TEORI INTEGRASI CAUCHY

Oleh :

Ika Esterlita Karoline

1813150001

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

PRODI MATEMATIKA

2022

PRAKATA

Puji Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat rahmat dan kelimpahan kasih-Nya penulis dapat menyelesaikan buku ajar tentang materi Variabel kompleks dengan topik “**Teori Integrasi Cauchy**” dengan baik dan tepat waktu.

Penulis mengucapkan terimakasih kepada dosen pengampu mata kuliah variabel kompleks yang telah memberikan bimbingan dan memberikan buku referensi sehingga buku ini dapat di selesaikan dengan baik.

Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada rekan-rekan dan semua pihak yang telah memberikan kontribusi dan motivasi dalam menyelesaikan makalah ini.

Dalam pembuatan modul ini masih banyak kekurangan, untuk itu penulis sangat membuka saran dan kritik yang sifatmya membangun demi perbaikan materi agar bisa lebih baik lagi.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PENDAHULUAN

Analisis kompleks adalah cabang analisis matematis yang membahas fungsi dari bilangan kompleks (bilangan rill dan bilangan imajiner). Analisis kompleks sering dikenal sebagai teori fungsi variabel kompleks atau juga teori fungsi peubah kompleks.

Variabel kompleks diajarkan kepada mahasiswa jurusan Sains dan Teknik yang selalu berhadapan dengan pekerjaan sulit dalam mempertemukan tujuan-tujuan dasar. Tujuan dasar tersebut, yaitu : (1). Pelajaran tersebut harus menciptakan atas pondasi yang benar mengenai pengertian konsep-konsep dasar dan pengembangan ketrampilan mencari akal, dan (2). Pelajaran tersebut harus sedemikian hingga mahasiswa siap untuk menangani terapan-terapan yang relaitf lanjut pada mata kuliah lanjutan yang menggunakan peubah kompleks. Modul ini ditulis dengan kedua tujuan di atas. Sasaran utamanya adalah menerapkan variabel kompleks dalam integrasi fungsi analitik.

Dalam mengembangkan konsep dasar, maka kita menggunakan kalkulus fungsi kompleksi. Prasyarat satu-satunya untuk mempelajari modul ini ialah mata kuliah analisis kompleks.

Mudah-mudahan modul ini dapat dipahami serta memberikan manfaat bagi pembaca.

5.1 Integral Fungsi Analitik Teorema Cauchy

Dalam bab ini kita dikhususkan untuk mempelajari integrasi fungsi-fungsi analitik. Fungsi-fungsi yang telah dikenal demikian, tentu saja merupakan fungsi-fungsi yang tergolong lebih dibatasi, tetapi justru sifatnya yang lebih sempit itulah yang memungkinkan pengembangan teori yang kuat disertai keindahan matematik yang luar biasa. Dalam teori integrasi fungsi-fungsi analitiklah, sifat-sifat yang kuat dan struktur dalam yang dimiliki oleh sejumlah fungsi-fungsi tersebut dapat dimunculkan dalam bentuk hasil-hasil berikut ini dan juga kemudian, dalam penerapan hasil-hasil tersebut.

Landasan untuk pengembangan isi buku ini selanjutnya terdiri dari apa yang dinamakan *teori fungsi analitik Cauchy*, yang inti teorinya adalah teorema integral Cauchy yang termashur. Mengenai teorema ini, menarik untuk dicatat bahwa, sesungguhnya Cauchy pertama kali membuktikan suatu bentuk yang lebih lemah dari teorema itu yang sekarang diberi nama sesuai dengan namanya, dan Goursat-lah yang kemudian membuktikan bahwa salah satu dari hipotesis dalam bentuk asli teorema itu tidak hanya tak perlu tetapi juga berlebihan.

Teorema 5.1 Integral Cauchy

Andaikan bahwa:

1. $f(z)$ analitik pada daerah terhubung sederhana R

2. C adalah suatu lintasan tertutup yang terletak seluruhnya dalam R

Maka

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Bukti:

Lihat lampiran 5(B)

Teorema Cauchy yang asli mencakup hipotesis tambahan bahwa turunan f' kontinu pada C dan pada $DI\ (C)$. Tetapi, akan ditunjukkan sebagai akibat Teorema 5.1, bahwa jika f analitik pada suatu daerah R, f' juga analitik pada R dan kontinu di situ. Oleh karena itu, seperti kita katakan sebelumnya, kontinuitas f' merupakan suatu hipotesis yang berlebihan, karena itu sudah diimplikasikan oleh analitisitas f.

Konvers teorema Cauchy tak berlaku, artinya pernyataan berikut pada umumnya salah:

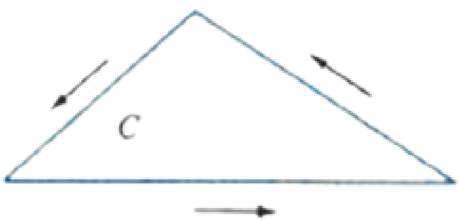
> Jika $\int_C f(z)dz = 0$ untuk setiap lintasan tertutup C di dalam daerah terhubung sederhana R, maka f analitik dalam R.

Suatu contoh yang menggambarkan kenyataan ini diperlihatkan oleh fungsi $f(z) = 1/z^2$, yang integralnya dapat ditunjukkan menjadi nol sepanjang sembarang lintasan tertutup yang integralnya didefinisikan. Tetapi, f jelas gagal menjadi analitik pada $z = 0$. Konvers sebagian teorema Cauchy, dikenal sebagai *teorema Morera*.

1. Bukti Teorema Cauchy

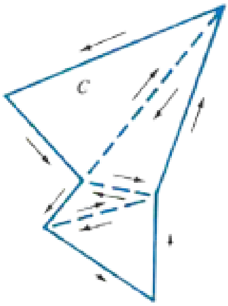
Bukti dibagi atas tiga bagian dasar

a. Teorema dibuktikan untuk kasus di mana C, lintasan integrasinya merupakan segitiga. Bagian bukti ini merupakan bukti analitik yang mudah dengan menggunakan pertimbangan atau alasan geometrik yang sangat elementer sifatnya. Bukti selebihnya sangat tergantung pada bagian ini. (Gambar 5.1).



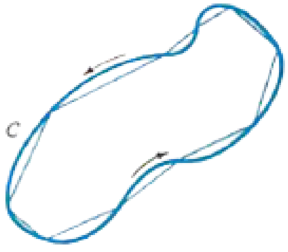
Gambar 5.1 BUKTI TEOREMA CAUCHY, KEJADIAN 1.

b. Bukti yang kedua dikhususkan untuk menetapkan suatu hasil yang bersifat teknik, setiap segibanyak (polygon) tertutup (dengan jumlah sisi yang terbatas) dapat dibagi-bagi menjadi sejumlah terhingga segitiga-segitiga. Kemudian, karena (bukti pertama) integral tersebut sama dengan nol sepanjang setiap segitiga, maka dengan mudah kita mendalihkan bahwa integral tersebut sama dengan nol bila C merupakan segi banyak. Sangat mendasar pada bagian bukti ini, ialah kenyataan bahwa setiap sisi segitiga hasil pembagian di atas, yang tidak terletak pada sisi segibanyak tersebut dijelajahi dua kali dan dalam arah yang berlawanan (Gambar 5.2). oleh karena itu, nilai integral sepanjang bagian lintasan yang demikian sama dengan nol.



Gambar 5.2 BUKTI TEOREMA CAUCHY, KEJADIAN 2.

c. Bagan terakhir dibuktikan bahwa sembarang lintasan tertutup *C* dapat didekati dengan segibanyak tertutup dengan banyaknya sisi sekehendak kita. (lihat Gambar 5.3). Sebagai akibatnya, kita dapat membuktikan bahwa integral sepanjang *C* dibanding dengan integral sepanjang segibanyak pendekatan dapat berbeda sekecil yang kita inginkan jadi, nilainya sama dengan nol sesuai bukti bagan 2.



Gambar 5.3 BUKTI TEOREMA CAUCHY, KEJADIAN 3.

Teorema 5.2 Bebas Lintasan

Andaikan bahwa

1) R adalah daerah terhubung sederhana
2) $z_1\ dan\ z_2$ adalah titik-titik dalam R
3) $f(z)$ selalu analitik dalam R

Maka nilai integral sepanjang lintasan sembarang C yang menghubungkan $z_1\ dan\ z_2$ dalam urutan seperti itu, adalah sama asas *C* adalah lintasan yang terletak seluruhnya di dalam *R*.

Bukti :

Lihat lampiran 5(A)

Teorema ini merupakan suatu alat yang sangat memudahkan untuk menghitung beberapa integral tertentu, karena ia memungkinkan kita untuk memilih lintasan integrasi yang paling memudahkan, sepanjang syarat-syaratnya dipenuhi. Lebih tepatnya, teorema itu menyatakan bahwa nilai integral itu hanya bergantung pada. awal dan titik akhir lintasan *C*, secara sederhana kita mengatakan bahwa integral itu **bebas lintasan**.

CONTOH 1

Hitung integral $\int_c (3z^2 - 2z)\ dz,$ di mana $C = C_1 + C_2$ seperti pada Gambar 5.4

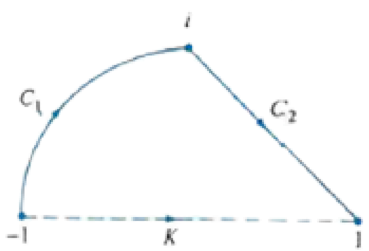
Tanpa teorema 5.2, tersedia di hadapan kita, kita harus mendapatkan persamaan untuk seperempat lingkaran C_1 dan penggal garis C_2 dan kemudian Diteruskan dengan menggunakan cara-cara yang dikembangkan pada Pasal 18 dan 19. Tetapi karena integral $f(z) = (3z^2 - 2z)$ analitik di dalam suatu daerah terhubung sederhana yang memuat titik-titik $z_1 = -1$ dan $z_2 = 1$. Teorema 5.2. memungkinkan kita untuk memilih sembarang lintasan dari z_1 ke z_2. Jelaslah, lintasan yang paling memudahkan dalam kasus ini ialah garis lurus dari z_1 ke z_2.

$$K : y = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Kemudian, substitusi dalam integral yang diberikan menghasilkan integral nyata

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2x)\, dx$$

yang nilainya mudah ditemukan ialah 2.



Gambar 5.4 CONTOH 1

Pembaca mungkin masih ingat dari kalkulus, tentang hubungan yang erat antara integral tertentu dan anti turunan suatu fungsi. Hubungan dekat ini dinyatakan secara tepat oleh Teorema Dasar Kalkulus Integral yang menyatakan bahwa jika *G*(x) adalah suatu anti turunan fungsi nyata *g*(x) yang kontinu pada interval maka $a \leq x \leq b$.

Sehingga,

$$\int_a^b g(x)\, dx = G(b) - G(a)$$

Hubungan ini mempunyai analogi dalam kasus fungsi analitik, dan kita mulai mempelajarinya dengan menyelidiki secara berurutan dan mencapai puncaknya pada teorema 5.3 dan kemudian pada teorema 5.4. yang merupakan analog bagi Teorema Dasar Integrasi untuk fungsi-fungsi kompleks. Kita beragumentasi secara deduktif sebagai berikut:

1. Di dalam konteks teorema 5.2, kita melihat bahwa integral

$$\int_c f(z)\, dz$$

mempunyai suatu nilai yang tak bergantung pada lintasan *C* yang menghubungkan titik z_1 dan z_2. Oleh karena itu, hanya titik-titik z_1 dan z_2 yang "diperhitungkan" dalam menghitung integral.

2. Dengan demikian kita tidak disalahkan bila orang akan menuliskan

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$$

sebagai pengganti integral di atas, dengan pengertian bahwa jalur dari z_1 ke z_2 tetap berada di dalam daerah terhubung sederhana R di mana f selalu analitik.

3. Sekarang, andaikan bahwa limit atas integral pada bagian 2 diperbolehkan berubah-ubah, asalkan selalu dalam R. Maka persamaan

$$F(\zeta) \int_{z_1}^{\zeta} f(z)\, dz$$

mendefinisikan suatu fungsi bernilai tunggal F dalam ubah $\zeta,$ karena integral pada ruas kanan hanya bergantung pada limit-limit z_1 dan ζ, dimana z_1 konstan.

4. Akhirnya, kita dapat mengatakan bahwa fungsi $F(\zeta)$ adalah suatu anti turunan bagi f

$$F(\zeta) = f(\zeta), \text{ untuk semua } \zeta \; di \; \boldsymbol{R}$$

Hal ini, tentu saja juga berarti bahwa F analitik di seluruh R. Kita susun pernyataan kita dalam teorema berikut.

Teorema 5.3 Dasar Integrasi

Andaikan bahwa

1) R adalah daerah terhubung sederhana
2) z_1 adalah suatu titik dalam R.
3) $f(z)$ analitik pada setiap titik dalam R.

Maka, untuk setiap ζ dalam R,

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{z_1}^{\zeta} f(z)\,dz = f(\zeta)$$

Bukti:

Lihat lampiran 5(A)

Dengan teorema diatas tersedia di depan kita, perluasan teorema dasar integrasi ke kasus Kompleks sekarang menjadi hal yang sederhana.

Teorema 5.4 Dasar Integrasi Kompleks

Andaikan bahwa R

1) R adalah daerah terhubung sederhana
2) z_1 dan z_2 adalah titik-titik dalam R
3) $f(z)$ analitik pada R
4) $\phi(z)$ adalah anti turunan f dalam R.

Maka

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \phi(z_2) - \phi(z_1)$$

Bukti:

lihat lampiran 5(A)

Pembaca tentunya sudah mengenal Teorema 5.4, sekurang-kurangnya dalam bentuknya. Contoh-contoh berikut menggambarkan penggunaan teorema itu, maupun suatu kasus dimana teorema itu tidak dapat digunakan karena salah satu hipotesisnya tidak dipenuhi. Tetapi sebelum kita mengerjakan beberapa contoh, perhatikan lebih dulu catatan berikut.

CATATAN 2

Integral suatu fungsi menyeluruh sepanjang *sembarang* lintasan yang menghubungkan *sembarang* dua titik pada bidang datar dapat dihitung secara langsung, asal anti turunan fungsi itu dapat ditemukan. Hal yang sama juga berlaku untuk integral fungsi analitik, asal titik awal dan titik akhir lintasan integrasinya, begitu juga dengan lintasan itu sendiri, terletak seluruhnya di dalam daerah terhubung sederhana pada mana fungsi itu analitik.

CONTOH 2

Berdasarkan catatan diatas, perhitungan integral berikut tidak memerlukan penjelasan lagi

1) $\int_{-i}^{1+i} 2z\, dz = z^2 \Big|_{-i}^{1+i} = (1+i)^2 - (-i)^2 = 1 + 2i.$
2) $\int_{0}^{i\pi} e^{z+1}\, dz = e^{z+1} \Big|_{0}^{\pi} = e^{i\pi+1} - e^1 = -2e.$
3) $\int_{\pi}^{i} \sin z\, dz = -\cos z \Big|_{\pi}^{i} = -\cos i + \cos \pi = -1 - \cos i.$

CONTOH 3

Hitung integral $\int_{-i}^{1} \frac{dz}{z}$ sepanjang seperempat lingkaran yang ditentukan oleh $z = e^{it}, -\pi/2 \leq t \leq 0$.

Karena integral tidak hanya pada $z = 0$, kita dengan mudah dapat menemukan suatu daerah terhubung sederhana R yang memuat lintasan integrasi nya sedemikian hingga integran $f(z) = \frac{1}{z}$ analitik diseluruh R, buatlah suatu lukisan sederhana bagi bangun (bentuk) itu. Jadi dengan Teorema 5.4 kita mendapatkan .

$$\int_{-i}^{1} \frac{1}{z}\, dz = Log\ z|\frac{1}{-i} = Log\ (1) - Log\ (-i) = \frac{\pi i}{2}$$

CONTOH 4

Hitung integral $\int \frac{dz}{z-i}$ sepanjang lintasan $C = C_1 + C_2 + C_3$ pada Gambar 5.5.

Dalam hal ini teorema dasar integrasi tidak dapat digunakan secara langsung karena setiap daerah terhubung dengan sederhana R yang mengandung C harus juga memuat $z = i$, yang merupakan singularitas integran. Tetapi, dengan menggunakan Teorema 4.5(3) kita dapat menuliskan

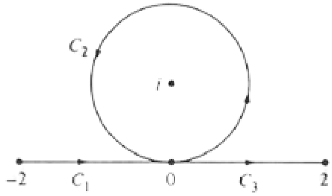
$$\int_{C} \frac{dz}{z-i} = \int_{C_1+C_3} \frac{dz}{z-i} + \int_{C_2} \frac{dz}{z-i}$$

Integral pertama pada ruas kanan sekarang dapat dihitung dengan menggunakan teorema 5.4, sehingga memberikan

$$Log\ (-2-i) - Log\ (2-i)$$

Dipihak lain, sesuai dengan Contoh 8 pasal 19 nilai integrasi panjang $C_2 = 2\pi i$. Jadi

$$\int_c \frac{dz}{z-i} = Log\ \frac{-2-i}{2-i} + 2\pi i$$



Gambar 5.5 Contoh 4

SOAL LATIHAN

Pada soal 1.1 - 1.8 hitung integral fungsi yang diberikan sepanjang masing-masing lintasannya. Dalam hal lintasannya tertutup sederhana anggaplah orientasinya positif.

1.1) $f(z) = z^3 - 1, |z-1| = 1$

1.2) $f(z) = z^3 - iz + 3i, |z+1| = 2$

1.3) $f(z) = z/(z^2-1), |z-\pi| = 1$

1.4) $f(z) = \frac{3}{z} - \frac{2}{z-2i}, |z-2i| = 1$

1.5) $f(z) = 6z^5 - 1$, sepanjang penggal garis lurus dari $z = i$ ke $z = 1+i$ dan kemudian ke $z = 1$.

1.6) $f(z) = z^2/(z-2)$ sepanjang segitiga dengan titik-titik sudut -1, 0, dan 2i.

1.7) $f(z) = e^z - 1/z^2$ sepanjang setengah bagian bawah lingkaran satuan dengan pusat pada pusat koordinat, dijelajahi dengan arah searah jarum jam.

1.8) $f(z) = \cos\frac{z}{z^3}, |z+2i| = 1$

1.9) $\int_{-i}^{2i}(z^2+z+1)\,dz$

1.10) $\int_0^{\pi}(e^z - \sin z)\,dz$

1.11) $\int_{\pi i}^{2\pi i}\cosh z\,dz$

1.12) $\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,dz$

1.13) $\int_0^i ze^{z^2}\, dz$

1.14) $\int_0^{\pi} cos^2\, z\, dz$

1.15) Gunakan uraian menjadi pecahan parsial untuk menghitung integral

$$\int_c \frac{2}{z^2 - 1}\, dz$$

Di mana, C lingkaran $|z - 1| = \frac{1}{2}$ yang beorientasi positif.

5.2 Teorema Annulus dan Perluasannya

Pada pasal ini, maupun pasal berikutnya, kita lanjutkan dengan penjelajahan dan penyelidikan terhadap beberapa akibat langsung teorema Cauchy selama proses berlangsung, pembaca harap mengetahui bahwa, disamping keindahannya dari sudut matematik, hampir semua pengembangan dalam kedua pasal ini melengkapi kita dengan alat-alat yang paling memudahkan yang membuat perhitungan berbagai integral menjadi sangat sederhana. Kita telah melihat bahwa pernyataan itu berlaku dalam pasal sebelumnya. Tetapi Sebelum kita lanjutkan, ada satu nasehat: Jangan mengabaikan pernyataan-pernyataan pada teorema karena bagian-bagian mendetil yang termuat di dalamnya mengatakan kepada kita dengan syarat apa kita boleh menggunakan masing-masing alat itu, ingat bahwa penggunaan alat yang salah untuk menyelesaikan soal yang diberikan hampir selalu menghasilkan suatu kegagalan dan seringkali suatu hasil yang menggelikan.

Kita ingat definisi *annulus* atau *daerah annular* ialah daerah “di antara” dua jalur tertutup sederhana, salah satu berada di bagian dalam yang lain. Lebih tepatnya, jika C dan K merupakan jalur tertutup sederhana sedemikian hingga K di dalam $D1(C)$, maka himpunan titik-titik persekutuan $D1(C)$ dan $Lr(K)$ dinamakan **anulus yang ditentukan** oleh C dan K. Kadang-kadang, kita akan tertarik pada himpunan yang terdiri dari anulus yang ditentukan oleh

C dan K berikut lintasan C dan K sendiri himpunan demikian ini kita namakan **anulus tertutup** yang ditentukan oleh C dan K.

Teorema berikut akan terbukti sangat berguna dalam pengembangan teoretik di berikutnya, maupun dalam perhitungan beberapa jenis integral yang lintasan integrasinya merupakan lintasan tertutup sederhana. Kita akan melihat bahwa, di bawah syarat-syarat yang memadai, teorema itu membolehkan orang untuk memilih lintasan integrasi lain yang lebih memudahkan. Dalam pengertian ini, teorema berikut pada dasarnya adalah teorema bebas lintasan untuk kasus lintasan yang tertutup sederhana.

Teorema 5.5 Annulus

Andaikan bahwa $F(z)$ analitik pada *annulus tertutup* yang ditentukan oleh dua lintasan tertutup sederhana C dan K maka asal saja C dan K.

Maka

$$\int_C f(z)\ dz = \int_K f(z)\ dz$$

Asal saja C dan K dijelajahi dengan orientasi yang sama. Lihat gambar 5.6

Gambar 5.6 TEOREMA 5.5

Bukti:

Lihat lampiran 5(A).

Sangat penting untuk dicatat bahwa teorema di atas tidak memerlukan analisisitas atas fungsi yang bersangkutan dalam $D1(K)$. Di pihak lain, mudahlah untuk melihat bahwa jika f analitik di $D1(K)$, maka teorema itu berubah menjadi brivial, karena jika hal itu terjadi maka menurut teorema Cauchy kita akan mempunyai

$$\int_C f(z)\ dz = \int_K f(z)\ dz = 0$$

Jadi kita dapat menyimpulkan bahwa jika Teorema 5.5. diharapkan mempunyai manfaat, maka f harus gagal menjadi analitik dimanapun di dalam $D1(K)$, dan ini memang mungkin saja terjadi. Kita akan mempunyai banyak kesempatan untuk menggunakan teorema di atas dan kita mulai dengan contoh berikut.

CONTOH 1

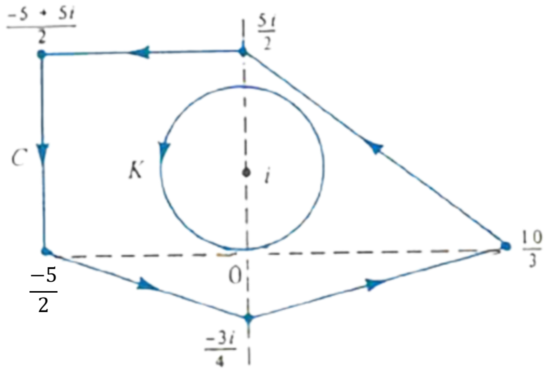
hitung integral $\int_C \frac{dz}{z-i}$ di mana C adalah lintasan seperti pada Gambar 5.7.

Bila kita mencoba menghitung integral ini dengan cara seperti Bab 4 maka akan melibatkan terlampau banyak perhitungan. Di pihak lain Teorema 5.5. melengkapi kita dengan suatu pilihan yang sangat mudah.

Pertama, perhatikan bahwa hanya ada satu singularitas pada integran ialah $z = i$. Jadi, jika kita memilih lingkaran K yang berorientasi positif, yang berpusat pada $z = i$ dan mempunyai jari-jari cukup kecil sedemikian hingga K akan terletak di dalam $D1(C)$, berarti kita berada dalam konteks teorema annulus. lihat gambar 5.7. khususnya, kita akan melihat bahwa integran $f(z) = \frac{1}{Z-i}$ analitik pada annulus tertutup yang ditentukan oleh C dan K. Sehingga menurut Teorema 5.5 dan Contoh 8.19, kita mendapatkan bahwa

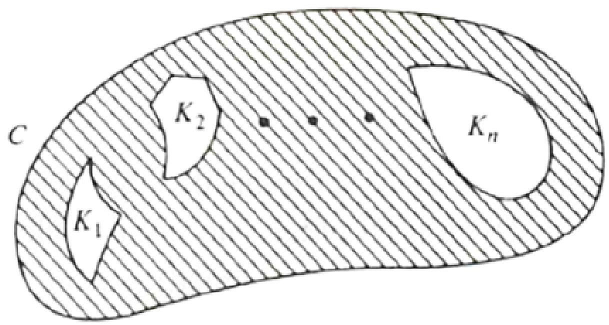
$$\int_C \frac{dz}{z-i} = \int_K \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

dan integral yang diberikan telah diperoleh nilainya.



Gambar 5.7 CONTOH 1

Teorema berikut adalah suatu perluasan Teorema 5.5. Pada kasus terdapat lebih dari dua lintasan tertutup sederhana dalam pengertian sebagai berikut.



Gambar 5.8 ANULUS BERGANDA

Andaikan bahwa $C, K_1, K_2, \dots, K_n$ adalah $n + 1$ lintasan tertutup sederhana sedemikian hingga

a. Semua K_j berada di dalam $D1(c)$

b. Setiap K_j terletak dalam $Lr(K_s)$, untuk semua $s \neq j$.

Lihat gambar 5.8 maka, daerah persekutuan antara $D1(c)$ dan $Lr(K_s)$ untuk semua $j = 1, 2, \ldots, n$ dinamakan **anulus berganda** (multiple annulus) yang ditentukan oleh $C, K_1, K_2, \ldots, K_n$. Suatu annulus berganda berikut semua lintasan yang menentukannya dinamakan **annulus berganda tertutup** (closed multiple annulus). Dalam konteks demikian, kita mempunyai berikut ini.

Teorema 5.6 Annulus Berganda

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada annulus berganda tertutup yang ditentukan oleh lintasan lintasan tertutup sederhana $C, K_1, K_2, \ldots, K_n$.

Maka

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{K_1} f(z)\ dz + \cdots + \int_{K_n} f(z)\ dz$$

Asal semua $n + 1$ lintasan dijelajahi dengan orientasi yang sama.

Bukti:

Lihat lampiran 5(A)

Seperti dalam kasus Teorema 5.5, Teorema 5.6 dengan sendiri berlaku jika f analitik pada bagian dalam setiap K_j. (Mengapa? Berikan alasan). Jadi kebergunaannya menjadi penting bila f gagal menjadi analitik pada titik-titik di dalam $D1(K_1)$, seperti digambarkan dalam contoh berikut.

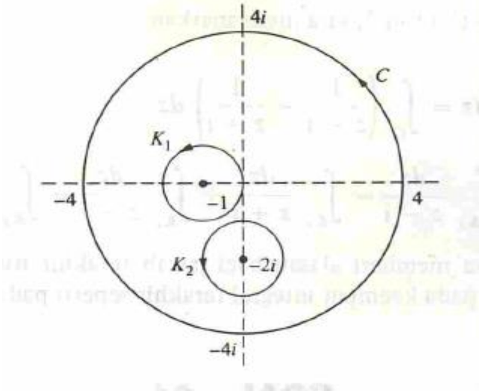
CONTOH 2

Hitung integral $\int_C \frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\, dz$ di mana C adalah lingkaran $|z|$ dengan orientasi positif. Lihat Gambar 5.9.

Pertama-tama, kita lihat bahwa integral gagal menjadi analitik pada $z = -1$ dan $z = -2i$. Kemudian, kita "asingkan setiap singularitas" dengan memilih lintasan.

$$K_1 : z = -1 + e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$K_2 : z = -2 + e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



Gambar 5.9 CONTOH 2

Jelaslah, Integrannya analitik pada annulus berganda tertutup yang ditentukan oleh C, K_1, K_2. Jadi:

$$\int_C \frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\ dz$$

$$= \int_{K_1} \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right) dz + \int_{K_2} \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right) dz$$

$$= 4\int_{K_1} \frac{dz}{z+1} + 3\int_{K_1} \frac{dz}{z+2i} + 4\,dz$$

$$+ \int_{K_2} \frac{dz}{z+1} + 3\int_{K_2} \frac{dz}{z+2i} + 4$$

Sekarang, dengan pertolongan gambar 5.9, kita melihat bahwa fungsi $1/(z+2i)$ analitik pada K_1 dan bagian dalamnya, Demikian pula fungsi $1/(z+2i)$ analitik pada K_2 dan bagian dalamnya. Akibatnya integral kedua dan ketiga dari keempat integral diatas masing-masing sama dengan nol, sesuai dengan teorema Cauchy. Di pihak lain, dengan menggunakan contoh 3, Pasal 19, kita mendapatkan bahwa integral pertama di atas mempunyai nilai $8\pi i$, dan integral terakhir mempunyai nilai $6\pi i$. Oleh karena itu integral yang diberikan sama dengan $14\pi i$.

CONTOH 3

Hitung integral

$$\int_C \frac{2i}{z^2+1}\ dz$$

sepanjang $C: |z-1| = 6$ dengan orientasi positif.

Dengan menggunakan uraian pecahan parsial kita mendapatkan bahwa

$$\frac{2i}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}$$

Jelaslah, Singularitas integrannya adalah i dan $-i$. Dengan memilih lintasan

$$K_1: |z-i| = \frac{1}{2} \text{ dan } K_2: |z+i| = \frac{1}{2}$$

Dengan orientasi positif, kita menempatkan soal itu dalam konteks Teorema 5.6

Maka, seperti dalam Contoh 2, kita mendapatkan

$$\int_C \frac{2i}{z^2+1}\, dz = \int_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz$$

$$\int_{K_1} \frac{dz}{z-i} - \int_{K_1} \frac{dz}{z+i} + \int_{K_2} \frac{dz}{z-i} - \int_{K_2} \frac{dz}{z+i} = 0$$

SOAL LATIHAN

Pada soal 2.1 - 2.10 hitunglah integral fungsi yang diberikan sepanjang lintasan yang bersangkutan, dengan mengambil semua lintasan tertutup sederhana dengan orientasi positif, kecuali ditentukan lain. Dalam setiap kasus, Tentukan singularitas setiap fungsinya dan Gambarlah lintasan integrasinya.

2.1) $f(z) = z^2 + 3 + \frac{4}{z}, |z| = 4$

2.2) $f(z) = \frac{6}{z+a}, |z + a| = 3$

2.3) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}, z = -i + 5e^{it}, -\pi \le t \le \pi$

2.4) $f(z) = 1/(z^2 - 2z), |z| = 1$

2.5) $f(z) = 1/(z^2 - \pi^2), |z| = 3$

2.6) $f(z) = ize^{iz} - \frac{1}{z+i}$ sepanjang $C = C_1 + C_2 + C_3$, di mana C_1 adalah penggal garis dari $(-1,0)$ ke $(0,0)$; C_2 lingkaran dengan jari-jari 2 pusat pada $-2i$ dan berorientasi negative; dan C_3 penggal garis dari (0,0) ke (1,0).

2.7) $f(z) = \sin z/(z-1)\,, |z + i| = 1$

2.8) $f(z) = (z^3 - z^2 - 1)/z$, sepanjang lintasan pada Soal 21.5

2.9) $f(z) = Log\,\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{i}{z-3}, |z - 2| = \frac{3}{2}$

2.10) $f(z) = 3i$, sepanjang lintasan pada Soal 21.9

B

2.11) Hitung integral $f(z) = \cos\frac{z}{z^3}$ sepanjang $C = C_1 + C_2$, di mana $C_1; |z| = 2$,

berorientasi positif, dan $C_2: |z| = 3$, berorientasi negatif.

2.12) Hitung integral $f(z) = ez/(z - i)$, sepanjang lintasan pada Soal 21.11

2.13) Hitung integral $f(z) = f(z) = 1/(z^3 - z)$, sepanjang $|z| = 2$, berorientasi

positif.

2.14) Diketahui C adalah lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif dan z_0

adalah suatu titik dalam $D1(C)$. Lihat kembali $19.10(e)$ dan buktikan bahwa, untuk sembarang bilangan bulat n,

$$\int_C (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} \boxed{2\pi i, \ \ untuk\ n = -1} \\ \boxed{0, \ \ untuk\ n \neq -1} \end{cases}$$

2.15) Diketahui R adalah annulus melingkar $2 < |z| < 3$ dan C adalah lintasan tertutup

sederhana yang terletak dalam R, buktikan bahwa, untuk sembarang C.

$$\int_C \frac{2i}{z^2 + 1} \, dz = 0$$

5.3 Rumus Integral Cauchy Teorema Morera

Teorema integral Cauchy diyakini secara umum sebagai hasil yang paling penting di dalam teori fungsi analitik. **Rumus integral Cauchy**, yang akan kita perkenalkan pada teorema berikut, mungkin merupakan hasil terpenting berikutnya. Teorema tersebut memperlihatkan hubungan yang erat antar nilai-nilai yang dicapai oleh suatu fungsi analitik di dalam daerah analitistasnya dan khususnya dalam bagian dalam lintasan tertutup sederhana yang diberikan, dimana fungsi itu analitik. Tetapi pentingnya teorema ini mencapai lebih jauh dari pada itu, sebagai salah satu akibatnya kita boleh menyebutkan kenyataan bahwa hal itu membentuk dasar untuk pengembangan teori deret pangkat kompleks, yang pada gilirannya membawa ke teori residu dengan berbagai macam penggunaannya dalam sejumlah besar lapangan terapan. Pada tingkatan yang lebih elementer, rumus integral Cauchy dan perluasannya melengkapi alat-alat yang memudahkan untuk perhitungan berbagai macam integral kompleks.

Teorema 5.7 Integral Cauchy

Andaikan Bahwa

a. Suatu fungsi $f(z)$ analitik pada suatu lintasan tertutup sederhana C yang berorientasi positif dan pada $D1(C)$

b. z_0 adalah sembarang titik pada $D1(C)$.

Maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Bukti:

Lihat lampiran 5(A)

CATATAN

Dalam menggunakan rumus Teorema 5.7, pembaca hendaklah berhati-hati untuk membedakan fungsi $f(z)$, yang menurut hipotesis analitik dalam $D1(C)$ dan fungsi $f(z)/(z - z_0)$, yang mempunyai singularitas dalam $D1(C)$, katakana pada $z = z_0$. Juga, perhatikan bahwa rumus tersebut berlaku sesuai dengan yang dinyatakan dalam hipotesis, yaitu bahwa C beriorientasi positif. Tentu saja, jika C berorientasi negatif, maka ruas kiri rumus menjadi $-f(z_0)$.

CONTOH 1

Hitung integral $\int_C \frac{z^2}{z-i}\,dz$, dimana C: $|z| = 2$, berorientasi positif.

Dalam notasi Teorema 5.7, $f(z) = z^2$ yang merupakan fungsi menyeluruh dan $z_0 = i$ yang berada di $DI(C)$. Maka menurut rumus integral Cauchy

$$\int_C \frac{z^2}{z-i}\,dz = 2\pi i[f(i)] = -2\pi i$$

CONTOH 2

Hitung integral $\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)}$, dimana $C: z = -3i + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

Integralnya analitik kecuali pada $z = 0$, yang berada di $Lr(C)$ dan pada $z = -\pi i$ yang berada di $D1(C)$. Jadi, dengan menulis integral yang diberikan dalam bentuk

$$\int_C \frac{\frac{1}{z}}{z+\pi i}\,dz$$

Kita dapat menggunakan rumus integral Cauchy dengan $f(z) = 1/z$ dan $z_0 = -\pi i$

$$\int_C \frac{dz}{z(z+\pi i)} = \int_C \frac{\frac{1}{z}}{z+\pi i}\,dz = 2\pi i[f(-\pi i)] = -2$$

Kita lanjutkan dengan suatu perluasan Teorema 5.7 yang akan menghasilan bentuk umum rumus integral Cauchy. Dari sudut pandangan praktis, hasil tersebut merupakan suatu alat yang jauh lebih kuat dari pada rumus Teorema 5.7, bila dihubungkan dengan perhitungan beberapa integral kompleks tertentu. Lebih penting lagi, rumus umum menunjukkan kebenaran suatu sifat fungsi kompleks yang sangat kuat dan berpengaruh luas, yaitu, bahwa fungsi analitik memiliki turunan semua tingkat pada setiap titik pada mana ia analitik. Pada gilirannya, hal ini menujukkan bahwa jika, suatu fungsi analitik, maka tidak hanya ia mempunyai turunan pada setiap tingkat, tetapi turunan-turunannya sendiri merupakan fungsi analitik: lihat Akibat-1 Teorema 5.8 di bawah ini.

Teorema 5.8 Rumus Umum Integral Cauchy

Andaikan Bahwa

a. Suatu fungsi $f(z)$ analitik pada suatu lintasan tertutup sederhana C yang berorientasi positif dan pada $D1(C)$
b. z_0 adalah sembarang titik pada $D1(C)$.

Maka untuk setiap bilangan bulat $n = 0, 1, 2, \ldots$, turunan $f^{(n)}(z_0)$ ada dan tertentu dengan rumus

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

Bukti:

Lihat Lampiran 5(A)

CATATAN

Teorema 5.7 adalah kasus khusus Teorema 5.8, untuk $n = 0$, karena $f^{(0)}(z)$ berarti $f(z)$.

Jika suatu fungsi f analitik pada z_0, Maka menurut definisi ia juga analitik disuatu $N(z_0, \varepsilon)$. Sekarang, jika suatu lintasan tertutup sederhana C dilukis didalam$N$ dengan z_0 pada $D1(C)$, maka hipotesis Teorema 5.8 dipenuhi. Dengan mengulangi argumentasi yang sama untuk setiap titik pada daerah R pada mana f analitik, maka kita dapat menetapkan yang berikut ini.

Teorema 5.8.1 Akibat 1 Teorema 5.8

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada suatu daerah R.

Maka f mempunyai turunan semua tingkat yang analitik pada R dan tertentu dengan rumus pada Teorema 5.8

Akibat Teorema 5.8 yang lain ialah **pertidaksamaan Cauchy**, yang menempatkan suatu batas atas nilai-nilai yang dicapai oleh turunan-turunan fungsi analitik pada titik-titik di dalam daerah analitisnya. Kita formalikan konsep ini dalam Akibat 2 Teorema 5.8, sebagai berikut, yang garis besar buktinya nampak dalam Soal 2.15

Teorema 5.8.2 Akibat 2 Teorema 5.8

Andaikan bahwa

a. $f(z)$ analitik pada $C: |z - z_0| = \rho$ dan pada $DI(C)$.
b. $f(z)$ berbatas pada C, artinya terdapat bilangan nyata positif M sedemikian hingga $|f(z)| \leq M$, untuk semua z pada C.

Maka untuk semua $n = 0, 1, 2, ...$

Berhubungan erat dengan hasil diatas adalah konsep “modulus maksimum” yang kita bicarakan pada Bagian III

CONTOH 3

Hitung integral $\int_C \frac{z^3+e^z}{(z+\pi i)^3} dz$, di mana $C: z = 7e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Dalam konteks Teorema 5.8, kita mempunyai $f(z) = z^3 + e^z, z_0 = -\pi i$ dan $n = 2$. Sekarang, karena $f(z)$ merupakan fungsi menyeluruh dan z_0 di dalam $DI(C)$, maka hipotesis teorema tersebut dipenuhi. Oleh karena itu, dengan menggunakan rumus dalam kesimpulan teorema itu untuk $n = 2$, kita mendapatkan bahwa:

$$\int_C \frac{z^3 + e^z}{(z + \pi i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} . f"(-\pi i) = 6\pi^2 - \pi i$$

CONTOH 4

Hitung integral $\int_C \frac{dz}{(z-2)^2 z^3}$ untuk $C: |z - 3| = 2$, dengan orientasi positif.

Pertama, kita mencatat bahwa singularitas integran yang terletak di dalam $D1(C)$ hanya $z = 2$. Jadi dalam konteks Teorema 5.8, kita dapat mengambil $f(z) = \frac{1}{z^3}, z_0 = 2$ dan $n = 1$. Maka rumus teorema itu menghasilkan sebagai berikut:

$$\int_C \frac{dz}{(z-2)^2z^3} = \int_C \frac{1/z^3}{(z-2)^2}dz = 2\pi i f'(2) = -\frac{3\pi i}{8}$$

CONTOH 5

Hitung integral $\int_C \frac{dz}{(z-2)^2z^3}$ untuk $C: |z-1| = 3$ dengan orientasi positif.

Dalam menangani soal ini pertama-tama kita akan menggunakan teorema annulus berganda (Teorema 5.6) untuk mengasingkan singularitas $Z = 0$ dan $Z = 2,$ yang keduanya berada di dalam $D1(C).$ kemudian, kita akan menggunakan Teorema 5.8 dalam bentuk seperti yang dikerjakan pada Contoh 4 untuk menyelesaikan soal itu.

Misalkan C_1 ialah lingkaran yang berpusat di 0 dan C_2 ialah lingkaran yang berpusat di $2,$ keduanya berorientasi positif dan dengan jari-jari cukup kecil sedemikian hingga mereka tidak berpotongan satu dengan yang lain dan keduanya terletak di dalam $DI(C)$. Gambarlah bangunan itu, Maka:

$$\int_C \frac{dz}{(z-2)^2z^3} = \int_{C_1} \frac{dz}{(z-2)^2z^3} + \int_{C_2} \frac{dz}{(z-2)^2z^3}$$

$$= \int_{C_1} \frac{(z-2)^{-2}}{z^3}dz + \int_{C_2} \frac{z^{-3}}{(z-2)^2}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\frac{3}{8} + \frac{2\pi i}{1!}\left(-\frac{3}{16}\right)$$

$$= 0$$

Kita tutup pasal ini dengan konvers sebagian teorema integral Cauchy, yang Berasal dari Morera Lihat Catatan 1 hal.160.

Teorema 5.9 Morera

Andaikan bahwa

a. $f(z)$ kontinu di dalam daerah terhubung sederhana R.

b. $\int_C f(z)dz = 0$ untuk setiap lintasan tertutup sederhana C yang terletak dalam R maka $f(z)$ analitik di dalam R.

Bukti:

Lihat lampiran 5(A)

SOAL LATIHAN

Pada soal 3.1 – 3.8, hitunglah integral fungsi yang diberikan sepanjang lintasan yang diberikan dan dijelajahi secara positif. Dalam setiap kasus, Tentukan tempat singularitas fungsi dan gambarlah lintasan integrasi nya.

3.1) $f(z) = \frac{3z^4}{z-6i}, |z| = 10$

3.2) $f(z) = \frac{1}{z+iz^4}, |z-i| = \frac{3}{2}$

3.3) $f(z) = (e^{2x} - z^2)/(z-2)^3, |z-1| = 3$

3.4) $f(z) = \frac{sin\ z}{(z-1)^2}, |z| = 2$

3.5) $f(z) = \frac{Cos\ z}{(z+3i)^6}, |z+i| = 1$

3.6) $f(z) = \frac{3}{z^2(z+i)^2}, |z| = 5$

3.7) $f(z) = 1/(z+1)^3 - z^5/(z-\pi i)^4, |z| = 5.$

3.8) $f(z) = \frac{(z+1-e^z)}{z(z+3)}, |z-i| = 2$

3.9) Jika a adalah bilangan nyata positif, hitung integral

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$$

Untuk setiap dua lintasan berikut, keduanya berorientasi positif.

a. $C: |z| = 2a$

b. $C: |z - ai| = a$

3.10) Hitung $\int_C \frac{e^z - z^3}{(z-a)^3} dz$, dimana C adalah lintasan tertutup sederhana dengan orientasi positif dan a di dalam $DI\ (C)$.

3.11) Hitung $\int_C \frac{dz}{z^4-1}$ sepanjang $C : |z-1| = 5$ yang berorientasi positif.

3.12) Hitung $\int_C e^{-z} z^{-2} \sin z\, dz$ sepanjang C pada soal di atas.

3.13) Verifikasi pertidaksamaan Cauchy untuk $f(z) = z^4, n = 2$, untuk lingkaran $|z - i| = r > 0$.

3.14) Tunjukkan bahwa jika $f(z)$ analitik di dalam daerah terhubung sederhana R dan lingkaran $|z - z_0| = r$ di dalam R, maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)dt$$

3.15) Lengkapilah bagian-bagian ini untuk setiap langkah dan kemudian gabungkan langkah tersebut untuk memberikan suatu bukti yang lengkap. Dalam notasi pernyataan akibat Teorema itu:

a. Hitunglah panjang L bagian lintasan C.

b. Tunjukkan bahwa

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \frac{M}{\rho^{n+1}}$$

c. Gunakan dua hasil di atas, rumus umum integral Cauchy (Teorema 5.8).

SOAL-SOAL ULANGAN

Pada soal-soal 1-7 integralkan fungsi yang diberikan sepanjang lintasan yang bersangkutan. Semua lintasan tertutup sederhana dijelajahi secara positif.

1. $f(z) = 3z^2 - \sin z$, dari $z_1 = 0$ ke $z_2 = 2i$.
2. $f(z) = z(z^4 - 1)^{-1}, C: |z - 1 - i| = 2$.
3. $f(z) = z^2(z - i)^{-1}\ (z + 2)^{-3}, C: |z - 1| = 2$
4. $f(z) = (e^z - z^6)(z - 2i)^{-6}, C : |z| = 3$.
5. $f(z) = [Log\ (z - i)](z + i)^{-1}, C: |z + 2i| = 2$.
6. $f(z) = \frac{1}{z^2+4}, C : |z - 1| = 6$.
7. $f(z) = (z^3 - 8)(z^2 - 4z + 4)^{-1}, C: |z - 1| = 8$.
8. Hitung $\int_{-1}^{1+i} (z - 3i)\ dz$:
   a. Dengan menggunakan integral garis sepanjang suatu penggal garis lurus.
   b. Dengan cara yang lain
9. Jika α sembarang bilangan kompleks dengan $|\alpha| \neq 1$, carilah semua kemungkinan nilai untuk

$$\int_C \frac{e^z\ dz}{(z - \alpha)^3}$$

   di mana $C : |z| = 1$, berorientasi positif.

10. Tentukan nilai $\frac{d}{d\zeta}\int_0^{\zeta}(z^2+3z-i)\ dz$ dengan dua cara berbeda.
11. Andaikan bahwa suatu fungsi $f(z)$ analitik pada himpunan $0<|z|<1$ dan bahwa integral f sama dengan nol sepanjang setiap $C: |z|=r$, di mana $0<r<1$. Apakah f pasti analitik pada $z=0$. Berikan alasan.
12. Diketahui integral $\int_C \frac{z\,dz}{z^2-\alpha^2}$, di mana α adalah suatu bilangan kompleks tertentu tidak nol dan C adalah suatu lintasan tertutup sederhana yang tidak melewati atau $-\alpha$. Tentukan nilai integral ini untuk setiap empat posisi penting C yang berbeda relative terhadap α dan $-\alpha$.
13. Jika C adalah lingkaran $|z|=r>0$, tentukan syarat cukup bagi r sedemikian hingga $\int_C tg\ z\ dz=0$. Verifikasi bahwa r pilihanmu benar.
14. a. Gunakan rumus integral Cauchy untuk menunjukkan bahwa jika C adalah lingkaran $|z|=1$. Dengan orientasi positif, maka $\int_C \frac{dz}{z}=2\pi i$.

    b. Uraikan C dalam bentuk $C=C_1+C_2$, di mana C_1 adalah setengah bagian atas C dari 1 ke -1 dan C_2 adalah setengah bagian bawah C dari -1 ke 1. Kemudian gunakan argumentasi berikut dan tentukan kesalahan yang menuntun seseorang untuk menyimpulkan bahwa $2\pi i=0$.

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_1}\frac{dz}{z}+\int_{C_2}\frac{dz}{z}=\int_1^{-1}\frac{dz}{z}+\int_{-1}^{1}\frac{dz}{z}$$

$$= Log\ z|_1^{-1} + Log\ z|_{-1}^{1}$$

$$= Log\ (-1) - Log\ (1) + Log\ (1) - Log\ (-1) = 0$$

15. Lengkapilah bagian-bagian yang tidak ada dalam bukti untuk Teorema 5.8, lampiran 5(A).

LAMPIRAN

Bagian A

Bukti Teorema-Teorema

Teorema 5.2 (Bebas Lintasan)

Andaikan bahwa

1. R adalah suatu daerah terhubung sederhana
2. z_1 dan z_2 adalah titik-titik di dalam R
3. $f(z)$ analitik di seluruh R

maka nilai integral

$$\int_C f(z)\, dz$$

Sepanjang sembarang lintasan C yang menghubungkan z_1 dan z_2 adalah semua, asalkan C terletak seluruhnya di dalam R.

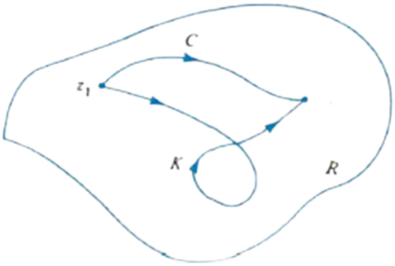
Bukti:

Misalkan C dan K adalah dua sembarang lintasan yang menghubungkan z_1 dan z_2 dan terletak seluruhnya dalam R, lihat Gambar 5.10 maka $C - K$ adalah suatu lintasan tertutup yang terletak di dalam daerah terhubung sederhana R dimana f analitik. maka, menurut teorema integral Cauchy

$$\int_{C-K} f(z)\, dz = 0$$

Maka, dengan menggunakan sifat-sifat integral (Teorema 4.5) kita mempunyai:

$$\int_C f(z)\,dz + \int_{-K} f(z)\,dz = 0$$



GAMBAR 5.10. TEOREMA 5.2

Dari sana

$$\int_C f(z)\,dz - \int_K f(z)\,dz = 0$$

Sehingga

$$\int_C f(z)\,dz = \int_K f(z)\,dz$$

dan karena C dan K adalah sembarang lintasan dari z_1 ke z_2, terbuktilah teorema itu.

Teorema 5.3

Andaikan bahwa

1 R adalah daerah terhubung sederhana

2 z_1 adalah titik di dalam R

3 $f(z)$ analitik pada setiap titik di R

Maka, untuk setiap ζ dalam R,

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{z_1}^{\zeta} f(z)\,dz = f(\zeta).$$

Bukti:

Di dalam konteks dan notasi pembicaraan kita pada hal.163, membatasi perhatian kita hanya pada titik-titik di R dan kita lambangkan integral

$$\int_{z_1}^{\zeta} f(z)\,dz$$

Dengan $F(\zeta)$. Dengan menggunakan notasi dan definisi turunan, guna membuktikan teorema itu kita harus menunjukkan bahwa

$$\lim_{\Delta\zeta\to 0}\frac{F(\zeta+\Delta\zeta)-F(\zeta)}{\Delta\zeta} = F(\zeta)$$

atau ekivalen dengan, bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, kita dapat memilih $\Delta\zeta$, sehingga:

$$\left|\frac{F(\zeta+\Delta\zeta)-F(\zeta)}{\Delta\zeta} - F(\zeta)\right| < \varepsilon.$$

Kita mempunyai

$$\frac{F(\zeta+\Delta\zeta)-F(\zeta)}{\Delta\zeta}=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{z_1}^{\zeta+\Delta\zeta} f(z)\,dz-\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{z_1}^{\zeta} f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} [f(z)-f(\zeta)+f(\zeta)]\,dz$$

$$=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} [f(z)-f(\zeta)]\,dz$$

$$+\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} f(\zeta)\,dz$$

$$=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} [f(z)-f(\zeta)]\,dz+f(\zeta)$$

di mana $f(\zeta)$ telah diperoleh dengan menghitung langsung integral

$$\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} f(\zeta)\,dz,$$

yang integralnya, $f(\zeta)$ konstan karena ubah Integrasi adalah z. Jadi, dari langkah pertama dan terakhir urutan kesamaan di atas, kita mempunyai

$$\frac{\Delta F}{\Delta\zeta}-f(\zeta)=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} [f(z)-f(\zeta)]\,dz.$$

Sekarang menurut hipotesis f analitik pada setiap ζ di R dan oleh karenanya kontinu di sana. Jadi, bila diberikan $\varepsilon>0$, terdapatlah

$\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap z yang memenuhi $|z - \zeta| < \delta$, berlaku $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$; dengan kata lain,

$$|\Delta\zeta| < \delta \qquad \text{berimplikasi} \qquad |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon.$$

Jadi, asal saja kita tetap di dalam $N(\zeta, \delta)$, integral $[f(z) - f(\zeta)]$ nilainya tidak pernah melebihi ε. Sekarang integral pada (2) tak bergantung pada lintasan (mengapa?); khususnya di dalam $N(\zeta, \delta)$, kita dapat memilih penggal garis lurus yang menghubungkan ζ dengan $\zeta + \Delta\zeta$ sebagai lintasan integrasi kita. Tetapi, panjang jalur adalah $L = |\zeta + \Delta\zeta - \zeta| = |\Delta\zeta|$. Akhirnya dengan menerapkan Teorema 4.5 (5) dengan $M = \varepsilon$ dan L seperti di atas, kita mempunyai

$$\left|\frac{F(\zeta + \Delta\zeta) - F(\zeta)}{\Delta\zeta} - f(\zeta)\right| = \left|\frac{1}{\Delta\zeta}\right| \left|\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} [f(z) = f(\zeta)]dz\right| \leq \frac{1}{|\Delta\zeta|} \,.\, \varepsilon \,.\, |\Delta\zeta|$$

$$= \varepsilon.$$

Mengingat Persamaan (1) lengkaplah buktinya.

Teorema 5.4 (Teorema Dasar Integrasi)

Andaikan bahwa

1 R adalah daerah terhubung sederhana
2 z_1 dan z_2 dan adalah titik-titik dalam R
3 $f(z)$ analitik di seluruh R
4 $\Phi(z)$ adalah suatu anti turunan bagi f.

Maka

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

Bukti:

Kita tahu bahwa dua sembarang anti turunan suatu fungsi dibedakan oleh konstanta;

lihat soal 20.16. Maka, mengingat hipotesis 4 dan Teorema 5.3, kita mempunyai

$$\Phi(\zeta) = \int_{z_1}^{\zeta} f(z)\, dz + k \qquad (1)$$

untuk suatu konstanta k tertentu dan sembarang ζ di R. Khususnya, Persamaan (1) benar untuk $\zeta = z_1$ dan $\zeta = z_2$. jika $\zeta = z_1$ (1) menghasilkan

$$\Phi(z_1) = k$$

Di pihak lain, $\zeta = z_2$ menghasilkan

$$\Phi(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz + \Phi(z_1)$$

dan karena itu

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

seperti yang dinyatakan oleh teorema itu.

Teorema 5.5 (Teorema Anulus)

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada annulus tertutup yang ditentukan oleh dua lintasan tertutup sederhana C dan K.

Maka

$$\int_C f(z)\,dz = \int_K f(z)\,dz$$

asal saja C dan K dijelajahi dengan orientasi yang sama.

Bukti:

Dalam konteks Gambar 5.11, lukislah dua lintasan yang tidak berpotongan Γ dan Π dari C ke K^* dengan orientasinya ditentukan dari C ke K. Titik-titik pada mana Γ dan Π memotong C dan K mengakibatkan terpecahnya C dan K menjadi:

$$C = C_1 + C_2 \qquad \text{dan} \qquad K = K_1 + K_2$$

Perhatikan sekarang dua lintasan tertutup sederhana

$$C_1 + \Gamma - K_1 - \Pi \qquad \text{dan} \qquad C_2 + \Pi - K_2 - \Gamma$$

Jelaslah, menurut hipotesis f analitik pada dan di bagian dalam masing-masing lintasan itu. Oleh karena itu, menurut teorema Cauchy, integral f sepanjang masing-masing lintasan itu sama dengan nol. Jadi

$$\int_{C_1+\Gamma-K_1-\Pi} f(z)\,dz + \int_{C_2+\Pi-K_2-\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

Karena Γ dan Π dijelajahi dalam kedua arah, mereka tidak menyumbang apa-apa pada integrasi di atas. Jadi

$$\int_{C_1-K_1} f(z)\,dz + \int_{C_2-K_2} f(z)\,dz = 0$$

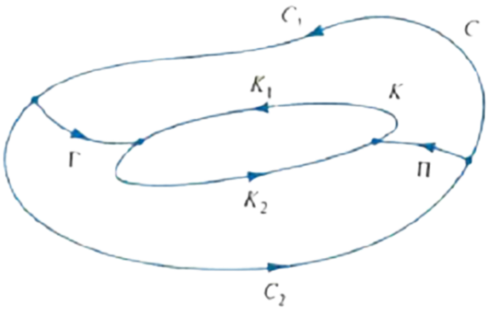
Tetapi,

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz - \int_{K_1+K_2} f(z)\,dz = 0$$

dan akhirnya

$$\int_{C} f(z)\,dz - \int_{K} f(z)\,dz = 0$$

dari situ teorema dipenuhi.



GAMBAR 5.11. TEOREMA 5.5.

Teorema 5.6 (Teorema Anulus Berganda)

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada anulus berganda tertutup yang ditentukan oleh lintasan tertutup sederhana $C, K_1, K_2, \dots, K_n$.

Maka

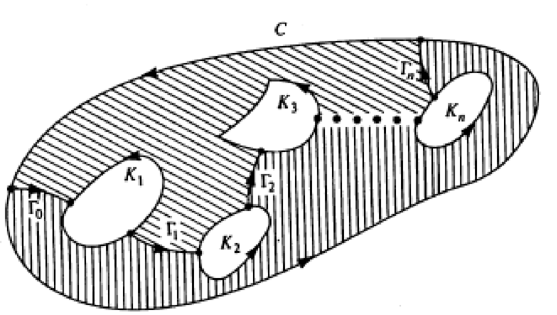
$$\int_C f(z)\, dz = \int_{K_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{K_n} f(z)\, dz$$

Asal semua $(n+1)$ lintasan dijelajahi dengan orientasi yang sama.

Bukti:

lukis $(n+1)$ lintasan penolong yang tak berpotongan yang terbuka sederhana $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, semuanya di dalam R dengan suatu cara bahwa Γ_0 menghubungkan C dengan K_i, Γ_1 menghubungkan K_i dengan K_j, untuk $j \neq i$ dan seterusnya hingga Γ_n menghubungkan K_n yang terakhir dengan C lagi; lihat Gambar 5.12. Lagi pula, berilah pada setiap Γ_s orientasi yang di implikasikan oleh proses di atas.

Jalan penalaran kita sekarang sejajar dengan bukti Teorema 5.5, karena setiap K_i telah dipecah menjadi dua anak lintasan dan demikian pula C. Akibatnya, anulus berganda itu terbagi menjadi dua daerah terhubung sederhana (yang diarsir berbeda pada Gambar 5.12) yang sekeliling masing-masing daerah itu integral f sama dengan nol. Pembaca sekarang boleh meniru proses yang digunakan pada bukti dimuka untuk menunjukkan kebenaran teorema ini.



GAMBAR 5.12. TEOREMA 5.6.

Teorema 5.7 (Rumus Integral Cauchy)

Andaikan bahwa

1. $f(z)$ analitik pada suatu lintasan tertutup sederhana C yang berorientasi positif, dan $Dl\ (C)$.
2. z_0 adalah suatu titik pada $Dl\ (C)$.

Maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Bukti:

Dengan manipulasi aljabar diperoleh hasil berikut:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_C \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0}\, dz$$

$$= \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Sekarang perhatikan masing-masing integral pada persamaan (1).

Pertama, dengan menggunakan Soal 21.14, kita mempunyai

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_C \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)\,.\,2\pi i$$

Berikutnya, mengenai integral pertama dalam (1), kita perhatikan hal berikut. Karena $f(z)$ kontinu pada z_0 (mengapa?), maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga untuk

$$|z-z_0| < \delta \qquad \text{berlakulah} \qquad |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$$

Ambillah $\lambda \leq \delta/2$ dan perhatikan lingkaran

$$K\colon |z-z_0| = \lambda$$

Dengan orientasi positif, dengan pengertian bahwa bila dibutuhkan, kita dapat mengambil λ sekecil yang diperlukan sedemikian dengan K berada di dalam $Dl\ (C)$, hal ini mungkin karena z_0 adalah suatu titik di dalam himpunan terbuka $Dl(C)$. Maka, untuk setiap z pada K kita mempunyai

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} < \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

Kita perhatikan juga bahwa panjang $K = 2\pi\lambda$. Sekarang, dengan menggunakan Teorema Anulus (Teorema 5.5) dan Teorema 4.5 (5), dengan $M = \varepsilon/\lambda$ dan $L = 2\pi\lambda$, kita mempunyai:

$$\left|\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| = \left|\int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}2\pi\lambda = 2\pi\varepsilon$$

Karena hubungan di atas benar untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka integral pertama pada Persamaan (1) sama dengan nol, sehingga

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\,.\,2\pi i$$

Dan dipenuhilah apa yang diyatakan oleh teorema itu.

Teorema 5.8 (Rumus Integral Cauchy)

Andaikan bahwa

1. $f(z)$ analitik pada suatu lintasan tertutup sederhana C yang berorientasi positif, dan $Dl\ (C)$.
2. z_0 adalah suatu titik pada $Dl\ (C)$.

Maka, untuk setiap $n = 0, 1, 2, \ldots,$ turunan $f^n(z_0)$ ada dan ditentukan menurut rumus:

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Bukti:

Kita memberikan langkah-langkah utama bukti ini, dengan meninggalkan bagian-bagian kecil yang bagus untuk diisi oleh pembaca.

Bukti ini dengan induksi lengkap pada n.

A. Untuk $n = 0$. Dalam kasus ini, teorema ini berubah menjadi Teorema 5.7, sehingga terbukti benar (Lihat Catatan hal 172).

B. Langkah induksi. Di sini, kita andaikan rumus itu benar untuk $(n-1)$ dan kita akan membuktikan bahwa rumus itu benar juga untuk n. Dengan kata lain, kita andaikan bahwa:

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\, dz$$

Dan kita akan membuktikan bahwa

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

Sesuai dengan prinsi[-prinsip induksi matematik, jika hal ini diepnuhi maka teorema telah terbukti untuk semua bilangan bulat n tak negatif.

Sebelum kita membuat garis besar pembuktiannya, kita perhatikan yang berikut ini:

(a). Menurut definisi,

$$f^n(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} f^{(n-1)} \frac{(z_0+\Delta z) - f^{(n-1)}(z_0)}{\Delta z}$$

(b). Karena z_0 termasuk di dalam himpunan terbuka $Dl(C)$, kita dapat memilih suatu lingkaran $K: |z - z_0| = \lambda$ yang cukup kecil sehingga K terletak seluruhnya di dalam $Dl(C)$. Maka menurut Teorema Anulus, semua integral yang termasuk dalam bukti ini dapat dihitung sepanjang K alih-alih sepanjang C.

(c). Karena $\Delta z \to 0$ [lihat (a)], kita dapat mengandaikan bahwa $|\Delta z| < \lambda$.

(d). Dengan maksud menjaga notasi kita tetap sederhana, kita mengambil $\xi = z - z_0$

(e). Semua integrasi yang terlibat di sini akan sepanjang K, dengan orientasi positif. Kemudian karena peubah integrasi z harus menjelajahi K, maka z harus memenuhi hubungan $|z - z_0| = \lambda$ yang ekivalen dengan $|\xi| = \lambda$.

(f). Menurut Teorema E, dalam bagian B lampiran ini, terdapat bilangan nyata positif M sedemikian hingga, untuk setiap z pada lingkaran K, $|f(z)| \leq M$.

(g). Mengingat (1) dan (a) di atas dan dalam notasi yang diperkenalkan pada (d), teorema akan terbukti jika kita dapat menunjukkan bahwa

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(z_0 + \Delta z) - f^{(n-1)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{n!}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{\xi^{n+1}}\, dz\right| \to 0$$

Untuk $\Delta z \to 0$.

Dengan hal-hal di atas tersedia di depan kita, sekarang kita akan memberikan garis besar pembuktiannya.

Dengan substitusi dari langkah induksi dan sedikit manipulasi aljabar, pecahan pertama pada (2) menghasilkan:

$$\frac{f^{(n-1)}(z_0 + \Delta z) - f^{(n-1)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(n-1)!}{2\pi i\,\Delta z} \int_K f(z) \frac{\xi^n - (\xi - \Delta z)^n}{(\xi - \Delta z)^n\,\xi^n}\, dz$$

Dengan menggunakan identitas

$$v^n - w^n = (v - w)(v^{n-1} + v^{n-2}w + \cdots + w^{n-1})$$

Ruas kanan kesamaan terakhir dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_K f(z) \frac{\xi^{n-1} + \xi^{n-2}(\xi - \Delta z) + \cdots + (\xi - \Delta z)^{n-1}}{(\xi - \Delta z)^n\,\xi^n}\, dz$$

Sekarang, substitusikan bentuk ini ke dalam sebelah kiri pada (2), gabungkan hasil kedua integral itu menjadi satu integral, dan lengkapilah bukti itu dengan menunjukkan bahwa integral gabungan itu menuju ke 0 jika $\Delta z \to 0$. Dalam langkah terakhir ini, gunakan Teorema 4.5 (5), sekaligus dengan € dan (f) dan kenyataan bahwa panjang K sama dengan $2\pi\lambda$.

Hal ini akan melengkapi bukti itu.

Teorema 5.9 (Teorema Morera)

Andaikan bahwa

1 $f(z)$ kontinu di dalam daerah terhubung sederhana R

2 $\int_C f(z)\ dz = 0$ untuk setiap lintasan tertutup sederhana C yang terletak dalam R.

Maka $f(z)$ analitik dalam R.

Bukti:

Tentukan suatu titik z_0 dalam R dan ambil suatu titik lain ζ juga dalam R. Menurut hipotesis 2, nilai integral itu

$$\int_{z_0}^{\zeta} f(z)\ dz$$

Tidak bergantung lintasan yang dibuat dari z_0 ke ζ dan hanya bergantung pada nilai-nilai z_0 dan ζ. Tetapi z_0 adalah konstanta. Jadi nilai integral hanya bergantung pada ζ saja. Ini berarti, bahwa fungsi $F(\zeta)$ yang didefinisikan sebagai

$$F(\zeta) = \int_{z_0}^{\zeta} f(z)\ dz$$

Merupakan fungsi bernilai tunggal, lihat pembicaraan pada hal. 162.

Sekarang, dengan mengikuti argumentasi seperti pada bukti Teorema 5.3, dalam mana kita hanya menggunakan kontinuitas $f(z)$, kita menyimpulkan bahwa $F(\zeta)$ analitik pada setiap ζ dalam R dan, dalam kenyataannya,

$$F'(z) = f(z)$$

Tetapi menurut Akibat 1 Teorema 5.8, turunan-turunan fungsi analitik merupakan fungsi analitik juga. Jadi $f(z)$, yang merupakan turunan fungsi analitik $F(z)$, merupakan fungsi analitik juga dan teorema Morera terbukti.

BAGIAN B

Bukti Teorema Integral Cauchy

Bukti yang sesungguhnya didahului oleh sejumlah hasil-hasil yang bersifat pendahuluan termasuk teorema Volzano-Weierstrass, teorema Heine-Borel, dan teorema himpunan tersarang, semuanya itu merupakan landasan pokok dalam bidang analisis matematik.

Sejak Goursat mengumumkan pembuktiannya atas teorema Cauchy (lihat *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 1, 1900, dan *Acta Mathematica*, Vol 4, 1884), telah muncul pendekatan lain untuk membuktikan teorema ini. Pembicaraan lengkap hingga bagian-bagian sekecil-kecilnya tentang teknik dan sejarahnya dapat ditemukan dalam G.N. Watson, *Complex Integration dan Cauchy's Theorem* (New York: Cambridge University Press, 1914). Alfred

Pringsheim memperbaiki bukti Goursat: lihat Vol.2, 1901, pada *Transaction of the American Mathematical Society*. Dalam pasal ini kita membicarakan bentuk bukti Pringsheim dalam pengembangan sama seperti yang didapatkan dalam Knopp, *Theort Functions*, Vol. 2 (New York: Dover, 1945).

PENDAHULUAN

Kita mulai dengan beberapa definisi.

Bilangan nyata b dinamakan **batas atas** (*upper bound*) himpunan bilangan nyata A, asal untuk setiap x di A maka $x \leq b$, bilangan nyata c dinamakan **batas bawah** (*lower bound*) A jika dan hanya jika $c \leq x$ untuk setiap x di A. Bila A mempunyai batas atas, maka A dinamakan **berbatas atas** (*bounded above*), dan bila ia mempunyai batas bawah, maka A dinamakan **berbatas bawah** (*bounded below*). Bila A mempunyai kedua batas tersebut, maka kita katakana bahwa A berbatas (*bounded*); bila tak demikian, A dikatakan tak berbatas (*unbounded*). Sebagai contoh.

1 A adalah himpunan semua x sedemikian hingga $x < 3$, maka A dikatakan berbatas atas.

2 B adalah himpunan semua x sedemikian hingga $-4 < x$, maka B dikatakan berbatas bawah.

3 C adalah himpunan semua x sedemikian hingga $-6 < x < 1533$, maka C dikatakan berbatas.

Jelaslah bahwa A dan B merupakan himpunan tak berbatas. Pembaca diminta dengan sangat untuk memverifikasi bahwa defimisi tentang himpunan berbatas di atas, dapat dengan mudah diadaptasi ke bentuk definisi tentang himpunan *bilangan kompleks* berbatas.

Jelaslah dari definisi di atas bahwa jika b merupakan batas atas bagi suatu himpunan A,maka setiap bilangan $d > b$ juga merupakan batas atas bagi A. Jadi, jika A berbatas atas, maka ia tidak mempunyai batas atas terbesar. Pertanyaan yang wajar kemudian muncul: jika A berbatas atas, apakah ia mempunya batas atas terkecil? Jawaban pertanyaan ini adalah : “ya” dan diberikan oleh *aksioma kelengkapan*, yang mempostulatkan.

Setiap himpunan bilangan nyata tak kosong $\boldsymbol{A}$ yang berbatas atas mempunyai batas atas terkecil.

Yang terakhir ini dinamakan supremum A (supremum of A) dan dituliskan dengan sup A: dengan istilah yang tepat konsep itu dapat didefinisikan sebagai berikut: bilangan nyata S dinamakan supremum himpunan A (himpunan bilangan nyata), asal (1) S adalah batas atas bagi A, dan (2) jika $x < S$, maka x tak dapat menjadi batas atas bagi A. Sebagai contoh, jika A adalah himpunan semua bilangan nyata y sedemikian hingga $0 \leq y < 1$, maka sup $A = 1$. Pengembangan yang sama mengenai himpunan B yang berbatas bawah akan menghasilkan konsep **infimum $\boldsymbol{B}$** (infimum of B), yang didefinisikan dengan cara yang sama seperti di atas dan ditulis inf B.

Sekarang kita kembali ke bidang kompleks, dan kita andaikan ada suatu himpunan tak kosong S yang anggotanya titik-titik dalam bidang datar. Kita definisikan garis tengah S (diameter of S), ditulis diam (S), sebagai supremum jarak semua pasangan titik-titik dalam S.

$$\text{diam}(S) = \sup|z - \zeta|, \quad \text{untuk semua } z, \zeta \text{ di } S$$

Jika S berbatas, maka dapat didalihkan dengan menggunakan aksioma kelengkapan, bahwa diam (S) ada, bersifat tunggal dan merupakan bilangan terhingga. Jika S tak terbatas, maka kita sepakat untuk mengatakan bahwa himpunan itu mempunyai garis tengah tak terhingga. Sebagai contoh, himpunan semua titik-titik dalam bujur sangkar dengan sisi 2 mempunyai garis tengah sama dengan $\sqrt{8}$, dan himpunan titik-titik pada parabola $y = x^2$ mempunyai garis tengah tak terhingga.

Sekali lagi, perhatikan suatu himpunan tak ksoong S yang beranggptakan titik-titik dalam bidang datar. Suatu titik z (boleh terletak dalam S boleh pula tidak) dinamakan tititk gerombol (cluster point) atau titik akumulasi (accumulation point) bagi S, asal setiap lingkungan z terhapus memuat tak terhingga banyak titik-titik anggota S. Jelaslah, bahwa suatu himpunan yang terdiri dari sejumlah berhingga titik-titik tak dapat mempunyai titik gerombol. Di pihak lain, suatu himpunan dapat memuat tak berhingga banykanya titik, tetapi tidak mempunyai titik gerombol, misalnya himpunan semua bilangan bulat positif adalah himpunan tak hingga, tetapi tidak mempunyai titik gerombol. Sebagai contoh yang lebih sederhana, perhatikan himpuna berikut: himpunan titik-titik

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

Mempunyai tepat satu titik gerombol, $z = 0$ yang tidak termasuk dalam himpunan itu. Cakram satuan terbuka S yang terdiri dari semua z sedemikian hingga $|z| < 1$ mempunyai tak berhingga banyaknya titik gerombol, yaitu semua titik z pada cakram satuan tertutup $|z| \leq 1$. Perhatikan bahwa S memuat beberapa tetapi tidak semua titik gerombolnya.

Seakarang kita akan menggunakan konsep titik gerombol untuk memberikan suatu definisi lain bagi himpunan tertutup, yang lebih sesuai dengan pengembangan masa kini. Suatu himpunan S dikatakan tertutup (closed) bila dan hanya bila ia mengandung semua titik gerombolnya.

Kita melanjutkan dengan sejumlah teorema yang langsung atau tidak langsung, akan diperlukan dalam pembuktian teorema Cauchy, beberapa di antaranya, merupakan landasan pokok dalam bidang analisis matematik. Yang pertama adalah teorema Bolzano-Weierstrass, yang buktinya tidak disertakan.

Teorema A (Bolzano-Weierstrass)

Andaikan bahwa S suatu himpunan pada bidang datar sedemikian hingga

1. S memuat tak berhingga banyaknya titik.
2. S berbatas.

Maka S mempunyai paling sedikit satu titik gerombol.

Dinyatakan secara sederhana, teorema di atas mengatakan jika suaru himpunan mempunyai tak berhingga anggota dan merupakan himpunan berbatas, maka terdapat paling sedikit satu titik z_0 (yang boleh termasuk atau tidak termasuk dalam himpunan itu) sedemikian hingga titik-titik anggota himpunan itu "menggerombol" sedekat mungkin ke z_0. Secara umum, teorema gagal menjadi benar jika salah satu dari kedua hipotesis itu dihilangkan. Karena, jika S memuat hanya berhingga banyaknya titik, maka seperti kita catat di muka, ia tak dapat mempunyai titik gerombol, dan jika S tak terbatas, maka contoh himpunan bilangan bulat positif menunjukkan bahwa teorema tersebut gagal.

Sekarang kita manfaatkan Teorema A untuk membuktikan hasil berikutnya.

Teorema B (*Teorema Himpunan Tersarang*)

Andaikan $S_1, S_2, \dots, S_n, ..$ adalah barisan himpunan dalam bidang datar yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. Setiap S_n merupakan himpunan tertutup dan beranggotakan paling sedikit satu titik.
2. S_{n+1} tercakup dalam S_n untuk semua $n = 1, 2, 3, \dots$

Maka ada satu dan hanya satu titik yang termasuk dalam semua S_n.

Bukti:

(a). Kita membuktikan bahwa terdapat paling banyak satu titik yang demikian itu. Pembuktian dilakukan dengan konrradiksi. Andaikan ada ζ dan ξ yang keduanya merupakan anggota semua S_n dan $\zeta \neq \xi$. Maka terdapatlah jarak positif antara kedua titik itu: $|\zeta - \xi| = d > 0$. Tetapi ini berarti bahwa garis tengah setiap S_n tidak dapat lebih kecil dari pada bilangan positif d dan ini kontradiksi dengan hipotesis ketiga pada teorema di atas. Jadi, jika terdapat suatu titik ζ, maka titik itu tunggal.

(b). Sekarang kita membuktikan bahwa terdapat paling sedikit satu titik yang termasuk dalam semua S_n. Jelaslah dari hipotesis 3 bahwa, kecuali mungkin bagi M buah himpunan yang pertama, himpunan S_n adalah berbatas. Dari setiap himpunan yang berbatas ini ambillah satu titik: z_n dari S_n. Mengenai himpunan z_n ini, terdapat dua kemungkinan:

Setelah titik tertentu semua z_n sama nilainya, katakan sebesar ξ atau himpunan semua z_n bersifat tak hingga tetapi berbatas.

Jika yang pertama yang benar, maka ξ termasuk pada semua himpunan dan lengkaplah buktinya. Dalam kasus kedua, himpunan titik-titik ini, mengingat Teorema A, mempunyai titik gerombol ζ sekarang kita akan membuktikan bahwa ζ termasuk pada semua S_n.

Ambillah sembarang S_n, Menurut hipotesis 2, semua barisan S_{n+1}, S_{n+2}, tercakup dalam S_n, jadi titik-titik $Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots$, yang kita pilih dalam himpunan himpunan ini, semua termasuk dalam S_n. Tetapi S_n adalah himpunan tertutup, maka menurut definisi, ia memuat semua titik gerombolnya. Khususnya, ia memuat ζ. Tetapi S_n dipilih secara sembarang. Ini berarti bahwa ζ berada dalam setiap S_n.

Oleh karena itu, telah terbukti bahwa terdapat paling sedikit satu titik yang termasuk dalam semua S_n.

Teorema berikutnya merupakan versi yang telah disederhanakan dari teorema Heine-borel yang termasyhur itu. Dalam bentuknya yang lebih umum, teorema itu menyangkut himpunan terbuka sembarang, sedangkan di sini, kita bekerja dengan himpunan terbuka yang terbentuk cakram. Kita pilih versi ini karena itu sudah memenuhi kebutuhan kita dan bukti dalam bentuk ini jauh lebih sederhana.

Teorema C (*Heine-Borel*)

Andaikan bahwa

1. S adalah himpunan terbatas dan tertutup dalam bidang datar
2. Φ adalah keluarga cakram lingkaran terbuka sembarang yang menutupi S, artinya setiap titik di S termasuk dalam paling sedikit satu cakram dari Φ.

Maka terdapat sub keluarga terhingga (artinya, sejumlah terhingga cakram terbuka) dari Φ yang tetap menutupi S.

Bukti:

Buktinya dengan kontradiksi. Jadi kita andaikan diperlukan tak terhingga banyaknya cakram untuk menutupi S dan kita tiba pada sesuatu yang tak masuk akal.

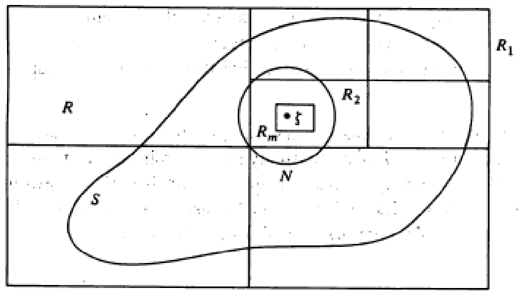
Karena S terbatas, kita dapat melukis persegi panjang R yang sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat sedemikian hingga S berada di $Dl(R)$, lihat Gambar 5.13. berikutnya, kita sekat R menjadi empat persegi panjang bagian yang sama dan sebangun dengan cara menarik satu garis tegak dan satu garis mendatar, dan kita menganggap setiap persegi panjang bagian ini sebagai memuat kelilingnya, dengan demikian masing-masing merupakan himpunan tertutup. Jadi himpunan S (yang memuat dalam R) telah terbagi menjadi paling banyak empat himpunan bagian, yang masing-masing termasuk dalam salah satu dari persegi panjang bagian tersebut. Sesuai dengan pengandaian kita pada permulaan bukti ini, paling sedikit satu dari himpunan bagian S ini membutuhkan tak berhingga banyaknya cakram dari Φ untuk menutupinya, persegi panjang bagian yang memuat himpunan bagian S yang khusus ini kita namakan R_1.

Berikutnya, kita membagi-bagi R_1, seperti yang kita lakukan terhadap R dan dengan alasan yang sama kita memperoleh persegi panjang bagian R_2 dari R_1, yang memuat sebagian S yang membutuhkan tak berhingga banyaknya cakram dari Φ untuk menutupinya. Jika kita teruskan proses ini sampai tak berhingga kali, kita akan mendapatkan barisan persegi panjang.

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, \dots$$

Yang masing-masing memuat sebagian S yang memerlukan tak berhingga banyaknya cakram dari Φ untuk menutupinya. Lebih dari pada itu, barisan ini akan memiliki sifat-sifat berikut:

1. Setiap R_k tertutup dan memuat paling sedikit satu titik.
2. Setiap R_k termuat dalam R_{k-1}, untuk $k = 2, 3, \dots$
3. Diam $(R_k) \to 0$ untuk $k \to \infty$.



GAMBAR 5.13. TEOREMA HEINE-BOREL

Menurut Teorema B, terdapatlah satu dan hanya satu titik ζ yang termasuk di dalam semua R_k dan karena diam (R_k) menuju ke nol, maka untuk setiap lingkungan N bagi ζ ada R_k dari barisan (1) yang terletak seluruhnya di dalam lingkungan tersebut. Jadi N memuat bagian S yang berada di dalam R_k, dan karena itu memuat N tak berhingga banyak titik-titik S. maka, menurut definisi, ζ merupakan titik gerombol bagi S dan karena tertutup, berarti S memuat ζ.

Sekarang, karena setiap titik anggota S berada di dalam salah satu cakram dari Φ, maka terdapat paling sedikit satu cakrama, sebutlah D, yang memuat ζ. Tetapi, karena garis tengah R_k menuju ke nol dan karena ζ termasuk dalam semua R_k, berarti terdapat suatu R_m dengan garis tengah cukup kecil sedemikian hingga R_m berada di dalam D. Jadi satu cakram D dari Φ menutupi bagian S yang berada di dalam R_m. Hal ini kontradiksi dengan sifat (setiap) R_m yang dinyatakan dalam awal bukti ini. Kontradiksi ini mengukuhkan teorema itu.

Dalam teorema berikutnya, kita membuktikan suatu hasil yang bersifat teknis, tetapi dalam dirinya sendiri teorema itu sangat menarik. Toerema itu menyatakan bahwa jika suatu lintasan C terletak di dalam suatu daerah R maka C tidak dapat mengambil jarak sedekat mungkin dengan batas R. Apabila kita mempergunakan hasil ini dalam pembuktian teorema Cauchy, kita akan melihat aspek praktisnya yaitu bahwa jika kita mempunyai lintasan C yang berada di dalam R, kita dapat membuat lintasan lain K di antara C dan batas R, tanpa peduli bagaimana dekatpun C ke batas itu. Versi lebih umum dari teorema ini juga berlaku dengan mengganti C dengan sembarang himpunan tertutup dan berbatas yang termuat dalam suatu daerah.

Teorema D

Andaikan bahwa

1. R adalah suatu daerah di dalam bidang datar.
2. C adalah suatu lintasan sembarang termuat dalam R.

Maka terdapat bilangan nyata positif λ sedemikian hingga, untuk sembarang titik z pada C dan sembarang titik w pada batas R.

$$|z - w| > \lambda$$

Bukti:

Karena setiap titik z pada C berada di dalam R dan karena R himpunan terbuka, maka terdapat suatu lingkungan N_z yang cukup kecil yang seluruhnya termuat dalam R. Tentukan satu N_z untuk setiap z pada C dan kemudian ambillah lingkungan M_z yang lain dengan jari-jari setengah jari-jari N_z. Keluarga Φ yang terdiri atas M_z, jelas menutupi C, tetapi C adalah himpunan tertutup dan berbatas, maka menurut Teorema C sejumlah terhingga M_z ini cukup untuk menutupo C, sebut mereka itu:

$$M_1, M_2, \dots, M_k$$

Jari-jari cakram-cakram terbuka dari Φ ini ialah k bilangan-bilangan nyata positif, maka dengan suatu proses pembandingan yang terhingga kita dapat memilih satu yang terkecil, sebutlah λ. Sekarang kita lanjutkan untuk menunjukkan bahwa bilangan λ memenuhi kesimpulan teorema itu.

Misalkan z adalah sembarang titik pada C dan w adalah sembarang titik pada batas R, z pasti termasuk dalam salah satu dari M_n yang pusatnya kita lambangkan saja dengan ξ. Maka $|\xi - z| < \lambda$ dan $|\xi - w| > 2\lambda$. Akhirnya,

$$2\lambda < |\xi - w| \leq |\xi - z| + |z - w| < \lambda + |\mathrm{z} - w|$$

Dari mana pertidaksamaan teorema itu dipenuhi kepada pembaca disarankan untuk melengkapi langkah-langkah terakhir di atas dengan alasan seperlunya. Hal ini akan melengkapi bukti teorema itu.

Akhir barisan teorema-teorema ini ialah suatu akibat langsung dari teorema Heine-Borel dan dinyatakan di sini sebagai bahan rujukan secara informal, teorema itu mengatakan bahwa jika suatu fungsi $f(z)$ kontinu pada suatu himpunan tertutup dan berbatas D, maka dalam besarnya nilai yang dicapai oleh f di atas titik-titik pada D mempunyai suatu "atap" yang terbatas. Berkaitan dengan konsep ini, kita mempunyai definisi berikut:

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakn berbatas (*bounded*) pada himpunan D bila dan hanya bila terdapat suatu bilangan positif M sedemikian hingga

$$|f(z)| \leq M, u\text{ntuk setiap } z \text{ dalam } D$$

Teorema E

Andaikan bahwa

1. S adalah himpunan tertutup dan berbatas
2. f(z) kontinu pada setiap titik di S

maka f berbatas pada S.

Bukti:

Misalkan z adalah suatu titik sembarang dalam S. Karena f kontinu pada z, maka bila ditentukan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapatlah $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$|f(z) - f(\xi) < \varepsilon$$

Untuk semua ξ yang memenuhi

$$|z - \xi| < \delta$$

Dengan kata lain, apabila ξ dari S berada di dalam $N(z, \delta), f(\xi)$ berada di dalam $N(f(z), \varepsilon)$. Keseluruhan lingkungan δ, satu untuk setiap z di S, menutupi S. Oleh karena itu, menurut Teorema C, terdapat sejumlah terhingga lingkungan δ.

$$N_1, N_2, \dots, N_k$$

Pada titik-titik

$$z_1, z_2, \dots, z_k$$

dalam S, yang juga menutupi S. sekarang bila kita perhatikan lingkungan $-\,\varepsilon$ yaitu

$$M_1, M_2, \dots, M_k$$

untuk masing-masing $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_k)$, kita melihat bahwa untuk setiap ξ dalam S, ξ akan termasuk dalam suatu N_i, tertentu, jadi $f(\xi)$ termasuk dalam M_1. Jadi M_i menutupi setiap $f(\xi)$ untuk setiap ξ di S. karena hanya terdapat k buah M_i yang demikian itu, yang masing-masing merupakan himpunan berbatas, maka terdapat suatu lingkaran $|w| = M$ yang memuat semua M_i di dalam bagian dalamnya. [misalnya, kita dapat mengambil sebagai M yang terbesar di antara k bilangan terhingga $|f(z_1)| + \varepsilon, |f(z_2)| + \varepsilon, \dots, |f(z_k)| + \varepsilon$] ini berarti

$$|f(\xi) \leq M$$

Untuk setiap ξ dalam S dan lengkaplah buktinya.

Karena analitisitas fungsi pada suatu titik mengakibatkan kontinuitas fungsi pada titik itu, kebenaran akibat Teorema E berikut merupakan akibat langsung Teorema E.

Akibat Teorema E

Jika $f(z)$ analitik pada setiap titik anggota suatu himpunan tertutup dan berbatas S, maka f berbatas pada S.

Sekarang jika beralih ke konsep kontinuitas seragam, dan kita mulai dengan definisi berikut.

Andaikan bahwa $f(z)$ merupakan suatu fungsi yang terdefinisikan (dan bernilai tunggal) pada setiap titik dalam himpunan D. Maka, f dikatakan kontinu seragam (*uniformly continuous*) pada D, asal untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap dua titik z dan ζ dalam D yang memenuhi $|z - \zeta| < \delta$, maka berlakulah $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$. Sampai pada tahap ini, perhatian kita terhadap konsep itu hanya terbatas pada hasil-hasil yang ditimbulkan oleh Teorema F.

Definisi Kontinuitas sebagai berikut:

1. kontinuitas suatu fungsi didefinisikan pada suatu titik, sedangkan kontinuitas seragam didefinisikan pada suatu himpunan.
2. Dalam mendefinisikan kontinuitas, kita mulai dengan suatu titik z_0. Kemudian kita diberi suatu bilangan positif ε, dan kita harus mendapatkan $\delta > 0$ yang bergantung pada kedua z_0 dan ε. Dalam kasus kontinuitas seragam, kita diberi suatu $\varepsilon > 0$ dan kita harus mendapatkan $\delta > 0$ yang bergantung hanya pada ε dan ini berlaku untuk sembarang dua titik pada himpunan yang dibicarakan.
3. Bila suatu fungsi kontinu seragam pada suatu himpunan D, maka ia kontinu pada setiap titik pada D. Karena, bila diberikan sembarang w dan D dan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ (menurut definisi kontinuitas seragam) sedemikian hingga untuk sembarang z di D, $|w - z| < \delta$ berimplikasi $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$, yang tepat sama dengan definisi kontinuitas pada titik w.
4. Kebalikan sifat di muka secara umum tidak benar, artinya kontinuitas suatu fungsi f pada setiap titik di suatu himpunan D tidak berakibat bahwa f kontinuitas seragam pada D. Tetapi, tidak semuanya demikian. Teorema berikut memberikan kita syarat cukup kapan kebalikan itu benar.

Teorema F

Andaikan bahwa $f(z)$ kontinu pada setiap titik di suatu himpunan B yang tertutup dan berbatas.

Maka f kontinu-seragam pada B.

Bukti:

Untuk membuktikan kontinuitas seragam $f(z)$ pada B, untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, kita harus menemukan suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga, untuk setiap z dan ζ di B,

$$|z - \zeta| < \delta \quad \text{akan mengakibatkan} \quad |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Karena f kontinu pada B, maka untuk setiap ξ di B terdapat $\lambda_\xi > 0$ sedemikian hingga

$$|f(\xi) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Untuk setiap w di B yang memenuhi

$$|\xi - w| < \lambda_\xi$$

Dengan mengulangi proses yang sama untuk setiap ξ di B, kita membangkitkan suatu keluarga lingkungan N_ξ (satu untuk setiap ξ dalam B), yang masing-masing berpusat pada ξ yang bersangkutan dan berjari-jari λ_ξ. Sekarang untuk setiap N_ξ, perhatikan cakram terbuka M_ξ yang konsentris dengan N_ξ, dan berjari-jari $\lambda_\xi/2$.

Keluarga M_ξ menutupi B, maka menutur Teorema C, terdapat sejumlah terhingga di antara mereka yang tetap menutupi B. Jari-jari mereka, yang kita nyatakan

$$\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \dots, \frac{\lambda_k}{2}$$

Merupakan k bilangan positif dan oleh karena itu terdapat satu di antara mereka yang terkceil, sebutlah itu δ.

Kita akan membuktikan bahwa δ memenuhi bentuk (1). Untuk maksud itu, andaikan bahwa untuk z dan ζ dalam B, benarlah bahwa

$$|z - \zeta| < \delta$$

Maka, karena z anggota salah satu dari k cakram yang tetap menutupi B, katakanlah M_v, dan karena v merupakan pusat M_v, kita mempunyai

$$|z - v| < \frac{\lambda_v}{2} < \lambda_v$$

Jadi

$$|f(z) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Di pihak lain, karena

$$|z - \zeta| < \delta \leq \frac{\lambda_v}{2}$$

Maka, dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, kita mempunyai

$$|\zeta - v| \leq |z - \zeta| + |z - v| < \frac{\lambda_v}{2} + \frac{\lambda_v}{2} = \lambda_v$$

Jadi

$$|f(\zeta) - f(v) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Akhirnya, dengan menggunakan ketaksamaan segitiga sekali lagi, kita mendapatkan

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq |f(z) - f(v)| + |f(\zeta) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

Dan terbuktilah teorema itu.

Segi banyak (Polygon) adalah suatu lintasan tertutup yang terdiri dari (sejumlah terhingga) kurva mulus, yang masing-masing merupakan penggal garis lurus. Segi banyak sederhana (simple polygon) ialah segi banyak yang merupakan lintasan tertutup sederhana.

Teorema G

Andaikan bahwa P adalah segi banyak

Maka

1. P dapat diuraikan menjadi sejumlah terhingga segi banyak sederhana dan sejumlah terhingga penggal garis lurus, yang belakangan ini dijelajahi dua kali, sekali untuk setiap arah.
2. Setiap segi banyak sederhana dalam bagian 1 dijelajahi seluruhnya dalam orientasi positif atau negative, tetapi tidak keduanya.
3. Setiap segi banyak sederhana dalam bagian 1 dapat diuraikan menjadi sejumlah terhingga segitiga dengan cara membuat diagonal-diagonal, yang masing-masing terletak seluruhnya di dalam segi banyak sederhana tersebut.

Bukti sebenarnya

Teorema 5.1 (*Teorema Integral Cauchy*)

Andaikan bahwa

1. $f(z)$ analitik pada daerah terhubung sederhana R
2. C adalah suatu lintasan tertutup yang terletak seluruhnya di R.

Maka

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

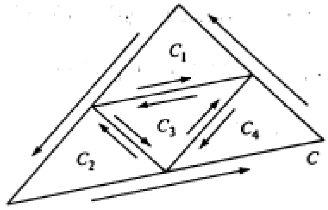
Bukti:

KASUS 1

Lintasan C merupakan segitiga. Bagilah C menjadi empat segitiga sama dan sebangun C_1, C_2, C_3, C_4 seperti pada Gambar 5.14. Dengan menjelajahi semua C_i secara positif, kita perhatikan bahwa sisi-sisi C_3 dijelajahi dua kali dalam arah yang berlawanan.

Jadi hubungan:

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = \int_C$$



GAMBAR 5.14. TEOREMA INTEGRAL CAUCHY.

Jelas benar. Dari hubungan ini, maka untuk paling sedikit satu C_i berlaku

$$\left|\int_{C_i}\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_c\right|$$

Sebab, jika

$$\left|\int_{C_i}\right| < \frac{1}{4}\left|\int_c\right|$$

Adalah benar untuk semua keempat C_i, maka dengan menggunakan ketaksamaan segitiga kita dapat dengan mudah tiba pada suatu kemustahilan:

$$\left|\int_{C_i}\right| < \left|\int_c\right|$$

Dengan melambangkan K_1 bagi segitiga yang memenuhi pertidaksamaan (1), kita mempunyai

$$\left|\int_c\right| \leq 4 \left|\int_{K_1}\right|$$

Berikutnya, dengan memusatkan perhatian kita pada K_1, kita ulangi cara yang dipakai pada C untuk mendapatkan satu segitiga bagian K_2 dari K_1, sedemikian hingga

$$\left|\int_{K_1}\right| \leq 4\left|\int_{K_2}\right|$$

Dari (2) dan (3) kemudian kita mempunyai

$$\left|\int_c\right| \leq 4^2 \left|\int_{K_2}\right|$$

Dan dengan induksi

$$\left|\int_c\right| \leq 4^n \left|\int_{K_n}\right|$$

Sekarang, perhatikan bahwa segitiga bagian $K_1, K_2, \ldots, K_n$, (masing-masing diambil berikut bagian dalamnya) merupakan himpunan tertutup dan terbatas yang garis tengahnya menuju ke nol, bila n diambil semakin besar dan mereka tersarang satu pada lainnya:

$$K_{n+1} \text{ di dalam } K_n, \text{untuk semua } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Maka menurut Teorema B, terdapat tepat satu titik ζ yang berada di semua K_n, yang berarti ζ berada di C atau $Dl\ (C)$. Menurut hipotesa,

$f'(\zeta)$ ada. Jadi, dengan definisi turunan, jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika

$|z - \zeta| < \delta$ maka $\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} - f'(\zeta)\right| < \varepsilon$

Atau ekivalen dengan:

$|z - \zeta| < \delta$ maka $|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon|z - \zeta|$

Maka, terdapat bilangan kompleks ξ (yang pada umumnya bergantung pada nilai z) dengan sifat bahwa $|\xi| < \varepsilon$ dan sedemikian hingga

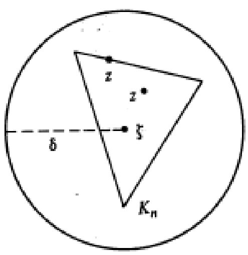
$$f(z) = f(\zeta) + f'(\zeta)(z - \zeta) + \xi(z - \zeta)^* \qquad (5)$$

Sekarang, karena garis tengah K_n menuju ke nol, dan karena ζ terletak dalam semua K_n, kita yakin dapat menemukan suatu n yang cukup besar sedemikian hingga K_n akan termuat di dalam lingkungan δ bagi titik ζ; lihat Gambar 5.15. akibatnya, setiap z di dalam K_n ini mempunyai sifat bahwa $|z - \zeta| < \delta$ jadi persamaan (5) berlaku untuk setiap z. Tetapi ini berarti:

$$\int_{K_n} f(z)\,dz = \int_{K_n} f(\zeta)\,dz + \int_{K_n} zf'(\zeta)\,dz - \int_{K_n} \zeta f'(\zeta)\,dz + \int_{K_n} \xi(z - \zeta)\,dz$$

$$= f(\zeta)\int_{K_n} dz + f'^{(\zeta)}\int_{K_n} z\,dz - \zeta f'^{(\zeta)}\int_{K_n} dz\ + \int_{K_n} \xi(z-\zeta)\,dz$$

$$= 0 + 0 - 0 + \int_{K_n} \xi(z-\zeta)\,dz$$



GAMBAR 5.15. TEOREMA INTEGRAL CAUCHY.

$$\xi = \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} - f'(\zeta)$$

Di mana, dalam langkah terakhir kita gunakan contoh 1 dan 2.

$$\int_{K_n} f(z)\,dz = \int_{K_n} \xi(z-\zeta)\,dz$$

Berikutnya, kita kemukakan secara singkat dua faktor geometri datar yang sederhana yang kita butuhkan. Yang pertama berhubungan dengan keliling segitiga-segitiga K_1, K_2. Dengan melambangkan keliling C dengan $|C|$ dan setiap K_i dengan $|K_i|$, kita dapat dengan mudah menurunkan kesamaan-kesamaan berikut:

$$|K_1| = \frac{|C|}{2}, |K_2| = \frac{|K_1|}{2} = \frac{|C|}{2^2}, \ldots,$$

Dan dengan induksi

$$|K_n| = \frac{|C|}{2^n}$$

Yang kedua berhubungan dengan kenyataan dari geometri bidang.

> Jarak antara dua sembarang titik pada atau di dalam suatu segitiga adalah lebih kecil atau sama dengan setengah kelilingnya.

Jadi, dalam notasi bukti kita,

$$|z - \zeta| \leq \frac{|K_n|}{2}$$

Kita lanjutkan pembuktian ini dengan menetapkan Teorema 4.5 (5) dan dua kenyataan di atas pada Persamaan (6) untuk mendapatkan berikut ini:

$$\left| \int_{K_n} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{K_n} \xi(z - \zeta) dz \right| \leq \varepsilon \frac{|K_n|}{2} |K_n|$$

$$= \frac{\varepsilon |K_n|^2}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon \left[\frac{|C|}{2^n} \right]^2}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \frac{|C|^2}{4^n}$$

Jadi kita telah menunjukkan bahwa

$$\int_{K_n} f(z)\, dz < \frac{\varepsilon}{2} \frac{|C|^2}{4^n}$$

Akhirnya, dengan menggunakan Persamaan (4) dan ketaksamaan di atas, kita mendapatkan

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{K_n} f(z)\, dz \right|$$

$$< 4^n \frac{\varepsilon}{2} \frac{|C|^2}{4^n}$$

$$= \frac{|C|^2}{2} \varepsilon$$

Tetapi hubungan terakhir ini benar untuk sembarang $\varepsilon > 0$ dan karena $\frac{|C|^2}{2}$ adalah suatu bilangan terhingga tertentu, kita berkesimpulan bahwa

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

Dan ini terbukti.

KASUS 2

c segi banyak tertutup. Dalam kasus ini kita gunakan Teorema G yang menyatakan bahwa segi banyak C dapat diuraikan menjadi sejumlah terhingga segitiga C_1, C_2, C_3, C_4 dalam suatu cara sehingga setiap sisi masing-masing segitiga yang tidak berimpit dengan sisi C

akan terletak di dalam C. Sekarang, dengan menjelajahi setiap segitiga ini dalam orientasi seperti yang ditentukan oleh C dan dengan menggunakan hasil pada kasus 1, kita mempunyai

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \ldots + \int_{C_n} = 0$$

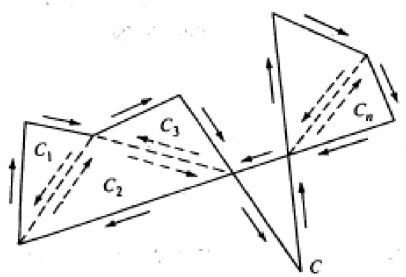
Tetapi setiap sisi segitiga yang berada di dalam segi banyak dijelajahi dua kali dan dalam arah yang berlawanan. Jadi nilai integral sepanjang sisi bagian dalam ini (lihat Gambar 5.16) tidak menyumbang apa-apa pada jumlah integral di atas, dan hanya sisi-sisi segi-banyak asalnya saja yang menyumbang dalam integrasi ini. Oleh karena itu,

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

Dan untuk kasus 2, teorema ini telah dibuktikan.

KASUS 3

C merupakan lintasan tertutup sembarang. Pertama, kita bicarakan empat bian berikut, yang menyusun dasar untuk pembuktian kasus ini.



GAMBAR 5.16. TEOREMA INTEGRAL CAUCHY .

1. Kita ingat kembali definisi

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,(z_k - z_{k-1})$$

Untuk kemudahan notasi kita lambangkan jumlah ruas kanan dengan S_n, dengan demikian persamaan di atas berbentuk

$$\int_C f = \lim\, S_n$$

2. Menurut Teorema D, terdapat bilangan nyata $\lambda > 0$ sedemikian hingga sembarang titik z pada C mempunyai jarak ke sembarang titik w pada batas R lebih dari λ. Perhatikan sekarang himpunan Q yang terdiri dari semua titik di dalam R yang jaraknya ke batas R lebih atau sama dengan $\lambda/2$. Jelaslah Q merupakan himpunan tertutup dan memuat C di bagian dalamnya. Karena $f(z)$ kontinu pada Q(f analitik pada Q), maka menurut Teorema F, f kontinu seragam pada Q. Akibatnya, untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga, untuk sembarang dua titik z dan ζ di dalam Q di mana

$$|z - \zeta\,| < \delta$$

Benarlah bahwa

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$$

3. Andaikan bahwa $\varepsilon > 0$ dipilih secara sembarang. Kemudian kita adakan penyekatan

$$P\,:\; z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$$

Pada C sedemikian hingga syarat-syarat berikut dipenuhi:

(a). $\left|\int_C f - S_n\right| < \varepsilon$, ini dimungkinkan oleh bagian 1

(b). Lintasan bagian $z_{k-1}z_k$ semua panjangnya kurang dari $\lambda/2$, hal ini mungkin, karena C merupakan lintasan jadi panjangnya berbatas.

(c). Panjang setiap lintasan bagian juga kurang dari δ, di mana δ ditentukan oleh kontinuitas seragam, seperti dalam bagian 2.

Perhatikan bahwa syarat (a) hingga (c) yang dikenakan pada penyekatan P menjamin, antara lain bahwa talibusur yang menghubungkan z_{k-1} ke z_k untuk $k = 1, 2, \dots, n$, semua terletak di dalam Q dan karenanya di dalam R. Lebih dari itu, karena panjang setiap lintasan bagian kurang dari δ, maka panjang setiap talibusur kurang dari δ, jadi jika z adalah suatu titik pada talibusur ke $-k$, maka

$$|z - z_k| < \delta \quad \text{dan oleh karena itu} \quad |f(z) - f(z_k) < \varepsilon$$

Akibatnya, untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$, dan sembarang titik z pada talibusur ke – k, terdapat suatu bilangan kompleks $\varepsilon_k(z)$ sedemikian hingga

$$|\varepsilon_k(z)| < \varepsilon$$

Yang tidak bergantung pada z dan sedemikian hingga

$$f(z) = f(z_k) + \varepsilon_k(z)$$

4. Akhirnya, kita lihat bahwa titik-titik pada sekatan P membentuk suatu segibanyak, namakan ia Π, bila kita menghubungkan z_0 ke z_1, z_1 ke $z_2, \dots, z_{n-1}$ ke z_n dan z_n ke z_0.

Dalam bagian 1 hingga 4, kita mempunyai semua alat yang diperlukan untuk melengkapi bukti tersebut. Menurut kasus 2, kita mempunyai

$$\int_{\Pi} = 0$$

Oleh karena itu buktinya akan lengkap jika kita dapat membuktikan bahwa

$$\left|\int_C - \int_{\Pi}\right| \to 0$$

Bila sekatan P menjadi semakin halus, dengan kata lain bila $\mu \to 0$.

Untuk tujuan itu, kita mempunyai berikut ini, (untuk mudahnya, ambil $z_n = z_0$):

$$\int_{\Pi} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)\, dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} [f\,(z_k) + \varepsilon_k(z)]\, dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f\,(z_k)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon_k(z)\, dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon_k(z)\, dz$$

$$= S_n + \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon_k(z)\, dz$$

Maka, dari bentuk pertama dan terakhir pada pengembangan di muka, kita mempunyai

$$\left| \int_{\Pi} - S_n \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon_k(z)\, dz \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k(z)|\, |z_k - z_{k-1}|$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

$$= \varepsilon |\Pi|$$

Di mana $|\Pi|$ menujukkan keliling segibanyak Π yang merupakan bilangan terhingga. Akhirnya, dengan menggunakan hubungan terakhir dan menggabungkannya dengan bagian 3(a), kita mempunyai

$$\left|\int_{c} - \int_{\Pi}\right| \leq \left|\int_{C} - S_n\right| + \left|\int_{\Pi} - S_n\right|$$

$$< \varepsilon + |\Pi|\varepsilon$$

$$= (|\Pi| + 1)\varepsilon$$

Karena ε sembarang dan karena $(|\Pi| + 1)$ suatu besaran terhingga, maka

$$\left|\int_{c} - \int_{\Pi}\right| = 0$$

Karena itu

$$\int_{c} f(z)\, dz = \int_{\Pi} f(z)\, dz = 0$$

Dan lengkaplah buktinya.

DAFTAR PUSTAKA

Buku Utama analisis kompleks.pdf. (n.d.).

Belajar, K., Di, L., Di, K. L., Koligatif, S., & Di, L. (2014). *Geometri analitik dan tranformasi*. 1–36. http://repository.ut.ac.id/3891/1/EKSI4417-M1.pdf

Dasar, A. K. (n.d.). *PARABOLA*. 167–196.

Kusni. (2008). *Geometri Datar Dan Ruang*. 1–66.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-a). *FUNGSI, LIMIT, DAN KONTINUITAS*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-b). *Lingkaran*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-c). *RPS Persamaan Diferensial*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-d). *TURUNAN*.

Lumbantoruan, J. H. (2017). *PENGEMBANGAN BAHAN AJAR INTEGRAL TAK TENTU BERBASIS MODEL SMALL GROUP DISCUSSION DI PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UKI TAHUN 2016/2017*. *10*, 99–118.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BUKU INTEGRAL TENTU JILID 2*.

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA*.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). *Geometri 1*.

Lumbantoruan, J. H. (2019e). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown. *Jurnal EduMatSains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2019f). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017/2018. *Edumatsains*, *3*, 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2020a). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN*

PEMOGRAMAN LINEAR.

Lumbantoruan, J. H. (2020b). *Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics*. *560*.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). Solid State Technology Volume: 64 Issue: 2 Publication Year: 2021. *Solid State Technology*, *64*(2), 4427–4444.

Lurus, G. (n.d.). *Garis Lurus*. *1*(3), 64–119.

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics. *Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, *560*(Acbleti 2020), 507–513. https://doi.org/10.2991/assehr.k.210615.095

P. A., S., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *Edumatsains*, *1*(1), 35–49.

Pembelajaran, A. C. (n.d.). *TRANSFORMASI SUSUNAN SUMBU*. 197–223.

Pendidikan, J., & Sains, M. (2020). *EduMatSains*. *1*(1), 23–34.

Simorangkir, M. R. R., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Aksesibilitas Anak Berkebutuhan Khusus. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, *14*(1), 204–213. https://doi.org/10.33541/jdp.v12i3.1295

GLOSARIUM

Bidang = Permukaan datar dan dua dimensi

Deret = Jumlah suku-suku dari suatu barisan

Elementer = Tidak dapat dibagi atau diuraikan menjadi bagian yang lebih sederhana (tidak kompleks)

Garis = Kumpulan titik-titik yang beraturan dan serta memanjang ke dua arah

Geometri = Suatu ilmu di dalam sistem matematika yang di dalamnya mempelajari garis, ruang, dan volume yang bersifat abstrak dan berkaitan satu sama lain, mempunyai garis dan titik sehingga menjadi sebuah simbol seperti bentuk persegi, segitiga, lingkaran, dan lain-lain.

Himpunan = Kumpulan dari benda-benda atau obyek yang diterangkan dengan jelas.

Hipotesis = Pernyataan atau jawaban sementara terhadap permasalahan yang sifatnya masih praduga, karena harus dibuktikan terlebih dahulu kebenarannya

Integrasi = Tindakan menyatukan komponen yang lebih kecil ke dalam satu sistem yang berfungsi sebagai satu

Interval = Himpunan bilangan-bilangan real yang ditunjukkan sebagai suatu pasangan berurut dan dinyatakan dalam suatu pertidaksamaan

Kalkulus = Cabang ilmu matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan deret takterhingga

Kompleks = Suatu kesatuan yang terdiri dari sejumlah bagian, khususnya yang memiliki bagian yang saling berhubungan dan saling tergantung

Konstan = Tetap tidak berubah; terus-menerus

Konteks = Bagian suatu uraian atau kalimat yang dapat mendukung atau menambah kejelasan makna

Kontinuitas = Kesinambungan

Kontradiksi = Suatu pernyataan majemuk yang bernilai salah untuk semua kemungkinan dari premis-premisnya

Konvers = Balikan dari suatu pernyataan implikasi.

Koordinat = Suatu titik yang didapatkan dari hasil perpotongan dari garis latitude (lintang) dengan garis bujur (longitude) sehingga akan menunjukan lokasi pada suatu daerah

Lingkaran = Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dengan satu titik tertentu.

Matematik = Ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran, konsep-konsep yang berhubungan satu dengan yang lainnya

Negatif = Tidak pasti

Parsial = Berhubungan atau merupakan bagian dari keseluruhan.

Persekutan = Faktor-faktor yang sama dari dua bilangan atau lebih.

Polygon = Bangun datar yang terdiri dari garis lurus yang bergabung untuk membentuk rantai tertutup atau sirkuit.

Segitiga = Bangun datar yang dibatasi dengan adanya tiga buah sisi serta memiliki tiga buah titik sudut

Singularitas = Studi kegagalan struktur manifold

Struktur = Pengaturan dan pengorganisasian unsur-unsur yang saling terkait dalam suatu objek material atau sistem, atau objek atau sistem yang terorganisasi.

Substitusi = Suatu metode untuk memperoleh penyelesaian dengan memasukkan suatu persamaan linear satu ke persamaan linear yang lain

Turunan = Suatu perhitungan terhadap perubahan nilai fungsi karena perubahan nilai input (variabel)

INDEKS

S

T