VARIABEL KOMPLEKS
BEBERAPA HASIL TEORITIS

Oleh:

Nama : Lus Enda Fandi Wau

Nim : 1813150015

Prodi : Pendidikan Matematika

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

JAKARTA

2022

PRAKARYA

Segala puji dan syukur kepada Tuhan Yan Maha karena atas rahmat dan limpah kasih-Nya penulis dapat menyelesaikan buku ajar tentang materi "variable kompleks" dengan topik "beberapa hasil teoritis" dengan baik dan tersusun sampai dengan selesai

Penulis meminta maaf apabila terdapat kesalahan penulis pada suguhan materi untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca demi kesempurnaan makalah ini.

Akhir kata penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada seluruh pihak atau media yang terlibat, khususnya Dosen pengampu mata kuliah variable kompleks serta buku refrensi yang telah diberikan. Dan terlebih kepada diri sendiri yang telah berjuang menyelesaikan buku ajar ini.

Penulis

Lus Enda Fandi Wau

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PENDAHULUAN

dalam dunia Pendidikan matematika variable kompleks merupakan peluasan dari materi system bilangan real. Mata kuliah variable kompleks dapat dikategorikan ke dalam pelarana yang cukup sulit. Oleh karena itu, dibutuhkan wawasan yang cukup luas agar dapat memahami mata kuliah ini. Dalam hal ini penulis membahas materi tentang "beberapa hasil teoritis"

tujuan utama penulis buku ini adalah untuk memnuhi prasyarat lulus mata kuliah variable kompleks pada tahun ajaran 2021/2022. Sementara tujuan lainnya yaitu untuk menambah segala wawasan ataupun ilmu pengetahuan serta dapat menjadi pedoman (sumber belajar) bagi para pembaca yang ingin mempelajari ataupun mendalami pemahaman materi tentang variable kompleks.

Penulis sangat berharap sekirannya buku ini bermanfaat bagi para pembaca terlebih dapat dipahmi dengan mudah.

BAB 9

BEBERAPA HASIL TEORITIS

9.1 Asas Modulus Maximum

9.1.1 Pengertian Asas Modulus Maksimum

Asas modulus maksimum dapat diartikan dalam berbagai bentuk, semuanya sama-sama penting. Secara sederhana asas dapat dinyatakan bahwa jika $f(z)$ analitik yang tak konstanta pada suatu himpunan S yang tertutup dan terbatas, maka $|f(z)|$ mencapai nilai maksimunnya pada batas S. pada bab ini akan membahas dua hasil yang berbeda yang akan diperlukan pada pembuktian teorema.

Teorema identitas untuk fungsi analitik menyatakan bahwa :

> Jika dua funsi $f(z)$ dan $g(z)$ analitik didalam suatu daerah R dan jika $f(z) = g(z)$ untuk semua Z didalam suatu lingkungan N bagi ζ, dalam R, betapapun kecilnya N, maka $f(z) = g(z)$ pada semua titik di R dengan kata lain f dan g identic dalam R.

Dalam Teorema perlu diperhatikan bahwa identitas seperti yang dinyatakan diatas dapat diperlonggar sehingga hanya menyaratkan bahwa $f(z) = g(z)$ untuk tak berhingga pada titik-titik yang berbeda yang mempunyai ζ sehinnga limitnya.

Hasil yang pertama dan kedua yang akan diperlukan untuk membuktikan asas modulus maksimal adalah

> Jika $f(z)$ kontinu pada z_0 dan jika $|f(z_0)| < M$, maka $|f(z)| < M$ untuk setiap z dalam suatu lingkungan z_0.

Dapat dibuktikan hasil sebagai berikut. Bardasarkan kontinuitas f pada z_0, bila diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, hubungan

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Dipenuhi untuk setiap z didalam lingkungan z bagi z_0. Khususnya dengan mengambil

$$\varepsilon = M - |f(z_0)| > 0,$$

Maka untuk setiap z di dalam suatu N (z_0, δ), kita mempunyai

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)| \\ &< \varepsilon + |f(z_0)| \\ &= M, \end{aligned}$$

9.1.2 Teorema Asas Modulus Maksimum

Andaikan bahwa

1. $f(z)$ analitik dan tidak konstan pad daerah tertutup S, artinya, pada suatu himpunan S terdiri dari daerah tak kosong R dan batas batasnya
2. $|f(z)|$ mecapai maksimum pada S. artinya, terdapat paling sedikit titik ζ maka ζ adalah suatu titik pada batas S.

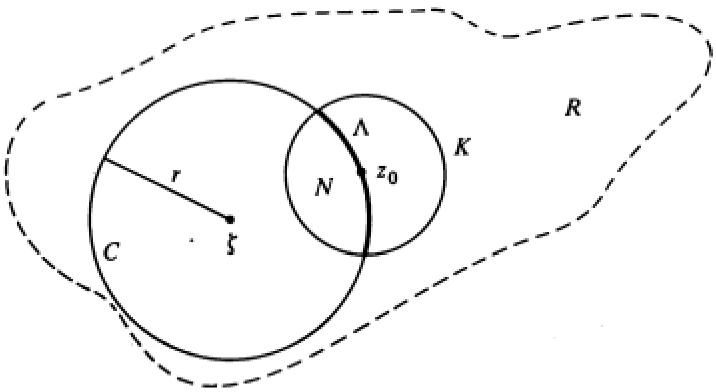
Bukti:

Dibuktikan dengan kontradiksi,

Missal kita andaikan bahwa $|f(\zeta)| = M$ adalah maksimum f pada S untuk suatu titik dibagian dalam S. karena $f(z)$ analitik dan tak konstan pada R (bagian dalam himpunan S), maka $|f(z)|$ juga tak konstan pada R.

Karena, jika $|f(z)| = M$ untuk setiap titik di dalam suatu lingkungan ζ, maka $f(z)$ akan menjadi konstan di dalam lingkunga tersebut. Oleh karena it, di dalam semua R terjadi kontradiksi dengan hipotesis. Jadi misalkan z_0 adalah suatu titik sehingga dapat terpenuhi yang dipilih sedemikian sehingga menjadi lingkaran,

$$C; |z - \zeta| = |z_0 - \zeta| = r$$



Gambar 9.1 Teorema

Dalam suatu lingkungan N pada z_0 dikelilingi oleh suatu lingkaran. Katakana K, sekarang karena $|f|$ mencapai maksimum pada S, yang terdapat suatu bilangan $p > 0$ sedemikian hingga

$$|f(z)| \leq M - p$$

Untuk semua z dalam N.

Berikut, perlu kita perhatikan bagian $\wedge$ dari C yang termasuk dalam K dan nyatakan Panjang $\wedge$ dengan L. maka, kita dapat menggunakan dalam bentuk rumus integral sebagai berikut:

$$|f(\zeta)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_c \frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_c \frac{f(z)}{z-\zeta}dz + \int_\wedge \frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c-\wedge} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_\wedge \frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r}(2\pi r - L) + \frac{1}{2\pi}\frac{M-p}{r}L < M$$

Tetapi karena $M = |f(\zeta)|$, kita telah sampai pada keahlian $|f(\zeta)| < |f(\zeta)|$ sebagai akibat pengaaian kita bahwa ζ merupakan titik di dalam S. maka dapat disimpulkam bahwa ζ harus merupakan titik batas S, dan lengkaplah bukti pad gambar diatas.

9.2 Teorema Liouville. Teorema poko aljabar

Kita ingat Kembali bahwa suatu fungsi dikatanyakan menyeluruh nila fungsi itu analitik pada setiap titik di bidang berhingga. Misalkan sekarang bahwa $f(z)$ menyeluruh dan bahwa c adalah suatu titik di bidang datar. Maka terdapat deret Taylor yang nyatakan f pada setiap z

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

Jika $a_n = 0$ untuk semua $n \geq 1$, maka, jelaskan, $f(z)$ merupakan fungsi konstan:

$$f(z) = a_0$$

Jika $a_k \neq 0$ untuk beberapa bilangan bulat $k \geq 1$ tetapi $a_n = 0$ untuk semua $n > k$, maka $f(z)$ merupakan suku banyak berderajat k

$$f(z) = a_0 + a_1 z + c_2 z^2 + \cdots + a_k z^k$$

Jika $a_n \neq 0$ untuk tak berhingga banyaknya nilain n, maka f fungsi transsendental menyeluruh.

Jika dilihat dari ketiga jenis fungsi menyeluruh ini untuk titik-titik z yang sembarang besarnya, maka kita akan melihat bahwa fungsi konstan tersebut tetap terbatas, sedangkan yang lain tak terbatas. Jika fungsi bersifat menyeluruh dan tak konstan, makai a dapat dibuat untuk menjasi benilai besar sembarang dengan memilih sepantasnya nilai-nilai unuk peubah bebas z. teorema dalam hal ini menyatakan dalam bentuk yang sedikit berbeda tetapi akivalen.

9.2.1 Teorema Liouville

1. $f(z)$ suatu fungsi menyeluruh
2. f berbatas pada bidang datar, artinya, terdapat bilangan nyata positif M sedemikian hingga, untuk semua z, $|f(z)| \leq M$.

Maka f merupakan fungsi konstan.

Bukti:

Karena f menyeluruh, ia memiliki penguraian deret Taylor.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

Pada setiap titik c dan deret tersebut konvergen untuk semua z. menurut akibat 2 teorema kita tahu bahwa

$$|a_n| = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Jika $f(z) = a_0$ dan teorema tersebut terbukti.

Sebagai akibatnya teorema Liouville, kita dapat membuktikan dengan mudah. Teorema pokok aljabar, yang menyatakan bahwa setiap suku banyak tak konstan dengan koefisien komleks mempunyai paling sedikit satu akar kompleks.

9.2.2 Teorema Pokok Aljabar

Andaikan bahwa

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

Merupakan suku banyak dengan $a_n \neq 0$ dan $n > 0$

Maka terdapat suatu bilangan kompleks α sedemikian hingga $f(\alpha) = 0$.

Bukti:

Pertama, kita membuktikan bahwa $P(z)$ merupakan fungsi tak terbatas. Artinya bahwa bila diberikan sembarang bilang nyata $M > 0$, terdapat titik ζ sedekian hingga $|P(\zeta)| > M$. Untuk itu kita perlu memperhatikan hal sebagai berikut.

a) Misalkan $M > 0$ dipilih sembarang. Karena, menurut hipotesis $|a_n| > 0$ kita dapat menemukan suatu titik z dengan modulus cukup besar dapat dipilih sedemikian hingga
$$\frac{|a_n||z|^n}{2} > M$$
b) Begitu juga suatu titik z dengan modulus cukup besar dapat dipilih sedemikian hingga

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z^2}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\cdots\frac{a_0}{z^n}\right| \le \left|\frac{a_{n-1}}{z^2}\right|+\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right| < \left|\frac{a_0}{z^n}\right|,$$

c) Sekarang, dengan memilih ζ yang modulusnya cukup besar sedemikian besar sehingga semua hubunga pada (a) dan (b) dipenuhi untuk $z=\zeta$, kita mendapatkan bahwa

$$|P(\zeta)| = |a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1}+\cdots+a_n\zeta+a_0|$$

$$= |\zeta|^n\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{\zeta}+\cdots+\frac{a_1}{\zeta^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right|$$

$$> \frac{|a_n||\zeta|^n}{2}$$

$$> M$$

Oleh karena itu $P(z)$ merupakan fungsi tak terbatas.

9.3 Tingkah Laku Fungsi Di Singularitas Terasing

Tingkah laku fungsi singularitas terasing merupakan singularitas yang “superficial” dan bahwas suatu fungsi yang memiliki titik singular demikian dapat di definisikan pada titik itu. Sehingga ia analitik.

Pada bab ini, kita akan mmbahas tingkah laku fungsi $f(z)$di sekitar kutub dan singularitas pokoknya. Kita akan melihat bahwa di dekat setiap kutubnya, $f(z)$tidak bertingkah laku sebaik seperti di dekat singularitasnya yang dapat dihilangkangkan. Tetapi tingkah lakunya masih diperhatikan, karena akan menunjukkan $f(z)$ selalu mendekati takhingga bila z mendekati salah satu kutubnya. Mengenai tingkah laku fungsi di dekat salah satu singularitas pokoknya ternyata fungsi yang demikian itu sama sekali tak dapat diramalkan dan sangat tidak stabil dalam arti yang dinyatakan oleh teorema Casoroti-Weierstrass yang merupakan erat hubungannya denan tingkah laku itu ialah sifat yang dinyatakan dalam teorema Picard.

9.3.1 Teorema Singularitas Terasing

Andaikan bahwa $f(z)$ mempunyai kutub tingkat n pada titik z_0, maka

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

Bukti:

Dengan tidak menghilangkan sifat umumnya, kita membuktikan teorema ini untuk kasus $z_0 = 0$.

Menurut hipotesis, terdapat penguraian deret Laurent yang konvergen ke f untuk semua z dalam suatu lingkungan nol terhapus:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k, \qquad a_{-n} \neq 0$$

Sekarang, jika kita menuliskan dalam bentuk

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{z^n}\left[1 + \frac{a_{-n+1}}{a_{-n}} z + \frac{a_{-n+2}}{a_n} z^2 + \cdots\right] = \frac{a_{-n}}{z^n}[1 + S(z)],$$

Kita dapat memperhatikan bahwa

$$\text{Jika } z \to 0, \quad S(z) \to o$$

Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$, dikatan $\varepsilon = \frac{1}{2}$, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|z| < \delta \qquad berimplikasi \left|P(z) < \frac{1}{2}\right|$$

Oleh karena itu

$$|1 + S(z) \geq 1 - |\left|S(z) > \frac{1}{2}\right|$$

Tetapi ini berarti

$$|f(z)| = \frac{|a_{-n}|}{|z|^n}|1 + S(z)| > \frac{|a_{-n}|}{2|z|^n} > \frac{|a_{-n}|}{2\delta^n}$$

Sekarang hungan terakhir itu benar untuk sembarang bilangan positif yang kurang dari δ. Jadi, mengambil $\delta \to 0$ yang berarti bahwa $z \to 0$ kita melihat bahwa

$$|f(z)| \to \infty$$

9.3.2 Teorema Riemann

Andaikan bahwa $f(z)$ mempunyai dua sifat sebagai berikut

1. Mempunya singaluritas teasing di z_0
2. Berbatas di dalam suatu lingkungan z_0 terhapus N_1, artinya terdapat suatu bilangan positif M sedemikian hingga $|f(z)| \leq M$ untuk semua z dalam analus
$$N: 0 < |(z)|z_0 < p$$
Maka z_0 merupakan singaluritas f yang dapat dihilangkan

Bukti:

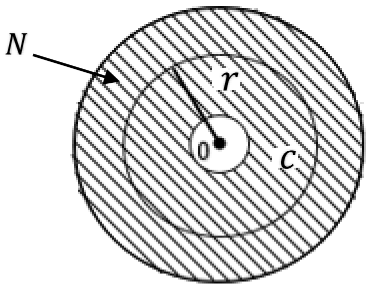
Dengan tanpa kehilangan sifat umumnya, kita akan membuktikan teorema ini untuk kasus $z_0 = 0$.

Menurut hipotesis $1, f$ analitik di dalam lingkungan z_0 terhapus N_2. Yang disebut paling terkecil di antara N_1 dan N_2 dengan N maka f mempunyai representasi deret Laurent:

$$f(z) = \sum_{c^{\infty} - \infty}^{\infty} c_n 2^n$$

Pada setiap titik di N yang koefisiennya diberikan oleh

$$c_n = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{f(z)}{z^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{n^n}$$



Gambar 9.2 Teorema

Karena r dapat diambil sekecil yang kita inginkan, besaran ini dapat dibuat mendekati nol untuk semua $n = -1, -2, \dots$ jadi

$$c_{-1} = c_{-2} = \cdots = c_{-n=} \dots = 0$$

Oleh karena itu, deret Laurent tersebut merupakan deret Taylor. Ini berarti disebut bahwa kenolan itu merupakan singaluritas yang dapat dihilangkan dan lengkaplah buktinya.

9.3.3 Teorema Caonati-Welesstrass

Andaikan bahwa $f(z)$ mempunyai singaluritass pokok z_0, maka untuk sembarang bilangan L Yyang diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat suatu titik z di dalam setiap lingkungan z_0 sedemikian hingga $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Bukti:

Menurut hipotesis, f analitik di suatu lingkungan z_0 terhapus. Semua pertimbangan dalam bukti ini yang melibatkan analitisitas f dibatasi oleh titik-titik pada lingkungan tersebut.

Misalkan L adalah suatu bilangan kompleks sembarang dan perhatikan suatu selisih $f(z) - L$, kita dapat membedakan dengan dua kemungkinan yaitu:

1. $f(z) - L$ mempunyai kenolan dalam setiap lingkuangan z_0
2. Terdapat suatu $N\ (z_{0,}\ p)$ yang didalamynya tidak ada kenolan bagi $f(z) - L$

Jika (1) benar, maka pernyataan teorema itu dipenuhi. Tetapi, jika (2) berlaku maka kita dapat memperhatikan fungsi yaitu:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - L}$$

Yang analitik di dalam lingkungan terhapus $N * (z_{0,} p)$. Karena $f(z) - L$ analitik dan tidak nol dan terdapat pada z_0. $g(z)$ mempunyai suatu singuliritas terasing. jika z_0 merupakan singularitas terasing yang dapat dihilangkan atau suatu kutub bagi g, maka dari

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + L$$

Kita dapat memperhatikan bahwa f mempunyai suatu kutub atau menjadi analtik pada z_0. artinya g tak terbatas dalam N. Jadi, untuk sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat paling sedikit satu titik z dalam N dimana

$$\left| g(z) > \frac{1}{\varepsilon} \right|$$

Oleh karena itu

$$|f(z) - L| < \varepsilon.$$

9.4 Ketunggalan Pengurangan Taylor Dan Laurent

Terbukti bahwa setiap fungsi analitik pada suatu titik c mempunyai penguraian deret taylor konvergen di dalam suau lingkaran c. Begitu juga pada teorema Laurent telah terbukti untuk sembarang fungsi yang analitik di seluruh suatu anulus melingkar. Kita akan membuktikan bahwa penguraian ini bersifat tunggal. Dimana pusat penguraiannya disebut pusat koordinat $c = 0$. Bentuk umum dapat di pelorah secara langsung denan hanya mensubtitusikan $(z - c)$ kedalam z.

Toorema:

Andaikan bahwa deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mempunyai jari-jari konvergen positif dan bahwa keuanya konnvengen ke fungsi yang sama di suatu lingkunngan $z = 0$. Maka,

$$a_n = z^n, \qquad \text{untuk semua } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Jadi kedua deret itu dinyatakan sama.

Bukti:

Dibuktikan dengan induksi pada n

1. $z = 0$, karena kedua deret mempuyai jumlah yang sama untuk semua z di dalam lingkungan nol, maka itu benar untuk $z = 0$. Jadi,

$$a_0 = b_0.$$

2. Langkah induksi yaitu andaikan bahwa

$$a_j = b_j, \qquad \text{untuk semua } j = 0, 1, \dots k$$

Maka

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n z^n.$$

Untuk $z \neq 0$ tetapi di dalam lingkungan persekutuan yang jatuh kedua deret itu, kita bagi kedua ruas persaaan terakir dengan Z^{k+1} untuk memperoleh

$$a_{k+1} + a_{k+2^z} + a_{k+3}z^2 + \cdots = b_{k+1} + b_{k+2^z} + b_{k+3}z^2 + \cdots$$

Kemudian, dengn mengambil $z \to 0$, makan akan memiliki

$$a_{k+1} = b_{k+1}$$

Jadi, dengan induksi

$$a_n = b_n, \qquad \text{untuk semua } n$$

Maka terbukti.

9.4.1 Teorema Ketunggalan penguraian taylor

Andaikan bahwa dua deret taylor

$$\sum_{n\leftrightarrow 0}^{\infty} a_n z^n \quad dan \quad \sum_{n\leftrightarrow 0}^{\infty} b_n z^n$$

Memilik jari-jari konvergen positif dan bahwa jumlah keduanya tepat sama pada dua titik berbeda di takhingga konvergen k nol L lebih dari itu, andaikan kedua deret itu sama pada $z = 0$. Maka kedua deret itu sama dalam suatu lingkungan nol

Sekarang kita akan membuktikan bahwa penguraian deret Laurent suatu fungsi adalah tunggal, dalam artinya bahwa sembarang dua penguraian yang demikia untuk satu fungsi yang sama pada analus melingkar yang sama identic

9.4.2 Teorema Ketunggalan penguraian Deret Laurent

Andaikan bahwa

1. $f(z)$ analitik pada analus tertutup

$$\boldsymbol{A}: \boldsymbol{r} \leq |\boldsymbol{z}| \leq \boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{dimana} \quad \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{R} \leq \infty$$

2. $f(z) = \sum_{n\leftrightarrow 0}^{\infty} a_n z^n$, untuk setiap z dalam $\boldsymbol{A}$.

maka deret di atas adalah deret Laurent

Bukti:

Maka akan dibuktikan dengan menunjukkan bahwa, untuk setiap bilangan bulat n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{|f(\zeta)|}{f^{n+1}} d\, f,$$

Maka C merupakan sembarang lingkaran $|z| = p$, dimana $r < p < R$. Dengan memisalkan C seperti yang dibahas di atas dan ambilah ζ suatu titik sembarang pada C. Maka menurut hipotesis, untuk suatu ζ sembarang, deretyang diberikan konvergen ke f:

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k$$

Dengan mengalihkan seluruhnya dengan $1/\zeta^{n+1}$, untuk setiap n, kita memperoleh

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^{k-n-1} + \frac{c_n}{\zeta} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \zeta^{k-n-1}$$

Berikut akan di integralkan hubungan di atas sepanjang C, dengan orientasi positif. Lakukan integrasi suku demi suku, maka kita akan mempunyai

$$\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \int_c \zeta^{k-n-1}\, d\zeta + c_n \int_c \frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \int_c \zeta^{k-n-1}\, d\zeta.$$

Menurut pembahasan di atas, dimana rumus integral di sebut masing-masing integral sama dengan nol. Oleh karena itu,

$$\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = c_2 2\pi i,$$

n dipilih sembarang maka hubungan terakhir ini benar untuk sembarang n dan teorema di atas terbukti.

INDEKS

GLOSARIUM

Konstanta : Suatu bilangan yang tetap tidak berubah-ubah.

Kontinuitas : Manifestasi dari suatu proses perkembangan aspek kehidupan masyarakat yang terus menerus, sekalipun situasi dan kondisi berubah

Kontradiksi : Suatu bentuk pernyataan yang hanya mempunyai contoh substansi yang salah, atau sebuah pernyataan majemuk yang salah dalam segala hal tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Deret Taylor : Representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik.

Konvergen : Pergerakan dari lempeng, dimana lempeng-lempeng tersebut bergerak saling mendekati satu sama lain dengan gaya kompresional.

Singularitas : Titik dimana ruang dan waktu mengalami kelengkungan yang tidak berbatas.

Deret Laurent : Bentuk umum dari deret Taylor yang didalamnya memuat bentuk $(z - z_0)$ berpangkat bilangan bulat negatif ditambah dengan $(z - z_0)$ berpangkat bilangat bulat positif (berhingga atau tak berhingga).

Anulus : Ruang antara dua dinding silinder yang garis tengahnya berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

BENUSU, M. (2016, 10 10). Logika informatika. *PENGERTIAN SERTA CONTOH KONTRADIKSI DAN VALIDITY*, p. https://melkianusbenusu.wordpress.com/2016/10/10/92/.

BUDISANTOSO. (2011, 08 11). wordpress.com. *DERET TAYLOR*, pp. https://inisantoso.wordpress.com/2011/08/27/deret-taylor/.

Lumbantoruan, J. H. (2015). Fungsi Limit Dan Kontinuitas . *modul*, 1-45.

Lumbantoruan, J. H. (2017). Pengembangan Bahan Ajar Integral Tak Tentu Berbasis Model SMALL GROUP DISCUSSION di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UKI. *Jurnal 4*, 99-118.

Lumbantoruan, J. H. (2017). *Pengembangan Bahan Ajar Integral Tak Tentu Berbasis Model SMALL GROUP DISSCUSSION Di Program studi Pendidikan Matematika FKIP UKI.* JAKARTA: Jitu Halomoan Lumbantoruan.

Lumbantoruan, J. H. (2019). *BUKU INTEGRAL-TENTU.* JAKARTA: Jitu Halomoan Lumbantoruan.

Lumbantoruan, J. H. (2019). *Buku materi Pembelajaran Geometri 1.* JAKARTA: Jitu Halomoan Lumbantoruan.

Lumbantoruan, J. H. (2019). *Buku materi pembelajaran matematika dasar.* Jakarta: Jitu Halomoan Lumbantoruan.

Lumbantoruan, J. H. (2019). *Buku Materi Pembelajaran Teori Peluang Dan Kombinatorika.* JAKARTA: Jitu Halomoan Lumbantoruan.

Lumbantoruan, J. H. (2019). Pengembangan Bahan Ajar persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguran Dan Ilmu Pendidikan 2017/2018. *Jurnal 7*, 147-167.

Lumbantoruan, J. H. (2019). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Differensial Berbasis Model Brown di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. *Jurnal Universitas Kristen Indonesia*.

Lumbantoruan, J. H. (2019). Students' Perceptions an Attitudes Towera Statistics. *Jurnal Universitas Kristen Indonesia*, 507-513.

Lumbantoruan, J. H. (2020). *buku materi pembelajaran pemograman linear.* Jakata: Jitu Halomoan Lumbantoruan.

Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Buku Cerita Pada Kelas VII SMP Dalam Materi Perbandingan . *Jurnal 9*, 23-34.

Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis ARTUCULATE STORYLINE Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas XIII. *jurnal 10*, 35-49.

Lumbantoruan, J. H. (2021). Development Of A Constructivism-Based Statistics Module For Class VIIIJunior High School Students. *Jurnal 5*, 4427-4444.

Lumbantoruan, J. H. (2021). Exsesibilitas Anak Berkebutuhan Khusus di Era Pendidikan 4.0. *Jurnal 6*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). Garis Lurus. *modul 9*, 251-278.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). Lingkaran. *modul 1*, 1-29.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). Modul Geometri Datar Dan Ruang. *modul*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). Parabola. *modul 6*, 167-196.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). Sistem Koordinat Kartesius R2 . *modul 1*, 1-35.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). Tranformasi Susunan Sumbu. *modul 7*, 197-223.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). Turunan. *Modul 4*, 1-11.

Paliouras, J. D. (1987). *PEUBAH KOMPLEK UNTUK ILMUAN DAN INSINYUR.* JAKARTA: ERLANGGA.

PANN. (2019, 04 08). Glasium online. *Anulus*, pp. https://glosarium.org/arti-anulus/.

Pann. (2019, 04 97). Glosarium online. *arti-kontinuitas*, pp. https://glosarium.org/arti-kontinuitas/.

PANN. (2019, 04 08). GLOSARIUM ONLINE. *singularitas*, pp. https://glosarium.org/arti-singularitas/.

PANN. (2019, 04 08). GLOSARIUM ONLINE. *ANULUS*, pp. https://glosarium.org/arti-anulus/.

PUR, M. (2019, 10 05). freedomsiana. *Konvergen*, p. https://www.freedomsiana.id/konvergen/.