VARIABEL KOMPLEKS

Penulis:

Nama: Daniel Dongan Parulian

NIM: 1813150002

Prodi: Pendidikan Matematika

FAKULTAS KEGURUAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

2022

PRAKATA

Variabel kompleks adalah perluasan dari sistem bilangan real. Mendukung mata kuliah Variabel Kompleks membutuhkan banyak wawasan untuk memudahkan mahasiswa mempelajari bidang Variabel Kompleks.

Buku ajar ini disusun oleh penulis untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan tugas akhir mata kuliah Variabel Kompleks dari tahun 2021 sampai dengan tahun 2022. Diharapkan juga dapat menjadi pedoman dan memudahkan mahasiswa dalam mempelajari Variabel Kompleks pada masa depan.

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan partisipasinya dalam penulisan buku ajar sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar dengan tepat waktu. Semoga buku ajar ini dapat bermanfaat bagi orang lain.

Tim Penulis

Daniel Dongan Parulian

Daftar Isi

Daftar Gambar

PENDAHULUAN

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena dengan bantuan-Nya penulis dapat menyelesaikan buku pelajaran “Variabel Kompleks” pada “Beberapa Hasil Teoritis”. Meskipun banyak halangan dan rintangan yang penulis alami dalam prosesnya pekerjaan, tetapi penulis berhasil menyelesaikannya dengan baik.

Tak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada dosen mata kuliah yang telah memberikan motivasi dan mendukung penulis dalam proses pengerjaan buku ajar ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada rekan- rekan mahasiswa yang telah berkontribusi secara langsung maupun tidak langsung dalam pembuatan buku ajar ini.

Semoga buku ajar ini dapat membuat mahasiswa belajar dan memahami variabel kompleks dengan lebih mudah.

Jakarta,21 Januari 2022

Penyusun

Tim Penulis

Bagian 1

A. Definisi Asas Modulus Maximum\

1. Teorema 9.1
2. Asas Modulus Maksimum

3.Akibat Teorema (Asas Modulus Minimum)

B. Teorema Liouville

C. Teorema Pokok Aljabar

Bagian 2

A. Definisi Tingkah laku Fungsi di Singularitas Terasing

1. Teorema Tingkah laku Fungsi di Singularitas Terasing
2. Teorema Riemann
3. Teorema Casorati— Weierstrass

B. Keuntungan Penguraian Taylor dan Laurent

1. Teorema Taylor dan Laurent
2. Teorema Ketunggalan Penguraian Deret Taylor
3. Teorema Ketunggalan Penguraian Deret Laurent

Bagian 1

9.1 Asas Modulus Maximum

A. Definisi Asas Modulus Maximum

Prinsip Modulus Maksimum dapat dijelaskan dalam berbagai bentuk, yang semuanya sama pentingnya. Secara keseluruhan, prinsip ini mengatakan bahwa jika $f(z)$ analitik dan bukan konstan dalam himpunan tertutup yang memiliki limit S, maka $|f(z)|$ mencapai nilai maksimumnya pada batas S. Dalam $Teorema$ 9.1, kita akan membahas dua hasil yang membuktikan teorema tersebut. **Teorema identitas untuk fungsi analitik** membuktikan bahwa

> "apabila fungsi analitik $f(z)$ dan $g(z)$ berada pada wilayah R, sehingga $f(z) = g(z)$ untuk semua z pada lingkungan N di titik ζ, pada R, betapapun kecilnya N, maka $f(z) = g(z)$, semua titik di R, dengan kata lain, f dan g identik di R."

Menarik untuk dicatat bahwa hipotesis teorema identitas di atas dapat dilonggarkan sehingga hanya membutuhkan $f(z) = g(z)$ untuk titik di tak hingga yang memiliki ζ sebagai limitnya. Fungsi analitik ini sekali lagi menunjukkan struktur dalam yang kuat yang dimiliki fungsi tersebut. Hasil awal kedua yang diperlukan untuk membuktikan prinsip modulus maksimum adalah

"Jika $f(z)$ kontinu di z_0 dan jika $|f(z_0)| < M$, maka $|f(z)| < M$ untuk setiap z disekitar z_0."

Kami membuktikan hasil ini sebagai berikut. Berdasarkan kontinuitas f pada z_0 jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, relasi

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z_0})| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

untuk setiap z di lingkungan z untuk z_0. Terutama dengan mengambil

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M} - |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z_0})| > \boldsymbol{0},$$

maka untuk setiap z dalam sebuah $N(z_0, \delta)$, kita memiliki

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)| \\ &< \varepsilon + |f(z_0)| \\ &= M, \end{aligned}$$

dan selesailah pembuktian dari hasil awal ini.

Teorema 9.1 Asas Modulus Maksimum

Misalkan,

1. $f(z)$ analitik dan tidak konstan dalam daerah tertutup S, yaitu dalam himpunan S yang terdiri dari daerah tidak kosong R dan batasnya.

2. $|f(z)|$ mencapai maksimum di S, yang berarti bahwa setidaknya ada satu titik ζ di S sehingga $|f(z)| \leq |f(\zeta)|$, untuk semua z di S. maka ζ adalah titik pada batas S.

   Bukti:

   Buktikan dengan kontradiksi.

Misalkan, $|f(\zeta)| = M$ adalah f maksimum di S untuk sebuah titik di bagian dalam S. Karena $f(z)$ analitik dan bukan konstan di R *(bagian dari S)*, maka $|f(z)|$ juga bukan konstan di R. Menurut, Teorema Identitas untuk fungsi analitik hal. 296, harus ada titik yang dekat di ζ dengan sifat

$|f(z)| < M$; **Pers. 1**

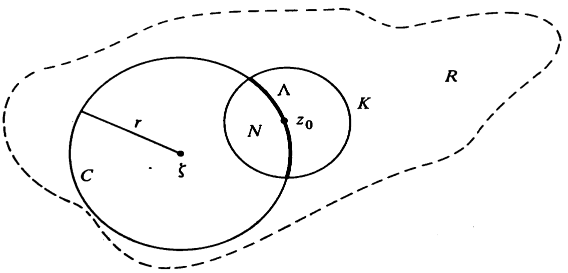
Jika $|f(z)| = M$ untuk setiap titik dalam hubungan ζ, maka $f(z)$ akan menjadi konstanta dalam semua R, sehingga bertentangan dengan hipotesis. Misalkan, z_0 menjadi titik sehingga $|f(z)| < M$ yang dipilih sedemikian rupa sehingga menjadi lingkaran.

$$\boldsymbol{C}: |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\zeta}| = |\boldsymbol{z_0} - \boldsymbol{\zeta}| = \boldsymbol{r}$$

Karena $|f(z_0)| < M$, maka dari hasil awal terbukti di atas $|f(z)| < M$ berlaku untuk setiap z di lingkungan N untuk z_0 dikelilingi oleh lingkaran, misalkan huruf K. Karena $|f|$ mencapai maksimum di S, terdapat bilangan $p > 0$ sehingga

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})| \leq \boldsymbol{M} - \boldsymbol{p}$$

untuk semua z di N.



GAMBAR 9.1. TEOREMA 9.1.

Perhatikan bagian Λ dari C yang termasuk dalam K dan nyatakan panjang Λ dengan L. Kemudian, dengan menggunakan rumus Integral Cauchy (halaman 173), dan teorema 4.5(5), kita peroleh

$$
\begin{aligned}
|f(\zeta)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C-\Lambda} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz\right| + \left|\int_{\Lambda} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C-\Lambda} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz\right| + \left|\int_{\Lambda} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r}(2\pi r - L) + \frac{1}{2\pi}\frac{M-p}{r} L \\
&< M
\end{aligned}
$$

Sejak $M = |f(\zeta)|$, kita telah sampai pada ketidakmungkinan $|f(\zeta)| < |f(\zeta)|$ sebagai hasil dari asumsi kami bahwa ζ adalah titik di dalam S. Disimpulkan bahwa zeta pastilah titik batas S.

Pada lampiran ditunjukkan bahwa jika suatu fungsi kontinu pada himpunan S tertutup dan berhingga, maka fungsi tersebut terbatas pada S. Hasilnya, kita dapat membuktikan bahwa jika suatu fungsi analitik adalah $f(z)$ dalam suatu himpunan tertutup dan berhingga himpunan S, maka $|f(z)|$ mencapai maksimum dan minimum dalam himpunan. Mengingat fakta ini, dalam Teorema 9.1., hipotesis 1 yang jelas mengarah ke hipotesis 2: sehingga kita memiliki bentuk teorema yang lebih kuat, yaitu sebagai berikut.

a. **Asas Modulus Maksimum**

Jika f(z) analitik dan tidak konstan pada himpunan tertutup dan terbatas S, maka |f(z)| mencapai maksimum pada batas S.

b. **Akibat Teorema (Asas Modulus Minimum)**

Jika $f(z)$ analitik dan tidak konstan pada himpunan tertutup dan terbatas S dan jika $f(z) \neq 0$ untuk semua z dalam S, Jadi $\|f(z)\|$ mencapai minimum pada batas S.

Bukti:

Terapkan prinsip modulus maksimum pada fungsi $1/f(z)$

D. Teorema Liouville

Teorema Liouville adalah Suatu fungsi dikatakan lengkap jika analitik di setiap titik pada bidang berhingga. Misalkan, $f(z)$ teliti dan bahwa c adalah titik pada bidang datar. Maka Deret Taylor yang ternyata f di sembarang titik z:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Jika $a_n = 0$ maka $n \geq 1$, menjelaskan $f(z)$ adalah *fungsi konstan:*

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k$

Akhirnya, jika $a_n \neq 0$ adalah bilangan tak hingga dari nilai 1, maka f disebut **fungsi transendental seluruhnya**.

Nah, jika kita mengkaji perilaku ketiga jenis fungsi monolitik ini dari poin- poin berikut: titik z dengan ukuran berapa pun, maka kita akan melihat fungsi konstan masih terbatas, sementara yang lain tidak terbatas. berbicara dalam kalimat yang berbeda. Jika suatu fungsi adalah sintetik daripada konstan, jadi dengan memilih nilai yang sesuai untuk variabel independen, ukurannya berapa pun z. Teorema pertama dalam bab ini menjelaskan fakta ini dalam bentuk yang sedikit berbeda tapi setara.

Teorema 9.2 Liouville

1. $f(z)$ adalah fungsi komprehensif.
2. f terbatas pada bidang datar, yaitu ada bilangan real positif M sehingga, untuk semua $z, |f(z) \leq M|$.

Maka f adalah fungsi konstan.

Bukti:

Karena f memiliki definisi deret Taylor maka

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

di sembarang titik c dan deret tersebut konvergen untuk semua z. Menurut $Teorema$ 5.8., hal. 173, kita mengetahui bahwa:

$$|a_n| \leq \frac{M}{p^n}$$

untuk semua $n = 1,2,3, \ldots$, di mana p adalah jari-jari lingkaran yang berpusat pada lingkaran di c dan pilih f untuk melengkapi lingkaran dan bagian dalamnya. Tetapi f berhingga sehingga p dapat berukuran berapa pun. Jadi, meninggalkan $p \to \infty$, kita memiliki

$$|a_n| = 0, \quad n = 1,2, \ldots$$

Jadi, $f(z) = a_0$ pada teorema diatas benar

Sebagai konsekuensi dari teorema Liouville, kita dapat dengan mudah membuktikan Teorema Dasar Aljabar, yang menyatakan bahwa setiap suku polinomial yang tidak berkorelasi dengan koefisien kompleks memiliki setidaknya satu akar kompleks. Pembaca mungkin sudah tahu betapa sulitnya pembuktian dasar teorema ini.

C. **Teorema Pokok Aljabar**

Teorema 9.3 Pokok Aljabar

Misalkan

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

adalah polinomial dengan $a_n \neq 0$ dan $n > 0$. Maka terdapat bilangan kompleks α sehingga $p(\alpha) = 0$.

Bukti:

Pertama, kita tunjukkan bahwa $P(z)$ adalah fungsi tak hingga, yaitu untuk setiap bilangan real $M > 0$, terdapat sebuah titik ζ sedemikian rupa sehingga $|P(\zeta)| > M$. Oleh karena itu, kita pertimbangkan hal berikut.

a. Katakanlah $M > 0$ dipilih secara sewenang-wenang. Karena asumsi $|a_n| > 0$, kita dapat mencari titik z yang modulusnya cukup besar sehingga

$$\frac{|a_n||z|^n}{2} > M.$$

b. Demikian pula, titik dengan modulus yang cukup besar dapat dipilih:

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{z^2}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| < \frac{|a_n|}{2}.$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan masalah $2.14(h)$, kita mendapatkan

$$\begin{aligned}\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| &\geq |a_n| - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \\ &> |a_n| - \frac{|a_n|}{2} \\ &= \frac{|a_n|}{2}\end{aligned}$$

c. Sekarang, dengan memilih ζ modulusnya yang cukup besar untuk semua relasi di (a) dan (b) untuk memenuhi $z = \zeta$, kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
|P(\zeta)| &= |a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + a_1\zeta + a_0| \\
&= |\zeta|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{\zeta} + \cdots + \frac{a_1}{\zeta^{n-1}} + \frac{a_0}{\zeta^n} \right| \\
&> |a_n||\zeta|^n/2 \\
&> M.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, P(z) adalah fungsi tak hingga.

Dengan fakta ini, kita sekarang melengkapi bukti dengan mengasumsikan kebalikan dari pernyataan fungsi, bahwa untuk setiap z, maka kita mencoba menggambar kontradiksi pada $P(z) \neq 0$. Kita membuat argumen sebagai berikut: untuk semua z, maka $P(z) \neq 0$ berarti fungsi $1/P(z)$ adalah fungsi tak terhingga. Menurut teorema Liouville, maka $1/P(z)$ adalah fungsi konsta. Kesimpulannya, ini tidak mungkin karena $P(z)$ adalah fungsi non-polinomial kontinu. Kontradiksi ini menegaskan teorema.

Bagian 2

9.2 Tingkah laku Fungsi di Singularitas Terasing

A. Definisi Tingkah laku Fungsi di Singularitas Terasing

Singularitas yang dapat diabaikan adalah singularitas "dangkal" dimana fungsi dengan singularitas tersebut dapat ditentukan sedemikian rupa sehingga analisisnya ada. Dalam artikel ini, kami menjelaskan perilaku fungsi $f(z)$ di sekitar kutub dan singularitas utamanya. Kita akan melihat bahwa di dekat setiap kutub, $f(z)$ tidak bekerja sebaik di dekat singularitas yang diabaikan. Namun, perilakunya masih dapat diprediksi berkat *Teorema 9.4*. Kami akan menunjukkan bahwa $f(z)$ selalu cenderung tak hingga ketika z cenderung menuju salah satu kutubnya. Mengenai perilaku suatu fungsi di dekat salah satu singularitas utamanya, ternyata fungsi seperti itu sama sekali tidak dapat diprediksi dan sangat tidak stabil dalam pengertian yang dinyatakan oleh teorema *Casorati-Weierstrass:* Berhubungan erat dengan perilaku ini adalah teorema Picard pada properti ini.

Teorema 9.4 Tingkah laku Fungsi di Singularitas Terasing

Misalkan $f(z)$ memiliki kutub level n di titik z_0.

Jadi

$$\lim_{n \to z_0} f(z) = \infty.$$

Bukti:

Tanpa menghilangkan keumuman, kita buktikan teorema ini untuk kasus $z_0 = 0$. "Menurut hipotesis, ada dekomposisi deret *Laurent* yang konvergen ke f untuk semua z dalam lingkungan nol terhapus:

$f(z) = \frac{a_{-n}}{z^n} + f(z) = \frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}} + \cdots + f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$

$a_{-n} \neq 0.$ **Pers. 1**

Sekarang, jika kita menulis (1) dalam bentuk

$f(z) = \frac{a_{-n}}{z^n}\left[1 + \frac{a_{-n+1}}{a_{-n}} z + \frac{a_{-n+2}}{a_n} z^2 + \cdots\right] = \frac{a_{-n}}{z^n}[1 + S(z)],$

kita perhatikan bahwa jika $z \to 0$, dan $S(z) \to 0$.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, mengatakan $\varepsilon = \frac{1}{2}$, bahwa terdapat $\delta > 0$ sehingga $|z| < \delta$ implikasi $|S(z)| < \frac{1}{2}$. Oleh karena itu $|1 + S(z)| \geq 1 - |S(z)| > \frac{1}{2}$. Tapi ini berarti

$$|f(z)| = \frac{|a_{-n}|}{|z|^n}|1 + S(z)| > \frac{|a_{-n}|}{2|z|^n} > \frac{|a_{-n}|}{2\delta^n}.$$

Sekarang, relasi terakhir adalah benar untuk setiap bilangan positif yang kurang dari δ. Jadi, dengan mengambil $\delta \to 0$ berarti $z \to 0$, kita melihat bahwa $\delta^n \to 0$, sehingga

$$|f(z)| \to \infty$$

yang membuktikan teorema.

Saat kami memindahkan minat ke masalah dimana $f(z)$ memiliki sesuatu singularitas pokok dan kami menunjukkan bahwa $z \to z_0$, memiliki perilaku f yang sangat tidak teratur. Kami mencari pemahaman dengan dua teorema. Pertama adalah hasil awal yang akan digunakan dalam pembuktian yang kedua; sehingga, dia sendiri adalah hasil yang menarik dan sangat penting.

Teorema 9.5 Riemann

Misalkan $f(z)$ memiliki dua sifat berikut:

1. Memiliki singularitas terasing di z_0.
2. Ini terbatas pada lingkungan z_0 yang terhapus N_1 yaitu ada bilangan positif M sehingga $|f(z)| \leq M$ untuk setiap z di dalam

$$N_1 : 0 < |z - z_0| < p.$$

Oleh karena itu, z_0 adalah singularitas f yang dapat diabaikan.

Bukti:

Tanpa kehilangan keumumannya, kita akan membuktikan teorema ini untuk kasus $z_0 = 0$. Menurut hipotesis 1, f yang dianalisis dalam lingkungan z_0 dihapus oleh N_2. Tetapkan nama minimum antara N_1 dan N_2 dengan N. Kemudian f memiliki representasi *String Laurent*:

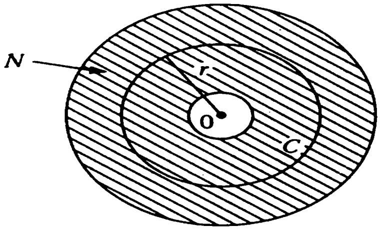
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n Z^n$$

di setiap titik N dengan koefisien yang diberikan oleh

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int c \; \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

di mana C adalah lingkaran $|\, z \,| = r$ ditunjukkan pada *Gambar 9.2.* kita punya

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int c \; \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$



GAMBAR 9.2. TEOREMA 9.5.

Karena r dapat diambil sekecil yang diinginkan, kuantitas akhir ini dapat mendekati nol untuk setiap $n = 1,2,\cdots$ Jadi

$$c_{-1} = c_{-2} = \cdots = c_{-n} = \cdots = 0,$$

dan deret Laurent adalah deret Taylor. Artinya null adalah singularitas yang dapat diabaikan dan pembuktiannya lengkap

Teorema 9.6 Casorati— Weierstrass

Asumsikan bahwa $f(z)$ memuat titik- titik ganjil di z_0. Oleh karena itu, sebelum sembarang bilangan L dan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat tanda- tanda z di setiap kelompok z_0 sedemikian rupa sehingga $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Bukti:

Secara hipotetis, f analitik daerah z_0 dihapus. Semua tanda dari bukti yang meresapi analisis ini dibatasi oleh sisi- sisi wilayah tersebut.

1. $f(z) - L$ menyimpan kenolan internal di setiap lingkungan z_0.
2. Terdapat ruang $N(z_0, p)$ di mana tidak ada perhitungan $f(z) - L$.

Jika (1) benar, riwayat luapan teorema akan terisi. Tetapi, jika (2) terjadi, kami menginterpretasikan fungsinya:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - L}$$

Analisis dalam imajiner pada $N^{*}z_0,p$ kosong, karena $f(z) - L$ adalah parsing dan bukan titik terendah, depan $z_0, g(z)$ memiliki titik khusus sebagai bersih. Sekarang jika z_0 menunjukkan karakteristik berbeda yang dapat ditekan atau berlawanan dengan g, nilai

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + L$$

Kami memverifikasi bahwa f memiliki kongruensi yang berlawanan atau memegang ambang analitis z_0, bertentangan dengan hipotesis asli. Dengan demikian, g mempertahankan ambang batas kesepian dasar z_0. Ini berarti, sebagai hukuman *Teorema 9.5*. g tidak memuliki batas di dalam N. Jadi, diatas semua $\varepsilon > 0$, setidaknya ada satu titik z dari dalam N menuju

$$|g(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Maka,

$$|f(z) - L| < \varepsilon$$

Bukti lengkap.

B. Ketunggalan Penguraian Taylor dan Laurent

Dalam *Teorema 6.13*, anggaplah setiap fungsi analitik yang dekat dengan simpul c ditunjukkan memiliki peluruhan kolom Taylor yang konvergen di dalam dunia c. Demikian pula, dalam *Teorema 7.1*, keberadaan peluruhan Laurent dibuktikan sebelum fungsi analitik apapun di seluruh tubuh lingkaran. Dalam bab ini, kita ingin mengetahui bahwa dekomposisi ini adalah singular. Ketika kita berasumsi bahwa kita membuat bagian dalam dari cetakan berlebih yang didistribusikan di trek, kita akan menemukan masalah kita sebelum skandal di mana asal dekomposisi adalah koordinat $c = 0$; sebagian besar arsitektur dapat ditingkatkan hanya dengan mengganti $z - c$ di dalam z.

Teorema 9.7 Taylor dan Laurent

Misalkan deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ menjaga radius konvergensi jari- jari lingkaran dan keduanya konvergen kearah keunggulan kualitatif di negara z_0.

Jadi,

$a_n = b_n$, secara keseluruhan $n = 0,1,2, \cdots$

Kedua sirkuit adalah arah.

Bukti:

Terbukti dengan menggunakan ambang induksi n

1. $n = 0$: Karena kedua deret memiliki arah perkiraan untuk z di wilayah nol, cerita ini berlaku untuk $z = 0$, jadi $a_0 = b_0$.
2. Langkah induktif: Asumsikan bahwa $a_j = b_j$, untuk semua $j = 0,1,\cdots,k$.

Jadi

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n z^n.$$

Sekarang, menjelang $z \neq 0$ tetapi di bagian wilayah kelompok menerjal berpokok kedua seri, kita membagi dua bab berpokok persamaan tambah z^{k+1} menjelang mendapatkan

$$a_{k+1} + a_{k+2}z + a_{k+3}z^2 + \cdots = b_{k+1} + b_{k+2}z + b_{k+3}z^2 + \cdots.$$

Kemudian, tambahkan $z \to 0$, kita dapatkan

$$a_{k+1} = b_{k+1}.$$

Jadi, tambah induksi $a_n = b_n$, secara keseluruhan n dan lengkapi buktinya.

a. Akibat Teorema 9.7 (Ketunggalan Penguraian Deret Taylor)

Misalkan $f(z)$ analitik di titik c. Maka setiap dua dekomposisi deret Taylor dari f yang berpusat di c adalah sama

Versi *Teorema 9.7* yang lebih kuat. Berikut ini terkait erat dengan teorema identitas untuk fungsi analitik

Teorema 9.8 Ketunggalan Penguraian Deret Taylor

Andaikan bahwa dua baris Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ dan \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Ada jari- jari konvergensi positif, dan jumlah mereka persis sama di dua titik berbeda di tak hingga, konvergen ke nol. Juga, asumsikan bahwa kedua deret tersebut sama pada $z = 0$. Jadi dua seri adalah sama di lingkungan nol.

Kami sekarang akan melanjutkan untuk menunjukkan bahwa penguraian deret fungsi Laurent adalah singular, karena dua penguraian fungsi yang sama pada torus yang sama adalah sama. "

Teorema 9.9 Ketunggalan Penguraian Deret Laurent

Berasumsi bahwa

1. $f(z)$ analisis permukaan loop tertutup
$A: r \leq |z| \leq R$, dimana $0 \leq r \leq R \leq \infty$.

2. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, z umum dan A.

Jadi rentang pada akhirnya adalah rentang Laurent.

Bukti:

Buktinya diwarnai secara vertikal, untuk setiap titik bulat dari n,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

di mana C adalah lingkaran sembarang $|z| = p$, di mana $r < p < R$, Misalkan, C seperti di atas, dan ambil sembarang titik di C Kemudian, dengan asumsi, untuk sembarang , deret yang diberikan konvergen ke f:

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k.$$

Menetapkan jumlah $1/\zeta^{n+1}$, untuk setiap n, kita mendapatkan

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{n-1} c_k \zeta^{k-n-1} + \frac{c_n}{\zeta} + \sum_{k=n+1}^{n-1} c_k \zeta^{k-n-1}.$$

Kami kemudian mengintegrasikan hubungan di ujung C, menggunakan penyesuaian positif dan mencerminkan peristiwa yang dijelaskan, proses penyerapan intergrasi suku ke suku. Jadi, kita punya

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{n=-1} c_k \int_C \zeta^{k-n-1} d\zeta + c_n \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \int_C \zeta^{k-n-1} d\zeta.$$

Bergantung pada sifat ketentuan integral Cauchy, setiap gerakan reguler mendapat nol. Jadi,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = c_n 2\pi i;$$

Jadi

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Tetapi n dipilih sewenang- wenang. Jadi, asosiasi termuda ini dengan benar menyoroti semua n, dan teorema terbukti.

INDEKS

D

F

N

S

T

GLOSARIUM

Deret Laurent merupakan bentuk umum dari deret Taylor yang didalamnya memuat bentuk berpangkat bilangan bulat negatif ditambah dengan berpangkat bilangat bulat positif (berhingga atau tak berhingga).

Fungsi transendental seluruhnya adalah bilangan tak hingga dari nilai 1

Null adalah singularitas yang dapat diabaikan dan pembuktiannya lengkap

Singularitas yang dapat diabaikan adalah singularitas "dangkal" dimana fungsi dengan singularitas tersebut dapat ditentukan sedemikian rupa sehingga analisisnya ada.

Teorema Liouville adalah suatu fungsi dikatakan lengkap jika analitik di setiap titik pada bidang berhingga

DAFTAR PUSTAKA

Desi, D., & Lumbantoruan, J. H. (n.d.). EduMatSains Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains PENGEMBANGAN BUKU CERITA MATEMATIKA PADA KELAS VII SMP DALAM MATERI PERBANDINGAN. In *Edumatsains, Special Issue* (Vol. 1, Issue 1). http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). *PENGEMBANGAN BAHAN AJAR INTEGRAL TAK TENTU BERBASIS MODEL SMALL GROUP DISCUSSION DI PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UKI TAHUN 2016/2017*.

Lumbantoruan, J. H. (2018). *ModulParabola.*

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BUKU BMP Geometri 1*.

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *BUKU BMP MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA*.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). *Modul Geometri I (Geometri Datar dan Ruang).*

Lumbantoruan, J. H. (2019e). *ModulLingkaran*.

Lumbantoruan, J. H. (2019f). *ModulTransformasiSumbu*.

Lumbantoruan, J. H. (2020a). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN*.

Lumbantoruan, J. H. (2020b). *ModulGarisLurus*.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (n.d.). *DEVELOPMENT OF A CONSTRUCTIVISM-BASED STATISTICS MODULE FOR CLASS VIII JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS*. www.solidstatetechnology.us

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). *Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics*.

Rumia, M., Simorangkir, R., & Lumbantoruan, J. H. (2021). *AKSESIBILITAS ANAK BERKEBUTUHAN KHUSUS DI ERA PENDIDIKAN 4.0*. *14*(1), 204–213. https://doi.org/10.33541/jdp.v12i3.1295

Saputro, P. A., & Lumbantoruan, J. H. (n.d.). EduMatSains Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS ARTICULATE STORYLINE PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR KELAS VIII. In *Edumatsains, Special Issue* (Vol. 1, Issue 1). http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains