BAB 8 PENERAPAN

DISUSUN OLEH:

NAMA : RONTAULI SIHOTANG

NIM : 1813150011

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

2022/2023

PRAKATA

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, dimana atas izin dan karunianya kami dapat menyelesaikan modul ini tepat waktu. Dengan judul modul PENERAPAN. Kami juga mengucapkan terimakasih kepada pak jitu halomoan lumbantoruan sebagai dosen pengampu mata kuliah yang telah memberikan saran dan dukungan kepada saya sehingga modul ini dapat kami selesaikan dengan baik.

Adapun tujuan penulisan modul ini adalah untuk memenuhi salah satu tugas mata kuliah variabel kompleks dan untuk membantu setiap pembaca mengetahui tentang penerapan.

Penulis menyadari bahwa modul ini masih jauh dari kesempurnaan, hal ini dikarenakan keterbatasan pengetahuan, pengalaman dan waktu yang dimiliki. Oleh sebab itu, penulis secara terbuka meminta dan menerima segala saran dan kritik dari pembaca sehingga penulis dapat memperbaiki makalah ini menjadi lebih baik lagi. Atas segala bantuan yang telah diberikan kami ucapkan terimakasih.

DAFTAR ISI

BAB 8

PENERAPAN

Pasal 1. Perhitungan integral dengan menggunakan residu, integral fungsi rasional, untuk fungsi trigonometri. Integral tak wajar jenis tertentu untuk fungsi rasional.

Pasal 2. Konsep integrase sekeliling titik cabang diperkenalkan melalui contoh.

Pasal 3. Ulangan konsep titik di tak terhigga dan bidang kompleks diperluas. Lingkungan di tak terhingga singularitas di tak terhingga.

Pasal 4. Pembicaraan tentang pemetaan khusus tertentu yang dipakai pada penerapan. Aliran sekeliling tabung;" airfoil " joukowski; aliran pada ujung saluran; pemetaan schwarz-christoffel.

8.1 Pasal 1

Perhitungan Integral Nyata

Sering diperlukan, khususnya dalam berbagai bidang matematika terapan, untuk menggunakan metode integrase kompleks guna menghitung integral nyata jenis tertentu yang tidak dapat dikerjakan dengan kalkulus peubah nyata, dan berbentuk dari yang nampaknya sangat sederhana

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$$

Hingga yang lebih rumit

$$\int_0^{\infty} \cos(\cos(x^2)dx$$

Dan masih banyak lagi yang lebih rumit dan sulit. Teori residu melengkapi suatu cara berdaya guna tinggi, elegan, dan relative sederhana untuk menghitung bermacam- macam bentuk integral nyata yang tidak elementer. Pada pasal ini kita membahas tentang contoh-contoh dan beberapa perhitungan integral demikian yang berbentuk sederhana. Beberapa jeneralisasi hanya akan disinggung, tetapi tidak ada bukti yang akan diberikan disini untuk menetapkan rumus yang lebih umum.

1. INTEGRAL FUNGSI RASIONAL $\cos t$ dan $\sin t$

Jenis integral ini mempunyai bentuk umum yaitu:

$$j = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\, dt$$

Dimana f adalah fungsi rasional dalam cot t dan sin t, jadi integral ini hanya melibatkan fungsi trigonometri berpangkat bulat dan berhingga untuk $0 \leq t \leq 2\pi$.

Substitusi dasar yang digunakan dalam perhitungan integral yang demikian adalah

$$z = \cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi. \qquad (\mathbf{1})$$

Perhatikan bahwa, untuk t berubah-ubah dari 0 ke 2π, z membentuk lingkaran satuan C:|z|=1 dalam arah positif. Dari persamaan tersebut dapat kita peroleh

$$\frac{1}{z} = \cos t - i \sin t,$$

Yang bila digabungkan dengan persamaan 1 akan menghasilkan

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \; dan \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \qquad (\mathbf{2})$$

Jadi dari persamaan 1 kita mempunyai

$$dz = (-\sin t + i \cos t)dt = (iz)dt$$

Dan oleh sebab itu

$$dt \frac{dz}{iz} = -\frac{i}{z} dz \qquad (\mathbf{3})$$

Sekarang bila integral j merupakan fungsi rasional dalam sin t dan cos t, maka dari substitusi dari (2) dan (3) akan memperoleh suatu integral

$$\int_{c} g(z)dz$$

Dimana g adalah fungsi rasional dalam z, yang dapat kita dihitung dengan cara yang dikembangkan pada bagian II.

CONTOH 1.

Kita menghitung integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$$

Dengan substitusi dari 2 dan 3, kita mempunyai

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = -i\int_{c} \frac{dz}{z\left[2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$= -2i\int_{c} \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

$$= -2i\int_{c} \frac{dz}{\left(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3}\right)} \qquad \mathbf{(4)}$$

Dimana C adalah lingkaran |z|=1 yang berorientasi positif. Singularitas

$$z_1 = -2-\sqrt{3}\ dan\ z_2 = -2+\sqrt{3}$$

Dalam integran terakhir, $f(z)$, masing-masing merupakan kutub tingkat 1, dan sedemikian hingga z_1 berada di Lr (c) dan z_2 berada di DI(C). sekarang, dengan kita menggunakan teorema 7.4 dengan n=1, kita memperoleh bahwa

$$Res\left[f(z), -2+\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}\right]$$

Oleh sebab itu, kita lanjutkan dari (4) dan menggunakan teorema residu, maka kita mendapatkan:

$$-2i\left(2\pi i \; Res\left[f(z), -2+\sqrt{3}\right]\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Yang merupakan nilai integral trigonometri yang harus kita cari.

CONTOH 2

Marilah kita menghitung integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{sin^2 t}{5-4\cos t}\, dt.$$

Dengan substitusi dari (2) dan (3), kita mendapat

$$\int_0^{2\pi} \frac{sin^2 t}{5-4\cos t}\, dt = \int \frac{\left[\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right]^2}{5-4\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}\left(-\frac{i}{z}\right) dz$$

$$= -\frac{i}{4}\int \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(2z^2-5z+2)}\, dz$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z-2)(2z-1)}\, dz,$$

Dimana seperti diatas c:|z|=1, berorientasi positif. Jelaslah, integran f(z) mempunyai kutub tingkat 2 pada z=0[di D1(c)], kutub sederhana pada $z=\frac{1}{2}\,[di\ D1(c)]$ dan kutub sederhana pada z=2[di Lr(C)]. Maka kita memperoleh bahwa

Res $[f,0]\,\frac{5}{4}\,dan\ Res\ \left[f,\frac{1}{2}\right] = -\frac{3}{4}$.

Akhirnya, dengan menggunakan teorema residu,

$$\int_0^{2\pi} \frac{sin^2 t}{5 - 4\cos t} dt = -\frac{i}{4} \int \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(z-2)(2z-1)} dz$$

$$= -\frac{i}{4}\left[2\pi i \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Cara yang diilustrasikan pada contoh 1 dapat kita terapkan secara umum bagi sembarang integral yang berbentuk

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} \ atau \ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin t}$$

Dengan syarat bahwa |a|>|b|, maka substitusi dari (2) dan (3) akan memperoleh integral dalam bentuk

$$\int \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)} \text{(konstanta)}$$

Dimana C adalah lingkaran satuan, seperti pada contoh diatas, dimana $z_1 \ dan \ z_2$ adalah akar-akar suatu persamaan kuadrat yang dihasilkan dari penyebut integran. Diantara kedua akar diatas, satu akan di DI(C) dan satu lagi di Lr(C). perhitungan integral terakhir ini selanjutnya dapat dilakukan sebagaimana biasanya.

BEBERAPA JENIS INTEGRAL TAKWAJAR

Langkah pertama kita harus memperhatikan integral yang berbentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

Dimana

1. $f(x)$ fungsi rasional yang penyebutnya tidak nol pada sembarang x nyata.
2. $untuk\ x \to \pm\infty. \lim x\ f(x) = 0.$

Perhatikan bahwa, karena f(x) adalah fungsi rasional, maka syarat 2 ekuivalen dengan syarat bahwa penyebut f berderajat paling sedikit dua kali lebih besar dari pada derajat pembilangnya.

Dalam bentuk integral diatas, perhatikan suatu fungsi kompleks f(z), karena f(x) fungsi rasional, makademikian juga f(z). oleh sebab itu, f(x) mempunyai kutub yang banyaknya berhingga $z_1, z_2, \dots . z_n$ pada setengan bagian atas bidang datar. Setelah itu kita perhatikan integral kompleks

$$\int_c f(z)dz,$$

Dimana lintasan $C = C_1 + C_2$ terdiri dari bagian atas lingkaran C_1 dan pegal Garis $C_2\colon -R \leq x \leq R$ pada sumbu nyata, dan dipilih sedemikian hingga $z_{1,} z_2, , , , z_n$ di DI(C). dalam konteks demikian, kemudian kita bisa menunjukkan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i(Res\{f, z_1] + \cdots Res[f, z_n])$$

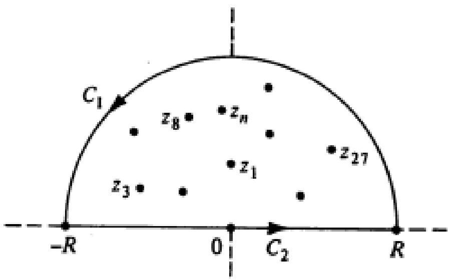
CONTOH 3

Marilah kita menunjukkan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}$$

Fungsi

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$



Gambar 8.1 contoh 3

mempunyai dua kutub $z_n = 2i\ dan\ z_2 = -2i,$ masing $-$ masing tingkat 2 kemudian diambil lintasan $c = c_1 + c_2$ seperti pada gambar 8.1 dimana R>2 sedemikian hingga $z_1 = 2i$ yang merupakan satu-satunya singularitas f disetengah bagian atas bidang datar akan berada di D1(C). kemudian dengan menggunakan integrase dengan residu, maka kita akan memperoleh:

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16},$$

yang dapat juga dituliskan

$$\int_{C_1} \frac{dz}{(z^2+4)^2} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

(5)

Sekarang kita selesaikan soal tersebut dengan mengambil limit (5) untuk R→ ∞. untuk tujuan ini, kita perhatikan bahwa c_1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$z = Re^{it}, \;\; 0 \leq t \leq \pi$

Maka

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_1} \frac{dz}{(z^2+4)^2} \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}\,dt}{(R^2e^{2it}+4)^2} \right| = 0.$$

Di pihak lain,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Mengingat (5) maka apa yang dinyatakan dalam soal terpenuhi.

Contoh berikutnya menggambarkan suatu cara untuk menghitung suatu integral tak wajar yang integrannya bukan fungsi rasional. Cara yang akan kita gunakan yaitu mengasumsikan pengetahuan tentang beberapa sifat dasar fungsi bernilai banyak.

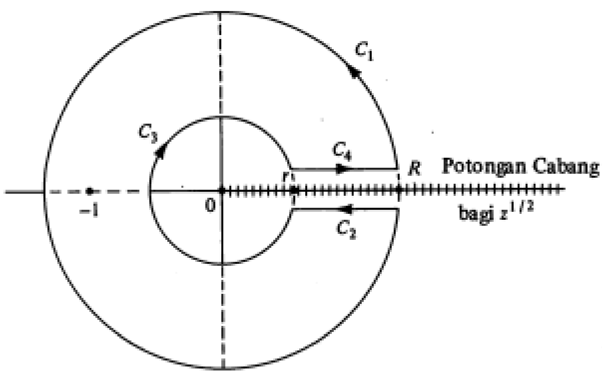
CONTOH 4

Hitung integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

langkah pertama kita perhatikan fungsi kompleks

$$f(z) = \frac{1}{z^{1/2}(z+1)}$$



GAMBAR 8.2. CONTOH 4.

kita perhatikan bahwa fungsi itu mempunyai suatu singularitas takterasing pada $z_1 = 0$ dan kutub tingkat satu pada $z_2 = -1$. Kemudian kita memilih c_1+$c_2 + c_3 + c_4$ yang dimana

a. c_1 adalah lingkaran |z| =R dengan R dipilih sedemikian hingga z_2 berada di DI(c_1)
b. c_3 adalah lingkaran |z| =r>0 dengan R dipilih sedemikian hingga z_2 berada di Lr(c_3)

c. $c_2\ dan\ c_4$ masing-masing penggal garis $r \leq x \leq R$ disumbu nyata.

Ke empat kurva diatas beriorentasi seperti yang terlihat seperti pada gambar 8.2 (alih- alih yang terlihat pada gambar, $c_2\ \ dan\ c_4$ sesungguhnya terletak pada sumbu nyata). Jelaslah bahwa karena satu-satunya singularitas $f(z)$di DI(c). adalah kutub sederhana yang ada pada -1.

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \text{ Res }[f, -1] = 2\pi;$$

yang ekivalen dengan

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz = 2\pi. \tag{6}$$

Sekarang, dengan mengambil $R \to \infty$ dan $r \to 0$, kita dapat menunjukkan (lihat Soal 30.12) bahwa

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)\,dz = 0 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{r\to 0} \int_{C_3} f(z)\,dz = 0.$$

Oleh karena itu, sekarang (6) menjadi

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \left[\int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz\right] = 2\pi. \tag{7}$$

Karena $f(z)$ fungsi bernilai banyak dengan sumbu nyata sebagai potongan cabang, kita harus memilih argumen z ketika menjelajahi C_4 dan C_2. Dengan mengambil argumen z pada C_4 sama dengan 0, argumen z pada C_2 harus sama dengan 2π. Jadi

$$\text{pada } C_4: z^{1/2} = e^{(1/2)[\log z]} = e^{(1/2)[\ln x + 0i]} = \sqrt{x},$$

Sedangkan

Pada

$$C_2: z^{\frac{1}{2}} = e^{(\frac{1}{2})(\log 2)} = e^{(\frac{1}{2})(\ln x + 2\pi i)} = -\sqrt{x}$$

Kemudian, karena C_4 =$-C_2$, kita mempunyai:

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_2} \frac{dx}{-\sqrt{x}(x+1)} = -\int_{C_2} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$
$$= \int_{C_4} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_{C_4} f(z)\,dz.$$

Oleh karena itu, dengan substitusi yang memadai dengan mengambil limit yang ditunjukkan, maka kita memperoleh bahwa:

$$2\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\propto}(1+x)}\ dan\ karenanya \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \pi$$

Dengan itu lengkaplah perhitungan integral yang diberikan.

Bentuk umum contoh dimuka akan menghasilkan rumus sbb:

$$\int_0^0 \frac{dx}{x^{1-\propto}(1+x)} = \frac{\pi}{\sin\alpha \propto \pi},\ \ 0 <\propto 1,$$

Selanjutnya kita lanjutkan dengan integral takwajar yang berbentuk umum

$$\int_0^0 g(x)e^{iax}\,dx,$$

yang dimana a > 0 dan g(x) fungsi rasional yang pembilang dan penyebutnya tidak mempunyai factor persekutuan, untuk derajat penyebutnya melebihi derajat pembilangnya, dan penyebutnya tidak menjadi nol untuk sembarang x. Dengan syarat-syarat tersebut, fungsi kompleks yaitu:

$f(z) = g(z)e^{iaz}$

Maka hanya memiliki berhingga banyaknya singularitas $z_1 z_2,,,,,,,z_n$ di dalam setengah bagian atas bidang datar, yang merupakan masing-masing merupakan kutub, maka akan ditunjukkan bahwa:

$$\int_{\propto}^{\propto} g(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i(Res[f,z_1] + Res[f,z_n]) \qquad \textbf{(8)}$$

Maka hasil diatas akan memudahkan kita untuk menghitung beberapa integral takwajar jenis tertentu yang integranya merupakan hasil perkalian fungsi rasional x dengan suku sinus atau cosinus. Berikutnya akan kita berikan sebuah ilustrasi.

CONTOH 5

Tunjukkanlah bahwa

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx = \frac{\pi e^{-2}}{2}$$

Kita mulai dengan memperhatikan integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+4}dx$$

Didalam notasi diatas , kita dapat mengambil

$g(z) = \frac{z}{x^2+4}$ dan $f(x) = \frac{z}{x^2+4}e^{ix}$,

Jadi jelas bahwa g merupakan fungsi rasional yang penyebutnya tidak mempunyai kenolan pada sumbu nyata dan g juga mempunyai kutub tingkat 1 didalam setengah bagian atas bidang datar, yaitu $z_1 = 2i$. sekarang karena Res $[f, z_1] = \frac{e^{-2}}{2}$, maka kita mempunyai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+4} dx = \pi i e^{-2}$$

Yang sama dengan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x\cos x}{x^2+4} + i\,\frac{x\sin x}{x^2+4}\right] dx = \pi i e^{-2}$$

Oleh sebab itu, dengan menyamakan bagian khayal pada persamaan terakhir, kita akan memperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4} dx = \pi i e^{-2}$$

Tetapi integran merupakan fungsi genap. Maka:

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4} dx = \pi i e^{-2}$$

Dari sini, persamaan yang harus kita tunjukkan dengan mudah dapat diperoleh.

Bagian terakhir untuk pasal ini berhubungan dengan perhitungan integral takwajar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x^2)\, dx \quad dan \int_{-\infty}^{\infty} (\sin x^2)\, dx \qquad (\mathbf{9})$$

Dalam proses perhitungan kedua integral ini, kita akan menggunakan kenyataan bahwa:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

Hasil yang dapat didapat dengan menggunakan cara kalkulus elementer untuk fungsi nyata.

CONTOH 6

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x^2)\, dx \quad dan \int_{-\infty}^{\infty} (\sin x^2)\, dx$$

Hitunglah kedua integral pada penyataan diatas

Perhatikan lintasan tertutup sederhana $C = c_1 + c_2 + c_3$, seperti ditunjukkan pada gambar 8.3. sebab

$$\mathrm{f(z)} = e^{-z^2}$$

Merupakan fungsi menyeluruh, maka jelaslah bahwa

$$\int_C e^{-z^2}\, dz = 0.$$

Secara ekivalen, kita mempunyai

$$\int_{C_1} e^{-x^2}\, dx + \int_{C_2} e^{-z^2}\, dz + \int_{C_3} e^{-z^2}\, dz = 0. \qquad (10)$$

Maka kita tunjukkan bahwa untuk R→ ∞, integral sepanjang c_2 mendekati nol.

$$z = Re^{it}, 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

Jadi,

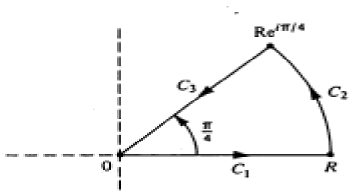
$$\left| \int_{C_2} e^{-z^2}\, dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2t + i \sin 2t)} iRe^{it}\, dt \right|$$

$$\le \int_0^{\pi/4} \left| e^{-R^2(\cos 2t + i \sin 2t)} \right| \left| iRe^{it}\, dt \right|$$

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2t\, dt} \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(1-4^{i}/_{\pi})}dt$$

$$= \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})$$

Jadi terlihat jelas bahwa untuk $R \to \infty$, bentuk terakhir mendekati nol, sebab demikian pula integral sepanjang C_2.



Gambar 8.3 contoh 6

Selanjutnya, kita menghitung integral sepanjang C_2, untuk z pada C_3.

$$z = te^{\frac{i\pi}{4}},\ \ 0 \leq t \leq R$$

Maka

$$dz = e^{\frac{i\pi}{4}}dt \quad dan\, z^2 = t^2e^{\frac{i\pi}{2}} = it^2$$

Oleh sebab itu,

$$\int_{C_3} e^{\frac{i\pi}{4}}dt = \int_R^0 e^{-it^2e^{\frac{i\pi}{4}}}dt = e^{\frac{i\pi}{4}}\int_R^0 e^{-it^2}dt$$

Dengan menggunakan hasil diatas, dan mengambil limit pada (10), untuk $R \to \infty$, kita memiliki

$$\int_{C_3}^{\infty} e^{-x^2} dx + \lim_{R\to\infty} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{R}^{0} e^{-it^2} dt$$

Maka akan menghasilkan:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{R}^{0} e^{-it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

Oleh sebab itu,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i) \qquad (\mathbf{11})$$

Akhirnya dengan menulis

$$e^{-it^2} = \cos(t^2) - i\sin(t^2)$$

Dan dengan menyamakan bagian nyata dan bagian khayal pada (11), kita memperoleh nilai-nilai integral pada (9)

$$\int_{0}^{\infty} \cos(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \int_{0}^{\infty} \sin(t^2) dt.$$

SOAL 1

Hitunglah integral dibawah ini dengan menggunakan cara yang diuraikan pada pasal ini.

1. $\int_{0}^{2\pi} \frac{5\, dt}{7+2\, c0s\, t}$

2. $\int_{0}^{2\pi} \frac{x\, dx}{(3+x^2)}$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{2\,dt}{2+ c0s\ t}$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+ sin\ t}$

5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{c0s\ t}$

6. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\ c0s\ t}$

7. $\int_0^{2\pi} \frac{2\,dt}{2+ sin\ t}$

8. $\int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2\_1}$

9. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

10. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2-c0s\ t}$

11. Apakah

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^3+2)^3} = \frac{\pi}{25} \ ?$$

8.2 Pasal 2

Integrasi Sekeliling Titik Cabang

Suatu pengenalan pada konsep fungsi bernilai banyak dan konsep yang saling berkaitan cabang, titik cabang dan potongan cabang telah diberikan. Dalam lampiran tersebut kita dikenalkan dengan ide permukaan Riemann secara umum, yang memungkinkan untuk lewat suatu bangunan geometri, memndang fungsi yang bernilai banyak sebagai fungsi yang bernilai tunggal. Seperti yang telah kita ketahui, cara dasarnya berupa memberikan pada setiap cabang fungsi bernilai banyak sebuah Salinan bilangan kompleks.

Pada awalnya, proses ini mungkin memberikan kesan bahwa seluruh pengembangan itu terlalu dibuat-buat, karena orang dapat berdalih kenyataan bahwa berbagai lembar dari suatu permukaan Riemann merupakan Salinan bidang itu sendiri tidak akan mengubah kenyataan bahwa masing-masing merupakan bidang itu sendiri. Tujuan utama pasal ini adalah untuk memperlihatkan bahwa berbagai lembar permukaan Riemann yang dikaitkan dengan fungsi bernilai banyak adalah berbeda, sekurang-kurangnya dalam suatu hal yang penting. Maka dari itu, perhatikan fungsi-fungsi berikut ini:

$$w_0 = r^{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{it}{3}}, r > 0, 0 \le t < 2\pi$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{it}{3}}, r > 0, 2\pi \le t < 4\pi$$

$$w_2 = r^{\frac{1}{3}} e^{\frac{it}{3}}, r > 0, 4\pi \leq t < 6\pi$$

Setelah itu kita integralkan masing-masing sekeliling lingkaran C|z|=R>0 yang beriorentasi positif, untuk mendapatkan hasil berikut ini:

$$\int_C w_0\, dz = \int_0^{2\pi} R^{1/3} e^{it/3} iRe^{it}\, dt = \tfrac{3}{4} R^{4/3}(e^{8\pi i/3} - 1);$$

$$\int_C w_1\, dz = \int_{2\pi}^{4\pi} R^{1/3} e^{it/3} iRe^{it}\, dt = \tfrac{3}{4} R^{4/3}(e^{16\pi i/3} - e^{8\pi i/3});$$

$$\int_C w_2\, dz = \int_{4\pi}^{6\pi} R^{1/3} e^{it/3} iRe^{it}\, dt = \tfrac{3}{4} R^{4/3}(1 - e^{16\pi i/3}).$$

Hasil yang didapat diatas menuntun ke beberapa kesimpulan yang menarik, yang dapat kita nyatakan garis besarnya sebagai berikut

Pertama, kita melihat bahwa, meskipun integrannya sama dalam setiap khasus diatas dan ketiga lintasan integrasinya sama, tetapi diambil Salinan bidang z yang berbeda, dan nilai ketiga integral ini berbeda. Hasil tersebut menunjukkan kenyataan bahwa ketiga lembar permukaan Riemann untuk $w = z^{\frac{1}{3}}$ tidak ekuivalen dalam sedikit satu hal yang penting.

Kedua, dengan membandingkan hasil tersebut khasus integrase sekeliling suatu singularitas terasing, dimana akan diperoleh nilai yang sama setiap kali melingkari suatu singularitas yang demikian, maka dapat kita simpulkan bahwa sifat suatu singularitas terasing sungguh berbeda dengan sifat singularitas takterasing, paling sedikit dalam hal pengaruhnya pada nilai suatu integral.

Ketiga, lihatlah bahwa nilai suatu integral dalam setiap khasus tersebut bergantung pada jari-jari lintasan melingkar yang dipilih sekeliling titik cabang z=0. Melalui perbandingan , kita mengingat kembali bahwa hal ini tedak benar jika kita mengintegralkan sekeliling singularitas terasing, yang dimana dalam Batasan tertentu”ukuran” dan “bentuk” lintasan itu tidak penting. Perbedaan yang menyolok ini menunjukkan bahwa sifat yang berbeda diantara dua jenis singularitas.

Terakhir, kita lihat bahwa jumlah ketiga nilai integral itu sama dengan nol. Hasil ini, bukan tidak ada hubungannya dengan kenyataan bahwa penjumlahan tiga bagian hasil itu sama banyaknya dengan pengintegralan fungsi $w = z\frac{1}{3}$, sepanjang suatu lintasan yang mengelilingi titik cabang z=0 sebanyak 3 kali, setiap kali pada lembaran permukaan Riemann yang berbeda bagi $w = z\frac{1}{3}$.

SOAL 2

31.1 hitung integral masing-masing dari kedua cabang $w = z^{\frac{1}{6}}$

$$w_0 = r^{\frac{1}{6}} e^{\frac{it}{6}}, r > 0, \qquad 0 \leq t < 6\pi$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{6}} e^{\frac{it}{6}}, r > 0, \qquad 6\pi \leq t < 8\pi$$

Gunakan lintasan C|z|=R>0

31.2 hitung seperti soal diatas, fungsi $w = z^{\frac{1}{5}}$

8.3 Pasal 3

Tingkah Laku Fungsi Di Tak Berhingga

Suatu pengenalan singkat terhadap ide utama pasal ini telah dibahas pada pasal 10 dalam hubungannya dengan fungsi kebalikan w=$\frac{1}{z}$. kita dapat melihat bahwa titik di takberhingga merupakan titik ideal yang kita tulis dengan ∞ dan yang ditandai dengan sifat bahwa

$$|z| = \infty \text{ untuk setiap bilangan kompleks z}$$

Bidang z yang ditambah dengan titik ideal ini dinamakan bidang kompleks diperluas. Setelah kita mengetahui pengertian proyeksi stereografi maka kita akan mengetahui hal itu. Dibwah ini proyeksi ini, titik tak berhingga pada bidang kompleks diperluas perpaduan dengan kutub utara bola Riemann, dengan menggunakan fungsi kebalikan.

$$w = \frac{1}{z}$$

Dan dimotivasi oleh proses proses pelimitan

$$z \to 0 \text{ jika dan hanya jika } w \to \infty,$$

Kita megidentifikasi tingkah laku suatu fungsi $f(z)$ di z $= \infty$ dengan tingkah laku fungsi $f = \frac{1}{z}$ di z = 0. Pada pasal ini kita akan mencari dan menggunakan beberapa akibat pengembangan yang kita ulangi diatas. Sebelumnya kita akan menekankan bahwa meskipun kita menggunakan pernyataan seperti titik z =∞, tetapi titik di takberhingga bisadiperlakukan sebagai bilangan biasa, khususnya bila operasi aljabar dikenakan terhadapnya.

Pertama, kita mulai dengan defenisi seperti berikut:

Suatu lingkungan titik z =∞ di didefenisikan sebagai himpunan semua titik z sedemikian hingga |z|>M, untuk suatu bilangan nyata M>0, termasuk juga titik z = ∞ itu sendiri, hal tersebut dilambangkan dengan

$$N(\infty, M)$$

Dalam istilah yang berbeda, $N(\infty, M)$merupakan daerah diluar lingkaran |z| = M yang mencakup $z = \infty$. Perhatikan bahwa jika kita ambil $\varepsilon = 1/M$ kita dapat mendefenisikan $N(\infty, M)$ yang terdiri dari semu z sedemikian hingga 1/|z| < ε termasuk z=∞. Lingkungan termasuk titik takberhingga dilambangkan N*∞, M, adalah semua z sedemikian hingga |z| > M.

Selanjutnya, kita masuk ke pengertian analitisitas dan titik singular di takberhingga. Misalkan, M ialah suatu bialngan nyata sedemikian hingga 0 < M < ∞ dan kita andaikan bahwa suatu fungsi $f(z)$ analitik untuk semua z dengan |z| > M, yaitu andaikan bahwa $f(z)$analitik pada setiap z di dalam N*(∞, M). Maka fungsi

$$f\left(\frac{1}{w}\right)$$

Analitik disuatu lingkungan terhapus di nol, yaitu N*(0,1/M). oleh sebab itu,

$$f\left(\frac{1}{w}\right)$$

Mempunyai penguraian laurent pada w=0 yang diberikan oleh

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n w^n \,, untuk\ 0 < |w| < \frac{1}{M} \qquad (\mathbf{1})$$

Tetapi pada tahap ini berarti $f(z)$ mempunyai penguraian laurent pada ∞ yang diberikan oleh

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} \qquad (\mathbf{2})$$

Kasus 1:

Tidak ada w berpangkat negatif dalam (1). Pada khasus ini,

$$f\left(\frac{1}{w}\right)$$

Mempunyai singularitas yang bisa dihilangkan pada w=0 dan fungsi

$$f\left(\frac{1}{w}\right)$$

Analitik pada w=0 dan nilainya pada titik itu sama dengan c_0. Tetapi bukan berati fungsi $f(z)$ analitik di $z = \infty$. Jadi, dengan membandingkan persamaan (1) dan (2), kita dapat melihat bahwa jika $f\left(\frac{1}{w}\right)$ tidak mempunyai w berpangkat negatif $f(z)$ tidak memiliki z berpangkat positif. Oleh sebab itu, persamaan (2) sekarang dapat kita tulis dalam bentuk:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^{-n},$$

Dan jika kita tentukan $f(\infty) = c_0, maka\, f(z)$memiliki singularitas yang bisa dihilangkan pada z=∞ dan dalam hal ini kita bisa kataan bahwa $f(z)$ analitik di takberhingga.

Kasus 2.

Hanya berhingga banyaknya w berpangkat negatif dan koefisien tidak nol pada kasus 1. Pada khasus ini , kita telah mengetahui bahwa $f = \left(\frac{1}{w}\right)$ memiliki kutub tingkat N (untuk suatu bilangan bulat positif N tertentu) di w=0, maka $f(z)$ memiliki kutub tingkat N di $z = \infty$, maka khasus 1 mengambil bentuk:

$$f = \left(\frac{1}{w}\right) = \frac{c_{-N}}{w^N} + \frac{c_{-N+1}}{w^{N-1}} + \cdots . + \frac{c_{-1}}{w} + \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \ dengan\ c_{-N} \neq 0,$$

Dari sini kita dapat menyimpulkan bahwa suatu fungsi $f(z)$ mempunyai kutub tingkat N pada z=∞, asalkan penguraian laurentnya di takberhingga mempunyai bagian utama dengan bentuk:

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_N z^N, dengan\ a_{-N} \neq 0$$

Teorema 7.2 Sekarang dapat kita gunakan untuk memberikan perincian berikut bagi kutub di takberhingga: andaikan bahwa $f = (z)$ analitik disuatu lingkungan terhapus di takberhingga. Jadi,

f mempunyai kutub tingkat N di z = ∞ jika dan hanya jika $z^{-N} f(z)$ mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada z =∞ dan $\lim_{z \to \infty} z^{-N} f(z) \neq 0$

Khasus 3.

Ada takberhingga banyaknya w berpangkat negatif pada (1). Pada khasusu ini kita mengetahui bahwa $f\left(\frac{1}{w}\right)$ memilikisingularitas pokok pada w=0 dan ini, pada gilirannya, berimplikasi bahwa $f(z)\, memiliki\ singularitas$ pokok pada z =∞. Sebab deret pada (1) memiliki takberhingga w berpangkat negatif , deret pada (2) memiliki takberhingga z berpangkat positif dengan koefisien tidak nol.

CONTOH

1. Sembarang suku banyak $f = (z)$=$a_0 + a_1 z + \cdots X a_n z^n, a_n \neq 0$, memiliki kutub tingkat n di takberhingga. Kenyataan ini jelas jika diperhatikan fungsi $f\left(\frac{1}{w}\right)\ di\ w = 0$
2. Fungsi $g(z) = 1/(z + z^n)$ analitik di z =∞, sebab kita bisa memeriksa dengan mudah, fungsi$g\left(\frac{1}{w}\right)$ analitik pada pusat koordinat.
3. Fungsi eksponensial $h(z) = e^z$ memiliki singularitas pokok di takberhingga.

SOAL 2

1. Verifikasi pernyataan pada ketiga bagian contoh diatas
2. Periksalah analitisitas setiap fungsi berikut ini pada titik di takberhingga
   a. $f(z) = \left(\frac{1}{z+2}\right)$
   b. $f(z) = \left(e^{1/z}\right)$
   c. $f(z) = \left(\frac{z}{1+z}\right)$
   d. $f(z) = \cos z$

3. Golongkan setiap titik yang terdaftar pada setiap fungsi berikut sebagai titik analitisitas atau kutub tingkat ,,, atau singularitas pokok untuk fungsi yang bersangkutan.

$$a)\ f(z) = \left(\frac{z}{1}\right); 0, \infty$$

$$b)\ f(z) = \left(\frac{\sin z}{1}\right); 0, \infty$$

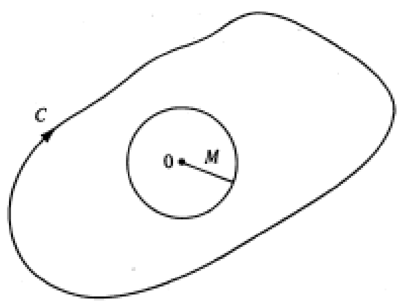
$$c)\ f(z) = \left(\frac{\sin z - \cos z}{z}\right); 0, \infty$$

4. Buktikan adaptasi teorema 7.2 untuk khasus kutub di takberhingga
5. Misalkan $f(z)$ analitik untuk semua z sedemikian hingga |z|>M, artinya, disuatu lingkungan terhapus ditakberhingga. Jadi residu $f\ pada\ z = \infty$ ditentukan oleh

$$Res\ [f, \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)dz$$

Dimana C merupakan suatu lintasan tertutup sederhana dengan orientasi negatif dan sedemikian hingga |z|=M berada di DI(C). (lihat pada gambar dibawah ini)

a. Tunjukkan bahwa bila $\sum_n^\infty = -\infty\ a_n z^n$ merupakan penguraian laurent untuk fungsi $f(z)$ di z=∞, maka Res $[f, \infty] = \ -a_{-1}$dengan kata lain, residu fungsi f di takberhingga sama dengan negatifnya koefisien z^{-1} pada penguraian deret laurent bagi f dengan pusat di tak berhingga.



Gambar 8.4 RESIDU DI TAKBERHINNGA

b. Tunjukkan bahwa Res $[z^{\frac{1}{2}},$ ∞]=-1, maka mengilustrasikan kenyataan bahwa tidak seperti residu di titik berhingga, suatu fungsi mungkin analitik di takberhingga dan tetap mempunyai residu tidak nol disana.

8.4 Pasal 4

Beberapa Transformasi Khusus

Contoh sedeerhana bagaiman persoalan fisik dapat dirumuskan kedalam teori fungsi kompleks telah dibahas pada lampiran 3. Pada pasal ini, akan dibahas tentang fungsi khusus tertentu yang banyak digunakan untuk menyatakan persoalan fisik.

Fungsi

$$w = z + 1/2$$

Transformasinya

$$w = z + \frac{1}{2} \tag{1}$$

Digunakan secara luas dalam mempelajari soal-soal didalam teori aliran. Bentuk kutub (1) adalah

$$w = r(\cos t + i \sin t) + \frac{1}{r}(\cos t - i \sin t)$$

Maka, bila kita memikirkan fungsi ini sebagai suatu potensial kompleks, maka fungsi potensial kecepatan dan fungsi arusnya masing-masing adalah:

$$\phi(r, t) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos t$$

dan

$$\psi(r, t) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin t, \qquad (2)$$

Sekarang, mislkan suatu tabung panjang dengan jari-jari satuan ditempatkan didalam suatu aliran cairan yang tidak dapat ditekan, tetap dan tidak akan berputar, dengan bagian potongan melintang aliran yang tegak lurus dengan sumbu tabung ditunjukkan pada gambar di bawah(8.5) dengan mengambil 2 sama dengan suatu konstanta dihasilkan garis arus aliran.

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) \sin t = c$$

Khususnya, bila kita mengambil c=0, maka mungkin sin t = 0 dengan akibat t = 0 atau t = π, atau r = 1 dan oleh sebab itu, kita mendapatkan garis arus yang terdiri dari bagian sumbu nyata dengan |x|$\geq = 1$. Dan lingkaran satuan. Jika c berubah-ubah pada semua nilai nyata, kita mendapat semua garis arus aliran itu.

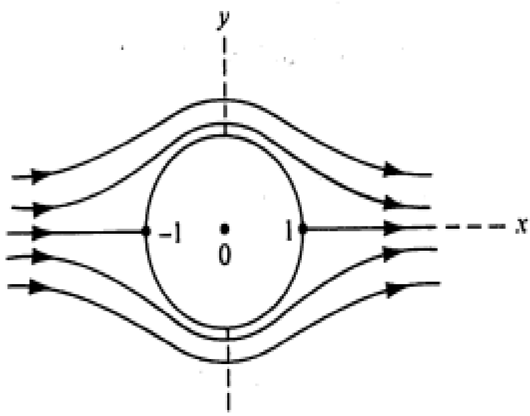
Kecepatan aliran diberikan oleh sekawanan turunan potensial kompleks yaitu:

$$V = 1 - \frac{1}{(z)^2} \qquad (3)$$

Jai jelaslah bahwa v=0 jika dan hanya jika z = ± 1 dua titik ini dinamakan titik diam (stagnation point) aliran tersebut. Padasoal

33.1 kita disuruh untuk membuktikan bahwa kecepatan V mencapai nilai maksimumnya pada z = $\pm i$. Untuk titik-titik yang jauh dari tabung , adalah titik-titik dengan |z| yang besar, terlihat jelas dari (1) dan (3) bahwa gerakannya mendekati suatu aliran seragam, karena:

$$w \cong z \; dan \; V \cong 1$$



gambar 8.5. ALIRAN SEKELILING TABUNG

selanjutnya dengan penyelidikan beberapa sifat pemetaan umum untuk (1). Terlebih dahulu, kita lihat bagian nyata dan bagian khayal fungsi itu adalah:

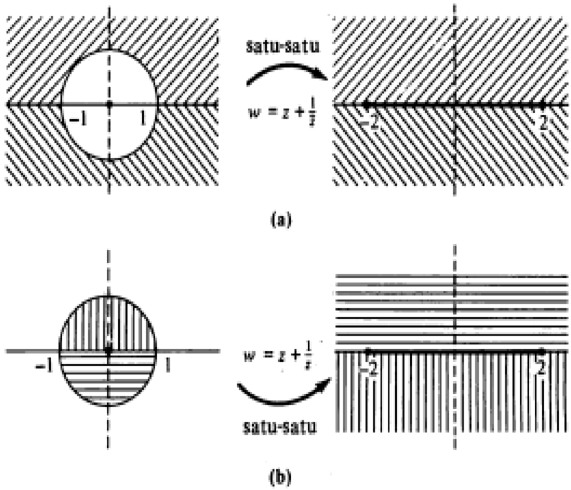
$$u = \left(r \frac{1}{r}\right) \cos t \;\; dan \; v = \left(r \frac{1}{r}\right) \sin t$$

Dengan manipulasi aljabar diperoleh persamaan:

$$\frac{u^2}{\left(r+\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2}+\frac{v^2}{\left(r-\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2}=1$$

Disini kita bisa menurunkan sifat-sifat pemetaan berikut untuk fungsi yang dibicarakan. Soal-soal akhir pasal ini

a. Lingkaran |z| =r dari bidang z dipetakan keatas ellips di bidang w masing-masing dengan pusat koordinat
b. Semua ellips dalam (a) konfokal dengan fokus di u = ± 2
c. Lingkaran dengan r=1 dan pusat koordinat merupakan suatu perkecualian pada (a) sebab ia dipetakan ke penggal garis pada sumbu u dengan -2$\leq u \leq 2$,. Tetapi, kita mudah melihat penggal garis yang ditanyakan di tutup dua kali, sekali setiap jurusan sedemikian hingga ia bisa dipikirkan sebagai ellips yang dimanfaatkan (gambar 8.6 a)
d. Daerah bidang z yang berada di luar lingkaran satuan dipetakan keseluruh bidang w dalam bentuk satu-satu, setengah bagian atas kesetengah bagian atas dan sebaliknya bagian bawah ke bagian bawah (gambar 8.6 a)



GAMBAR 8.6. $w = z + 1/z$.

e. Daerah di bagian dalam lingkaran satuan, kecuali z=0, juga dipetakan ke bidang w, secara satu-satu dengan setengah bagian bawah bidang w dan sebaliknya (gambar 8.6 b)

f. Setiap titik pada bidang w, kecuali w = ± 2 merupakan bayangan tepat dua titik tertentu dari bidang z, hal ini bisa dilihat karena (1), kita mempunyai

$$z = \frac{1}{2}\left(w \pm (w^2 - 4)^{\frac{1}{2}}\right)$$

g. Sebagian besar kenyataan diatas dapat juga dipandang sebagai berikut karena

$$w(z) = w\left(\frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z}$$

kita dengan mudah bisa mendalihkan bahwa sembarang dua lingkaran berpusat pada pusat koordinat dan jari-jarinya mempunyai hubungan satu dengan yang lain

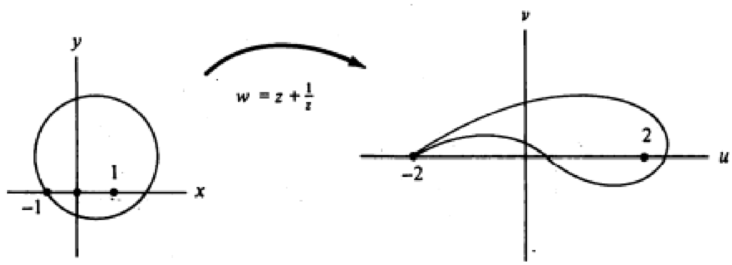
$$r_1 = \frac{1}{r_2}$$

Dipetakan terhadap ellips yang sama dibidang w. tetapi yang lebih kecil diantara dua lingkaran tersebut dibalikkan ketika dipetakan oleh (1)

Transformasi yang diberikan pada (1) serupa dimana-mana kecuali pada $z = \pm 1$, ini sangat jelas karena turunannya uang diberikan oleh

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2}$$

Tidak nol kecuali untuk $z = \pm 1$. Ketidaksamaan pada titik-titik ini memainkan peranan yang menonjol dalam penerapan transformasi dalam bidang aerodinamika. Dapat diperlihatkan bahwa dibawah (1) suatu lingkaran yang melalui z= -1 dan mengandung z+1 dibagian dalamnya ditransformasikan menjadi bangun seperti pada gambar 8.7, yang disebut kerjang udara joukowski. Lapisan udara itu menyerupai potongan melintang sayap pesawat terbang yang meruncing sampai ke tepi pada titik w= -2. Perhatikan bahwa w= -2 merupakan tepat bayangan titik z = -1, yang merupakan satu dari dua titik pada keserupaan (1) dirusak.



gambar 8.7 KERJANG UDARA JOUKOWSKI

transpormasi $\boldsymbol{w = z + e^2}$

selanjutnya kita beralih ke transformasi

$$w = z + e^z \qquad (4)$$

Kita membatasi perhatian kita pada lajur pokok dibidang z,

$$s: -\pi \leq y \leq \pi, -\infty < x < \infty$$

Lihat ganbar 8.8 a penguraian 4 aialah

$$u = x + e^x \cos y \; dan \;\; v = x + e^x \sin y \qquad (5)$$

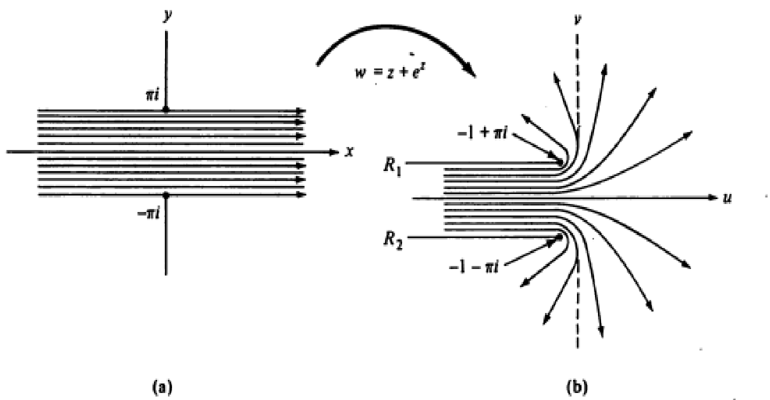
Bayangan garis mendatar y= c di S, menyatakan gai sarus suatu cairan yang mengalir melalui saluran terbuka yang ditentukan oleh sinar-sinar

$$R_1: u \leq -1, v = 1 \;\; dan \; R_2: u \leq -1, v = -1$$

Dibidang w. untuk melihat hal ini , lihatlah kejadian khusus berikut ini:

1. bila kita mengambil garis y $= \pi$ maka persamaan (5) menjadi

$$u = x - e^x \; dan \; v = \pi$$



GAMBAR 8.8. $w = z + e^z$

Jika x berubah-ubah pada semua bilangan nyata, v tetap konstan pada v $= \pi$. Lebih khusus lagi untuk x berubah dari -∞ ke 0, berubah dari $-\infty$ ke -1; di sisi lain, kalua x berubah dari 0 ke +∞, u mengikuti jejak R_1 dari -1 ke $-\infty$. Tidak sulit untuk melihat bahwa makna fisik kejadian ini adalah bahwa suatu garis aliran yang dekat dengan tepi saluran akan “hamper berbalik kembali” sesaat aliran itu mencapai mulut saluran dan masuk kemedan terbuka.

2. Argumentasi yang sama akan menunjukkan bahwa jika kita mengambil garis y=$-\pi$, maka bayangannya mengikuti R_2 dari $-\infty$ ke -1 dan kembali lagi ke $-\infty$.
3. Jika y=0, maka

$$u = x - e^x \; dan \; v = 0$$

Dan untuk x berubah dari $-\infty \; menjadi + \infty,$ kita dapatkan seluruh sumbu u, sebab v=0 dan u akan berubah dari $-\infty \; menjadi + \infty$.

Transformasi pada 4 menggambarkan suatu aliran yang keluar dari suatu saluran atau medan elektrostatik di dekat tepi lempeng kapasitor yang sejajar.

PETA SCHWARZ-CHRISTOFFEL

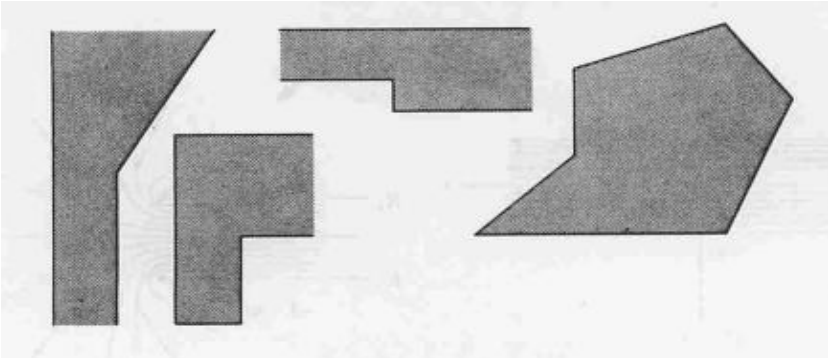
Dalam teori potensial, dalam hubungannya dengan persoalan nilai batas, sering dikehendaki untuk mentransformasikan setengah bagian atas bidang z secara satu persatu ke suatu daerah di bidang w yang dibatasi oleh garis-garis lurus , penggal garis, dan sinar-sinar.

Daerah tersebut dapat berupa segi banyak(tertutup) yang konveks atau tidak konveks atau ia boleh juga suatu daerah terbatas tetapi yang batasnya terdiri dari garis-garis, penggal garis, dan sinar-sinar. Untuk seterusnya kita akan menyebut batas daerah yang sedemikian itu sebagai " segi banyak bayangan.

$$w' = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_n)^{-k_n}, \qquad A \neq 0, \tag{6}$$

atau, yang ekivalen dengan

$$w = A \int (z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_n)^{-k_n} \, dz + B, \tag{7}$$



GAMBAR 8.9. SEGIBANYAK BAYANGAN

Diamana A dan B adalah konstanta kompleks. Fungsi (7) dinamakan transformasi scharz- Christoffel.

Guna menganalisis pemetaan ini, pertama kita perhatikan bahwa dengan mengambil argument kedua ruas pada (6) kita mendapatkan

$$\arg w' = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - \cdots - k_n \arg(z - x_n) \qquad (8)$$

Titik-titik $x_1, x_2, \ldots x_n$ adalah titik-titik pada sumbu nyata dibidang z yang dibawah dipetakan ke titik-titik sudut $w_1, w_2, \ldots w_n$ pada segi banyak bayangan di bidang w

SOAL 33

1. Dengan mengacu ke rumus (3) tentukan kecepatan v pada z=± 0

2. Gunakan rumus (3) untuk menunjukkan bahwa |v| ≤ 2 untuk setiap z dalam aliran sekeliling suatu tabung yang berjari jari 1
3. Dari (a) dan (b) simpulkan bahwa |v| maksimum terjadi pada z= $\pm i$
4. Dalam hubungan dengan transformasi f(z)=z+1/z
   Hitunglah f(z) dan tunjukkan bahwa titik-titik sekawan dipetakan ketitik sekawan pula. Simpulkan bahwa transformasi itu simetris terhadap sumbu nyata
5. Tunnjukkan bahwa fungsi

$$w = z^{\frac{1}{2}}$$

   Dengan domainnya dibatasi pada setengan bagian atas bidang datar, merupakan khasus khusus dari peta schwarz-christoffel. Tentukan bayangan domain tersebut

8.5 SOAL-SOAL BAB 8

1. Tentukan hasil dari

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - a\cos t}$$

2. Tentukan hasil dari

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + a\sin t}$$

3. Tentukan hasil dari

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{1 - a\cos t}$$

4. Tentukan hasil dari

$$\int_0^{2} \frac{\cos t}{1 + a\sin t}$$

5. Tentukan hasil dari

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos t}{1 + a\cos t}$$

6. Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + sin^2 t} = \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

7. Tunjukkan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

INDEKS

GLOSARIUM

Integral merupakan konsep operasi invers, atau anti turunan diferensial. ... Sebagai salah satu cabang ilmu matematika, integral dipakai untuk menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan masalah turunan. Umumnya, konsep dasar integral adalah cara penjumlahan berkesinambungan atau kontinu.

Generalisasi adalah proses penalaran yang membentuk kesimpulan secara umum melalui suatu kejadian, hal, dan sebagainya. Generalisasi merupakan salah satu penalaran induktif.

Substitusi artinya sesuatu yang mudah diganti dengan sesuatu yang lain. Istilah substitusi digunakan dalam konteks orang, barang, tempat, atau objek lainnya.

Trigonometri adalah sebuah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga.

Teorema adalah sebuah pernyataan, sering dinyatakan dalam bahasa alami, yang dapat dibuktikan atas dasar asumsi yang dinyatakan secara eksplisit ataupun yang sebelumnya disetujui.

Lintasan atau penerbangan adalah jalur dari obyek dengan massa dalam gerakan mengikuti ruang sebagai fungsi waktu. Dalam mekanika klasik, lintasan diartikan oleh mekanika Hamiltonian melalui koordinat kanonikal. Sehingga, lintasan utuh diartikan menurut posisi dan momentum

Bilangan kompleks dalam matematika, adalah bilangan yang dinotasikan oleh {\displaystyle a+bi, di mana a dan b adalah bilangan riil, dan i adalah suatu bilangan imajiner di mana i 2 = −1. Bilangan riil a disebut juga bagian riil dari bilangan kompleks, dan bilangan real b disebut bagian imajiner. Jika pada suatu bilangan kompleks, nilai b adalah 0, maka bilangan kompleks tersebut menjadi sama dengan bilangan real a.

Analitik menggunakan data dan matematika untuk menjawab pertanyaan bisnis, menemukan hubungan, memprediksi hasil yang tidak diketahui dan mengautomasi keputusan.

Transformasi dalam matematika memiliki arti sebagai suatu fungsi yang memetakan kedudukan setiap titik dari posisi awal menjadi posisi baru.

Aerodinamika adalah ilmu yang mempelajari tentang udara yang mengalir, yang biasanya dikaitkan dengan udara di atmosfer.

elips atau oval yang beraturan adalah gambar yang menyerupai lingkaran yang telah dipanjangkan ke satu arah

koordinat diartikan sebagai bilangan yang dipakai untuk menunjukkan lokasi suatu titik dalam garis, permukaan, atau ruang.

DAFTAR PUSTAKA

Holzner, S. (2008). *Differential Equations for Dummies*. Indiana: Wiley Publishing.

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S. N. (2021). Development of a Constructivism-Based Statistics Module for Class VIII Junior High School Students. *Solid State Technology*, 64(2), 4427- 4444.

Lumbantoruan, J. H. (2015). *Modul Kalkulus Lanjut*. Jakarta: Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2017, Juli). Pengembangan Bahan Ajar Integral Tak Tentu Berbasis Model Small Group Discussion di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UKI Tahun 2016/2017. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 10(2), 99-118.

Lumbantoruan, J. H. (2019). *Buku Integral Tentu*. Jakarta: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2019). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017/2018. *Jurnal EduMatSains*, 3(2), 147-168.

Lumbantoruan, J. H. (2021). Mata Kuliah : *Matematika Dasar II*. Jakarta: UKI. 68

Lumbantoruan, J. H. (2021). Mata Kuliah : *Persamaan Differensial*. Jakarta: UKI.

Nagle, S. S. (2018). *Fundamentals of Differential Equations*. Boston: Pearson.

Richard Bronson, G. B. (2014). *Schaum's Outlines Differential Equations*. New York: McGraw Hill Education.

Ron Larson, B. E. (2014). *Multivariable Calculus. Boston*: Liz Covello