = x^2$, garis $y = 2$ dan garis $y = 5$ diputar mengelilingi sumbu y.

$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2\, dy$

$V = \pi \int_2^5 \left(\sqrt{y}\right)^2\, dy$

$V = \cdots$

$V = \cdots$

$V = \cdots$

$V = \frac{21}{2}\pi$ satuan volume

4. Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh daerah T yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{2x}$, sumbu x dan garis $x = 2$, apabila T diputar mengelilingi sumbu x.

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{\cdots}{\cdots}\right]_{\cdots}^{\cdots}$$

$$V = \cdots$$

$V = 4\pi$ satuan volume

5. Tentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram yang terbentuk dari daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x, dan

$0 \leq x \leq 2$, jika diputar secara sumbu x.

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V_x = \pi \int_0^2 (x^2)^2 \, dx$$

$$V_x = \cdots$$

$$V_x = \cdots$$

$$V_x = \cdots$$

$V_x = \frac{32}{5}\pi$ satuan volume

6. Tentukan volume benda putar yang di bentuk oleh putaran daerah yang dibatasi oleh grafik dari $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ terhadap sumbu x.

$$V = \pi \int_a^b ({x_1}^2 - {x_2}^2) \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right] dx$$

$V = \cdots$

$V = \frac{3}{10}\pi$ satuan volume

7. Tentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cincin dari

$y = \sqrt{x}$ dan $x = 4, y = 0$ yang mengelilingi sumbu y.

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_0^4 (y^2)^2 \, dy$$

$V = \cdots$

$V = \cdots$

$V = \frac{32}{5}\pi$ satuan volume

8. Tentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram dari

$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ dengan batas $x = 0$ dan $x = 3$, dengan mengelilingi sumbu x.

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^3 (2x^{-1/2})^2 \, dx$$

$V = \cdots$

$V = \cdots$

$V = \cdots$

$V = \frac{4}{3}\pi$ satuan volume

9. Tentukan volume benda putar dari $y = \sqrt{x}$ dengan batas $y = -1$ dan $y = 1$, dengan mengelilingi sumbu y.

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 (y^2)^2 \, dy$$

$V = \cdots$

$V = \cdots$

$V = \frac{2}{5}\pi$ satuan volume

10. Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $x = (y-2)^2$ dan garis $x + y = 4$ diputar mengelilingi sumbu y, maka hitunglah volume benda putar yang terjadi dengan menggunakan metode cakram.

$$V_y = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2) \, dy$$

$$V_y = \pi \int_0^3 [(4-y)^2 - (y-2)^2)] \, dy$$

$V_y = \cdots$

$V_y = \cdots$

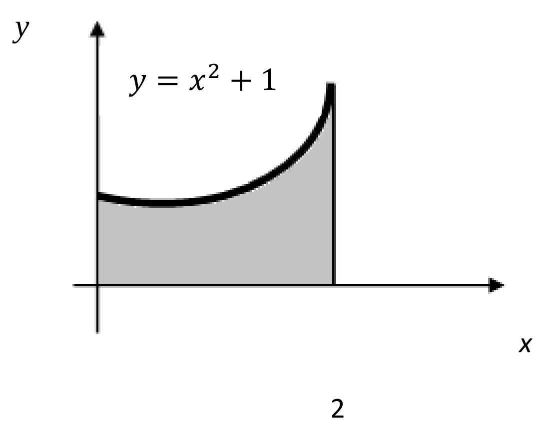
$V_y = \pi\left(21 - 6\frac{3}{5}\right)$

$V_y = 14\frac{2}{5}\pi$ satuan volume

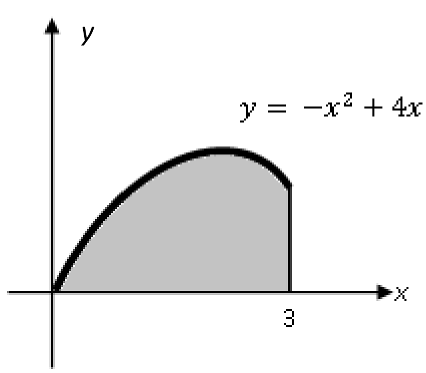
2.3. Soal Tambahan

Dalam Soal-soal 1 hingga 4, tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang diberikan; potong, diaproksimasi, diintegralkan.

1. sumbu-x

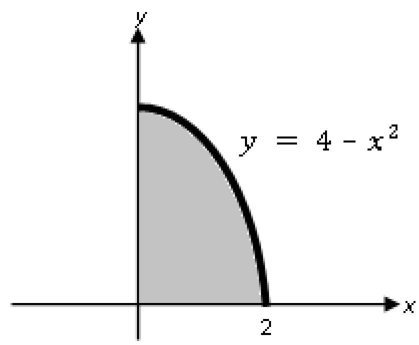


2. sumbu-x



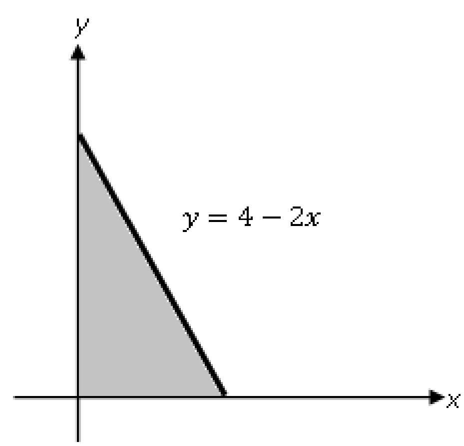
3. (a) sumbu-x

(b) sumbu-y



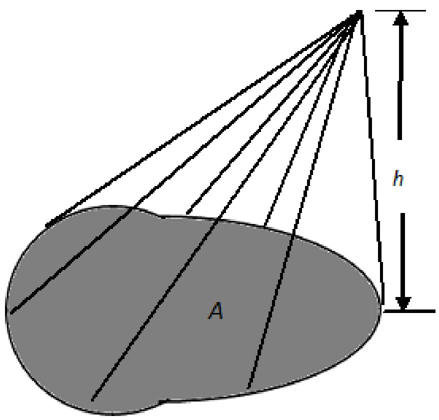
4. (a) sumbu-x

(b) sumbu-y



Dalam Soal-soal 5 hingga 10, buatlah sketsa daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diketahui. Perlihatkan sebuah jalur persegi-panjang yang tegak. Kemudian tentukan volume benda yang terbentuk apabila R diputar mengelilingi sumbu x.

5. $y = \frac{x^2}{4}, x = 4, y = 0$
6. $y = x^3, x = 2, y = 0$
7. $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$
8. $y = x^{3/2}$, $y = 0$, antara $x = 1$ dan $x = 3$.
9. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, antara $x = -1$ dan $x = 2$.



Gambar 17

10. Nyatakanlah tujuan prinsip Cavaleri untuk volume (lihat Soal 10 pada Pasal 6.1).

Tentukan volume yang dibentuk apabila diputar mengelilingi sumbu x.

11. $y = 4x + 1$, antara $x = 4$ dan

Gambar 18

12. $y = 6x + 1$, antara $x = 0$ dan $y = 0$
13. $y = 3x^{1/2}$, antara $x = 4$ dan $x = 0$
14. $y = \sqrt{9 - x^2}$, antara $x = 3$ dan $x = 0$
15. $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$,antara $x = 9$ dan $x = 1$
16. $y = \frac{2}{x^2}$, antara $x = 2$ dan $x = 0$
17. $x = \sqrt{y}$, antara $x = 4$, $x = 2$, dan $y = 0$
18. $x = y^3$, antara $x = 4$ dan $x = 1$
19. $x = 4y^2$, antara $x = 9$ dan $x = 4$
20. $x = \sqrt{y} - 2$, antara $x = 1$ dan $x = 0$

Tentukan volume yang dibentuk apabila diputar mengelilingi sumbu y.

21. $x = y - 2$, antara $y = 1$, $y = 4$
22. $x = y^2 - 4$, antara $y = 1$ dan $y = 2$
23. $x + y^2 = 3$, antara $y = 1$, $y = 2$
24. $x^2 + 3 = y$, antara $y = 4$ dan $y = 7$
25. $\frac{x^2}{2} = y$, antara $y = 0$ dan $y = 2$

26. $\sqrt{x} - 2 = y$, antara $y = 1$ dan $y = 4$

27. $\sqrt[3]{x} + 1 = y$, antara $y = -2$ dan $y = 3$

28. $\frac{1}{x} = y^2$, antara $y = -6$ dan $y = -2$

29. $\frac{2}{x^3} = y$, antara $y = 2$ dan $y = -1$

30. $\frac{x^3}{y^2} = 1$, antara $y = 1$ dan $y = 8$

Dalam Soal-soal 31 hingga 37, gambarlah daerah *R* yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diberikan. Perlihatkanlah jalur persegi panjang yang mendatar. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila *R* diputar mengelilingi sumbu *y*.

31. $x = y^2, x = 0, y = 2$

32. $x = \frac{2}{y}, y = 1, y = 6, x = 0$

33. $x = \sqrt{y}, y = 4, x = 0$

34. $x = y^{2/3}, y = 8, x = 0$

35. $x = y^{3/2}, y = 4, x = 0$

36. $x = \sqrt{9 - y^2}, x = 0$

37. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila bagian atas elips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

diputar mengelilingi sumbu x. Dengan demikian dapat dihitung volume benda yang disebut sferoid; a dan b konstanta dan $a > b$.

38. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis $y = 4x$ dan parabola $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu x. Gambarlah.

39. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis $x - 2y = 0$ dan parabol $y^2 - 2x = 0$

diputar mengelilingi sumbu x. Gambarlah.

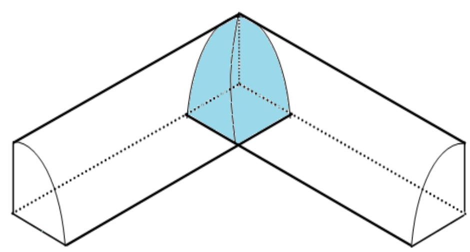
40. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, sumbu x dan garis $x = r - h$, $0 < h < r$, diputar mengelilingi sumbu x. Benda yang terjadi adalah tembereng bola dengan tinggi h dan bola berjari-jari r.
41. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada bidang xy yang dibatasi oleh garis $y = 4x$ dan parabol $y = 4x^2$ diputar mengelilingi sumbu y. Gambarlah.
42. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh parabol-parabol $3x^2 - 16y + 48 = 0$ dan $x^2 - 16y + 80 = 0$ dan sumbu y diputar mengelilingi garis $y = 2$. Gambarlah.
43. Alas sebuah benda adalah daerah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Tentukan volume benda tersebut apabila tiap penampang oleh bidang yang tegaklurus pada sumbu x adalah bujur sangkar. Petunjuk : Lihat Contoh 5 dan 6.
44. Seperti Soal nomor 23 akan tetapi penampang benda dengan bidang yang tegaklurus pada sumbu x adalah segi-tiga sama kaki yang alasnya terletak pada bidang xy dengan tinggi 4. Petunjuk : Untuk melengkapi perhitungan, anggaplah

$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx$ sebagai luas (daerah) setengah lingkaran.

45. Alas sebuah benda dibatasi oleh satu busur dan kurva $y = \sqrt{\cos x}$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, dan sumbu x. Tiap penampang benda dengan benda yang tegaklurus pada sumbu x berbentuk bujur sangkar yang alasnya terletak pada bidang kurva tadi. Tentukan volume benda itu.

46. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2$ dan $y = 1 - x^4$. Penampang benda dengan bidang-bidang tegaklurus pada sumbu x adalah bujur sangkar. Tentukan volume benda itu.

47. Tentukan volume satu oktan (seperdelapan) benda yang merupakan daerah sekutu dua tabung lingkaran tegak dengan jari-jari masing-masing 1, dan yang sumbu -sumbunya berpotongan tegaklurus. Petunjuk : Penampang yang mendatar adalah bujur sangkar (lihatlah gambar).



Gambar 2.19

48. Alas sebuah benda adalah suatu daerah R yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$. Tiap penampang dengan bidang yang tegaklurus pada sumbu x adalah setengah lingkaran dengan garis tengah yang melintasi daerah R tersebut. Tentukan volume itu.

49. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada kuadran pertama yang dibatasi oleh kurva $y^2 = x^3$, garis $x = 4$ dan sumbu x diputar mengelilingi (a) garis $x = 4$; (b) garis $y = 8$.

50. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh $y^2 = x^3$, garis $y = 8$ dan sumbu y diputar mengelilingi (a) garis $x = 4$; (b) garis $y = 8$.

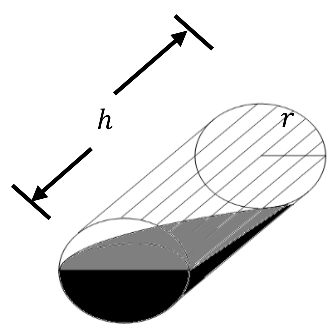
51. Lengkapkanlah perhitungan integral dalam Contoh 4, dengan mengingat bahwa

$$\int_0^2 \left[2\sqrt{4-y^2} + 4 - y^2\right] dy$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\, dy + \int_0^2 (4-y^2) dy$$

Kemudian anggaplah integral yang pertama sebagai luas daerah seperempat lingkaran.

52. Sebuah tong kayu terbuka dengan jari-jari r dan tinggi h pada mulanya penuh dengan air. Tong ini dimiringkan sampai pada tingkat air persis sama dengan garis tengah dasarnya dan muka tepat menyentuh tepi/bibir tong bagian atas. Carilah volume air yang tinggal di dalam tong tersebut.



53. Sebuah pasak didapat dari pemotongan sisi kanan silinder pejal yang berjari-jari r. Permukaan bagian atas pasak tersebut berada pada suatu bidang yang melalui diameter $a$dari lingkar alas silinder dan membentuk sudut θ dengan alas. Carilah volume dari pasak tersebut.

54. (Jam air) Sebuah tangki air diperoleh dengan memutar kurva $y = kx^4$, k>0 terhadap sumbu-y.

(a) Carilah $V(y)$, volume air dalam tangki sebagai fungsi kedalaman y.

(b) Air menetes melalui suatu lubang kecil sesuai dengan hukum Torricelli ($dV/dt = -m\sqrt{y}$). Tunjukkan bahwa ketinggian air turun dengan tingkat konstan.

55. Tunjukkan bahwa volume dari kerucut pada umumnya adalah $\frac{1}{3}Ah$, di mana A adalah luas dasar dan h tingginya. Gunakan hasil ini untuk mendapatkan rumus volume dari:

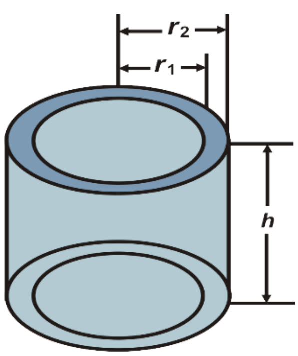
(a) Sebuah kerucut dengan alas lingkaran berjari-jari r dan tinggi h;

(b) Sebuah tetrahedron beraturan dengan panjang r

BAB 3
VOLUME BENDA PUTAR (KULIT TABUNG)

3.1 Volume Benda Putar (Kulit Tabung)

Ada cara lain untuk menghitung volume benda putar, yaitu metode kulit tabung. Untuk berbagai persoalan, metode ini lebih mudah digunakan ketimbang metode cakram atau metode cincin. Sebuah kulit tabung adalah sebuah benda yang dibatasi oleh dua tabung lingkaran tegak yang sumbu simetrinya berimpit (Gambar1). Apabila jari-jari tabung dalam adalah r_1, dan jari-jari tabung luar adalah r_2, sedangkan tinggi tabung adalah h, maka volume kulit tabung adalah



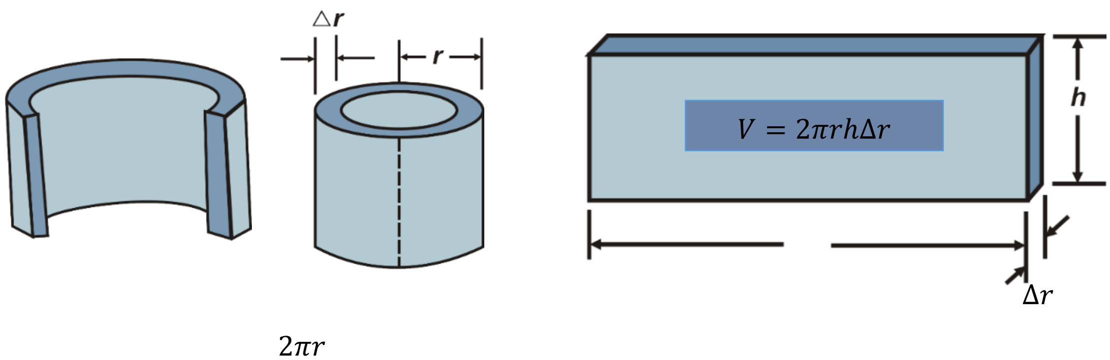
$$V = (\text{luas alas}) \cdot (\text{tinggi})$$
$$= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h$$
$$=\pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$
$$=2\pi(\tfrac{r_1 + r_2}{2})h(r_2 - r_1)$$

Gambar 3.1

Sehingga

$$V = 2\pi\ x\ (jari - jari)\ x\ (tinggi) x\ (tebal)$$
$$= 2\pi rh\ \Delta r$$

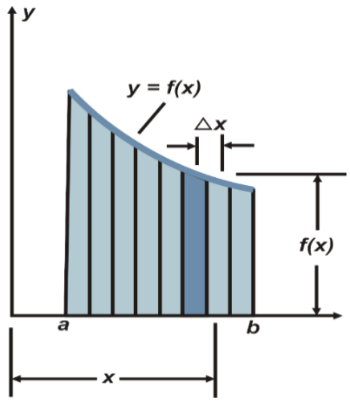
Cara termudah untuk mengingat rumus tersebut adalah sebagai tersebut adalah sebagai berikut: Apabila kulit tabung sangat tipis dan terbuat dari kertas, kita dapat memotongnya sepanjang garis yang sejajar sumbu simetri dan kemudia membukanya. Maka akan kita peroleh selembar persegi-panjang, yang memiliki ketebalan. Volume dari benda ini, yang berbentuk lempeng, dapat kita hitung



Gambar 3. 2

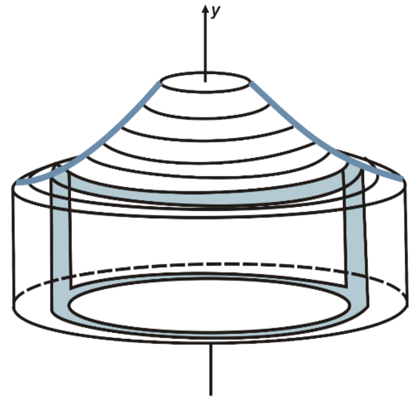
Metode Kulit Tabung

Perhatikan sebuah daerah seperti pada gambar 3 dan gambar 4. Potong-potongalah jalur-jalur yang vertikal dan kemudia putarlah mengelilingi sumbu y. Maka akan terbentuklah sebuah benda putar dan tiap jalur akan membentuk sebuah benda yang menyerupai suatu kulit terbang. Untuk memperoleh volume kulit tabung ini, kita hitung volume ΔV sesuatu kulit tabung, jumlahkan dan kemudia tarik limit jumlah ini apabila tebal kulit tabung makin menipis (menuju nol). Limit ini akan menghasilkan sebuah integral.



$$\Delta V \approx 2\pi\, x\, f\,(x)\, \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$



Gambar 3.3 Gambar 3.4

Contoh 1

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 1/\sqrt{x}$, sumbu x, garis $x = 1$ dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu y. Tentukan volume benda yang terbentuk.

Penyelesaiaan*:*

Pada gambar 3 dan gambar 4 dapat dikatakan mendekati kebenaran

Sehingga $V = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

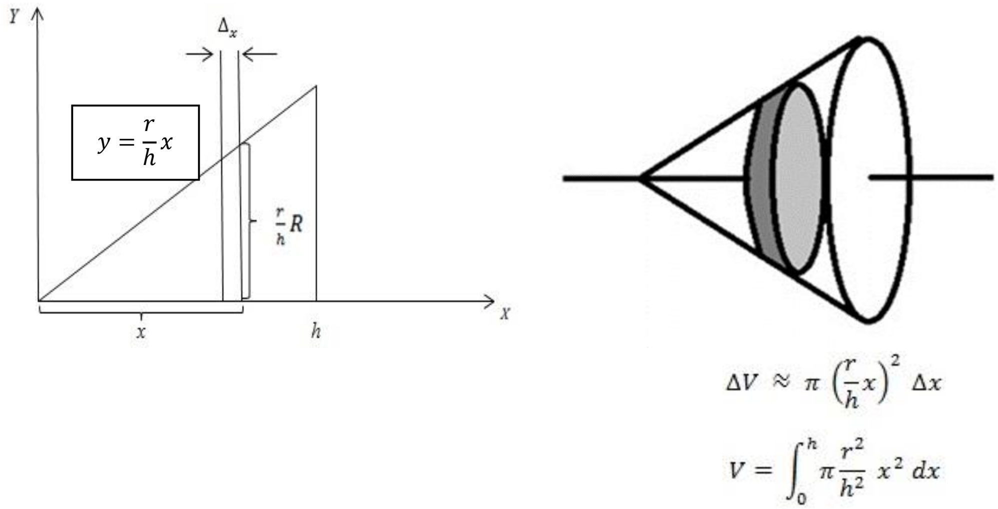
$= 2\pi \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\ dx$

$= 2\pi \left[\frac{2}{3}.8 - \frac{2}{3}.1\right]$

$= \frac{28\pi}{3}$

$\approx 29{,}32\ \pi$

Contoh 2



Gambar 3.5

Daerah yang dibatasi oleh garis $y = \left(\frac{r}{h}\right) x,$ sumbu x dan garis $x = h$ diputar mengelilingi sumbu x. Diperoleh sebuah kerucut (diandalkan $r > 0, h > 0$). Tentukan volume kerucut itu dengan menggunakan metode cakram dan metode kulit tabung.

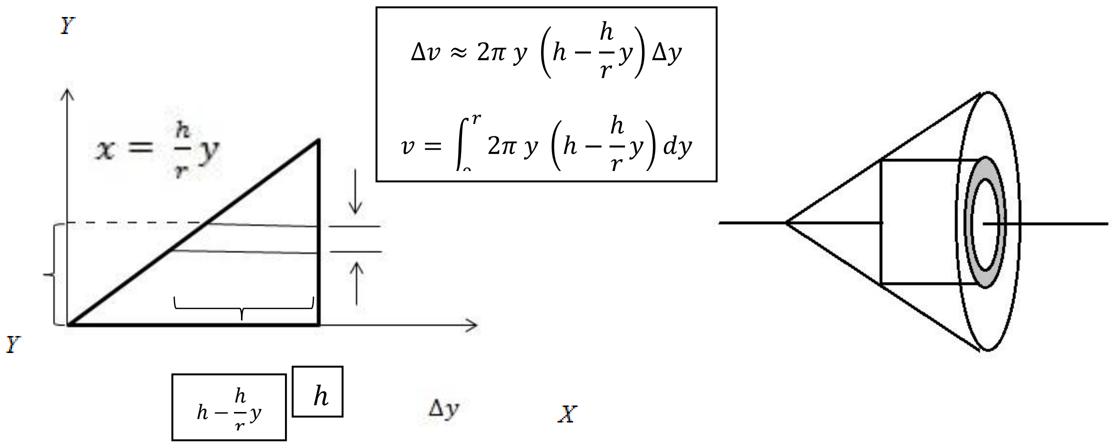
Penyelesaian (Metode Cakram). Ikutilah langkah – langkah pada Gambar 4.

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx$$

$$= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right] \begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2}$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



Gambar 3.6

(Metode Kulit Tabung). Lihat gambar 3.6

$$V = 2\pi h \int_0^r (y - \frac{1}{r}\, y^2)\, dy$$

$$= 2\pi h \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3r}\right]_0^r$$

$$= 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

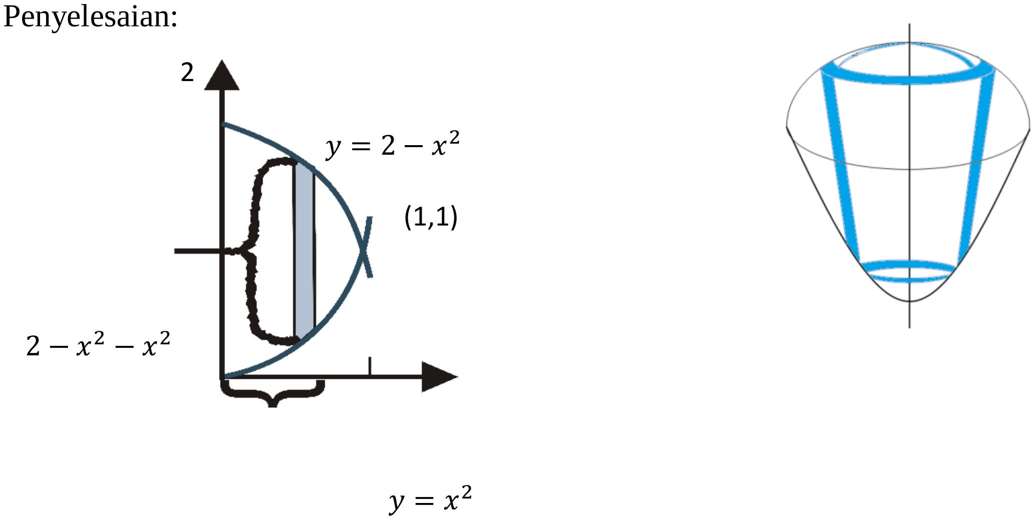
Sudah barang tentu kedua metode di atas harus menghasilkan rumus untuk volume kerucut yang kita kenal sejak lama.

Contoh 3

Tentukan volume benda yang terbenruk apabila daerah ada kuadran pertama yang terletak diatas para bola $y = x^2$ dan dibawah parabol $y = 2 - x^2$, diputar mengelilingi sumbu y.

y

Penyelesaian:



$\Delta V \approx 2\pi(2 - x^2 - x^2)\Delta x$

x

$$V = \int_0^1 2\pi x(2 - 2x^2)dx$$

Gambar 3.7

Apabila kita melihat pada gambar 3.7 bagian kiri, maka menggunakan jalur-jalur datar bukanlah pilihan yang terbaik (karena batas kanan terdiri atas bagian-bagian dari dua kurva, sehingga diperlukan dua integral). Sebaiknya kita menggunakan jalur-jalur yang tegak.

Kemudian kita gunakan metode kulit tabung. Kita peroleh

$$V = 4\pi \int_0^1 (x - x^3)\, dx$$

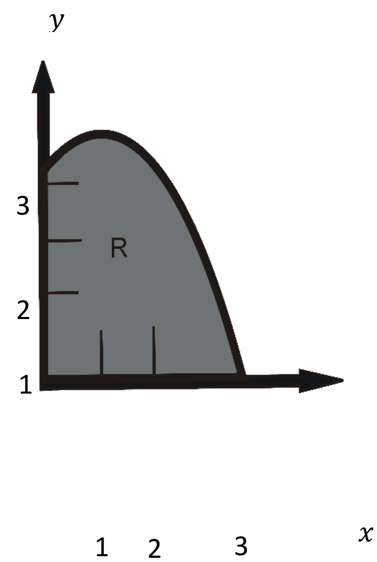
$$= 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \pi \approx 3{,}14$$

Contoh 4

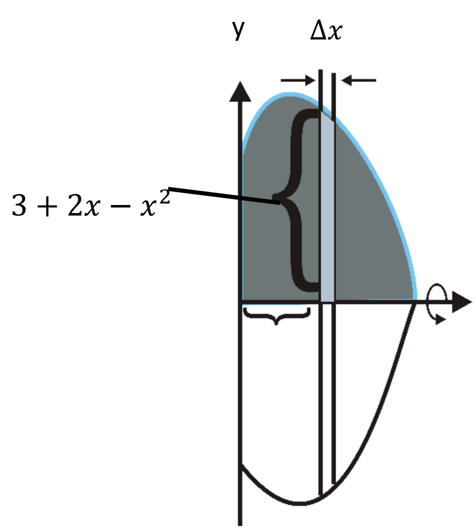
Bentuklah sebuah integral untuk volume benda yang terbentuk apabila daerah R yang ada pada gambar 8 diputar mengelilngi : (a) sumbu x ; (b) sumbu y ; (c) garis $y = -10$ dan (d) garis $x = 4$.



Gambar 3.8

Penyelesaian:

(a)



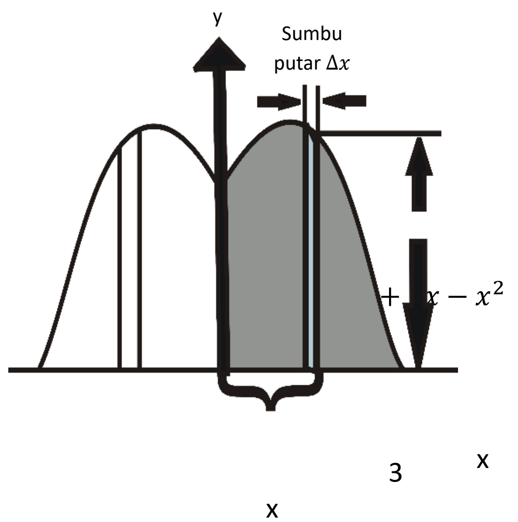
Metode cakram

x 3

$$\Delta V = \pi(3 + 2x - x^2)^2$$

$$V = \pi \int_0^3 (3 + 2x - x^2)^2 dx$$

(b)

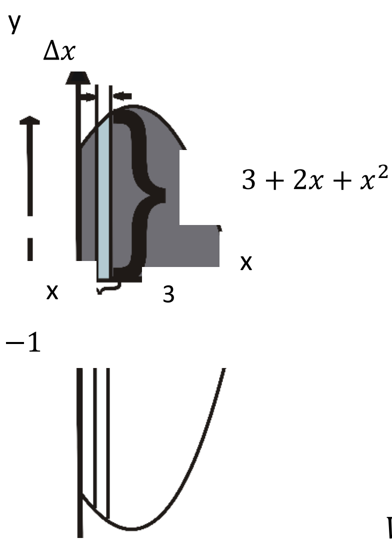


Metode kulit tabung

$$\Delta V \approx 2\pi \times (3 + 2x - x^2)\Delta x$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x(3 + 2x - x^2) dx$$

(c)



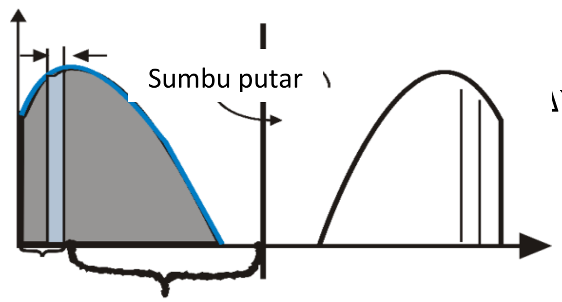
Metode cincin

Sumbu putar: $y = -1$

$$\Delta V \approx \pi[(4 + 2x - x^2)^2 - 1^2]$$

$$V = \pi \int_0^3 [(4 + 2x - x^2)^2 - 1] dx$$

(d)



Metode kulit tabung

$\Delta V \approx 2\pi(4 - \mathrm{x})(3 + 2\mathrm{x} - x^2)\Delta x$

$\int_0^3 (4 - x)(3 + 2x - x^2)dx$

X $\quad 4 - x$

x 3

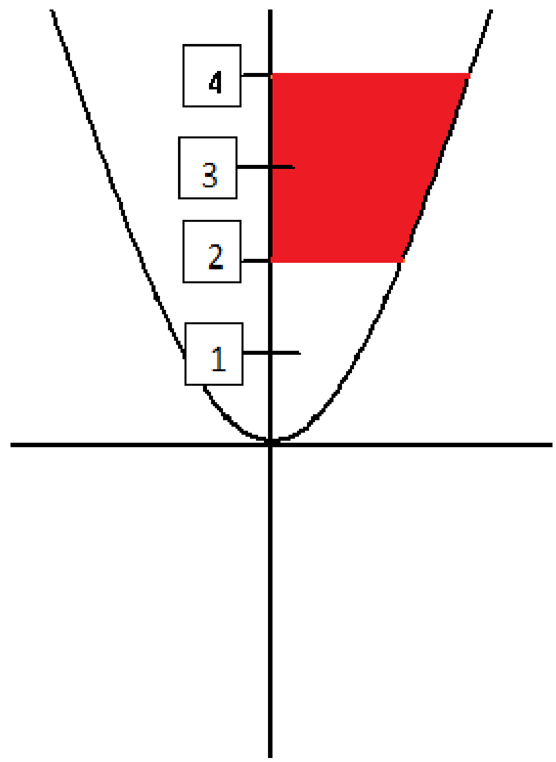
$x = 4$

Contoh 5

Tentukan volume benda putar yang dibatasi kurva $y = x^2$, garis $y = 2$, garis $y = 4$, dan sumbu y yang diputar mengelilingi sumbu y.

Penyelesaian :

Ubah $f(x)$ menjadi $f(y)$



$f(x) = x^2$

$y = x^2$

$x^2 = y$

$x = \sqrt{y}$

$v = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy$

$v = \pi \int_2^4 [\sqrt{y}]^2 \, dy$

$v = \pi \int_2^4 [y] \, dy$

$v = \pi \left[\frac{1}{2} y^2\right]_2^4$

$v = \pi \left[\left(\frac{1}{2}(4)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2\right)\right]$

$v = \pi \, [8 - 2]$

$v = 6\pi$ satuan volume

Contoh 6

Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh fungsi $f(x) = 4 - x^2$, sumbu x, dan sumbu y yang diputar 360° terhadap sumbu y.

Penyelesaian :

Mencari titik potong

$y = 4 - x^2$

jika $x = 0$,

$y = 4 - (0)^2$

$y = 4$

maka $(0\ , 4)$

jika $y = 0$

$0 = 4 - x^2$

$x^2 - 4 = 0$

$(x + 2)\ (x - 2)$

$x = -2$ atau $x = 2$

maka $(-2\,,0)\ (2\,,0$

ubah $f(x)$ menjadi $f(y)$

$f(x)\ =\ 4 - x^2$

$y\ =\ 4 - x^2$

$x^2\ =\ 4 - y$

$x = \sqrt{4-y}$

$v = \pi \int_a^b [f(y)]^2\, dy$

$v = \pi \int_0^4 \left[\sqrt{4-y}\right]^2 dy$

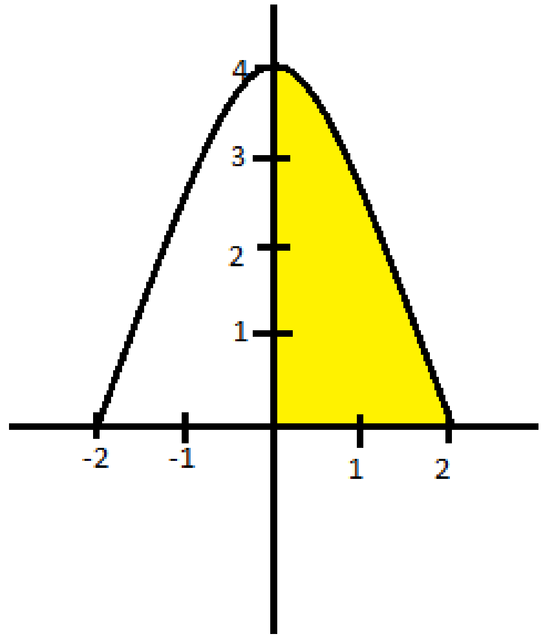
$v = \pi \int_0^4 [4-y]\, dy$

$v = \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^4$

$v = \pi \left[\left(4(4) - \frac{1}{2}(4)^2\right) - (0)\right]$

$v = \pi\,[16 - 8]$

$v = 8\pi$ satuan volume



Contoh 7

Volume benda putar yang dibatasi kurva $y = x^3 - 4x^2$; $0 \leq x \leq 2$ dan diputar terhadap sumbu x.

Penyelesaian :

mencari titik potong

$y = x^3 - 4x^2$

jika $y = 0$,

$0 = x^3 - 4x^2$

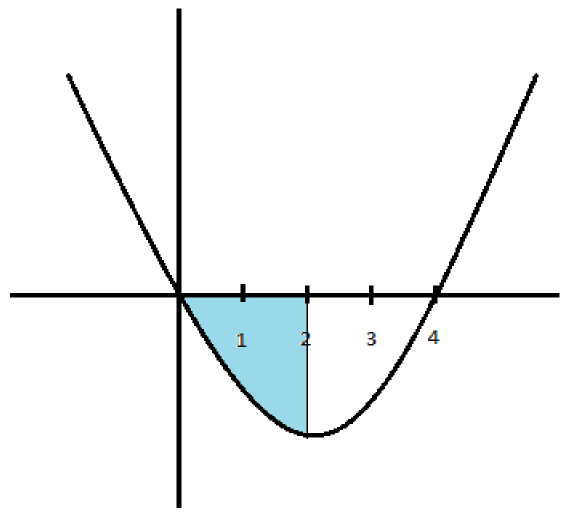
$x^3 - 4x^2 = 0$

$x^2(x - 4)$

$x^2 = 0 \; atau \; x = 4$

$x = 0 \; atau \; x = 4$

maka $(0 , 0)$ $(4 , 0)$



$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$v = \pi \int_0^2 [x^3 - 4x^2]^2 \, dx$$

$$v = \pi \int_0^2 [x^6 - 8x^5 + 16x^4] \, dx$$

$$v = \pi \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{16}{5}x^5\right]_0^2$$

$$v = \pi \left[\left(\frac{1}{7}(2)^7 - \frac{4}{3}(2)^6 + \frac{16}{5}(2)^5\right) - (0)\right]$$

$v = \pi \left[\frac{128}{7} - \frac{256}{3} + \frac{512}{5}\right]$

$v = \pi \left[\frac{1920 - 8960 + 10752}{105}\right]$

$v = \pi \left[\frac{3712}{105}\right]$

$v = 35\frac{37}{105}\pi$ satuan volume

Contoh 8

Volume benda putar jika daerah yang dibatasi kurva $y = -x^2 + 4$ dan $y = -2x + 4$ yang diputar $360°$ mengelilingi sumbu y.

Penyelesaian :

Mencari titik potong

(i) $y = -x^2 + 4$

jika $x = 0$,

$y = (0)2 + 4$

$y = 4$

maka $(0 , 4)$

jika $y = 0$,

$0 = -x^2 + 4$

$x^2 - 4 = 0$

$(x + 2)\,(x - 2)$

$x = -2\; atau\; x = 2$

maka $(-2 , 0)$ $(2 , 0)$

(ii) $y = -2x + 4$

jika $x = 0$

$y = -2(0) + 4$

$y = 4$

maka $(0 , 4)$

jika $y = 0$

$0 = -2x + 4$

$2x = 4$

$x = 2$maka $(2 , 0)$

ubah $y = \ldots$ menjadi $x = \ldots$

(i) $y = -x^2 + 4$

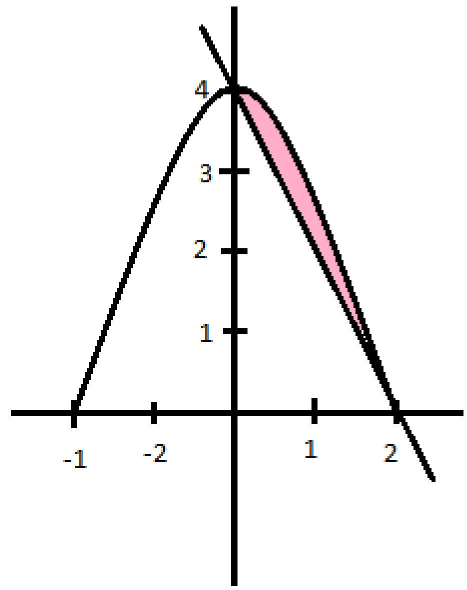
$x^2 = y$ – $4x$

$= \sqrt{4 - y}$

(ii) $y = -2x + 4$

$$2x = 4 - y$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}y$$



mencari batas

$$x = x$$

$$\left(\sqrt{4-y}\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{2}y\right)^2$$

$$4 - y = \frac{1}{4}y^2 - 2y + 4$$

$$\frac{1}{4}y^2 - y = 0$$

$$y^2 - 4y = 0$$

$$y(y-4)$$

$y = 0$ atau $y = 4$

maka batasnya $= 0 - 4$

$$v = \pi \int_a^b [(f_1(y)^2) - (f_2(y)^2)]\, dy$$

$$v = \pi \int_0^4 \left[\left(\sqrt{4-y}\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{2}y\right)^2\right] dy$$

$$v = \pi \int_0^4 \left[(4-y) - \left(\frac{1}{4}y^2 - 2y + 4\right)\right] dy$$

$$v = \pi \int_0^4 \left[-\frac{1}{4}y^2 + y\right] dy$$

$$v = \pi\left[-\frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^4$$

$$v = \pi\left[\left(-\frac{64}{12} + \frac{16}{2}\right) - (0)\right]$$

$$v = \pi\left(\frac{-64 + 96}{12}\right)$$

$$v = \frac{32}{12}\pi$$

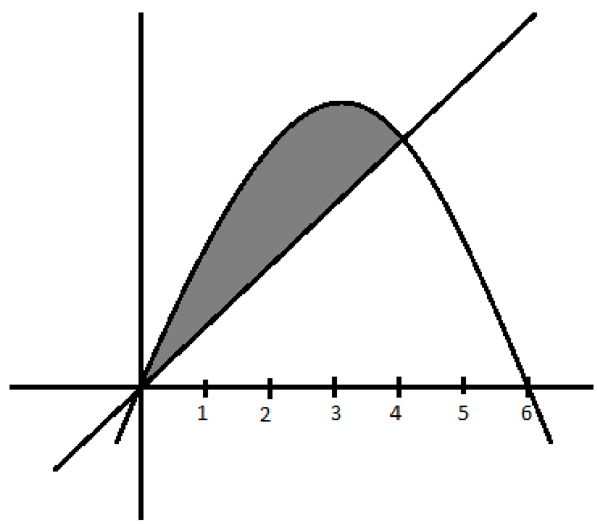
$v = \frac{8}{3}\pi$ satuan volume

Contoh 9

Tentukan volume benda putar jika daerah yang dibatasi kurva $y = 6x - x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh $360°$.

Penyelesaian :

mencari titik potong:



$y = 6x - x^2$

jika $x = 0$,

$y = 6(0) - (0)^2$

$y = 0$

maka $(0 , 0)$

jika $y = 0$

$0 = 6x - x^2$

$x^2 - 6x = 0$

$x\,(x - 6)$

$x = 0$ atau $x = 6$

maka (0 , 0) (6 , 0)

menentukan batas

$y = y$

$x = 6x – x^2$

$x^2 – 5x = 0$

$x (x - 5)$

$x = 0$ atau $x = 5$

maka batasnya $= 0 – 5$

$$v = \pi \int_a^b [(f_1(x)^2) - (f_2(x)^2)]\, dx$$

$$v = \pi \int_0^5 [(6x - x^2)^2 - (x)^2] dx$$

$$v = \pi \int_0^5 [x^4 - 12x^3 + 35x^2] dx$$

$$v = \pi \left[\frac{1}{5} y^5 - 3x^4 + \frac{35}{3} x^3\right] \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix}$$

$$v = \pi \left(\frac{1875 - 5625 + 4375}{3}\right)$$

$$v = \frac{625}{3} \pi$$

$v = 208\frac{1}{3}\pi$ satuan volume

Contoh 10

Volume benda putar yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$ dan diputar terhadap sumbu x.

Penyelesaian :

mencari titik potong

$y = -x^2 + 4x$

jika $x = 0$,

$y = -(0)^2 + 4(0)$

$y = 0$

maka $(0 , 0)$

jika $y = 0$,

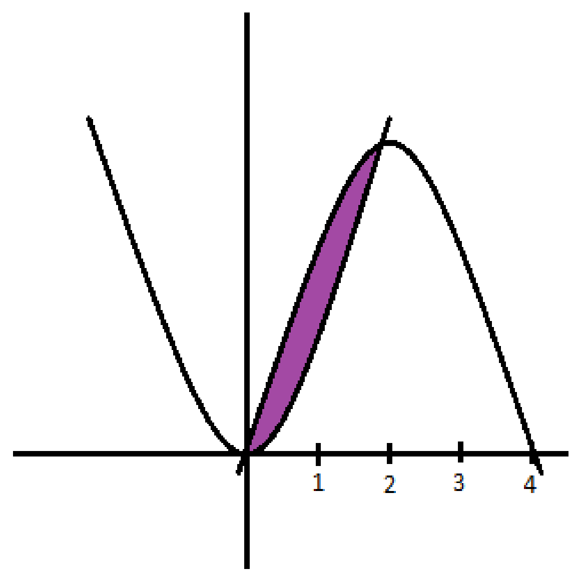
$0 = -x^2 + 4x$

$x^2 - 4x = 0$

$x (x - 4)$

$x = 0$ atau $x = 4$

maka $(0 , 0)$ $(4 , 0)$



mencari batas

$y = y$

$x^2 = -x^2 + 4x$

$2x^2 - 4x = 0$

$2x (x - 2)$

$2x = 0$ atau $x = 2$

Maka batasnya $= 0 - 2$

$$v = \pi \int_a^b [(f_1(x)^2) - (f_2(x)^2)]\, dx$$

$$v = \pi \int_0^2 [(-x^2 + 4)^{\,2} - (x^2)^2]\, dx$$

$$v = \pi \int_0^2 [x^4 - 8x^3 + \ 16x^2 - x^4]\, dx$$

$$v = \pi \int_0^2 [-8x^3 + 16x^2]\ dx$$

$$v = \pi \left[\left(-2(2)^4 + \frac{16}{3}(2)^3\right) - (0)\right]$$

$$v = \pi \left(\frac{-96 + 128}{3}\right)$$

$$v = \frac{32}{3}\pi$$

$v = 10\dfrac{2}{3}\pi$ satuan volume

Contoh 11

Jika daerah yang dibatasi oeh kurva $x = (y - 2)^2$ dan garis $x + y = 4$ diputar mengelilingi sumbu y, maka volume benda putar yang terbentuk.

Penyelesaian :

Mencari titik potong:

(i) $x = (y - 2)^2$

$x = y^2 - 4y + 4$

jika $x = 0$,

$0 = y^2 - 4y + 4$

$y^2 - 4y + 4 = 0$

$(y - 2)(y - 2)$

$y = 2 \; atau \; y$

$= 2$

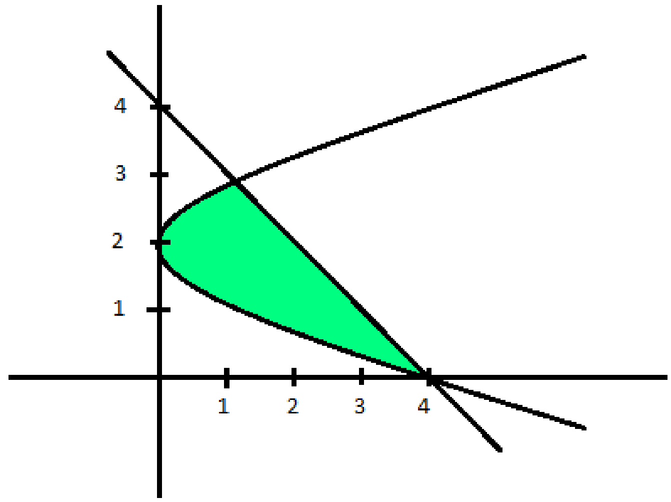
maka (0 , 2) (0 , 2)

jika $y = 0$,

$x = 0^2 - 4(0) + 4$

$x = 4$

maka (4 , 0)



(ii) $x + y = 4$

jika $x = 0$,

$0 + y = 4$

$y = 4$

maka (0 , 4)

jika $y = 0$,

$x + 0 = 4$

$x = 4$

maka (4 , 0)

mencari batas

$x = x$

$4 - y = \; y^2 - 4y + 4$

$y^2 - 3y = 0$

$y\,(\,y - 3)$

$y = 0$ atau $y = 3$

maka batasnya $= 0 - 3$

$$v = \pi \int_a^b \left[\left(f_1(y)\right)^2 - \left(f_2(y)\right)^2 \right] dy$$

$$v = \pi \int_0^3 [(4 - y)^2 - ((y - 2)^2)^2 \;] \, dy$$

$$v = \pi \int_0^3 [(y^2 - 8y + 16) - (y - 2)^4 \;] \, dy$$

$$v = \pi \left[\frac{1}{3} y^3 - 4y^2 + 16y - \frac{1}{5}(y - 2)1^5\right] \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

$$v = \pi \left[\left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)^2 + 16(3) - \frac{1}{5}(3 - 2)^5\right) - \left(\frac{1}{5}(0 - 2)^5\right)\right]$$

$$v = \pi \left[\left(9 - 36 + 48 - \tfrac{1}{5}\right) - (-\tfrac{32}{5})\right]$$

$$v = \pi\left[\frac{45 - 180 + 240 - 1 + 32}{5}\right]$$

$$v = \frac{136}{5}\pi$$

$v = 27\frac{1}{5}\pi$ satuan volume

Contoh 12

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh garis

$y = 4$, kurva $y = x^2 - 7x + 10$, dan sumbu x diputar terhadap garis $y = 1$.

Penyelesaian :

mencari titik potong

$y = x2^2 - 7x + 10$

jika $x = 0$,

$y = (0)^2 - 7(0) + 10$

$y = 10$

maka (0 , 10)

jika $y = 0$,

$0 = x^2 - 7x + 10$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 5)\ (x - 2)$

$x = 5\ atau\ x = 2$

maka (5 , 0) (2 , 0)

Translasikan persamaan terhadap $(0, -1)$

$y = x^2 - 7x + 10$

(i) x' = x + 0

$x = x'$

(ii) $y' = y - 1$

$y = y' + 1$

masukan ke persamaan

$(y' + 1) = (x')2 - 7(x') + 10$

$y + 1 = x^2 - 7x + 10$

$y = x^2 - 7x + 9$

sehingga sama artinya dengan dibatasi kurva $y = x^2 - 7x + 9$ garis

$y =$ 3 dan diputar terhadap sumbu x

mencari batas

$y = y$

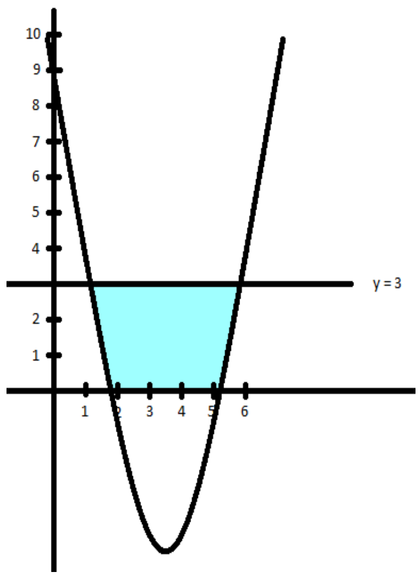
$3 = x^2 - 7x + 9$

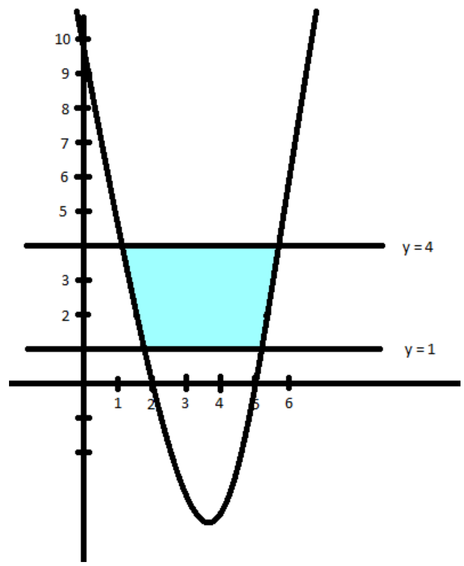
$x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x - 1)(x - 6)$

$x = 1 \, atau \, x = 6$

maka batasnya = 1 – 6





$$v = \pi \int_a^b [(f_1(x)^2) - (f_2(x)^2)]\, dx$$

$$v = \pi \int_1^6 [(3)^2 - (x^2 - 7x + 9)^2]\, dx$$

$$v = \pi \int_1^6 [9 - (x^4 - 14x^3 + 67x^2 - 126x + 81)]\, dx$$

$$v = \pi \int_1^6 [-x^4 + 14x^3 - 67x^2 + 126x - 72]\, dx$$

$$v = \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{7}{2}x^4 - \frac{67}{3}x^3 + 63x^2 - 72x\right]\begin{matrix}6\\1\end{matrix}$$

$$v = \pi \left[\left(-\frac{1}{5}(6)^5 + \frac{7}{2}(6)^4 - \frac{67}{3}(6)^3 + 63(6)^2 - 72(6)\right)\right.$$
$$\left. - \left(-\frac{1}{5}(1)^5 + \frac{7}{2}(1)^4 - \frac{67}{3}(1)^3 + 63(1)^2 - 72(1)\right)\right]$$

$$v = \pi \left[\left(-\frac{7776}{5} + 4536 - 4824 + 2268 - 432 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{7}{2} - \frac{67}{3} + 63 - 72 \right) \right]$$

$$v = \pi \left[\left(\frac{-7776 + 22680 - 24120 + 11340 - 2160}{5} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{-6 + 105 - 670 + 1890 - 2160}{30} \right) \right]$$

$$v = \pi \left[\left(\frac{-36}{5} \right) - \left(\frac{-841}{30} \right) \right]$$

$$v = \pi \left[\frac{-216 + 841}{30} \right]$$

$$v = \pi \left[\frac{625}{30} \right]$$

$$v = 20\frac{25}{30}\pi \text{ satuan volume}$$

3.2. Soal Isian

1. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva y = $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$, dan sumbu x yang diputar mengelilingi sumbu y sejauh $360°$.

   Penyelesaian :

   ubah $y = \cdots$ menjadi $x = \cdots$

   $y = \cdots$

   $3y = \cdots$

   $x = \cdots$

   $$v = \pi \int_a^b [(f_1(y)^2) - (f_2(y)^2)]\, dy$$

   $= \cdots$

   $= \cdots$

   $= \cdots$

$v = 3\frac{2}{6}\pi$ satuan volume

2. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$, $y = 3x - x^2$, dan garis $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh $360°$.

   Penyelesaian :

   mencari batas

   $y = y$

   ... = ...

   ... = ...

   ... atau ...

   maka batasnya $= \cdots$

   $v = \pi \int_a^b [(f_1(x)^2) - (f_2(x)^2)]\, dx$

   $v = \cdots$

   $v = 3\frac{22}{30}\pi$ satuan volume

3. Volume benda putar yang terjadi jika daerah dibatasi $y = 1 - x^2$, $y = -1$, $y = 1$, sumbu y dan diputar mengelilingi sumbu y sejauh $360°$.

   Penyelesaian :

   ubah $y = \cdots$ menjadi $x = \cdots$

   $y = \cdots$

   $x^2 = \cdots$

   $x = \cdots$

$$v = \pi \int_a^b [f(y)^2]\, dy$$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = 2\pi$ satuan volume

4. Volume benda putar daerah yang dibatasi $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ dan diputar mengelilingi sumbu y sejauh $360°$.

   Penyelesaian :

   ubah $y = \cdots$ menjadi $x = \cdots$

   $y = \cdots$

   $x = \cdots$

   $y^2 = \cdots$

   $x = \cdots$

   - mencari batas

     $x = x$

     $\ldots = \ldots$

     … atau …

     maka batasnya $= \cdots$

$$v = \pi \int_a^b [(f_1(y)^2) - (f_2(y)^2)]\, dy$$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = 4\frac{256}{320}\pi$ satuan volume

5. Volume benda putar daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$, $y = 6 - x$, sumbu x dan mengelilingi sumbu y sejauh $360°$.

   Pembahasan:

   ubah $y = \cdots$ menjadi $x = \cdots$

   $y = \cdots$

   $x = \cdots$

   mencari batas

   $x = x$

   $\ldots = \ldots$

   $\ldots = \ldots$

   $\ldots$ atau $\ldots$

   maka batasnya $= \cdots$ karena dibatasi oleh sumbu x

   $v = \pi \int_a^b [(f_1(y)^2) - (f_2(y)^2)]\, dy$

   $v = \cdots$

   $v = \cdots$

   $v = \cdots$

   $v = \cdots$

$v = 44\frac{4}{15}\pi$ satuan volume

6. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu X , dan garis $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu x.

   Penyelesaian:

   $v = \pi \int_a^b [f(x)^2]\, dy$

   $v = \cdots$

   $v = \cdots$

   $v = \cdots$

   $v = 48\frac{3}{5}\pi$ satuan volume

7. Volume benda putar yang terjadi jika dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi sumbu y.

   Penyelesaian :

   ubah $y = \cdots$ menjadi $x = \cdots$

   $y = \cdots$

   $x = \cdots$

   mencari batas

   $x = x$

   ... $=$ ...

   ... $=$ ...

$\ldots$ atau $\ldots$

maka batasnya $= \cdots$

$$v = \pi \int_a^b [(f_1(x)^2) - (f_2(x)^2)]\, dx$$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \frac{1}{6}\pi$ satuan volume

8. Volume benda putar antara dua kurva mengelilingi $sumbu\ y$ dengan garis

   $y = 2x\ \ dan\, y = 3$.

   Penyelesaian :

   ubah $y = \cdots$ menjadi $x = \cdots$

   $y = \cdots$

   $x = \cdots$

$$v = \pi \int_a^b [f(x)^2]\, dy$$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = 2\frac{3}{12}\pi$ satuan volume

9. Volume benda putar jika daerah yang dibatasi $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$ diputar 360° mengelilingi sumbu x.

   Penyelesaian :

   $v = \pi \int_a^b [f(x)^2]\, dy$

   $v = \cdots$

   $v = \cdots$

   $v = \cdots$

   $v = \frac{32}{5}\pi$ satuan volume

10. Volume benda putar di daerah yang dibatasi oleh $y = 2x + 2$, $y = x + 5$, dan sumbu y diputar mengelilingi sumbu x.

    Penyelesaian :

    mencari batas

    $y = y$

    ... = ...

    ... = ...

    maka batasnya $= \cdots$

    $v = \pi \int_a^b [(f_1(x)^2) - (f_2(x)^2)]\, dx$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = \cdots$

$v = 45\pi$ satuan volume

3.3. Soal Tambahan

1. Dalam soal-soal 1-12, anda diminta menghitung volume benda yang terbentuk apabila daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui diputar mengelilingi sumbu yang diketahui pula. Lakukanlah hal ini dengan mengikuti langkah-langkah berikut :

(a) Gambarlah daerah R.

(b) Perlihatkanlah sebuah jalur yang telah diberi huruf-huruf yang sesuai.

(c) Tulislah rumus untuk hampiran volume benda yang dibentuk oleh jalur itu.

(d) Bentuklah integral yang bersangkutan.

(e) Hitunglah integral ini.

1. $y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$; mengelilingi sumbu y.
2. $y = x^2, x = 2, y = 0$; mengelilingi sumbu y.
3. $y = \sqrt{x}, x = 4\ y = 0$; mengelilingi sumbu y.
4. $y = 4 - x^2 (x \geq 0), x = 0, y = 0$; mengelilingi sumbu y.
5. $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0$; mengelilingi garis $x = 4$.
6. $y = 4 - x^2 (x \geq 0), x = 0, y = 0$; mengelilingi garis $x = 2$.
7. $y = \frac{1}{4}x^3 + 2, y = 2 - x, x = 2$; mengelilingi sumbu y.

8. $y = x^2,\ y = 2x$; mengelilingi sumbu y.

9. $x = y^2,\ y = 2,\ x = 0$; mengelilingi sumbu x.

10. $x = \sqrt{2y} + 1,\ y = 2, x = 0,\ y = 0$; mengelilingi sumbu x.

11. $x = y^2, y = 2, x = 0$; mengelilingi garis $y = 2$.

12. $x = \sqrt{2y} + 1, y = 2, x = 0, y = 0$; mengelilingi garis $y = 3$.

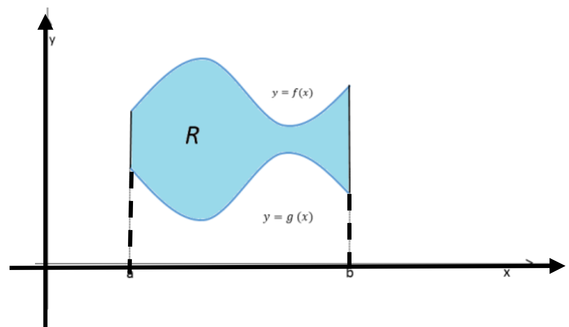
13. Perhatikan daerah R (Gambar 12). Susunlah sebuah integral untuk volume benda yang terbentuk apabila daerah R diputar mengelilingi garis-garis berikut.

    (a) Sumbu x (cincin);

    (b) Sumbu y (kulit tabung);

    (c) Garis $x = a$ (kulit tabung);

    (d) Garis $x = b$ (kulit tabung).



Gambar 3.8

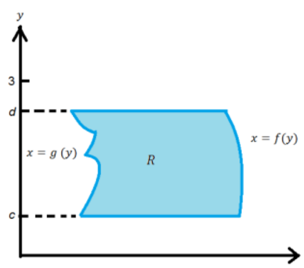
14. Sebuah daerah R digambar pada Gambar 13. Susunlah sebuah integral untuk volume benda yang terbentuk apabila daerah R itu diputar mengelilingi garis-garis berikut :

    (a) Sumbu y (cincin);

    (b) Sumbu x (kulit tabung);

(c) Sumbu $y = 3$ (kulit tabung);

GAMBAR 3.9



15. Gambarlah daerah R yang di batasi oleh $y = 1/x^3$, $x = 1$, $x = 3$, dan $y = 0$. Susunlah integral (jangan dihitung) untuk kasus-kasus sebagai berikut :

(a) Luas daerah R.

(b) Volume benda yang terbentuk apabila daerah R diputar mengelilingi sumbu y.

(c) Volume benda apabila daerah R diputar mengelilingi garis $x = 4$.

(d) Volume benda apabila R di putar mengelilingi garis $x = 4$.

16. Lakukan hal yang sama seperti dalam soal 15 untuk daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 + 1$ dan $y = 0$ dan yang terletak antara $x = 0$ dan $x = 2$.

17. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah R diputar mengelilingi sumbu x.

Daerah R itu dibatasi oleh kurva-kurva $x = \sqrt{y}$ dan $x = y^3/32$

18. Seperti soal 17, akan tetapi R diputar mengelilingi garis $y = 4$.

19. Diketahui sebuah bola (pejal) dengan jari-jari b. Dalam bola ini dibuat

lubang dengan jar-jari ($b > a$) dan permukaan ke permukaan melalui pusat bola. Tentukan volume benda sisa dari bola tersebut.

20. Susunlah integral (dengan motedo kulit tabung) untuk volume torus yang terbantuk apabila daerah lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ diputar mengelilingi garis $x = b(b > a)$.

    Hitunglah kemudian volume itu. Petunjuk: ada baiknya menganggap sebagian dari integral itu sebagai luas.

21. Daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh $x = 0, y = \sin(x^2)$ dan $y = \cos x^2$ diputar mengelilingin sumbu y. Tentukan volume benda putar yang terjadi.

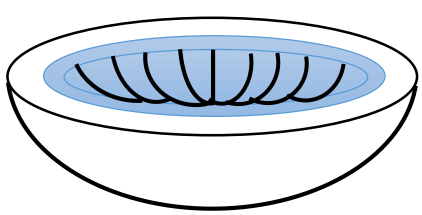
22. Daerah yang dibatasi oleh $y = 2 + \sin x, y = 0, x = 0\ dan\ x = 2\pi$ diputar mengelilingi sumbu y.

    Carilah volume benda putar yang terjadi. Petunjuk: $\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x + C$.

23. Andaikan R merupakan daerah yang dikelilingi oleh $y = x^2$ dan $y = x$. Carilah volume benda putar yang terjadi apabila R diputari mengelilingi: (a) sumbu x;(b) sumbu y;(c) garis $y = x$.

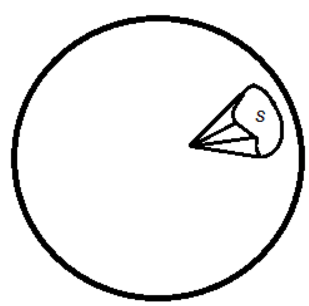
24. Andaikan kita ketahui rumus $s = 4\pi r^2$ sebagai luas permukaan dari suatu bola, akan tetapi kita tidak ketahui rumus mengenai volume V. Dapatkanlah rumus ini dengan memotong bola pejal menjadi kulit-kulit

25. bola tipis yang konsentris. Petunjuk: volume ΔV dari suatu kulit bola tipis dengan jari-jari terluar x adalah $\Delta V \approx 4\pi x^2 \, \Delta x$.



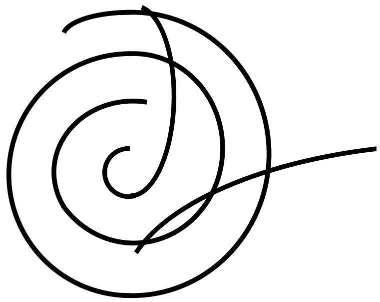
Gambar 3.10

26. Pandang suatu daerah tak teratur dengan luas s di permukaan suatu bola dengan jari-jari r. Carilah volume benda yang terjadi apabila setiap titik pada daerah ini dihubungkan ke pusat bola oleh suatu potongan garis. Petunjuk: gunakan metode kulit bola sebagimana diuraikan pada Soal 24.

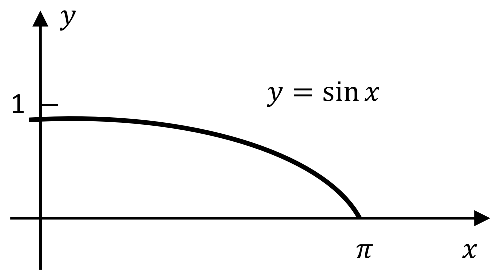


Gambar 3.11

BAB 4
PANJANG KURVA PADA BIDANG



Gambar 4.1



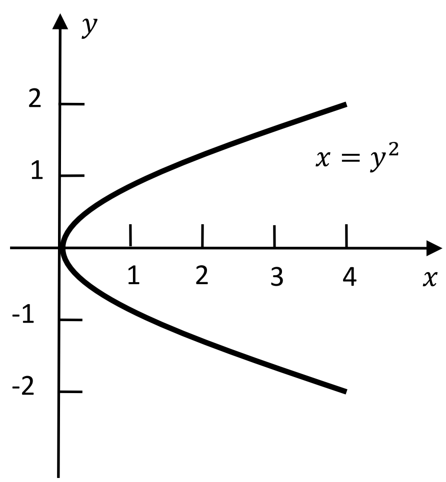
Gambar 4. 2

Panjang kurva spiral yang tampak pada Gambar 1. Spiral tersebut berupa benang atau pegas, kita dapat menariknya sehingga berupa garis lurus dan kemudian mengukur panjangnya dengan penggaris. Oleh karena kurva tersebut adalah grafik sebuah persamaan, maka cara mengukur panjangnya akan dilakukan dengan metode yang agak berlainan.

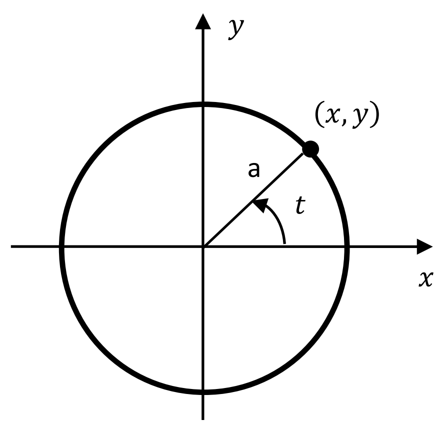
Grafik dari fungsi $y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi,$ adalah sebuah kurva rata (kurva yang terletak seluruhnya pada sebuah bidang) lihat pada Gambar 2. Begitu pula grafik dari fungsi $x = y^2,\ -2 \leq y \leq 2$ lihat pada Gambar 3. Dalam dua kasus ini kurva itu adalah grafik sebuah fungsi. Dalam contoh pertama fungsinya berbentuk $y = f(x)$, dan dalam contoh kedua fungsi itu berbentuk $x = g(y)$. Grafik yang berupa spiral, adalah dari sebuah fungsi yang tidak termasuk jenis pertama maupun jenis kedua. Demikian pula, lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$. Walaupun demikian, lingkaran itu dapat dianggap sebagai gabungan grafik fungsi-fungsi $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ dan

$y = g(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

Lingkaran ini mendorong kita untuk melihat sebuah kurva dari sudut lain. Dari trigonometri kita tahu bahwa $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$, menggambarkan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ lihat pada Gambar 4. Dalam persamaan ini t variabel sembarang, yang selanjutnya akan kita namakan parameter, baik x maupun y telah dinyatakan dengan parameter ini.



Gambar 4.3



$x = a\cos t, y = \sin t$

$0 \leq t \leq 2\pi$

Gambar 4.4

Jika kita masukkan ke grafik persamaan $x = t\cos t,\ \ y = t\sin\ t,\ \ 0 \leq t \leq 5\pi.$ kita akan mendapatkan suatu kurva berbentuk semacam spiral yang telah kita sebut di atas. Dan kita dapat menyajikan kurva sinus dan parabol ke dalam bentuk parameter. Fungsi sinus dan fungsi parabol dapat pula disajikan dalam bentuk parameter, kita dapat menulis. Dalam kasus pertama, parameternya adalah

$y\ = \sin\ x, \qquad x =\ x, \qquad 0\ \leq x\ \leq\ \pi$

$y = y, \qquad x = y^2, \qquad -2\ \leq y\ \leq 2$

Dalam kasus pertama parameternya adalah x, sedangkan dalam kasus kedua parameternya adalah y. Jadi sebuah kurva rata dapat dilukiskan oleh sepasang persamaan parameter $x = f\ (t),\ y = g(t),\ \ a\ \leq t\ \leq b$, fungsi f dan g kita andaikan kontinu pada selang tersebut. Anggaplah t sebagai menyatakan waktu. Apabila t bertambah dari a hingga b, titik (x, y) bergerak sepanjang seluruh kurva itu.

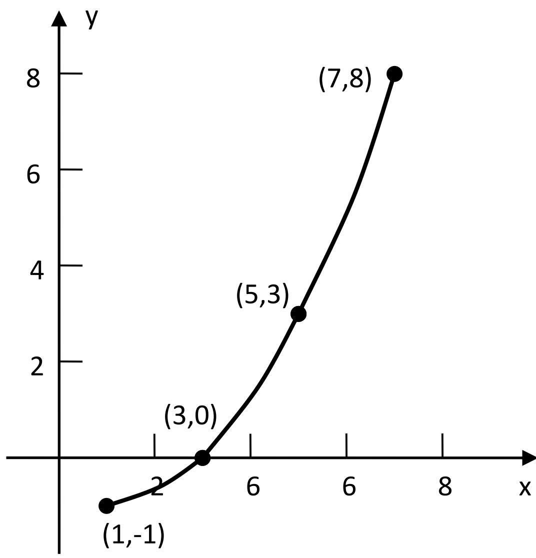
Untuk mengenali kembali sebuah kurva yang ditentukan oleh persamaan parameter, kita sebaiknya menghilangkan (mengeliminasi) parameter ini. Hal-hal ini juga dapat dicapai dengan mencari t dan salah satu persamaan parameter dan kemudian mesubstitusikannya kedalam persamaan lain, dengan demikian kita akan mudah memahami dan mencari panjang kurva pada bidang.

Contoh 1. Gambarlah sebuah kurva yang persamaan parameternya adalah

$x = 2t + 1,\ y =\ t^2 - 1,\ 0\ \leq t \leq 3$.

Penyelesaian :

Kita susun daftar nilai variabel t, x dan y. Kemudian kita gambar pasangan terurut (x, y) dan akhirnya kita hubungkan titik-titik tersebut sesuai dengan arah naiknya nilai t, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 5.



t	x	y
0	1	-1
1	3	0
2	5	3
3	7	8

Gambar 4.5

untuk $t = 0$	untuk $t = 2$	untuk $t = 0$	untuk $t = 2$
$x = 2t + 1$	$x = 2t + 1$	$y = t^2 - 1$	$y = t^2 - 1$
$x = 2(0) + 1$	$x = 2(2) + 1$	$y = (0)^2 - 1$	$y = (2)^2 - 1$
$x = 1$	$x = 5$	$y = -1$	$y = 3$
untuk $t = 1$	untuk $t = 3$	untuk $t = 1$	untuk $t = 3$
$x = 2t + 1$	$x = 2t + 1$	$y = t^2 - 1$	$x = t^2 - 1$
$x = 2(1) + 1$	$x = 2(3) + 1$	$y = (1)^2 - 1$	$x = (3)^2 - 1$
$x = 3$	$x = 7$	$y = 0$	$x = 8$

Setelah memperhatikan contoh soal diatas, kita dapat mengetahui apa yang harus dicari dan diselesaikan. Untuk itu setiap simbol dan kata-kata harus diperhatikan dengan benar.

Contoh 2. Hilangkanlah parameter t dari persamaan $x = t^2 + 2t$, $y = t - 3$, $-2 \leq t \leq 3$. Kemudian tentukan bentuk kurva dan gambarlah grafik dari persamaan diatas

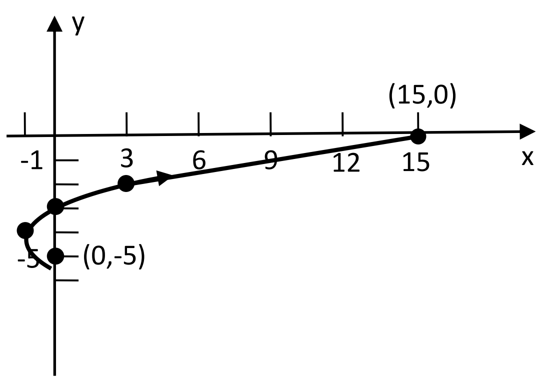
Penyelesaian :

Dari persamaan kedua, kita peroleh $t = y + 3$. Jika t ini distribusikan ke dalam persamaan pertama, kita peroleh

$x = (y + 3)^2 + 2(y + 3)$

$x = y^2 + 8y + 15$ atau $\qquad x + 1 = (y + 4)^2$.

Persamaan ini kita kenal sebagai parabola dengan puncak di (-1,-4) dan terbuka ke kanan. Untuk mengambarkan grafiknya, kita hanya memperhatikan bagian parabol yang sesuai dengan nilai parameter yang memenuhi $-2 \leq t \leq 3$. Daftar nilai-nilai dan



Gambar 4.6

t	x	y
-2	0	-5
-1	-1	-4
0	0	-3
1	3	-2
2	8	-1
3	15	0

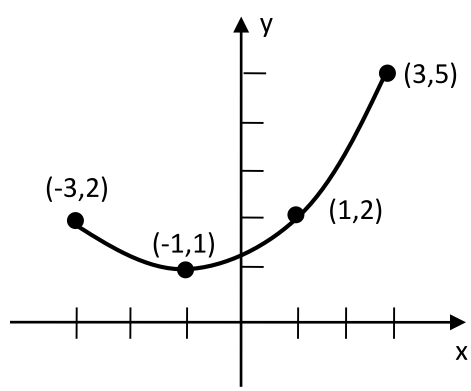
grafik pada. Anak panah menunjukan arah naiknya nilai t.

Dari gambar grafik dan tabel diatas dapat dilihat saling berkesinambungan, oleh karena itu jika dari tabel dan grafik tidak menunjukan hubungan yang benar maka dipastikan soal yang kita selesaikan akan salah. Di lihat dari grafik tersebut dari awal sampai akhir harus menunjukan suatu hubungan agar grafik dan tabel terjadi hubungan yang berkesinambungan. Setelah memperhatikan contoh soal diatas, kita dapat mengetahui apa yang harus dicari dan diselesaikan. Untuk itu setiap simbol dan kata-kata harus diperhatikan dengan benar. Di halaman berikutnya terdapat beberapa contoh soal dan penyelesaian untuk memahami panjang kurva pada bidang.

Contoh 3. Gambarlah sebuah kurva yang persamaan pararmeternya adalah $x = 2t - 1$, $y = \mathrm{t}^2 + 1, \quad -1 \leq t \leq 2$

Penyelesaian :

Kita susun daftar nilai variabel t, x dan y. kemudian kita gambar pasangan terurut (x,y) dan akhrinya kita hubungkan titik-titik tersebut sesuai dengan arah naiknya nilai t,



Gambar 4.7

t	x	y
-1	-3	2
0	-1	1
1	1	2
2	3	5

seperti yang diperlihatkan .

Definisi

Sebuah kurva rata-rata disebut mulus apabila kurva itu ditentukan oleh persamaan-persamaan $x = f(t), y = g(t), \ a \ \leq t \leq b$, dengan ketentuan bahwa turunan-turunan f' dan g' adalah kontinu pada $[a, b]$ sedangkan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak bersama-sama nol di selang (a, b).

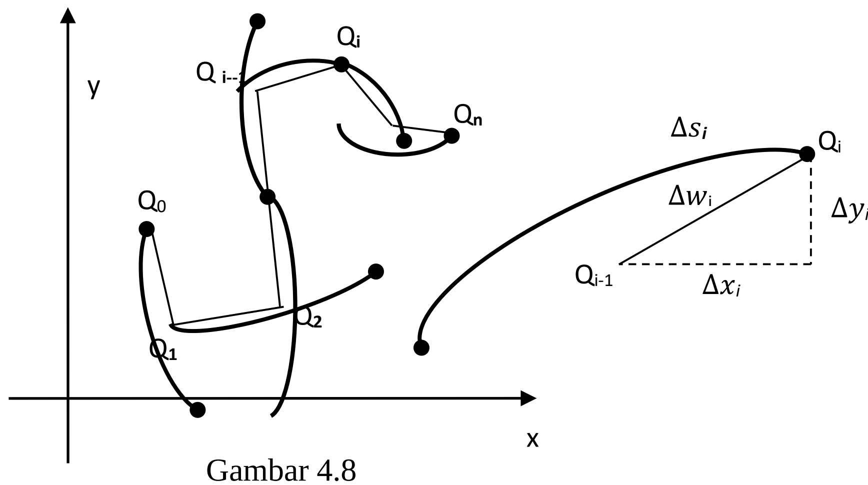
Penggunaan istilah kurva mulus untuk mengambarkan sifat berikut: Apabila sebuah partikel bergerak sepanjang kurva tersebut (x, y) maka arah geraknya tidak akan berubah sekonyong-konyong (ini dijamin oleh kekontinuan f' dan g') partikel itu tidak akan berhenti atau berbalik arah [$f'(t)$ dan $g'(t)$ akan menjamin ini, oleh karena tak bersama-sama nol].

Yang dimaksud dengan panjang sebuah kurva mulus dengan persamaan parameter $x = f(t),\ y = g(t),\ \ a \leq t \leq b$

Buat suatu partisi pada selang $[a, b]$ menjadi n selang bagian b dengan titik-titik

$a = t_0 \ < t_1 \ < t_2 < \cdots < t_n \ = b$

Pembagian ini mengakibatkan pula bahwa kurva kita akan terbagi oleh titik-titik $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}, Q_{n,}$ seperti yang diperlihatkan pada Gambar 8.



Gambar 4.8

Kemudian kita aproksimasi kurva itu dengan segi banyak, kita hitung panjangnya dan akhirnya ditarik limitnya apabila norma partisi menuju nol. Khususnya kita aproksimasi panjang ΔS_i tertentu pada kurva dapat dilihat pada Gambar 8 oleh

$$\Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata untuk Turunan, kita mengetahui adanya titik-titik t_i dan t_i dalam selang$(t_{i-1}\,, t_i)$ sehingga

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i)\Delta t_i$$

$$g(t_i) - f(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\,\Delta t_i$$

Dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Maka

$$\Delta w_i = \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\Delta t_i]^2}$$

$$\Delta w_i = \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\Delta t_i$$

Dan panjang segi banyak adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\, \Delta t_i$$

Jumlah di ruas kanan ini, serupa dengan jumlah Riemann, kesulitan yang kita alami ialah bahwa $\bar{t}_i$ dan $\hat{t}_i$ tidak melukiskan titik yang sama. Akan tetapi, dapat dibuktikan bahwa hal tersebut tidak mempengaruhi hasil apabila ditarik limitnya. Sehingga kita dapat mendefinisikan panjang L kurva sebagai limit bentuk di atas, apabila norma partisi mendekati nol. Jadi,

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Ada dua kasus yang menarik perhatian. Apabila persamaan kurva itu adalah $y = f(x), a \leq x \leq b,$ maka bentuk terakhir menjadi

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Apabila diketahui persamaan $x = g(y),$ dengan $c \leq y \leq d,$ rumus tersebut menjadi

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Apabila rumus-rumus itu digunakan untuk menghitung panjang lingkaran dan panjang ruas-ruas dari, hasil-hasilnya tentunya harus sesuai dengan apa yang telah kita ketahui. Kalau demikian, marilah kita tinjau contoh berikutnya.

Contoh 4. Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Penyelesaian :

Persamaan lingkaran kita tulis dalam bentuk parameter: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$,

$0 \leq t \leq 2\pi$. Sehingga $\frac{dx}{dt} = -a\sin t\,, \frac{dy}{dt} = a\cos t$

Dengan menggunakan rumus yang pertama kita peroleh

$$L = \int_0^{2x} \sqrt{a^2\sin^2 + a^2\cos^2 t}\, dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} a\, dt\, L$$

$$L = [at]_0^2$$

$$L = 2\pi a$$

Contoh 5. Hitung panjang kurva dengan menggunakan parameter $x = t^2$, $y = t^3$, dari $t = 0$ sampai $t = 4$.

Penyelesaian :

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2,$$

$$s = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$s = 4t^2 + 9t^4$$

$$s = 4t^2\left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2}\,.\ 2t\, dt$$

$$s = \frac{8}{27}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

Contoh 6. Hitung panjang kurva $24xy = x^4 + 48$ dari $x = 4$.

Penyelesaian :

$$y = \frac{x^4 + 48}{24x}$$

$$= \frac{4x^4 - x^4 - 48}{24x^2}$$

$$= \frac{x^4 - 16}{8x^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{x^4 + 16}{x^2}\right)^2$$

$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{64}\left(\frac{x^4 + 16}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_2^4 \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{17}{6}$$

Contoh 7. Hitung panjang lengkung yang diberikan oleh $x = a\ \cos\theta$, $y = a\sin\theta$

Penyelesaian :

Lengkung dengan persamaan diatas berupa lingkaran dengan jari-jari a^2 karena

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta$$

$$= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= a^2$$

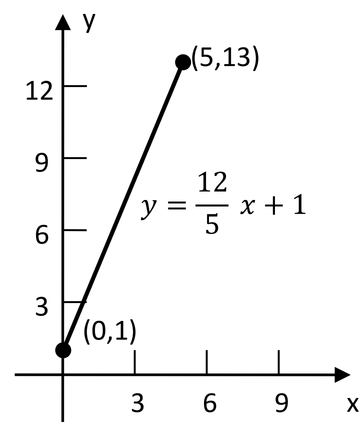
Panjang lengkung $= 2\pi a$

Contoh 8. Gunakan rumus ke-2 untuk menghitung panjang ruas garis antara $A(0, 1)$ dan B(5,13)

Penyelesaian :

Ruas garis AB dapat dilihat pada gambar 9. Persamaan garis yang melalui A dan B adalah

$y \ = \frac{12}{5}x + 1$ sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$ dan



Gambar 4.9

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}\ dx$$

$$= \int_0^5 \sqrt{\frac{5^2 + \ 12^2}{5^2}}\ dx$$

$$= \frac{13}{5}\int_0^5 1\, dx$$

$$= \left[\frac{13}{5}x\right]_0^5$$

$$= 13$$

Hasil ini digunakan untuk rumus jarak antara dua titik. Setelah memperhatikan contoh soal diatas, kita dapat mengetahui bagaimana cara untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan panjang kurva pada bidang. Untuk itu kita harus memahami setiap cara dalam penyelesaian soal dengan baik dan benar.

Contoh 9. Hitung panjang kurva $x = 3y^{\frac{3}{2}} - 1$ dari $y = 0$ sampai $y = 4$

Penyelesaian :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}\, dy$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4}}\, dy$$

$$s = \frac{8}{243}\left(82\sqrt{82} - 1\right)$$

Contoh 10. Hitunglah panjang ruas garis antara A(0,9) dan B(10,7)

Penyelesaian :

$$y = \frac{4}{3}x + 9$$

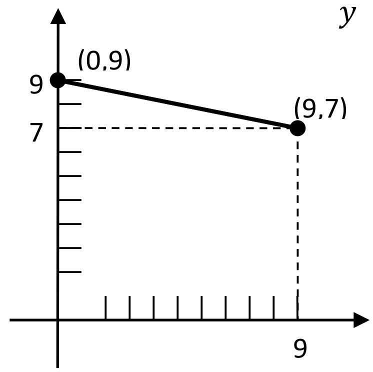
$$y' = \frac{4}{3}$$

$$L = \int_0^9 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}\, dx$$

$$L = \int_0^9 \sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{3^2}}\, dx$$

$$L = \int_0^9 \sqrt{\frac{25}{9}}\, dx$$

$$L = \int_0^9 \frac{5}{3}\, dx$$



Gambar 4.10

$$L = \frac{5}{3}x \Big|_0^9$$

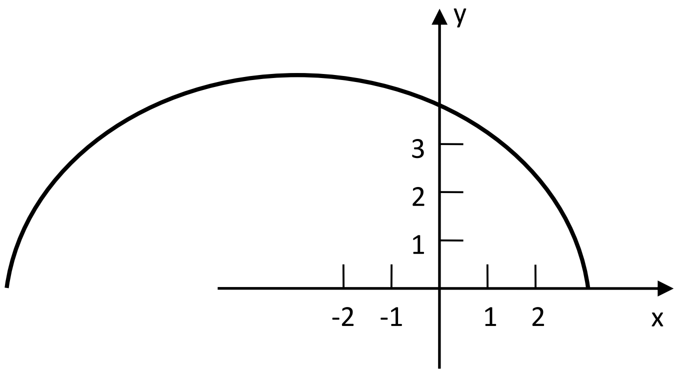
$$L = 15 - 0$$

$$L = 15$$

Contoh 11. Buatlah grafik kurva yang terbentuk secara parametris oleh

$x = 2\cos t\,, y = 4\sin t,\;\; 0 \le t \le \pi$, kemudian carilah panjangnya.

Penyelesaian :



Gambar4. 11

T	x	y
0	2	0
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{3}$	1	$2\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	4
$\frac{2\pi}{3}$	-1	$2\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$	2
π	-2	0

Panjang L dari kurva ini diberikan oleh:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (4\cos t)^2}\ dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + 4\sin^2 t}\, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\ \mathrm{dt}$$

Kita tidak dapat menemukan antiturunan untuk $\sqrt{1 + 3\cos^2 t}$. Kenyataannya, telah ditunjukkan bahwa fungsi ini tidak memiliki suatu antiturunan yang dapat dituliskan dalam bentuk fungsi-fungsi dasar kalkulus. Apabila kita ingin nilai integral ini, maka kita harus mencarinya dengan suatu metode pendekatan. Situasi dalam contoh 11 agak bebas. Untuk memperoleh suatu integrasi yang dapat kita selesaikan, kita harus memiliki kurva-kurvanya secermat mungkin

Contoh 12. Tentukan panjang busur kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ antara titik (1,1) hingga (4,8) lihatlah Gambar 10.

Penyelesaian :

Oleh karena $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ maka

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$

jika $u = 1 + \frac{9}{4}x;$ maka $du = \frac{9}{4}dx$

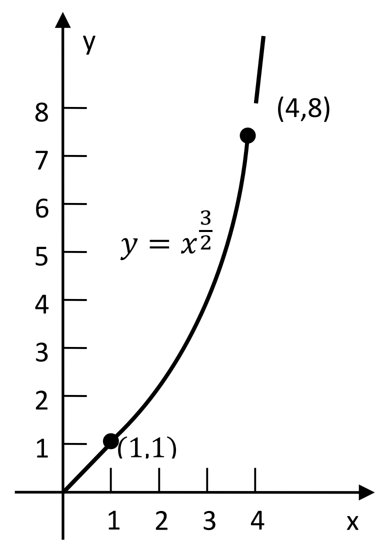
$$= \int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x\, dx}$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - \frac{13^{\frac{3}{2}}}{8}\right)$$

$$= 7{,}63$$

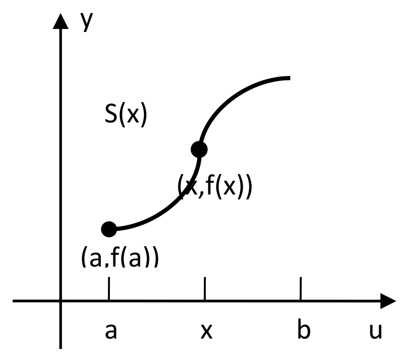


Gambar 4.12

Diferensial panjang busur andaikan f sebuah fungsi yang dapat di diferensialkan pada $[a, b]$. Untuk tiap x dalam (a, b), kita definisikan

$s(x)$ melalui $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'^{(u)}]^2}\ du$

Maka $s(x)$ adalah panjang busur kurva $y = f(u)$ antara titik $\left(a, f(a)\right)$ dan titik $\left(x, f(x)\right)$ (Gambar 10). Berdasarkan teorema tentang pendiferensialan sebuah integral menurut batas atasnya,



Gambar 4.13

kita peroleh: x

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'^{(x)}]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Sehingga diferensial panjang busur ds dapat kita tulis sebagai

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

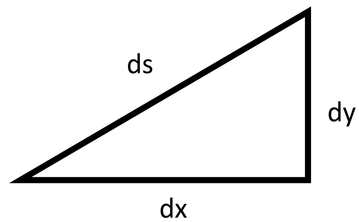
Kita dapat memperoleh tiga bentuk untuk ds, tergantung pada grafik persamaan parameter kurva yang bersangkutan, yakni

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Sebagian besar mahasiswa lebih senang mengingat rumus ini ketimbang menulisnya dan lihat pada Gambar 4.14.



Gambar 4.14

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Ketiga bentuk rumus di atas diperoleh dari relasi terakhir ini dengan membagi dan kemudian mengalikan ruas kanan

dengan $(dx)^2$, $(dy)^2$ dan $(dt)^2$. Misalnya

$$(ds)^2 = \left[\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dy)^2}\right](dx)^2$$

$$= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (dx)^2\right]$$

Uraian ini memberikan rumus yang pertama tentang ketiga rumus di atas.

4.2. Soal Isian

1. Hitung panjang kurva pada $y = x^{\frac{3}{2}}$ dari tittik (1,1) samai titik (4,8)

Penyelesaian :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx$$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

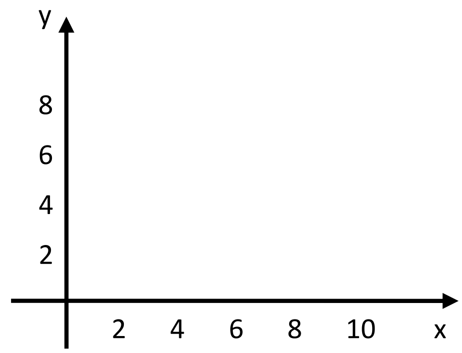
$L = \cdots$

$$L = \frac{8}{27}\left[10\sqrt{1} - \frac{13}{8}\sqrt{13}\right]$$

2. Hitung dan gambarkanlah dengan benar dan sesuai dengan rumus panjang kurva pada bidang, kemudian lengkapilah tabel yang telah disediakan di bawah ini yang memenuhi persamaan parameter dari $x = 3t + 1, y = t^2 - 1$,

$0 \leq t \ \leq 3$

t	x	y
0	1	-1
…	…	…
…	…	…
3	10	8



Penyelesaian :

3. Tentukan panjang kurva $y^2 = x^2$ di antara $x = 0$ dan $x = 4$, untuk cabang $y > 0$.

Penyelesaian :

$y^2 = x^3 \rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{9x}{4}$

$= \int_0^4 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= 9{,}07$

4. Tentukan panjang kurva persamaan $y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}$

Penyelesaian :

$$= \int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^{-3}\right)^2}\, dx$$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{4}x^3 + x^{-3}\right)\, dx$$

5. Tentukanlah panjang kurva dari persamaan $x^2 + y^2 = 4$. Untuk menyelesaikan soal dibawah ini gunakanlah rumus yang telah ditentukan .

Penyelesaian :

$x^2 + y^2 = 4 \; \rightarrow \; y^2 = 4 - x^2 \; \rightarrow \; y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$= \cdots.$

$= \cdots.$

$= \cdots.$

$= \cdots.$

$= \cdots.$

$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}}\ dx$$

6. Tentukan keliling lingkaran dari persamaan $x^2 + y^2 = a^2$. Jawablah dengan baik dan benar sesuai dengan rumus yang telah ditentukan seperti rumus yang dibawah ini. Kerjakanlah dengan teliti agar tidak terjadi kesalahan pada saat menjawab soal dari persamaan keliling lingkarang tersebut.

Penyelesaian :

$x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$\frac{dx}{dt} = -a\ \sin t\ , \frac{dy}{dt} = a\ \cos t$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = 2\pi a$

7. Hitunglah panjang kurva jika $x = t^2$, $y = t^3$, dari $t = 0$ sampai $t = 4$. Kerjakanlah dengan baik dan benar menggunakan rumus dibawah ini.

Penyelesaian :

$\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$, dan $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \dfrac{8}{27}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$

8. Hitunglah panjang kurva yang memenuhi persamaan jika $x = 3y^{\frac{3}{2}} - 1$ dari $y = 0$ sampai $y = 4$. Kerjakanlah dengan baik dan benar menggunakan rumus dibawah ini.

Penyelesaian :

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{9}{2}y^{\frac{1}{2}}$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \dfrac{8}{243}\left(82\sqrt{82} - 1\right)$

9. Hitunglah panjang ruas garis antara $A(0, 1)$ dan B(5,13). Ruas garis AB dapat dilihat

pada gambar. Persamaan garis yang melalui A dan B adalah $y = \frac{12}{5}x + 1$

sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$

Penyelesaian :

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}\, dx$$

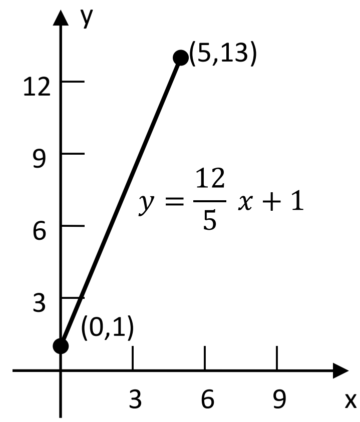
$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = 13$



Gambar

10. Hitunglah panjang ruas garis antara A(0,9) dan B(10,7). (lihat pada gambar)

Penyelesaian :

$y = \frac{4}{3}x + 9 = \frac{4}{3}$

$y' = \frac{4}{3}$

$$L = \int_0^9 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}\, dx$$

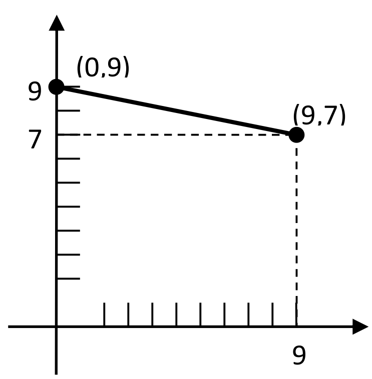
$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$



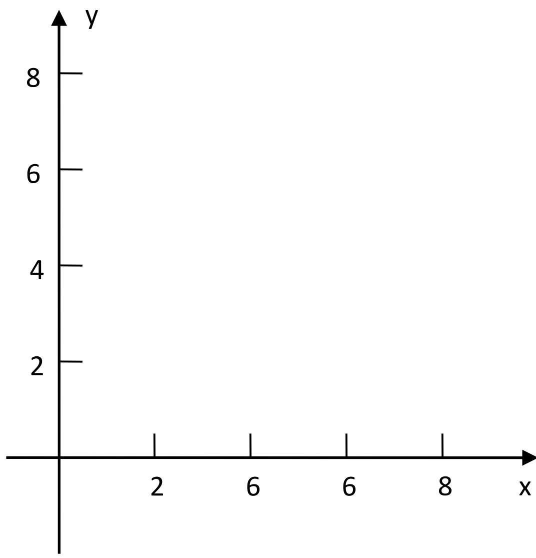
Gambar **4.15**

$L = 15$

11. Gambarlah sebuah kurva yang persamaan parameternya adalah $x = 2t + 1$,

$y = t^2 - 1$, $0 \leq t \leq 3$

Penyelesaian :



t	x	y
...	...	...
1	3	0
...	...	...
...	...	...

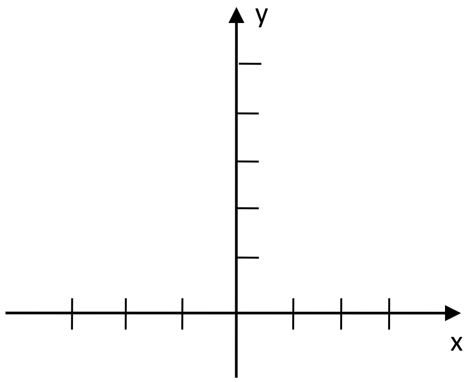
Lengkapilah tabel dan grafik unuk menggambarkan kurva yang memmenuhi persamaan parameter dari $x = 2t + 1$, $y = t^2 - 1$, $0 \leq t \leq 3$.

12. Gambarlah sebuah kurva yang persamaan pararmeternya adalah $x = 2t - 1$,

$y = t^2 + 1$, $-1 \leq t \leq 2$

Penyelesaian :

4.3. Soal Tambahan



t	x	y
...	...	...
...	...	...
1	1	2
...	...	...

Lengkapilah tabel dan gambarlahh kurva pada grafik yang telah tersedia diatas.

1. Gunakan pengintegrasikan menurut x untuk menentukan panjang ruas garis yang persamaannya $y = 3x + 5$ antara $x = 1$ dan $x = 4$. Cocokkanlah dengan menggunakan rumus jarak.
2. Gunakan pengintegralan menurut y untuk menentukan panjang ruas garis pada garis $2x - 4y + 6 = 0$ antara $y = 0$ dan $y = 2$. Cocokkanlah dengan rumus jarak.

Dalam soal 3 hingga 8, tentukanlah panjang kurva:

3. $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ antara $x = \dfrac{1}{3}$ dan $x = 7$

4. $y = \dfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ dan $x = 4$

5. $y = \left(4 - x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ dan $x = 8$

6. $y = \dfrac{(x^4 + 3)}{6x}$ antara $x = 1$ dan $x = 4$

7. $x = \dfrac{y^4}{16} + \dfrac{1}{2y^2}$ antara $y = -2$ dan $y = -1$

Petunjuk: Perhatikan tanda $\sqrt{u^2} = -u$ apabila $u < 0$

8. $30xy^3 - y^8 = 15$ antara $y = 1$ dan $y = 2$

Dalam soal-soal 9 hingga 12 gambarlah grafik fungsi yang bersangkutan dan kemudian tentukan panjangnya.

9. $x = t^3, y = t^2$, $0 \leq t \leq 4$

10. $x = 3t^2 + 2, y = 2t^3 - 1$, $1 \leq t \leq 3$

11. $x = 3\sin t, y = 3\cos t - 3$, $0 \leq t \leq 2\pi$

12. $x = 4\cos t + 5, y = 4\sin t - 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$

13. Gambarkanlah grafik hiposikloid yang bertanduk empat dengan persamaan $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ tentukan panjangnya.

Petunjuk*:* Mengingat sifat kesimetrian, cukuplah dihitung panjang kurva yang terletak dalam kuadran pertama. Kemudian kalikanlah hasil pengintegralan itu dengan empat.

14. Sebuah titik P pada tepi sebuah roda, berada di titik asal O pada saat awal percobaan. Sewaktu roda itu menggelinding ke kanan sepanjang sumbu x, P bergerak sepanjang sebuah kurva yang kita namakan sikloid (Gambar 11). Susunlah persamaan sikloid itu sebagai berikut:

(a) Buktikan bahwa $\overline{OT} = a\theta$.

(b) Buktikan bahwa $x = a(\theta - \sin\theta)$, $\overline{QC} = a\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(c) Buktikan bahwa $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

15. Tentukan panjang satu busur sikloid dari soal 14.

Petunjuk: buktikan terlebih dahulu bahwa

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 4a^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

16. Andaikan roda dalam soal 14, menggelinding dengan laju sudut konstan

$w = \frac{d\theta}{dt}$, t waktu , maka $\theta = \omega t$

(a) Buktikan bahwa kecepatan $\frac{ds}{dt}$ titik P sepanjang sikloid itu adalah

$$\frac{ds}{dt} = 2a\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$$

(b) Bila kecepatan ini paling besar dan bila paling kecil?

(c) Terangkan mengapa seekor serangga pada sebuah roda mobil yang bergerak dengan laju 60 mil tiap jam, dapat bergerak dengan laju 120 mil tiap jam.

17. Carilah panjang dari setiap kurva

(a) $y = \int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\,du, 1 \leq x \leq 2$

(b) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 4\pi$

18. Carilah panjang dari setiap kurva

(a) $y = \int_{\frac{\pi}{6}}^x \sqrt{64\sin^2 u\cos^4 u - 1}\,du$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

(b) $x = a\cos t + at\sin t$, y

$= a\sin t - at\cos t$, $-1 \leq t \leq 1$

19. Tunjukkan bahwa $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > 0, b > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

merupakan persamaan parametris untuk elips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kemudian

tentukan a sedemikian rupa sehingga $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ dan satu periode dari

kurva kosinus yang memiliki panjang yang sama

20. Diberikan $y = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + \dfrac{x^{1-r}}{4(r-1)}, r \neq \pm 1$

(a) Tunjukkan bahwa $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ secara baik terpenuhi

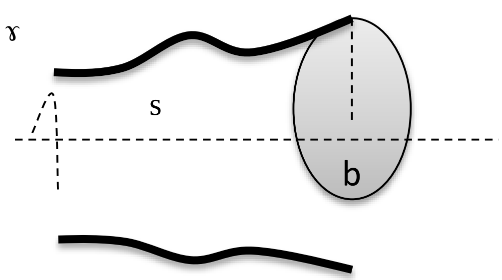
(b) Tentukan panjang kurva ini pada $1 \leq x \leq 2$ bila

BAB 5
LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR

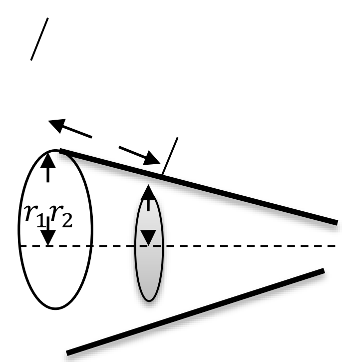
5.1. Permukaan Benda Putar

Apabila sebuah kurva yang terletak pada sebuah bidang diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang itu, maka kurva tersebut membentuk suatu permukaan benda putar. Tujuan kita ialah menentukan luas permukaan itu.

Permukaan benda putar



Gambar 5.1



Gambar 5.2

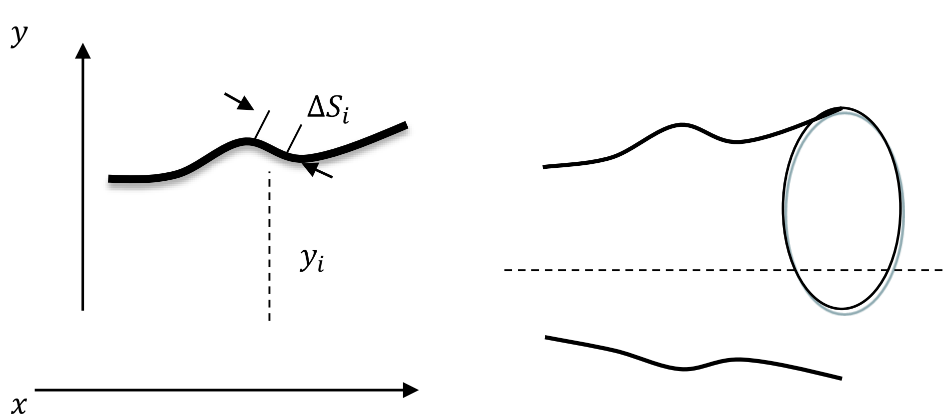
Kita mulai mencari rumus untuk luas permukaan kerucut terpancung. Sebuah kerucut terpancung adalah bagian permukaan kerucut yang terletak antara dua bidang yang tegak-lurus pada sumbu kerucut (bagian terarsir pada Gambar 2). Apabila jari-jari lingkaran alasnya adalah r_1 dan jari-jari lingkaran atas adalah r_2 sedangkan l panjang ruas garis pada pembangun kerucut antara dua lingkaran itu (rusuk kerucut terpancung), maka luas selimut kerucut terpancung itu adalah

$$A = 2\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)l = 2\pi(\text{jari-jari rata})\ \text{xrusuk}$$

Rumus ini dapat ditentukan dengan menggunakan luas daerah lingkaran (Soal 19).

Pemutaran Mengelilingi Sumbu X

Andaikan $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$, adalah persamaan kurva licin pada kuadran pertama (dan kedua) bidang xy, seperti tampak pada Gambar 3. Kita buat sebuah partisi dari selang $[a, b]$, dengan membaginya menjadi n selang bagian oleh titik-titik $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, dengan demikian kurva juga terbagi atas n bagian. Andaikan Δs_i panjang kurva bagian ke-i dan andaikan y_i, koordinat-y sebuah titik pada bagian ini. Apabila kurva itu diputar mengelilingi sumbu x, ia akan membentuk suatu permukaan dan bagian Δs_i itu akan membentuk permukaan bagian padanya.



Gambar 5.3 Gambar 5.4

Luas dari bagian ini dapat dihampiri oleh luas sebah kerucut terpancung yaitu, $2\pi y_i \Delta s_i$. Apabila kita jumlahkan luas-luas ini dan kemudian menarik limitnya dengan membuat norma partisi menuju nol kita akan memperoleh hasil yang kita definisikan sebagai luas permukaan putar itu. Hal tersebut dapat dilihat pada Gambar 11/4 dan rumus di dalam persegi panjang.

$$\boxed{A = \lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \Delta s_i = \int_a^b 2\pi y \, ds}$$

Dengan menggunakan rumus untuk A tersebut di atas, kita harus memberi arti yang tepat pada y, dsdan batas-batas pengintegralan a dan b. Diskusi pada akhir pasal yang lalu dapat membantu kita. Jadi, apabila permukaan itu terbentuk oleh sebuah kurva $y = f(x), a < x \leq b$, yang diputar mengelilingi sumbu x, maka kita peroleh untuk luasnya:

$$A = 2\pi \int_a^b y \, ds$$

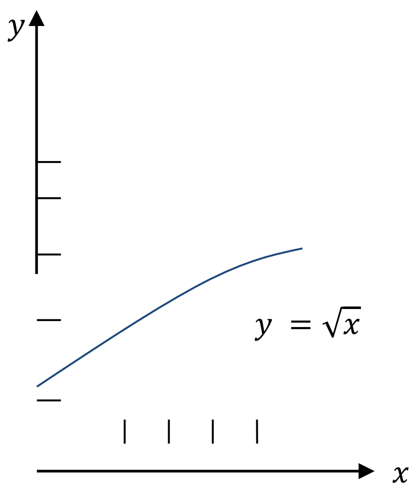
$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} d$$

Contoh 1

Tentukan luas permukaan benda putar apabila kurva $y = \sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 4,$ diputar mengelilingi sumbu x (Gambar 5).

Penyelesaian

Kita peroleh berturut-turut $f(x) = \sqrt{x}$ dan $f'(x) = \frac{1}{(2\sqrt{x})}$.



Gambar 5.5

$$A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1}\, dx$$

$$= \left[\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x + 1)^{3/2}\right]_0^4$$

$$= \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1^{3/2})$$

$$\approx 36{,}18$$

Apabila persamaan kurva yang bersangkutan diketahui dalam bentuk parameter $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$,maka rumus permukaan untuk menjadi:

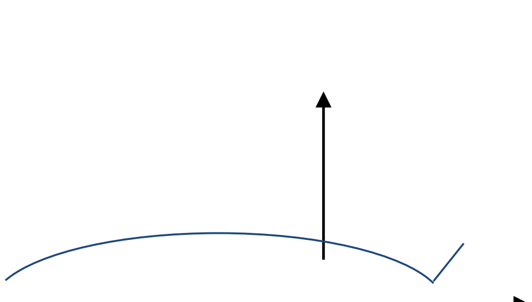
$$A = 2\pi \int_a^b y ds$$

$$= 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

Contoh 2

Tentukan luas permukaan yang terbentuk yang apabila satu busur dari sikloid $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ diputar mengelilingi sumbu x.

Penyelesaian



Gambar 5.6

Sikloid itu telah kita jumpai dalam soal 14. Satu busur sikloid dapat dilihat pada Gambar 6.

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt$$

$$= 2\pi^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\, dt$$

Integral ini dapat diselesaikan dengan mudah apabila kita gunakan rumus trigonometri $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$, Kita peroleh :

$$A = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left[2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]^{3/2} dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{1}{2}\right) dt$$

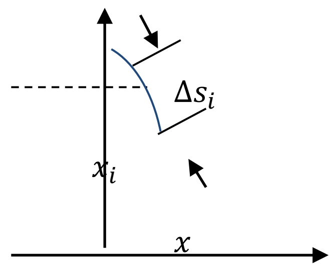
Andaikan $u = \cos(t/2)$, sehingga $du = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$; perhatikan bahwa $u = 1$ untuk $t = 0$ dan $u = -1$ apabila $t = 2\pi$. Kemudian:

$$A = -16\pi a^2 \int_1^{-1} (1 - u^2)\, du = -16\pi a^2 \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_1^{-1} = \frac{64\pi a^2}{3}$$

Pemutaran Mengelilingi Sumbu Y

Seperti pemutaran mengelilingi sumbu x, dan dengan menggunakan Gambar 7, kita akan memperoleh:

$$\boxed{A = \int_a^b 2\pi x\, ds}$$



Gambar 5.7

Sebagai luas permukaan yang diperolehapabila sebuah kurva diputar mengelilingisumbu y.

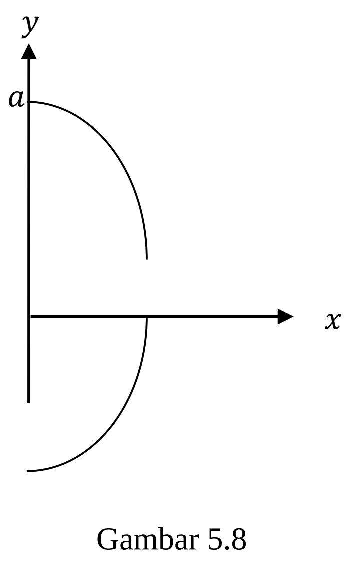
Contoh 3

Tentukanlah luas permukaan yang terbentuk apabila kurva

$x = \sqrt{a^2 - y^2}, -a \leq y \leq a$, diputar mengelilingi sumbu y (Gambar 8).

Penyelesaian:

$\mathrm{x} = \mathrm{g(y)} = \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2},\ \mathrm{g}'(\mathrm{y}) = -\mathrm{y}/\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2}$ sehingga:



Gambar 5.8

$$A = 2\pi \int_{-a}^{a} x\, ds$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2} dy$$

$$= [2\pi a y]_{-a}^{q}$$

$$= 4\pi a^2$$

Dengan demikian, luas permukaan bola dengan$x = \sqrt{a^2 - \ y^2}$jari-jari a adalah $4\pi a^2$ yang sesuai dengan hasilyang diperoleh di Sekolah Menengah.

Karena kurva pada Contoh 3 menggambarkan suatu persamaan dari bentuk $x = f(y)$, nampaknya sangat natural untuk mengekspresikan integrand yang lengkap dalam suku-suku y, yang hasilnya disebut integrasi-y. Pilihan yang lain adalah mungkin. Kita dapat mengekspresikan integrand yang lengkap dalam suku-suku x, yang juga dikenal sebagai integrasi x, atau kita juga dapat memakai bentuk parametrik $x = a \cos t, y = a \sin t$, untuk semi lingkaran, yang juga dikenal sebagai integrasi-t (lihat Soal 21).

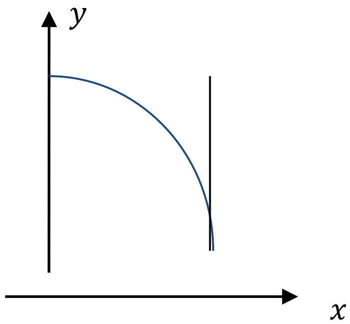
Contoh 4

Susunlah sebuah integral untuk luas permukaan yang terbentuk apabila

$x = \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \leq y \leq a$, diputar mengelilingi garis $x = a$ (Gambar 9).

Penyelesaian

Oleh karena kasur ini bukan pemutaran mengelilingi sumbu x maupun sumbu y, kita menggunakan aturan dasar kita, yaitu metode potong, aproksimasi, integralkan. Maka kita peroleh



Gambar 5.9

$\Delta A = 2\pi(a - x)\Delta s$

$$A = 2\pi \int_0^a (a - x)\, ds$$

$$= 2\pi \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}\, dy - 2\pi \int_0^a a\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^a (a - \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}\, dy}$$

Dalam hal ini kita tidak dapat menyelesaikan integrasi yang pertama. Daripada mencoba suatu integrasi y, lebih baik kita gunakan bentuk parametris

$x = a \cos t,\ y = a \sin t\,, 0 \leq t \leq \pi/2,$ untuk seperempat lingkaran dan kemudian melakukan integrasi t, sehingga kita dapat menyelesaikannya.

$$A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - x)\ \ ds$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - \cos t) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2}\ dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t)\ dt$$

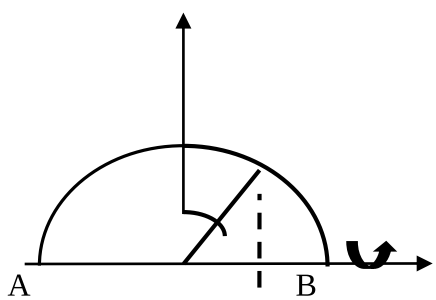
$$= 2\pi a^2 [t - \sin t]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi a^2 [\pi/2 - 1]$$

Contoh 5

Hitung permukaan bola berjari-jari a. (Gambar 10)

Penyelesaian:



Gambar 5.10

Kalau busur AB diputar terhadap sumbu x maka luas permukaan putar adalah permukaan bola.

$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -\mathrm{a} \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$

$S_x = 2\pi \int_{AB} y\ ds$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (a \sin\theta) \sqrt{(-a \sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2}\, \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (a \sin\theta)(a)\, d\theta$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi a^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi a^2(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$= 2\pi a^2$$

Contoh 6

Hitunglah luas benda putar yang terbentuk jika satu busur sebuah sikloida denganpersamaan:

$x = a(\theta - \cos\theta), y = a\,(1 - \cos\theta)$

diputar terhadap poros x.

Penyelesaian

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = a\,(1 - \cos\theta), \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d\theta}} = a\sin\theta$

$$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d\theta}}\right)^2 = (a\,(1 - \cos\theta))^2 + (a\sin\theta)^2$$

$$= a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta$$

$$= a^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= 2a^2(1 - \cos\theta)$$

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y \; ds$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) \sqrt{2a^2 + (1 - \cos\theta)} \; d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) \, 2a \sin\frac{1}{2}\theta \; d\theta$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{1}{2}\theta \; d\theta$$

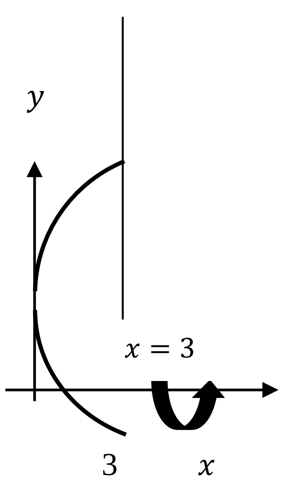
$$= \frac{64}{3}\pi a^2$$

Contoh 7

Hitung luas permukaan benda putar terbentuk karena perputaran

$y^2 = 12x$ $x = 0$ sampai $x = 3$ terhadap sumbu x. (Gambar 11).

Penyelesaian



Gambar 5.11

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12}{2y} = \frac{6}{y}$$

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S_x = 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1 + \left(\frac{6}{y}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 y \sqrt{y^2 + 6^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 y \sqrt{12x + 36}\, dx$$

$$= 24(2\sqrt{2} - 1)\pi$$]

Contoh 8

Hitung luas pemukaan terbentuk karena perputaran $\mathrm{y}^2 + 4\mathrm{x} = 2\ \ln\ \mathrm{y}$dari

$\mathrm{y} = 1$ sampai $\mathrm{y} = 3$ terhadap sumbu x.

Penyelesaian

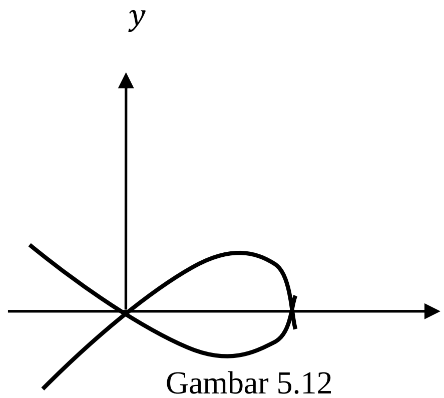
$$S_x = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^3 y \sqrt{1 + \left(\frac{1 + y^2}{2y}\right)}\, dy$$

$$= \pi \int_1^3 (1 + y^2)\, dy = \frac{32}{3}\pi$$

Contoh 9

Hitung luas permukaan putar terbentuk karena perputaranloop dari lengkung $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$terhadap sumbu x. (Gambar 12)



Gambar 5.12

$$16a^2y\,dy = (2a^2x - 4x^3)\,dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a^2\,x - 2x^3}{8a^2y}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(a^2 - 2x^2)^2}{8a^2\,(a^2 - x^2)}$$

$$= \frac{(3a^2 - 2x^2)^2}{8a^2\,(a^2 - x^2)}$$

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^8 \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2a\sqrt{2}} \left(\frac{3a^2 - 2x^2}{2a\sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4a^2} \int_0^8 (3a^2 - 2x^2)x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^2$$

Contoh 10

Hitung luas permukaan putar yang terbentuk karena perputaran elips

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ terhadap sumbu x.

Penyelesaian

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$= \pi \int_{-4}^{4} y\ \frac{\sqrt{16y^2 + x^2}}{4y}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int_{-4}^{4} \sqrt{64 - 3x^2}\ dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left[\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{64 - 3x^2} + 32\ arc\ sin \frac{x\sqrt{3}}{8}\right]_{-4}^{4}$$

$$= 8\pi\ (1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi)$$

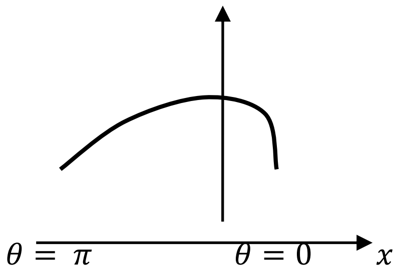
Contoh 11

Hitung luas permukaan terbentuk karena perputaran kardioida

$x = 2\cos\theta - \cos 2\theta,\ \ y = 2\sin\theta - \cos 2\theta$ terhadap sumbu x. (Gambar 13)

Penyelesaian:

y



Gambar 5. 13

Permukaan terbentuk oleh perputaran busur lengkung dari $\theta = 0$ sampai $\theta = \pi$

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta \qquad , \quad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = 8\,(1 - \sin\theta\sin 2\theta - \cos\theta\cos 2\theta)$$

$$= 8\,(1 - \cos\theta)$$

$$S_x = \pi\int_0^{\pi}(2\sin\theta - \sin 2\theta)\ 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\ .d\theta\ 2$$

$$= 8\pi\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin\ \theta\ (1-\cos\theta)^{3/2}\ d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{5}\ \pi\ (1-\cos\theta)]_o^{\pi}$$

$$= \frac{128\pi}{5}$$

Contoh 12

Hitung luas permukaan yang diperoleh dengan memutar kurva $y = e^x, 0 \leq x \leq 1$, mengelilingi sumbu-x.

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$S_x = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^e \sqrt{1 + \mathrm{u}^2}\ \mathrm{du}\ \ (\text{dengan } \mathrm{u} = e^x)$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\mathrm{a}} \sec^3\theta\ \ \mathrm{du}\ (\text{dengan } \mathrm{u} = \tan\theta \text{dan } \alpha = \tan^{-1} e)$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} [\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|]_{\pi/4}^{\mathrm{a}}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha \tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

Karena $\tan\alpha = e$, kita dapatkan$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + e^2$dan $S_x = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$

5.2. Soal Isian

1. Tentukan luas permukaan dari hasil perputaran $y = 2\sqrt{x}$ terhadap sumbu x untuk pada interval $1 \leq x \leq 2$

   Solusi:

   $y = \cdots \qquad \frac{dy}{dx} = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$L = \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \frac{8}{3}\pi(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

2. Tentukan luas permukaan benda putaran dari cubical parabola $\mathrm{a^2y = x^3}$ di antara $x = 0$ dan $x = a$, bila diputar keliling sumbu x.

Penyelesaian:

$\frac{dy}{dx} = \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$$= \cdots$$

$$L = \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{\pi}{27a^4}\left(a^4 + 9x^4\right)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)a^2$$

3. Hitunglah luas permukaan benda putaran, bila suatu busur $cycloid\ x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ diputar keliling sumbu x.

Penyelesaian:

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$L = \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{64}{3}\pi a^2$$

4. Hitunglah luas permukaan benda putaran, bila lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ diputar keliling sumbu x

Penyelesaian :

$y^2 = a^2 + x^2$

$y = \sqrt{a^2 + x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$= \cdots$

$= \cdots$

$L = 2 \int_{-a}^{a} y \, ds$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= 4\pi$

5.3. Soal Tambahan

Dalam soal 1-10, tentukan luas permukaan yang terbentuk apabila kurva yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang tersedia.

1. $y = 6x, 0 \leq x \leq 1;$ mengelilingi sumbu x.
2. $x = 8y + 1{,}0 \leq y \leq 2;$ mengelilingi sumbu y.
3. $y = \sqrt{25 - x^2}, -2 \leq x \leq 3;$ mengelilingi sumbu x.
4. $y = \frac{x^3}{3}, 1 \leq x \leq \sqrt{7};$ mengelilingi sumbu x.
5. $x = y^3, 0 \leq y \leq 1;$ mengelilingi sumbu y.
6. $y = x^2, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3};$ mengelilingi sumbu y.
7. $y = \frac{1}{2}x^2 - 1{,}0 \leq x \leq 2\sqrt{2};$ mengelilingi sumbu y
8. $y = \frac{x^6+2}{8x^2}, 1 \leq x \leq 3;$ mengelilingi sumbu x.
9. $x = t, y = t^3, 0 \leq t \leq 1,$ mengelilingi sumbu x.
10. $x = 1 - t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1;$ mengelilingi sumbu x.

Dalam Soal-soal 11 hingga 18, susunlah sebuah integral (tetapi janganlah dihitung) untuk luas permukaan yang terbentuk apabila kurva yang diketahui diputar mengelilingi sumbu yang diberikan (lihat Contoh 4).

11. $y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi;$ mengelilingi $y = -1$
12. $y = x^2 + 2x, 1 \leq x \leq 3;$ mengelilingi $y = -2$
13. $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi;$ mengelilingi $x = 0$

14. $y = \sqrt{x-4}, 4 \leq x \leq 8;$ mengelilingi $x = 2$

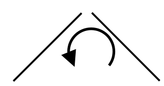
15. $y = \sqrt{x^2-4}, 4 \leq x \leq 4;$ mengelilingi $x = 2$

16. $y = x^4 + 2, 0 \leq x \leq 2;$ mengelilingi $y = 2$

17. $x = t^2, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi;$ mengelilingi $y = -1$

18. $x = a\cos t, y = a\sin t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ mengelilingi $x = -a$

19. Apabila selimut kerucut yang tinggi rusuk-miringnya adalah l dan jari-jari lingkaran alas adalah r dipotong sepanjang rusuk dan diletakkan pada sebuah bidang rata, maka kita peroleh sebuah sektor lingkaran dengan jari-jari $l$dan sudut pusat θ.



(a) Buktikan bahwa $\theta = \frac{2\pi r}{l}$ radian

(b) Gunakan rumus $\frac{1}{2}l^2\theta$ yang menyatakan luas sektor berjari-jari l dan sudut pusat θ, untuk membuktikan bahwa luas selimut kerucut adalah $\pi r l$

(c) Gunakan hasil (b) untuk memperoleh rumus $A = 2\pi\left[\frac{r_1+r_2}{2}\right]l$ yaitu yang menggambarkan luas selimut kerucut terpancung yang jari-jari lingkaran alas dan atas r_1 dan r_2 sedangkan panjang rusuk miring adalah l (lihat pula uraian pada awal pasal ini).

20. Buktikan bahwa luas bagian permukaan bola dengan jari-jari a yang terletak antara dua bidang sejajar yang berjarak h satu sama lain ($h < 2a$) adalah 2πah. Dengan demikian, tunjukkan bahwa jika suatu silinder dilingkupi oleh suatu

bola maka dua bidang datar sejajar dengan alas silinder akan membatasi daerah-daerah yang sama luasnya pada bola dan silinder.

21. Lengkapi penyelesaian pada Contoh 3 dengan dua cara lain melalui :
    (a) Suatu integrasi t dengan $x = a\cos t, y = a\sin t$.
    (b) Suatu integrasi x. Hati-hati mengenai limitnya.
22. Lingkaran $x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, 0 \leq t \leq 2\pi$, diputar mengelilingi garis $x = b, 0 < a < b$, sehingga menghasilkan sebuah torus. Carilah luas permukaannya.
23. Elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$, diputar mengelilingi sumbu-x. Carilah luas permukaan benda seperti bola tangan yang terjadi yang dinamakan sebagai $prolatespheroid$. (Anda akan membutuhkan rumus 54 dari bagian belakang buku ini untuk menyelesaikan turunannya). Hitunglah bila $b = \sqrt{2a}$.
24. Diketahui kurva $y = f(x) \geq 0, a \leq\leq b$. Misalkan kurva ini panjangnya L_0 dan bila diputar mengelilingi sumbu-x membentuk suatu permukaan dengan luas A_0.
    (a) Nyatakan luas yang serupa A_k untuk kurva $y = f(x) + k, k \geq 0$, dalam bentuk L_0 dan A_0.
    (b) Gunakan hasilnya untuk menentukan luas permukaan setengah lingkaran $y = 4 + \sqrt{9 - x^2}$ yang diputar mengelilingi sumbu-x.

25. Lengkapi penyelesaian pada Contoh 3 dengan dua cara lain melalui :

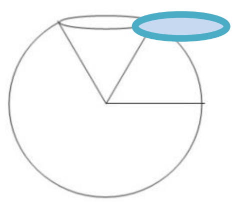
(c) Suatu integrasi t dengan $x = a\cos t, y = a\sin t$.

(d) Suatu integrasi x. Hati-hati mengenai limitnya.

26. Misalkan bumi berupa bola yang berjari-jari 4000 mil. Gunakan hasil dari Soal 20 untuk mendapatkan :

(a) Luas tutup kutub S di atas $75°$ sejajar (Gambar 11.12).

(b) Volume tembereng yang terjadi jika titik-titik pada S dihubungkan dengan penggal-penggal garis ke pusat bumi (lihat Soal 25 pada Pasal 6.3)



\Gambar 11.12

27. Lingkaran $x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, 0 \le t \le 2\pi$, diputar mengelilingi garis $x = b, 0 < a < b$, sehingga menghasilkan sebuah torus. Carilah luas permukaannya.

28. Elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$, diputar mengelilingi sumbu-x. Carilah luas permukaan benda seperti bola tangan yang terjadi yang dinamakan sebagai prolatespheroid. (Anda akan membutuhkan rumus 54 dari bagian belakang buku ini untuk menyelesaikan turunannya). Hitunglah bila $b = \sqrt{2a}$.

29. Diketahui kurva $y = f(x) \geq 0, a \leq\leq b$. Misalkan kurva ini panjangnya L_0 dan bila diputar mengelilingi sumbu-x membentuk suatu permukaan dengan luas A_0.

(c) Nyatakan luas yang serupa A_k untuk kurva $y = f(x) + k, k \geq 0$, dalam bentuk L_0 dan A_0.

(d) Gunakan hasilnya untuk menentukan luas permukaan setengah lingkaran $y = 4 + \sqrt{9 - x^2}$ yang diputar mengelilingi

(e) sumbu-x.

DAFTAR PUSTAKA

Bronson, Richard dan Gabriel Costa. 2007. *Persamaan Diferensial*. Edisi Ketiga. Jakarta: Erlangga.

Dale Varberg., Edwin J. Purcell. 2001. *Kalkulus Jilid I (edisi 7).* Alih Bahasa I Nyoman Susila. Batam: Interaksara

Edwin J. Purcell., Dale Varberg. 1989. *Kalkulus dan Geometri Analitis* Jilid 2 (terjemahan I Nyoman Susila dkk). Bab 18. Jakarta: Erlangga.

Frank Ayres., J.C Ault. 1984. *Kalkulus Diferensial dan Integral* (Seri Buku Schaum). Alih Bahasa Lea Prasetyo. Jakarta: Erlangga.

Howard Anton, 1981. *Calculus with Analyitical Geometri.* New York: John Willey and Sons.

Louis Leithold, 1986. *Kalkulus dan Geometri Analitik.* Alih Bahasa S. Nababan. Jakarta: Erlangga.

Koko Martono, 1993. *Kalkulus Integral I.* Bandung: Alva Gracia.

Murray R.Spiegel. Pantur Silaban, Hans Wospakrik. 1985. *Transformasi Linear*. Jakarta:Erlangga.

Ruwanto, Bambang. 2002. Matematika untuk Fisika dan Teknik. Yogyakarta: Adicita Karya Nusa.

Salusu, A. 2003. Teori dan Penyelesaian Kalkulus Lanjutan. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Soedojo, Peter. 1995. Matematika Fisika dan Teknik. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

Spiegel, Murray R. 1963. Kalkulus Lanjutan Versi S1/Simetrik. Jakarta: Erlangga.

Tom M.Apostol, 1984. *Calculus.*New York:Jhon Willey and Sons.

Wilfred Kaplan. 1961. *Ordinary Differential Equations.* Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company, Inc.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd lahir di Sitampurung 26 November 1986 Taput, Propinsi Sumatra Utara. Saya merupakan anak kelima dari lima bersaudara. Penulis lahir dari pasangan suami istri Bapak Togu Lumbantoruan dan Ibu Ratima Br. Sianturi. Penulis sekarang bertempat tinggal di Jalan Matador Perum Gria Marza Blok C RT 01/RW 07 Jatirangga Cibubur, Jatisampurna, Bekasi. Penulis menyelesaikan pendidikan dasar di Sekolah Dasar Negeri 2 Sitampurung (Kelas 1-6) dan lulus pada tahun 1999, lalu melanjutkan sekolah menengah pertama di SLTP Negeri 2 Siborong-borong dan lulus pada tahun 2002, melanjutkan pendidikan di SMA PGRI 20 Siborong-borong lulus pada tahun 2005, kemudian melanjutkan jenjang pendidikan S1 di Bidang Pendidikan Matematika di Universitas Kristen Indonesia (UKI) Jakarta dan lulus pada Tahun 2009, dan pada Tahun 2014 kemudian melanjutkan jenjang pendidikan S2 ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ) di program studi mengister matematika dan lulus pada Tahun 2017.

Saat ini penulis mengajar di Universitas Kristen Indonesia (UKI), Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP), Program studi Pendidikan Matematika. Buku integral-tentu Jilid 2 dan Edisi 1 adalah salah satu buku yang ditulis untuk mempermudah proses belajar mengajar di dalam kelas. Harapan saya dengan di bantu buku ini para pembaca,mahasiswa/pendidikan akan lebih mudah memahami dan memperoleh hasil yang lebih baik. Saya sangat mengharapkan saran dan kritikan yang bersifat membangun untuk kemajuan bersama. Terimakasih, salam

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd