VARIABEL KOMPLEKS

Penulis:

Jelly Anzani Harefa

NIM : 1813150016

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

TAHUN AJARAN 2022

PRAKATA

Variabel kompleks merupakan ekspansi dari system Integrasi Kompleks . Dalam mendukung mata kuliah Variabel Kompleks diperlukan wawasan untuk memudahkan mahasiswa dalam pembelajaran Variabel Kompleks.

Buku ajar ini saya susun untuk memenuhi salah satu syarat dalam pemenuhan penyelesaian tugas akhir dari mata kuliah Variabel Kompleks pada tahun ajaran 2021 sampai 2022. Serta diharapkan mampu menjadikan pedoman serta mempermudah mahasiswa dalam mempelajari Variabel Kompleks kedepannya.

Saya banyak mengucapkan terimakasih kepada Tuhan yang Maha Esa atas anugrah yang dia berikan kepada saya dalam penulisan buku ajar ini.serata kepada Ayah dan Ibu beserta keluarga besar saya yang mau mendukung saya dan selalu mendoakan saya didalam penyelesaian buku ajar ini .

Penulis

Jelly Anzani Harefa

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PENDAHULUAN

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa,karena dengan pertolonganNya saya dapat menyelesaikan buku ajar saya “Variabel Kompleks” tentang “Integrasi Kompleks”. Meskipun banyak rintangan dan hambatan saya alami dalam proses pembuatan buku ajarnya,tapi saya mampu menyelesaikannya dengan baik.

Tak lupa saya ucapkan terimakasih kepada Dosen dan teman-teman saya yang selalu membantu saya dan mendukung saya dalam proses pembuatan buku ajar ini.

Semoga buku ajar ini dapat membantu teman-teman mahasiswa yang lain dalam pembelajaran Variabel Kompleks dengan mudah.

Jakarta,20 Januari 2021

Jelly Anzani Harefa

BAB 4

INTEGRASI KOMPLEKS

4.1 Lintasan Sifat Keterhubungan

Pemikiran mengucapkan kurva dalam bentuk parametrik sudah dikenal pembaca melalui buku kalklus, misalnya parabola.

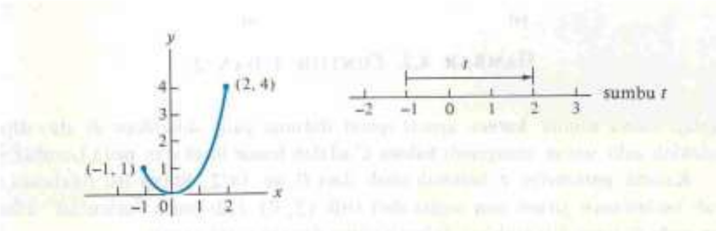
$$y = x^2$$

Dapat dipersentasikan dalam bentuk parametrik,dengan

$x = t, \qquad y = t^2,$ dengan $-\infty < t < \infty$.

Jika parameter t hanya diperbolehkan berubah-ubah didalam interval $-1 \leq t \leq 2$,orang akan memperoleh sebagian parabola yang membentang dari titik $(-1,1)$ ke titik $(2,4)$; lihat gambar 4.1

Konsep kurva datar yang dapat dinyatakan secara parametrik akan menjadi alat yang sangat penting dalam Integrasi Kompleks. Namun bentuk-bentuk kurva tertentu tak berguna bagi kita pada tingkat ini dan oleh karena itu pembatasan-pembatasan tertentu harus dikenakan untuk menghindari bentuk-bentuk kurva yang tak diingini. Khususnya,kita ingin mengeluarkan kurva-kurva atau bagian-bagian kurva yang panjangnya tak hingga,untuk nilai-nilai parameter dalam suatu daerah terbatas pada para interval tertentu yang terhingga.



Gambar 4.1 $\boldsymbol{x = t, y = t^2, -1 \le t \le 2}$

Misalkan t adalah peubah nyata.Maka suatu kurva dalam bidang datar dinamakan kurva mulus (smooth curve) jika dan nyata jika ia dapat dinyatakan dengan dua fungsi bernilai nyata.

x = $\emptyset(t)$ $\quad y = \varphi$, dengan $\alpha \le t \le \beta$,sedemikian hingga turunannya

$\frac{dx}{dt}$ = $\emptyset\ (t)$ dan $\frac{dy}{dt} = \varphi\ (t)$

Ada dan merupakan fungsi kontinu t pada interval yang sama.

Catatan 1

Defenisi diatas menurut tiga syarat,masing-masing dengan maksud khusus pertama, ia menghendaki agar $\emptyset$ dan φ kontinu pada interval yang diberikan dengan menyaratkan bahwa turunan mereka ada.

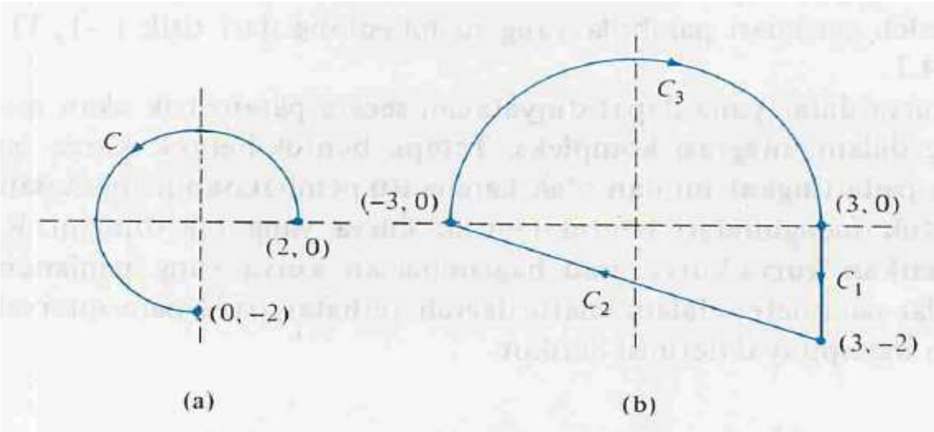
Kedua,syarat bahwa kedua turunan itu ada pada setiap titik dalam interval berimplikasi bahwa kurva itu”mulus”,artinya bahwa ia mempunyai garis singgung pada setiap titik dalam interval itu.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} [\left(\frac{dx}{dt}\right)]^2 + (\frac{dy}{dt})]^{1/2} dt$$

Contoh 1

Kurva C yang didefenisikan oleh

$$x = \cos 2\,t, \quad y = 2\,sin\,t, \quad dengan\ 0\ \leq t\ \leq \frac{3\pi}{2},$$



Gambar 4.2.Contoh 1 dan 2

Adalah kurva mulus,karena syarat-syarat defenisi yang diberikan diatas dipenuhi. Tidaklah sulit untuk mengenali bahwa C adalah busur lingkaran pada Gambar 4.2.

Karena parameter t berubah-ubah dari 0 ke $3\pi/2$,kurva itu dijelajahi dalam arah berlawanan jarum jam mulai dari titik (2,0). Jadi suatu "orientasi" diberlakukan pada C, yang ditunjukan dalam gambar dengan mata panah.

Contoh 2.

Pembaca dapat dengan mudah memeriksa bahwa setiap himpunan persamaan parametrik berikut mewakili suatu kurva mulus;

$$C_1 : x = 3 \qquad y = -t, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$C_2 : x = -6t + 3, \qquad y = 2t - 2, \qquad 0 \leq t \leq 1:$$

$C_3 : x = -3\cos t, \quad y = 3\, sint \qquad 0 \le t \le \pi$

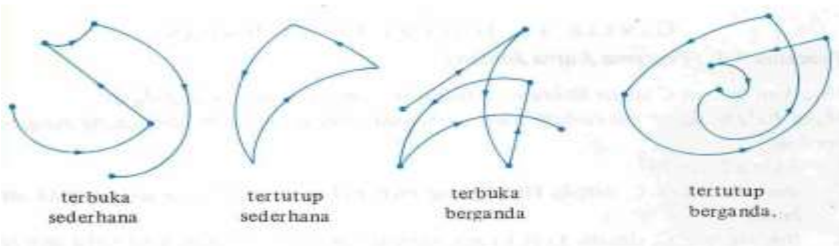
Hasil bangunan itu dilukiskan dalam gambar 4.2, yang dimana kita juga menunjukan "orientasi"setiap kurva yang diakibatkan oleh berubah-ubahnya dari 0 ke 2, C_1 dijelajahi dari (3,0) ke (3,-2).

Seperti akan segera kita ketahui,suatu gabungan kurva-kurva mulus demikian akan berguna dalam studi kita mengenai intergasi kompleks;kita akan menggunakan simbol.

$$C_1 + C_2 + C_3$$

Untuk menunjukan keseluruhan kurva tersebut.

Jika C suatu kurva mulus yang dinyatakan acara parametrik seperti pada (1), maka titik C padanan nilai t = $=\alpha$ dinamakan titik awal C (intial point of C) dan titik yang diperoleh dari nilai t = β dinamakan titik akhir C (terminal point of C).Suatu kurva C (tak perlu mulus) dinamakan lintasan (path) apabila ia terdiri dari sejumlah berhingga kurva.



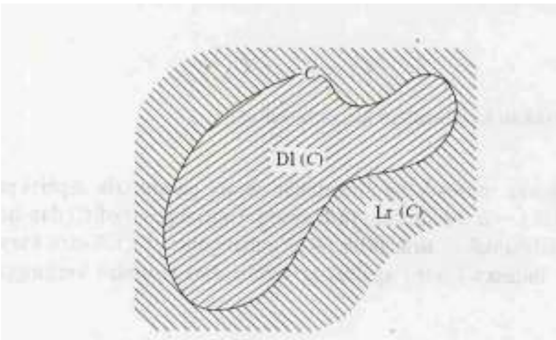
Gambar 4.3 macam jalur

$C_1, C_2, \ldots . C_n$, bergabung satu dengan yang lain sehingga titik akhir C_k,berimpit titik awal C_{k+1},untuk k = 1,2.....n. Jelaslah sekarang orang dapat menamakan titik awal C_1 sebagai titik awal jalur C dan titik akhir C_n sebagai titik akhir.kita juga menggunakan notasi simbolik.

$$C = C_1 + C_2 + \cdots C_n$$

Jika titik akhir lintasan C berimpit dengan titik awalnya,maka C dinamakan **lintasan tertutup** (closed path);jika demikian,dinamakan **lintasan terbuka** (open path). Jika suatu lintasan tidak memotong dirinya sendiri (kecuali mungkin titik awal dan titk akhirnya). Maka lintasan ini dinamakan **lintasan berganda** (multiple path).

Lintasan akan digunakan secara luas didalam pembicaraan kita mengenai integrasi kompleks,dimana lintasan akan menggantikan fungsi *interval integrasi* yang telah dikenal baik oleh pembaca dari kalkulus elementer. Dalam proses integrasi,lintasan akan dijelajahi dari titik awal ketitik akhirnya,atau sebaliknya dari titik akhir ketitik awalnya. Akibat dari,suatu pengertian tentang arah atau lebih tepatnya suatu orientasi (orientation). Tetapi sebelum kita melakukan ini kita harus menyatakan,tanpa bukti,suatu teorema terkenal oleh mamtimatikawan pernacis yang bernama Caille Jordan,yang akan melengkapi kita dengan suatu istilah yang paling memudahkan yang diperlukan untuk tujuan kita.



Gambar 4.4. Teorema Kurva Jordan

Contoh 3

Lintasan

$$C: x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$$

Adalah bagian parabola , $y = x^2$ diantara titik (0,0) dan (2,4). Dipihak lain,lintasan yang diberikan oleh.

$$C: x = -t, \quad y = t^2, \quad -2 \leq t \leq 0$$

Adalah kurva yang sama tetapi sekarang berorientasi dari (2,4) ke (0,0). Jadi sebenarnya,himpunan persamaan yang kedua itu menyatakan –C.

Contoh 4.

Kurva

$$C: x = \cos t, \quad y = -sin\, t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Kita tutup pasal ini dengan memperkenalkan dua macam himpunan yang memainkan peranan menonjol didalam integrasi kompleks,dan karena akan sering digunakan maka patut diberikan nama khusus. Suatu himpunan R dikatakan **terhubung** (connected) jika dan hanya jika setiap dua titik didalam R dapat dapat dihubungkan dengan suatu lintasan yang terletak seluruhnya dalam R.Dipihak lain,suatau himpunan S dikatakan **terhubungan sederhana** (simply connected) jika dan hanya ,bila diberikan suatu jalur tertutup sederhana C yang seluruhnya terletak didalam S.

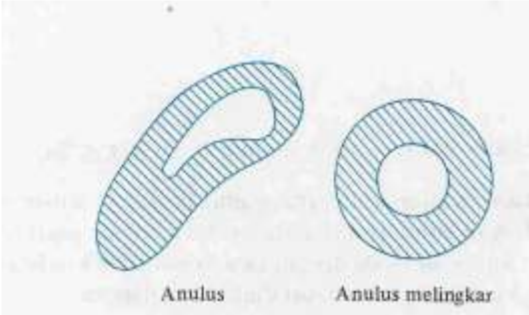
Catatan 2

Istilah “terhubung sederhana”dipakai sangat luas dan kita dapat menggunakannya disini terutama karena istilah tersebut sudah mantap,sudah melembaga,tetapi pembaca hendaknya mengetahui bahwa kehadiran kata “terhubung”tersebut sedikit menyesatkan karena seperti akan kita lihat pada contoh berikut,*suatu himpunan dpat terhubung sederhana tetapi tidak terhubung.*

Contoh 5

1. Bagian dalam suatu lingkaran atau segitiga atau segibanyak atau,secara umum bagian dalam suatu lintasan tertutup sederhana adalah daerah terhubung sederhana yang juga terhubung. Berikan alasan bagi pernyataan ini.
2. Setengah bidang sebelah kanan,R(z) > 0,adalah daerah yang terhubung dan terhubung sederhana. Berikan alasan.
3. Himpunan semua z dengan R (z) $\neq$ 0,yaitu bidang datar dengan sumbu khayal dihilangkan,adalah daerah terhubung sederhana,tetapi tidak terhubung. Berikan alasan pada kedua bagian pernyataan ini.
4. Himpunan semua z sedemikian hingga 1 < |z| < adalah daerah terhubung yang tidak terhubung sederhana. Berikan alasan.

Daerah berbentuk cincin yang terletak antara dua lingkaran konsentris (seperti pada bagian contoh 4) dinamakan **annulus melingkari** (circular annulus) secara umum,daerah yang dibatasi oleh dua lintasan tertutup sederhana,satu diantaranya termuat seluruh nya dibagian dalam lintasan yang lain dinamakan annulus atau daerah annulus(annular region).



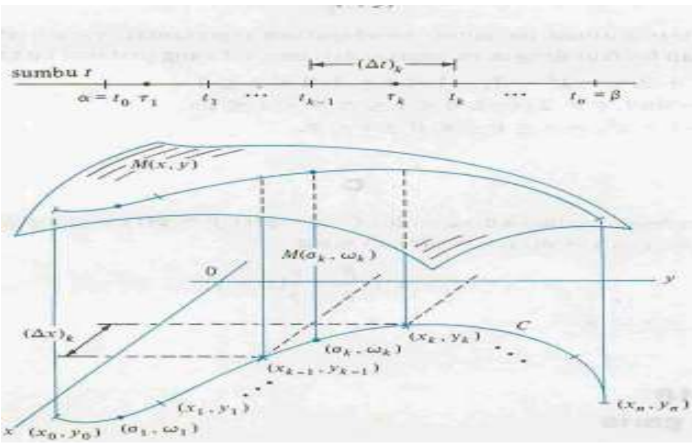
Gambar 4.5. contoh bagian 4.

4.2. Integral Garis

Pada pembicara kita tentang integral kompleks dipasal berikutnya,kita akan melihat bahwa intergal fungsi kompleks dapat diuraikan menjadi jumlah empat “integral garis”.sifat-sifat integral garis diwarisi oleh integral kompleks,dan cara-cara menentukan nilai integral garis sangat sering dapat dimanfaatkan secara efektif dalam bentuk nilai integral kompleks.

Kita mulai dengan persiapan bagi defenisi integral garis. Misalkan C adalah kurva mulus dalam bidang datar yang didefenisikan oleh

$$x\ \emptyset(t),\ y = \varphi(t),\ a \leq t \leq \beta$$



Gambar 4.6. Defenisi Integral Garis

Sekatlah interval $a \leq t \leq \beta$ ini menjadikan n subinterval dengan menggunkan sekatan

$at_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$ dan

pada setiap subinterval $t_{k-1} \leq t \leq t_k$

Ambilah secara sembarang,suatu titik untuk semua k=1,2,…,n,lihat lah gambar 4.6 lambangkan panjangn subinterval yang terpanjang dengan μ.suatau penyekatan interval $a \leq t \leq \beta$ mengakibatkan penyekat yang sama pada C.

$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots\ldots (x_{k,} y_k), (x_n, y_n)$

Dengan peubah-peubah nyata x dan y terdefenisikan sekurang kurangnya di C, maka tentukan fungsi tersebut didefenisikan pada titik-titik:

$$\sigma_{1,}\omega_1), (\sigma_{2,}\omega_2) \ldots . (\sigma_{n,}\omega_n$$

Untuk setiap k = 1,2….n,bentuklah hasil kali

$$M(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k$$

Dimana $(\Delta x)_k$ adalah proyeksi busur yang ujung-ujungnya (x_{k-1}, y_{k-1}) dan $(x_{k,} y_k)$ kesumbu x,dan kemudian bentuklah jumlah.

Andaikan bahwa s adalah suatu konstanta kompleks sembarang dan bahwa C + K adalah suatu lintasan yang berdiri dari kurva mulus C dan K. Andaikan lebih lanjut bahwa integral-integral garis M(x,y) dan N(x,y) sepanjang lintasan diatas.

Maka

1. $\int c$ (M(x,y)dx =$\int c$ M(x,y)dx
2. $\int c\,(Mx, y) + N(nx, y)dx = \int c\,M(x, y)dx + \int c\,N(x, y)dx$
3. $\int c + kM(x, y)dx \int c\,M(x, y)dx \int k\,M(x, y)dx$

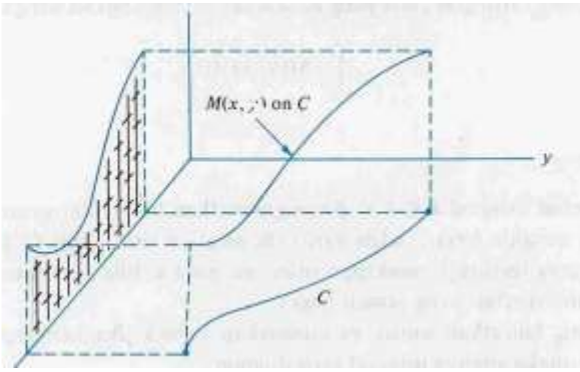
4. $\int c\, M(x,y)dx = -\int c\, M(x,y)dx$

Bukti

Lihat soal 4.2. untuk bagian 1,2 dan 4, dan 4 lampiran,bagian 3

Catatan 4

Bagian teorema 4.3 dapat diperluas,melalui induksi,pada kasus suatu lintasan yang terdiri dari atas n kurva yang mulus. Hal ini akan membentuk suatu bukti bagi kenyataan bahwa teorema 4.2, yang menetapkan adanya suatu integral garis panjang kurva mulus adalah sembarang lintasan.



Gambar 4.7.Realisasi Geometrik untuk Integral Garis

PENGHITUNGAN INTEGRAL GARIS

Langka pokok dalam proses penghitungan integral garis adalah suatu subsitusi yang tepat dari persamaan lintasan integrasi ke dalam integren. Hal ini akan menjadi lebih jelas bila rumus dalam teorema 4.2, diperhatikan dengan seksama. Karena sisi sebelah kanan diperoleh dari sebelah kiri dengan menggunakan persamaan-persamaan yang sudah dikenal.

$$x = \emptyset(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad dx = \emptyset(t)dt$$

Subsitusi ini menggunakan hasil integral biasa (rieman)dalam peubah t yang limitnya $a\ dan\ \beta$ menentukan interval integrasinya. Subsitusi yang analog adalah jelas didalam rumus pada catatan 3, maka perhitungan sisi sebelah kanan menjadi persoalan integrasi biasa.

Lihat contoh 1,2,3 dipasal ini.

Sangat sering,lintasan integrasi diberikan dalam bentuk bukan parametrik

$$y = f(x) \ \ atau \ x = g(y)$$

Dengan titik awal (a,b)dan titik akhir (c,d) dalam hal ini seperti diatas subsitusikan langsung menghasilkan rumus.

Contoh 1

Hitung integral garis terhadap kedua bagi fungsi M(x,y) = xy sepanjang C :

$$x = 4t, y = t^2 \ 0 \ \leq t \ \leq 2$$

Dengan mengsubsitusikan kedalam rumus teorema 4.2 kita mendapatkan bahwa

$$\int c \ \ xy \, dx = \ \int_0^2 4t. t^2 \ \ dt = 16 \ \int_0^2 t^3 \ \ dt = 64$$

Begitu pula,dengan menggunakan rumus pada catatan 3,kita mendapatkan bahwa

$$\int c \ \ xy \, dx = \ \int_0^2 4t. t^2 \ dt = 16 \ \int_0^2 t^3 \ dt = \ \frac{256}{5}$$

Contoh 2

Hitung kedua integral garis M(x,y) = x+y sepanjang lintasan

$$C = e^2 \quad \ y = \sin \ t \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Dengan menggunakan rumus yang sama seperti contoh diatas kita dapat.

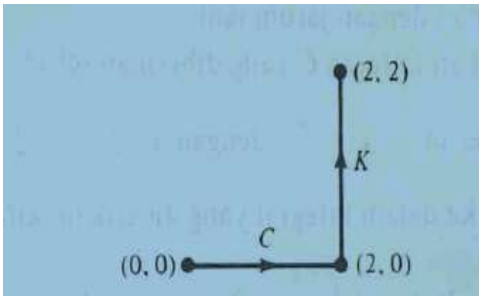
$$\int c\ (x+y)dx = \int_0^{\pi}(e^2+ \sin t)\, e^2 dt = \frac{1}{2}(e^{2\pi}+e^{\pi})$$

Dan

$$\int c\ (x+y)dx = \int_0^{\pi}(e^t+ \sin t)\cos\ t\, dt = \frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$$

Contoh 3.

Hitunglah kedua integral garis fungsi M(x,y) = x+y sepanjang lintasan C+K pada Gambar 4.8



Gambar 4.8.Contoh 3

lintasan yang diberikan terdiri dari dua kurva mulus

$$C: y = 0\ dengan\ 0\ \le x\ \le 2$$

Dan

$$k: x = 2\ dengan\ 0\ \le x\ \le 2$$

Perlu diketahui bahwa sepanjang C,dy = 0 dan sepanjang k,dx = 0. Maka dengan subsitusi langsung,kita mendapatkan bahwa.

Contoh 4.

Hitunglah integral garis $\int (x^2 + \ y^2)\ dx$ sepanjang setengah lingkaran bagian atas |z| = 2 dijelajahi secara berlawanan dengan jarum jam.

Kita dapat menyatakan lintasan C yang diberikan sebagai

$$y = (4 - x^2)\ dengan\, x : 2 \to -2$$

Maka dengan subistusi ke dalam integral yang diberikan,kita mendapatkan bahwa

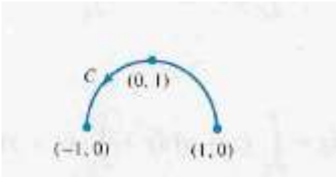
$$\int_c (x^2 + y^2)dx = \int_2^{-2} [x^2 + (4 - x^2)]dx = -16.$$

Contoh 5.

Hitung integral garis (a) $\int c\ y^2\ dx\ dan\ (b) \int c\ \ x\ dx$, dimana C adalah setengah lingkungan dalam Gambar 4.9 terdapat paling sedikit kedua presentasi untuk C

1. $y = (1 - x^2)^{1/2}$ dengan x :1 $\to -2$
2. $x = \cos t, y = \sin t\ 0\ \le t\ \le\ \pi$

Pada soal-soal diakhir pasal ini,pembaca diminta untuk memverifikasikan bahwa persoalan mencari integral yang diberikan menjadi sangat mudah jika kita menggunakan 1 dalam integral pertama da 2 (atau taka da subsitusi sama sekali). Untuk menghitung yang kedua.



Gambar 4.9. Contoh 5

4.3. Integral Kompleks

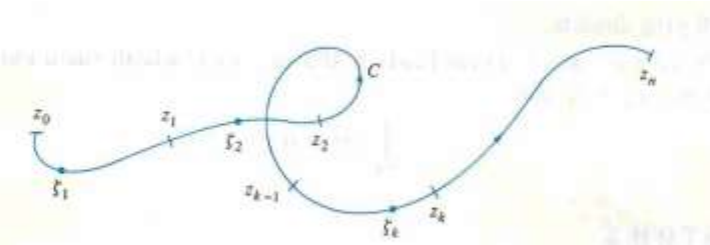
Defenisi integral fungsi kompleks adalah sama dengan defenisi integral fungsi nyata dengan menggantikan interval integrasi dengan suatu lintasan. Kita ingat kembali bahwa integral fungsi nyata f(x) pada interval $a \leq x \leq b$ didefenisikan sebagai.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k-1}^{n} f(x)(\Delta x)_k$$

Dimana $\mu\ adalah\ (\Delta x)$ terbesar yang mewakili panjang n subinterval hasil penyekat interval $a \leq x \leq b\ dan\ x_k$ adalah titik sembarang didalam subinterval ke-k.

Integral kompleks tertentu didefenisikan sebagai berikut,misalkan C adalah kurva mulus dengan bentuk parametrik biasa (lihat persamaan1) dan perhatikan bahwa kita dapat juga menyatakan C dalam bentuk kompleks sebagai :

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq$$



Gambar 4.10. Jalur Integrasi

SOAL LATIHAN BAB 4

1. Dalam setiap kasusu berikut gambarlah kurva mulus yang diberikan,berilah tanda titik awal dan akhirnya dan tentukan orientasinya juga dalam setiap kasus hilangkan prameternya dan nyalakan kurva itu dalam sumbu koordinatnya,
   a. $x = t^2 - 1, y = t - 1 - 1 \leq t \leq 1$
   b. $x = 3\cos\ t, y = 2\sin\ t, 0 \leq t \leq \pi$
   c. $z = -i + e^{ii} - \pi \leq t\ \leq\ \pi\ (lihat\ soal\ nomer\ 16)$
   d. $x = e^{-i}, y = t - 1{,}0 \leq t \leq 1$
   e. $z = z_0 + 2e - \frac{\pi}{2}\ \leq t\ \leq\ \pi$
2. Gambarlah lintasan $c = c_1 +\ c_2 + c_3 + c_4\ dimana$

   $C_1 \colon x = -\sin\ t\ y = \cos\ t, 0 \leq t\ \ \leq \pi/2$

   $C_2 \colon y = -x - 1\ dari\ (-1{,}0) ke (0, -1)$

   $c_3\ \colon x = y\ 2t + 2, y = t - \leq t \leq 0$

   $c_4\ z = 1 + e^{ii} 0 \leq t \leq \pi$
3. Carilah representasi parametrik bagi panggal garis yang menghubungkan titik-titik (1,1) dan (-3,-1) dalam urutan itu
4. Berikan satu contoh (lain dari pada yang diberikan dalam teks) untuk masing-masing berikut:
   a) Suatu himpunan yang terhubung dan terhubung sederhana
   b) Suatu himpunan yang terhubung tetapi tidak terhubung sederhana
   c) Suatu himpunan yang terhubung sederhana tetapi tidak terhubung
   d) Suatu himpunan yang tidak terhubung dan tiidak terhubung sederhana.

5. Verifikasikan bahwa lingkaran berjari-jari dan berpusat di$Z_0 = (a, b)$ dapat dinyatakan
   a. Dalam bentuk kordinat biasa oleh $(x-a)^2 + (y-b)^2 r^2$
   b. Dalam bentuk parametrik oleh

$$x = a + r\cos\ t \qquad y = b + r\sin\ t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

   c. Dalam bentuk parametrik oleh

$$x = a + \frac{mr}{(m^2+1)^{1/2}} \qquad y = b + \frac{r}{(m^2+1)^{1/2}}$$

   d. Dalam bentuk kompleks oleh $z = z_0 + re^{ii}, 0 \leq t \leq 2\pi$
6. Verifikasikan bahwa (b) dan (d) pada soal diatas pada hakekatnya suatu representasi yang sama.
7. Misalkan bahwa kurva mulus C dinyatakan oleh

$$x = \emptyset(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad a \leq t \leq \beta$$

   Soal nomor 8,pada hakekatnya mengatakan bahwa bahwa kita dapat mendapatkan representasi yang berbeda untuk C diatas suatu interval lain $\gamma \leq \pi \leq \delta$ dengan menggantikan interval yang pertama ke kedua.

   a. $x = t3, y = t^2 - 1, -1 \leq t \leq 1{,}0 \leq t \leq 1$
   b. $x = -\sin\ t, y = 2\cos\ t, 0\ \leq t\ \leq \pi, \pi\ \leq t \leq 2\pi$
   c. $z = -i + e^{ii}\pi \leq t \leq \pi, 0 \leq t \leq \pi$

8. Tunjukan bahwa setiap kurva mulus $c: x = \emptyset(t), y = \varphi(t), a \leq t \leq \beta$ dapat juga dinyatakan dengan x =$\emptyset(t) = \varphi(t)$ dimana

$$t = a + \frac{\beta - a}{\delta - \gamma}(t - \gamma) \quad untuk\, \gamma\ \leq t \leq \delta$$

9. Hitunglah kedua integral garis fungsi $M(x, y) = xy - y^2$ sepanjang setiap lintasan berikut:

   a. $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$

   b. $x = t^2, y = t, 1 \leq t \leq 1$

   c. $y = x^2\ dari\ (-1, -1) ke$ (1,1)

   d. $y = 3 - x = dari$ (3,0)$untuk$ (5,2)

10. Jika C terdiri dari penggal-penggal garis yang menghubungkan (0,0) ke (1,1) dan (1,1) ke (1,0) tunjukan bahwa

$$\int_C (x^2 + y^2)dy = -\frac{2}{3}$$

11. Jika C adalah setengah lingkaran $x = \cos\ t\ , y = \sin\ t, 0 \leq t \leq \pi$ tunjukan bahwa

$$\int_C \left(\frac{y}{x^{2+y^2}}\ dx\ -\ \frac{x}{x^{2+y^2}} dy\right)\ =\ -\pi$$

12. Jika C adalah penggal garis dari (0,0) ke (2,1),tunjukan bahwa

$$\int_C [x^2\, y\, dx - (x + y)dy] = \frac{1}{2}$$

13. Misalkan C adalah bujur sangkar dengan titik-titik sudut (1,1),(-1,1),(-1,-1) dan (1,-1). Dengan menjelajah C dalam arti positif, hitunglah

    a. $\int_C (x\,dy + y\,dx)$
    b. $\int_C (x + y)(dx + dy)$

14. Kerjakan integrasi dalam contoh 6, pada bab ini.

15. Pelajari Kembali defenisi integrasi garis dengan segala pendahuluannya,dan kemudian dalihkan bahwa,jika $(\Delta t)_k \to 0\; maka\; (\Delta x)_k \to 0,$ sedangkan konverensinya tidak selalu bener.

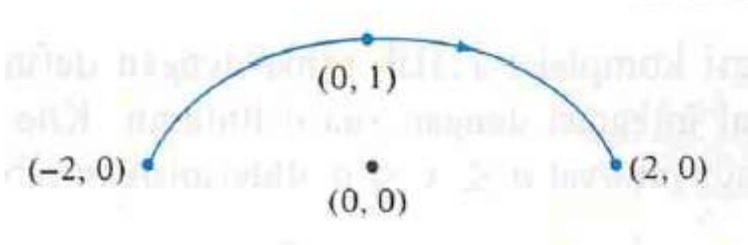
16. Hitung integral pada soal 13(b) sekeliling lingkaran satuan yang berpusat dititik asal dan jelajahi dalam arah positf.

17. Hitung kedua integral garis $M(x, y) = y^3$ sepanjang setengah lingkaran bagian atas |z| = 1 dijelajahi dengan searah jarum jam.

18. Hitung integral garis $(x, y) = (x + y)^{-1}$ terhadap x sepanjang $y = x^2$ dari (1,1) ke (3,9)

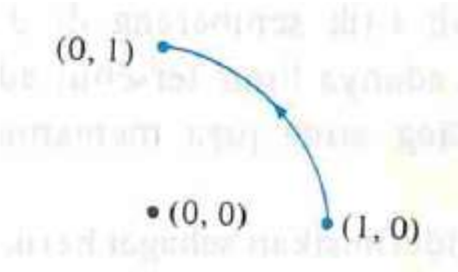
19. Ulangin integrasi soal diatas terhadap y.

20. Hitung $\int x^2 + 1)dy$ sepanjang |z| =1 dalam orientasi negatif



21. Hitunglah $\int (y+x)dx$ sepanjang setengah ellips seperti yang ditunjukan dalam gambar diatas.

22. Hitung $\int (x^2+1)dy$ sepanjang seperempat lingkaran seperti gambar berikut:



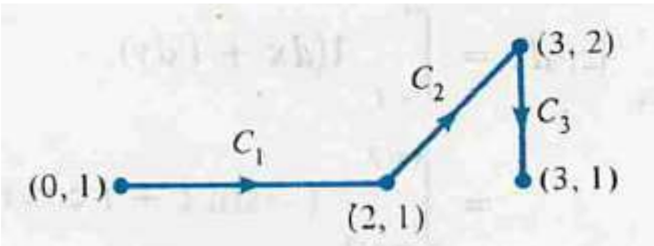
23. Buktikan bagian 1,2 dan 4 dari Teorema 4.3 dengan menggunakan rumus pada Teorema 4.2 dan sifat-sifat yang telah dikenal mengenai integral biasa (Rieman),dengan mengingat bahwa ruas sebelah kanan dalam rumus yang ditanyakan itu merupakan integral jenis tersebut.

24. Teorema Green: misalkan C adalah suatu lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif pada bidang datar dan misalkan u (x,y) dan v(x,y) berikut turunan-turunan parsialnya merupakan fungsi x yang kontinu pada C dan D1 (C) maka rumus berikut yang menghubungkan integral garis yang sepanjang C dengan integral dua biasa diatas daerah D1(C) adalah bener

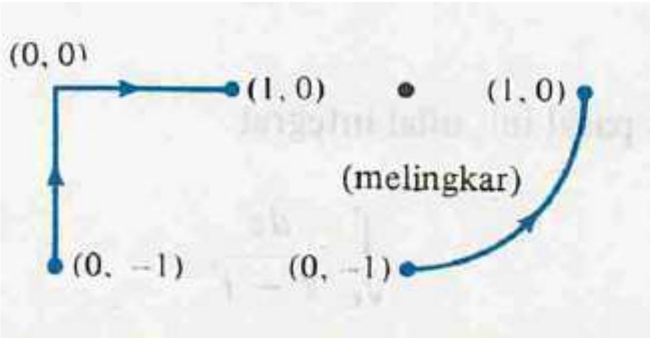
    $\int_c u\,dx - \int_C v\,dy + i\int_c v\,dx = 0$

25. Hitung $\int (x^2+y^2)dz$ sepanjang lintasan $c: x = t^2, y = \frac{1}{t} \leq t \leq 3$.

26. Hitung $\int z\,dz\ sepanjang\ c_{1,}\, c_2, c_3$ seperti gambar berikut.



27. Hitung $\int z\, dz$ sepanjang masing-masing lintasan seperti gambar dibawah dengan perhitungan langsung. Kemudian periksalah jawabanmu dengan menggunakan contoh 2 pada bab ini



28. Hitung integral $f(z) = e^{z}\ sepanjang\ y = 2x\ dari\ (-1,-2) ke\ (1,2)$

29. Hitung $\int_{c} \frac{dz}{z}\ jika\ c\colon x^{2} + y^{2} = 16$ berorientasi posoitif

30. Lingkaran $fungsi\ f(z) = (z)^{2}$ sepanjang lintasan $yx^{2} dari\ (0,0) ke (1,1)$

31. Gunakan hasil yang ditanyakan dalam soal 35 untuk mengerjakan integrasi pada contoh 7, bab ini digunakan untuk eksponensial untuk c.

32. Hitung $\int x\ dz\ sepanjang\ \ C : |z| = 1$ yang berorientasi posoitif

33. Hitung $\int y\ dz\ dari\ (-2,0) ke\ (2,0)$ untuk setiap lintasan integrasi berikut:

   a. Panggal garis (-2,0) ke (2,-1) ke (2,0).
   b. Setengah bagian bawah lingkaran
   c. Setengah bagian atas lingkaran.

34. Dalam bab mendatangkan kita akan menunjukan bahwa,untuk menentapkan rumus-rumus konstanta k yang tidak nol dan untik sembarang lintasan C

$$\int_c e^{kz}\, dz = \frac{1}{k}\, e^{kz}$$

Gunakan kenyataan.

SOAL EVALUASI BAB 4

1. Hitunglah $\int (z)^2 \ dz$ sepanjang setengah bagian atas |z| = 2 dari -2 ke 2
2. Hitunglah integral $f(z) = i \sin \ z \ dari - i \ ke \ i \ sepanjang \ suatu \ garis \ \ lurus$
3. Hitunglah integral garis $\int (x^2 + xy) \ dy \ dari \ (0,0) ke (1,2)$ sepanjang suatu garis lurus
4. Carilah batas atas untuk $|\int \frac{dz}{z^{2+1}}|$ sepanjang lintasan pada soal 1.
5. Mengapa perhitungan integral $\int \frac{(1,1)}{00} \ y \ dx$ sepanjang y = e^x tidak mungkin?
6. Nyatakan kurva-kurva berikut dalam bentuk parametrik:
   a. Lingkaran berjari-jari 2 dan pusat di 1 +i
   b. Parabola y = $x^2 \ dari \ (-2,4) ke \ (0,0)$
   c. Parabola $y = x^2 dari \ (0,0) ke \ (-2,4)$
7. Hitunglah $\int_0^{1=i} (x - y) dz$ sepanjang y = 0 ke titik z = 1 dan kemudian sepanjang x = 1.
8. Ulang soal 7 sepanjang x = 0 ke titik z = i dan sepanjang y = 1
9. Pada soal muka gantilah setengah bagian atas lingkaran satuan dengan setengah bagian bawah yang lainnya sama.
10. Ulang soal integrasi soal 2 dengan menggunakan panggal garis lurus antara -1 dan 2 kebagian lintasan integrasimu.
11. Dalam setiap kasus berikut gambarlah kurva mulus yang diberikan tanda awal dan akhirnya,dan tentukan orientasinya dalam setiap kasus dengan menghilangkan prameternya dan nyatakan kurva itu dalam sumbu koordinatnya.
    f. $x = t^2 - 1, y = t - 1 - 1 \leq t \leq 1$
    g. $x = 3 \cos \ t, y = 2 \sin \ t, 0 \leq t \leq \pi$
    h. $z = -i + e^{ii} - \pi \leq t \ \leq \ \pi \ (lihat \ soal \ nomer \ 16)$
    i. $x = e^{-i}, y = t - 1,0 \leq t \leq 1$

j. $z = z_0 + 2e - \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

12. Gambarlah lintasan

LAMPIRAN 4

Bukti Teorema

Teorema 4.2 (Adanya Integral Garis)

Andaikan bahwa

1. C adalah kurva mulus yang dinyatakan secara parametrik dengan $x = \emptyset(t) y = \varphi(t) a \leq t \leq \beta$
2. Fungsi M(x,y) kontinu pada C maka integral garis untuk M dan C terhadap x ada dan nilainya diberikan oleh rumus

$$\int_C M(x, y)\, dx = \int_\alpha^\beta M(\phi(t), \psi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt.$$

Bukti

Misalkan interval $j: a \leq L \leq \beta$ telah disekat menjadi n subinterval. Karena $\emptyset(t)$ kontinu dan dapat didefrensialkan pada J (mengaja), maka kontinu dan dapat didefrensialkan pada setiap subinterval diatas.jadi menurut teorema nilai tengah untuk turunan,terdapat titik dalam setiap $t_k - 1 < t < t_k$ dengan sifat bahwa

$$\frac{\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \phi'(\eta_k),$$

Yang dengan menggunakan notasi yang berbeda,kita dapat menuliskan dalam bentuk .

$$\frac{(\Delta x)_k}{(\Delta t)_k} = \phi'(\eta_k).$$

Oleh karenanya

$$(\Delta x)_k = \phi'(\eta_k)(\Delta t)_k.$$

Tetapi kemudian,sepanjang titik-titik pada c,kita mempunyai

$$\sum_{k=1}^{n} M(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k = \sum_{k=1}^{n} M[\phi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\phi'(\eta_k)(\Delta t)_k.$$

Berikutnya dengan mengambil limit kedua ruas persamaan diatas untuk $\mu \to 0$ kita mencatat bahwa limit sebelah kiri adalah integral garis

$$\int_C M(x, y)\, dx,$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\chi).$$

Sedangkan limit sebelah kanan adalah integral rieman

$$\int_{\alpha}^{\beta} M[\phi(t), \psi(t)] \cdot \phi'(t)\, dt,$$

yang keberadaanya diajmin oleh hipotetis bahwa fungsi-fungsi $M, \emptyset, \mu, \varphi$ adalah kontinu pada interval J

terpenuhi pernyataan teorema itu.

Teorema 4.3

Andaikan bahwa C+K adalah lintasan yang terdiri dari kurva-kurva mulus

$$C : x = \phi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

dan

$$K : x = \kappa(t), \qquad y = \lambda(t), \qquad \gamma \le t \le \delta.$$

Andaikan lebih lanjut bahwa integral-integral garis fungsi M(x,y) ada disepanjang setiap kurva mulus diatas

$$\int_{C+K} M(x, y)\, dx = \int_C M(x, y)\, dx + \int_K M(x, y)\, dx.$$

Bukti

Dengan menggunakan soal 8 kita mengetahui bahwa kurva mulus k dapat dinyatakan secara parametrik dengan dua fungsi

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad \alpha \leq t \leq \delta,$$

Dimana

$$f(t) = \phi(t) \quad \text{dan} \quad g(t) = \psi(t) \quad \text{bila } \alpha \leq t \leq \beta$$

dan

$$f(t) = \mu(t) \quad \text{dan} \quad g(t) = \nu(t) \quad \text{bila } \beta \leq t \leq \delta.$$

Dengan pendahuluan di atas tersedia pada kita sekarang kita dapat melengkapi ini sebagai berikut.

$$\int_{C+K} M(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\delta} M[f(t), g(t)]f'(t)\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} M[f(t), g(t)]f'(t)\,dt + \int_{\beta}^{\delta} M[f(t), g(t)]f'(t)\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} M[\phi(t), \psi(t)]\phi'(t)\,dt + \int_{\beta}^{\delta} M[\mu(t), \nu(t)]\mu'(t)\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} M[\phi(t), \psi(t)]\phi'(t)\,dt + \int_{\gamma}^{\delta} M[\kappa(t), \lambda(t)]\kappa'(t)\,dt$$

$$= \int_{C} M(x,y)\,dx + \int_{K} M(x,y)\,dx$$

Lengkaplah bukti ini,karena menurut hipotetis,integral terakhir ada perhatikan bahwa semua subsitusi dalam rangkaian kesamaan dimuka akan didapatkan didalam pekerjaan pendahuluan yang dilakukan sebelum pembuktian ini.

Teorema 4.4

Andaikan bahwa $f(z) = u(x,y) + v(x,y)$ kontinu pada setiap titik dikurva mulus C maka integral f sepanjang C ada dan

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - \int_C v\,dy + i\int_C u\,dy + i\int_C v\,dx.$$

Bukti

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\zeta_k = (\sigma_k, \omega_k)$, dan $(\Delta z)_k = (\Delta x)_k + i(\Delta y)_k$

(lihat defenisi integral kompleks pada pemulanya bab 4, kita mempunyai uraian sebagai berikut,dimana semua penjumlahan dilakukan dari K=1 ke K= n

$$\begin{aligned}\sum f(\zeta_k)(\Delta z)_k &= \sum [u(\sigma_k, \omega_k) + iv(\sigma_k, \omega_k)][(\Delta x)_k + i(\Delta y)_k] \\ &= \sum u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k - \sum v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k \\ &\quad + i \sum u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k + i \sum v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k.\end{aligned}$$

kemudian dengan mengsubsitusikan kedalam defenisi integral kompleks dan menggunakan Teorema 2.3.(1), maupun defenisi integral garis,kita mendapatkan

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Delta z)_k \\ &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k - \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k \\ &\quad + i \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\sigma_k, \omega_k)(\Delta y)_k + i \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\sigma_k, \omega_k)(\Delta x)_k \\ &= \int_C u\,dx - \int_C v\,dy + i \int_C u\,dy + i \int_C v\,dx.\end{aligned}$$

Tetapi keempat integral terakhir ini ada menurut teorema 4.2. karena kontinu f pada C mengakibatkan kontinu u dan v pada c terbuktilah Teorema ini.

Teorema 4.5

Andaikan bahwa $f(z)$ dapat dintegralkan disepanjang kurva mulus C dan bahwa,untuk suatu bilangan positif M,f memenuhi hubungan f(z)<M untuk setiap z pada C andaikan lebih lanjut bahwa Panjang C sama dengan .

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML.$$

Bukti:

Pertama kita tunjukan berlakunya kenyataan berikut

$$L = \int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt = \int_C [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = \int_C |dz|.$$

Kemudian dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga,sifat-sifat nilai mutlak dan hipotetis $|f(t) \le M$ untuk setiap titik pada C,kita mempunyai berikut ini :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Delta z)_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)(\Delta z)_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|(\Delta z)_k| \le M \sum_{k=1}^{n} |(\Delta z)_k|.$$

Akhirnya dengan mengambil limit pertama dan terakhir, untuk $\mu \to 0$,kita mendapatkan

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq M \int_C |dz|,$$

yang mengingat pengemabngan pertama dalam bukti ini,menghasilkan

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq ML,$$

Dan lengkaplah buktinya.

INDEKS

GLOSARIUM

Garis singgung	: kurva bidang pada titik yang diketahui adalah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut.
Himpunan	: kumpulan objek yang memiliki sifat yang dapat didefinisikan dengan jelas, atau lebih jelasnya adalah segala koleksi benda-benda tertentu yang dianggap sebagai satu kesatuan.
Integral	: sebuah konsep penjumlahan secara berkesinambungan dalam matematika. Integral dan inversnya, diferensiasi, adalah operasi utama dalam kalkulus
Interval	: himpunan bagian “terhubung” dari kumpulan total (atau linier) yang merupakan himpunan bagian bilangan real (R).
Kurva	: objek yang mirip dengan garis yang tidak harus lurus.
Teorema	: sebuah pernyataan, sering dinyatakan dalam bahasa alami, yang dapat dibuktikan atas dasar asumsi yang dinyatakan secara eksplisit ataupun yang sebelumnya disetujui.

DAFTAR PUSTAKA

Dasar, A. K. (n.d.). *PARABOLA*. 167–196.

Fungsi, B. A. B., Kontinuitas, D. A. N., & Kontinuitas, D. A. N. (n.d.). *Daftar isi*.

Lumbantoruan, J. H. (2017). *PENGEMBANGAN BAHAN AJAR INTEGRAL TAK TENTU BERBASIS MODEL SMALL GROUP DISCUSSION DI PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UKI*. 99–118.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BUKU INTEGRAL-TENTU*.

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA*.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). *Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017 / 2018*. *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2020). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN PEMOGRAMAN LINEAR*.

Lumbantoruan, J. H., Pd, S., & Pd, M. (n.d.). *Geometri Datar dan Ruang*.

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). *Students ' Perceptions and Attitudes Towards Statistics*. *560*(Acbleti 2020), 507–513.

Pembelajaran, A. C. (n.d.-a). *GARIS LURUS*.

Pembelajaran, A. C. (n.d.-b). *LINGKARAN*. 1–29.

Pembelajaran, A. C. (n.d.-c). *Modul 1*. 1–35.

Pembelajaran, A. C. (n.d.-d). *TRANSFORMASI SUSUNAN SUMBU*. 197–223.

Pendidikan, D. I. E. R. A. (2021). *AKSESIBILITAS ANAK BERKEBUTUHAN KHUSUS*. *14*(1), 204–213. https://doi.org/10.33541/jdp.v12i3.1295

Pendidikan, J., & Sains, M. (2020a). *EduMatSains*. *1*(1), 23–34.

Pendidikan, J., & Sains, M. (2020b). *EduMatSains*. *1*(1), 35–49.

State, S., Volume, T., & Year, P. (2021). *Solid State Technology Volume: 64 Issue: 2 Publication Year: 2021*.