VARIABEL KOMPLEKS

TRANSFORMASI ELEMENTER

Oleh:

Nama : Mery Christina Lumban Raja

Nim : 1813150010

Program Studi: Pendidikan Matematika

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

JAKARTA

2022

PRAKATA

Puji Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat rahmat dan kelimpahan kasih-Nya penulis dapat menyelesaikan buku ajar tentang materi Variabel kompleks dengan topik “**Transformasi Elementer**” dengan baik dan tepat waktu.

Penulis menyampaikan ucapan terimakasih kepada dosen pengampu mata kuliah variabel kompleks yang telah memberikan bimbingan dan memberikan buku referensi sehingga buku ini dapat penulis selesaikan dengan baik.

Selain itu, terimakasih juga penulis sampaikan kepada rekan-rekan dan semua pihak yang telah memberikan kontribusi dan motivasi dalam menyelesaikan makalah ini.

Akhirnya penulis berharap makalah ini dapat memberikan manfaat bagi semua pembaca. Penulis meminta maaf apabila terdapat kesalahan penulisan atau kesalahan apapun pada materi transformasi elementer. Saran dan kritik yang membangun akan sangat membantu penulis demi perbaikan materi agar bisa lebih baik lagi.

Penulis

Mery Christina Lumban Raja

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PENDAHULUAN

Variabel kompleks merupakan perluasan dari materi sistem bilangan real. Mata kuliah variabel kompleks dapat dikategorikan ke dalam pelajaran yang cukup sulit karena pada mata pembelajaran variable kompleks ini kita akan banyak mempelajari tentang transformasi, deret dan lain sebagainya. Oleh karena itu, dibutuhkan wawasan yang cukup luas agar dapat memahami mata kuliah ini. Dalam hal ini, Saya akan membahas tentang materi "**Transformasi Elementer**". Dalam pembelajaran transformasi elementer kita akan membahas beberapa topik antara lain yaitu Pemetaan, Fungsi Kompleks Elementer, Transformasi Linear, Transformasi Pangkat, Transformasi Kebalikan, Transformasi Bilinear, Transformasi Eksponensial dan Logaritmik, Transformasi $w = \sin z$ dan $w = \cos z$.

Tujuan utama penulisan buku ini adalah untuk memenuhi prasyarat lulus mata kuliah variabel kompleks pada tahun ajaran 2021/2022. Sementara, tujuan lainnya adalah untuk menambah wawasan ataupun ilmu pengetahuan serta dapat menjadi pedoman (sumber belajar) bagi para pembaca yang ingin mempelajari atau mendalami materi tentang variabel kompleks.

Kiranya buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca terlebih dapat dipahami dengan mudah.

BAB 3

TRANSFORMASI ELEMENTER

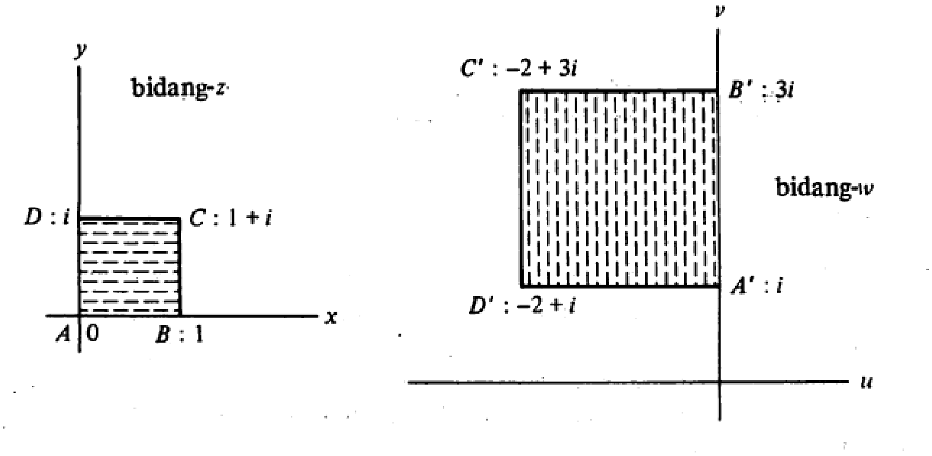
3.1 Pemetaan

Pada bab ini kita akan membahas tentang geometri fungsi kompleks. Suatu fungsi dapat disebut sebagai suatu proses bahwa Sebagian dari bidang z “dipetakan” ke bidang bagian w. Hal ini dapat menjelaskan istilah pemetaan dan transformasi. Jika suatu fungsi f memetakan z_0 ke w_0 dengan w_0 adalah bayangan z_0 dibawah f dan z_0 adalah pembayang w_0. Keadaan seperti ini yang mendasari pembahasan mengenai transformasi elementer.

Suatu pemetaan $w = f(z)$ yang bersifat tidak ada titik w yang mempunyai lebih dari satu pembayang dinamakan pemetaan satu ke satu (one to one). Suatu fungsi f disebut satu-satu jika titik-titik yang berbeda pada domainnya dipetakan ke titik-titik yang berbeda, jadi f adalah satu-satu jika $z_1 \neq z_2$ dan $f(z_1) = f(z_2)$.

Contoh 3.1

1. Misalkan $w = z^2 + i$ memetakan $z = 1 - i$ ke $w = -i$ atau fungsi $w = 2iz + 1$ menstransformasikan bujur sangkar ABCD menjadi bujur sangkar $\mathrm{A'B'C'D'}$ maka kita dapat melihat gambar transformasi bujur sangkar ABCD atau pemetaan $w = 2iz + 1$ dibawah ini.



GAMBAR 3.1. PEMETAAN $w = 2iz + i$

2. Misalkan fungsi $f(z) = 3z - 5i$ adalah satu-satu. Maka buktikanlah pernyataan berikut!
   Pembuktian:
   Kita dapat membuktikan pernyataan berikut dengan memisalkan bahwa untuk suatu z_1 dan z_2, dimana $z_1 \neq z_2$ dalam domain f, adalah benar menghasilkan $f(z_1) = f(z_2)$ maka $3z_1 - 5i = 3z_1 - 5i$ oleh karena itu f Adalah satu-satu.

3.2 Fungsi Kompleks Elementer

Sebelum kita membahas fungsi kompleks elementer, kita dapat mengingat konsep "invers suatu fungsi". Menurut definisi $g(z)$ dinamakan invers fungsi $f(z)$ apabila $f\big(g(z)\big) = g\big(f(z)\big) = z$. Berikut ini fungsi kompleks elementer ialah:

3.2.1 Fungsi Linear

Suatu fungsi berbentuk $f(z) = az + b$ dimana a dan b adalah konstanta kompleks dinamakan fungsi linear dan Turunannya adalah $f'(z) = a$.
Jika $a = 0$, maka f berubah menjadi fungsi konstan: $f(z) = b$. Jika $a \neq 0$, maka f adalah fungsi satu-satu, karena $z_1 \neq z_2$ menjadi $az_1 + b \neq az_2 + b$, jadi $f(z_1) \neq f(z_2)$. Dalam hal ini, hubungan invers

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$$

Juga merupakan fungsi linear dari bidang w "Kembali" ke bidang z. Jika $a = 1\ dan\ b = 0$, maka fungsi linear berubah menjadi fungsi identitas $f(z) = z$.

3.2.2 Fungsi Pangkat

Untuk setiap bilangan bulat positif n, fungsi $f(z) = z^n$ dinamakan fungsi pangkat. Invers dari fungsi $f(z) = z^n$ adalah $f'(z) = nz^{n-1}$ didefinisikan untuk semua z dan untuntuk $n > 1$, maka f adalah fungsi banyak ke satu.

3.2.3 Fungsi Kebalikan

Fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ dinamakan fungsi kebalikan. Ini merupakan fungsi satu-satu antara bidang z, kecuali $z = 0$ dengan bidang w kecuali $w = 0$.

3.2.4 Fungsi Bilinear

Jika n bilangan bulat tak negatif dan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah konstanta kompleks, maka fungsi $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ dinamakan fungsi menyuluruh. Misalkan $P(z)$ dan $Q(z)$ adalah fungsi menyuluruh. Maka

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

dengan $Q(z) \neq 0$, merupakan fungsi rasional analitik yang penyebutnya tidak sama dengan nol. Fungsi yang berbentuk

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, (ad - bc \neq 0)$$

Dinamakan fungsi bilinear karena suatu fungsi rasional yang analitik dimana-mana kecuali di $z = -\frac{d}{c}$. Jika $c = 0$, maka pemetaan bilinear menjadi fungsi linear. Persamaan $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, (ad - bc \neq 0)$ menyatakan fungsi satu-satu dari bidang z perluasan ke bidang w perluasan.

3.2.5 Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial dalam peubah kompleks $z = x + yi$ didefenisikan dengan $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Kita dapat melihat bahwa dalam pengertian tertentu, fungsi yang baru didefinisikan tersebut adalah "perluasan alami" fungsi e^x pada kasus peubah kompleks. Misalkan, jika z merupakan bilangan nyata dengan $y = 0$, maka $e^z = e^x$.

Jika z adalah khayal murni ($x = 0$). Kita mempunyai $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, yang dikenal sebagai rumus euler. Bentuk ini dapat diterapkan untuk menuliskan bentuk kutub $z = r(\cos t + i \sin t)$ atau dalam bentuk $z = re^{it}$.

Fungdi eksponensial adalah fungsi menyeluruh dan benar bahwa $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.

Sifat-sifat fungsi eksponen:

1) $e^z \neq 0$
2) $e^0 = 1$
3) $e^{z+w} = e^z e^w$
4) $e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$
5) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$
6) $e^z = e^{z+2\pi i}$(periodisitas eksponensial)
7) $z = x + iy, |e^z| = e^x, \arg(e^z) = y$

3.2.6 Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik untuk sembarang bilangan kompleks adalah z maka lambing untuk logaritmik yang kita miliki adalah $\log z$. Symbol ini membentuk suatu perluasan bagi logaritma biasa yaitu $\ln x$. Jika z adalah bilangan nyata positif maka:

$$\log z = \ln z \text{ ... ...(persamaan1)}$$

Untuk $\ln x$ juga dimiliki oleh $\log z$ maka:

$$\log(zw) = \log z + \log w \text{ ... ... (persamaan 2)}$$

Dan

$$\log(\mathrm{z}^{\alpha}) = \alpha. \log \mathrm{z} \text{ ... ... (persamaan 3)}$$

Untuk setiap bilangan kompleks z, w dan α. Dalam konteks hipotetik, kita misalkan $z = re^{it}$ adalah kompleks, maka:

$$\begin{aligned}\log z &= \log\left(re^{it}\right)\\ &= \log r + \log\left(e^{it}\right) \text{oleh (persamaan 2)}\\ &= \log r + it. \log e \text{ oleh (persamaan 3)}\\ &= \ln r + it. \ln e \text{ oleh (persamaan 1)}\\ &= \ln r + it\\ &= \ln|z| + i \arg z\end{aligned}$$

Maka dari ke 3 persamaan log z diatas, kita mendapatkan bahwa:

$$\log z = \ln|z| + i \arg z, \text{untuk semua } z \neq 0$$

Sifat-sifat $\log z$

1) $\log(zw) = \log z + \log w$
2) $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w$
3) $\log e^z = z$
4) $e^{\log z} = z$
5) $\log(z^p) = p \log z$

3.2.7 Fungsi Trigonometrik dan Hiperbola

Dengan menggunakan rumus Euler, untuk menunjukkan jika x merupakan nyata, maka:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \text{ dan } \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right).$$

Kedua rumus ini dapat mewakili bentuk kompleks fungsi nyata sinus dan cosinus. Fungsi trigonometri dasar dapat kita kembangkan dari fungsi sinus dan cosinus diatas dengan:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \text{ dan } \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right).$$

Untuk semua bilangan kompleks z. Empat fungsi trigonometrik yang lain didefenisikan seperti biasa yaitu:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\ ,\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}\ ,\sec z = \frac{1}{\cos z}\ ,\csc z = \frac{1}{\sin z}$$

Jelaslah dari definisi diatas, bahwa $\sin z$ dan $\cos z$ merupakan fungsi menyeluruh.

Sifat-sifat $\sin z$ dan $\cos z$

1) $\sin z = 0$ jika dan hanya jika $z = k\pi, k =$ bilangan bulat.
2) $\cos z = 0$ jika dan hanya jika $z = \pi/2 + k\pi, k =$ bilangan bulat.
3) $\sin(-\text{z}) = -\sin z$
4) $\cos(-z) = \cos z$
5) $sin^2 z + cos^2 z = 1$
6) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$.
7) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.
8) $|\sin z|^2 = sin^2 x + sinh^2 y$, dimana $z = x + iy$.
9) $|\cos z|^2 = cos^2 x + sinh^2 y$, dimana $z = x + iy$.
10) $\frac{d}{dz}[\sin z] = \cos z$

11) $\frac{d}{dz}[\cos z] = -\sin z$.

Dalam fungsi hiperbolik peubah kompleks untuk sinus hiperbolikus dan cosinus hiperbolikus didefenisikan dengan:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^z - e^{-z}) \text{ dan } \cos z = \frac{1}{2}(e^z + e^z).$$

Jelaslah, sin z dan cos z adalah fungsi menyeluruh dan turunan-turunannya ialah:

$$\frac{d}{dz}[\sin z] = \cos z \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dz}[\cos z] = \sin z$$

Empat fungsi hiperbolik yang lain didefinisikan seperti biasanya:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad , \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

Pembandingan terhadap bentuk yang digunakan untuk mendefinisikan $\sin z, \cos z$. sin z dan cos z menunjukkan adanya hubungan fungsional yang erat di antara keempat fungsi ini.

Contoh 3.2

1. Buktikan bahwa, untuk setiap $z, e^z \neq 0$.
   Pembahasan:
   Kita dapat membuktikannya dengan kontradiksi. Jadi, misalkan suatu bilangan $z = a + ib$
   Sedemikian hingga: $e^z = 0$ maka $e^a \cos b + ie^a \sin b = 0$; jadi $e^a \cos b = 0$ dan $e^a \sin b = 0$. Tetapi karena eksponensial nyata e^a tidak pernah nol, haruslah $\cos b = 0$ dan $\sin b = 0$. Tetapi, hal ini tidak mungkin untuk setiap nilai b. ini memenuhi bahwa tidak ada satu pun z; jadi $e^z \neq 0$ untuk semua z.
2. Buktikan periodisitas eksponensial: $e^z = e^{z+2\pi i}$, untuk semua $z = x + iy$
   Pembahasan:
   Kita mempunyai:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+(y+2\pi)i} \\ &= e^x cis\,(y + 2\pi) \\ &= e^x cis\, y \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dalam pembuktian periodisitas eksponensial, kita menggunakan periodisitas sin y dan cos y pada langkah ketiga.

3. Buktikan bahwa $\log(zw) = \log z + \log w$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\log(zw) &= ln|zw| + i\arg(zw)\\ &= \ln[|z||w|] + i[\arg z + \arg w]\\ &= (\ln|z| + i\arg z) + (\ln|w| + i\arg w)\\ &= \log z + \log w\end{aligned}$$

4. Tentukan logaritma bilangan-bilangan $z = i, 2, -ei$ dan -1!

Penyelesaian:

Kita mempunyai

$$\log i = \ln|i| + i\arg i = \ln(1) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\log 2 = \ln|2| + i\arg 2 = \ln 2 + i(2k\pi) = \ln 2 + 2k\pi i$$

$$\log(-ei) = \ln(e) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 + \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

$$\log(-1) = (\pi + 2k\pi)i$$

5. Buktikan bahwa $\log e^z = z$

Pembahasan:

Karena $|e^z| = e^x$ dan $\arg(e^z) = y$

Maka $\log e^z = ln|e^z| + i\arg(e^z)$

$$= \ln e^x + iy$$

$$= x + iy$$

$$\log e^x = z$$

6. Buktikan bahwa $\frac{d}{dz}[\sin z] = \cos z$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}[\sin z] &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \cos z\end{aligned}$$

7. Buktikan jika $z = k\pi$!

Pembahasan:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{k\pi i} - e^{-k\pi i}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}(\cos k\pi + i\sin k\pi - \cos k\pi + i\sin k\pi)$$

$= \sin k\pi$
$= 0$
Sebaliknya, andaikan bahwa $\sin z = 0$. Maka,

$$\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 0; \quad \text{jadi} \quad e^{iz} - e^{-iz}$$

Akibatnya

$$e^{2iz} = 1$$

Yang, dengan menggunakan logaritma, menghasilkan

$$2iz = 2k\pi i, \qquad k = \text{bilangan bulat,}$$

Oleh karena itu,

$$z = k\pi.$$

8. Uraikan $\cos z$ dalam bentuk $u + iv$.
Pembahasan:
Dengan memisalkan $z = x + iy$, kita memperoleh

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}\right)\\ &= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)]\\ &= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\cos x - \frac{i}{2}(e^{y} + e^{-y})\sin x\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Begitu pula, kita dapat menguraikan $\sin z$ sebagai

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \ \cos x \sinh y.$$

3.3 Transformasi Linear

Beberapa sifat-sifat aljabar dan analitik transformasi linear adalah:

$$w = az + b$$

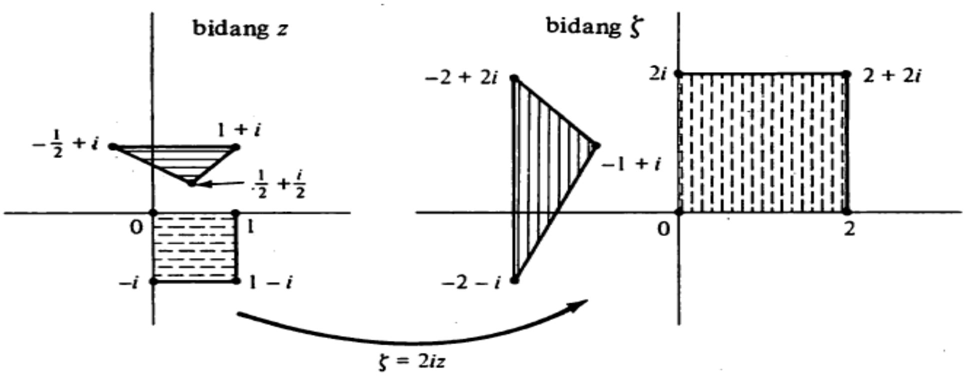
Sifat-sifat pemetaan transformasi linear di atas dapat kita periksa secara terpisah pemetaan-pemetaannya:

$$\zeta = az \text{ dan } w = \zeta + b$$

Kemudian digabungkan menjadi:

$$w = \zeta + b = az + b$$

Yang pertama dari dua pemetaan diatas adalah $\zeta = az$ disebut sebagai regangan putaran; alas an untuk istilah ini menjadi jelas bila kita memeriksa hubungan-hubungan $|\zeta| = |a||z|$ dan $\arg \zeta = \arg a + \arg z$. Dari dua relasi ini, kita menurunkan hal berikut:



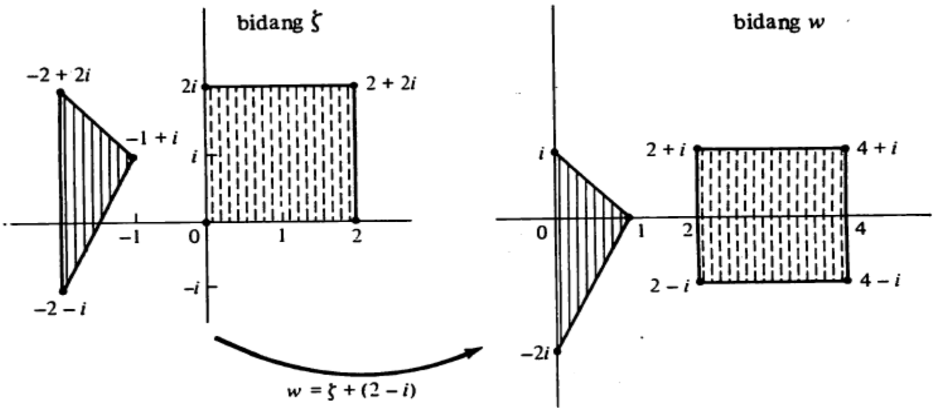
Gambar 3.3a Regangan Putaran

Di bawah pemetaan $\zeta = az$, bayangan titik z adalah titik ζ yang modulusnya $|z|$" diregangkan" dengan faktor $|a|$ adalah $\arg z$ diputar dengan sudut $\arg a$.

Jika $|a| = 1$, maka $|\zeta| = |a||z|$ dan $\arg \zeta = \arg a + \arg z$ merupakan putaran murni dan jika arg a = 0, maka merupakan regangan. Jika $|a| = 1$ dan arg a = 0, maka a = 1 dan $|\zeta| = |a||z|$, $\arg \zeta = \arg a + \arg z$ menjadi transformasi identitas $\zeta = z$. Gambar 3.3a menunjukkan kejadian regangan-putaran. Kita dapat mencatat bahwa pemetaan demikian memiliki kesamaannya, ini dinamakan *transformasi sama* atau *similarity* karena memutar setiap titik dengan sudut yang sama, namakan, *arg a* dan melipat-gandakan modulus setiap titik dengan factor yang sama $|a|$.

Transformasi

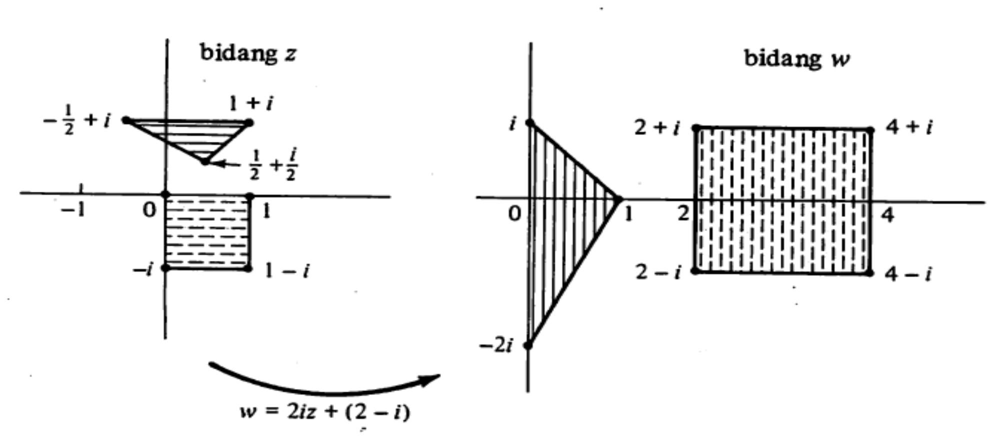
$$w = \zeta + b$$



Gambar 3.3b penggeseran

Dinamakan penggeseran yang mempunyai sifat bahwa fungsi “mengeser” atau “memindahkan” setiap titik ζ dengan vector konstan b.

Dalam mempelajari transformasi linear $w = az + b$ terhadap regangan putaran $\zeta = az$ dan penggeseran $w = \zeta + b$, maka kita dapat menggabungkan kedua pemetaan tersebut seperti gambar dibawah ini.



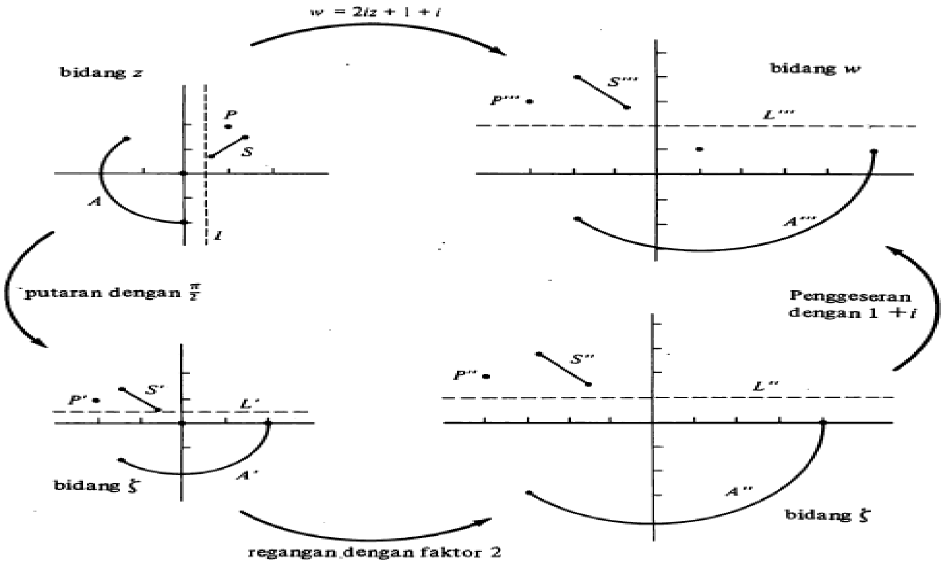
Gambar 3.3c Transformasi

Contoh 3.3

Diketahui fungsi $w = 2iz + 1 + i$, buktikan bahwa fungsi berikut adalah transformasi geometri!

Pembahasan:

Fungsi $w = 2iz + 1 + i$ merupakan transformasi linear. Di bawah pemetaan ini, setiap titik diputar dengan sudut $\arg 2i = \pi/2$, diperbesar dengan faktor $|2i| = 2$ dan kemudian digeser dengan vector $1 + i$. Kita dapat melihat penjelasan berikut dengan gambar.



Gambar 3.3d Contoh Fungsi $w = 2iz + 1 + i$

3.4 Transformasi Pangkat

Sifat-sifat pemetaan tertentu pada transformasi pangkat adalah:

$$w = z^n, \qquad n = 2,3,4, \ldots$$

Fungsi diatas dapat juga dibuat ke dalam bentuk kutub yaitu:

$$w = r^n(\cos nt + i \sin nt)$$

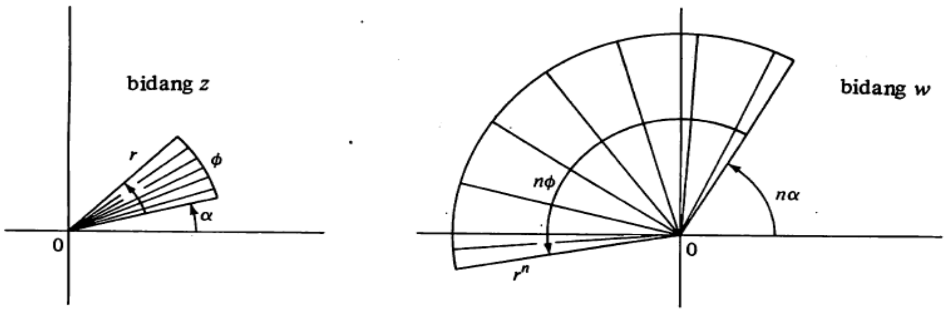
Kita dapat melihat bahwa:

$$|z| = r \quad \text{dan} \quad \arg z = t$$

Maka

$$|w| = r^n \quad dan \arg w = nt$$

Dengan kata lain transformasi pangkat memetakan suatu titik *z* dengan modulus *r* dan argumen *t* ke suatu titik dengan modulus r^n dan argumen nt. Pada umumnya, suatu sinar yang dipancarkan dari pusat sumbu koordinat dengan sudut inklinasi α dipetakan menjadi suatu sinar yang bersudut inklinasi $n\alpha$. Suatu lingkaran dengan jari-jari r bersudut pusat ϕ ditransformasikan ke lingkaran dengan jari-jari r^n bersudut pusat $n\phi$, akibatnya kita misalkan: dibawah $w = z^n$, kuadran pertama bidang z dipetakan ke setengah lingkarang atas bidang *w*, setengah lingkaran atas *z* dipetakan ke seluruh bidang *w*, dan jika kita mengambil seluruh bidang *z* maka kita akan menutupi bidang *w* dua kali.



Gambar 3.4a Pemetaan $w = z^n$

Contoh 3.4

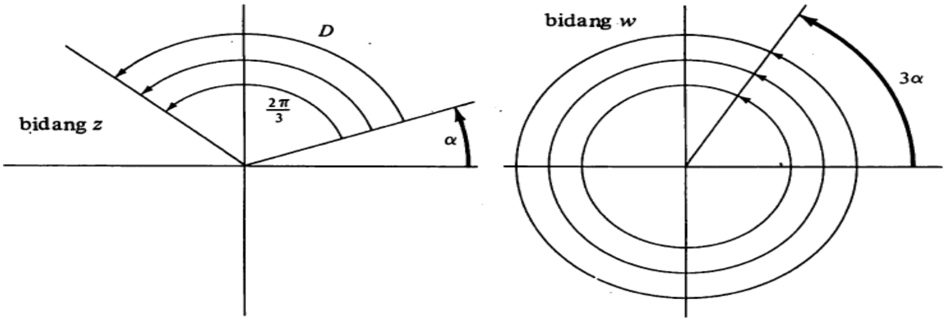
1. Misalkan fungsi $w = z^3$ dan dibatasi domain *D* sebagai berikut: *D* adalah himpunan senua *z* sedemikian hingga

$$\alpha \leq \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{3} \; atau \; z = 0$$

Dimana α adalah suatu sudut sembarang. Jelaslah, jika *z* = 0, maka *w* = 0. Untuk *z* yang lain di *D*, fungsi yang diberikan memangkatkan tiga modulusnya dan melipatkan tiga argumen:

$$|z| \rightarrow |z|^3 \;\; dan \; \arg z \rightarrow 3(\arg z).$$

Dengan kata lain, bidang *w* ditutupi "tiga kali lebih cepat" dari bidang *z*,dengan domain *D* yang merupakan "sepertiga" bidang *z*, dipetakan ke seluruh bidang *w*.



Gambar 3.4b contoh 1: $w = z^3$

2. Kita tahu bahwa fungsi $w = z^2$ menghasilkan:

$$u(x, y) = x^2, y^2 \quad dan\ v(x, y) = 2xy.$$

Pada bidang z, hiperbola tegak lurus $x^2 - y^2 = c, \ \ c \neq 0$

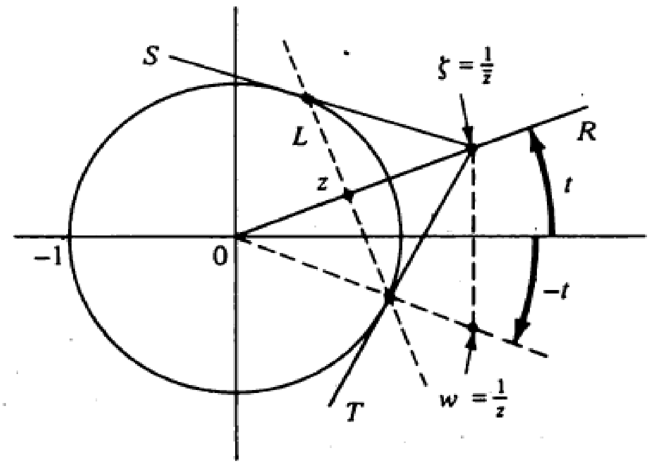
Maka jelaslah $u = c$ apabila x dan y mengambil semua nilai yang diperbolehkan, maka nilai v bergerak dari $-\infty$ hingga $+\infty$. Ini berarti bahwa, $w = z^2$, hiperbola diatas dipetakan menjadi garis tegak $u = c$.

3.5 Transformasi Kebalikan

Suatu transformasi yang didasarkan pada fungsi f dengan $f(z) = \frac{1}{z}$ dinamakan transformasi kebalikan. Secara geometrik, transformasi $w = \frac{1}{z}$ akan memetakan titik-titik yang mendekati $z = 0$ ke titik-titik di daerah yang jauh dari peta titik-titik sebelumnya. Dengan menuliskan z dan w dalam bentuk kutub, kita lihat bahwa jika $z = r\ cis\ t$ maka diperoleh

$$w = \frac{1}{r}\ cis\ (-t)$$

Jadi fungsi kebalikan suatu titik dengan modulus r dan argument t dipetakan menjadi suatu titik dengan modulus $\frac{1}{r}$ dan $-t$.



Gambar 3.5 transformasi $w = \frac{1}{z}$

Contoh 3.5

Misalkan garis

$$L_1: x - y + 2 = 0$$

Dalam notasi persamaan $k: a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, $a = 0, b = 1, c = -1$, dan $d = 2$. Jadi, dibawah $w = \frac{1}{z}, L_1$ dipetakan menjadi garis atau lingkaran yang diberikan oleh $d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$ maka L_1 dipetakan menjadi lingkaran:

$$C_1: 2(u^2 + v^2) + u + v = 0$$

Begitu pula, kita mendapatkan bahwa garis

$$L_2: x + y - 2 = 0$$

Dipetakan menjadi lingkaran

$$C_2: 2(u^2 + v^2) - u + v = 0$$

Maka garis-garis tersebut berpotongan dengan sudut siku-siku pada titik $z = 2i$ dan $w = \frac{1}{z}$ yang mengakibatkan C_1 dan C_2 berpotongan dengan sudut w.

3.6 Transformasi Bilinear

Jika a, b, c dan d konstanta kompleks, maka:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}\ untuk\ ad - bc \neq 0$$

Dinamakan transformasi bilinear. Transformasi bilinear memiliki sejumlah sifat pemetaan yang sangat menarik, beberapa diantaranya juga sangat berguna dalam terapan. Dua sifat yang paling mendasar dari transformasi bilinear adalah:

1. Pemetaan bilinear merupakan gabungan dari tiga fungsi berikut, dalam urutan yang diberikan

$$\zeta = cz + d, \quad \zeta = \frac{1}{\zeta}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\zeta$$

2. Pemetaan bilinear merupakan transformasi kebalikan yang memetakan garis-garis dan lingkaran-lingkaran ke garis-garis atau lingkaran-lingkaran.

Sifat transformasi bilinear dapat dinyatakan sebagai berikut:

Bila diketahui sembarang tiga titik berbeda $z_{1,}z_{2,}z_3$ pada bidang z dan sembarang tiga titik berbeda $w_{1,}w_{2,}w_3$ pada bidang w maka terdapat transformasi bilinear yang tunggal yang memetakan $z_j\ ke\ w_j\ , j = 1{,}2{,}3$. Kita dapat membentuk nya dengan:

$$\frac{(w - w_{1,})(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_{1,})(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

Contoh 3.6

1. Carilah transformasi bilinear yang akan memetakan $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -1$ ke $w_1 = 12, w_2 = 11 + i, w = 11$

   Penyelesaian:

$$\frac{(w - 12)i}{(w - 11)(-1 + i)} = \frac{z(1 + i)}{(z + 1)i}$$

   Yang menghasilkan pemetaan linear

$$w = \frac{10z - 12}{z - 1}$$

2. Misalkan kita ingin mendapatkan titik-titik tetap pada pemetaan $w = \frac{z-1}{z+1}$
   Maka ambil w = z, maka kita akan mendapatkan bahwa:
   $$z^2 + z = z - 1$$
   Yang menghasilkan titik-titik tetap $z \pm 1$.

3.7 Transformasi Eksponensial dan Logaritmik

3.7.1 Transformasi Eksponensial

Defenisi: Tranformasi eksponensial mempunyai bentuk w = ez = ex. eiy (z = x + iy). Dengan mensubsitusikan rumus euler eiy= (cos y+ I sin y), diperoleh w = ez = ex.eiy =ex (cos y+ I sin y), (z= x + iy).
Fungsi eksponensial: $w = e^z$, Bisa dipelajari melalui dua contoh dibawah ini.

Contoh 1

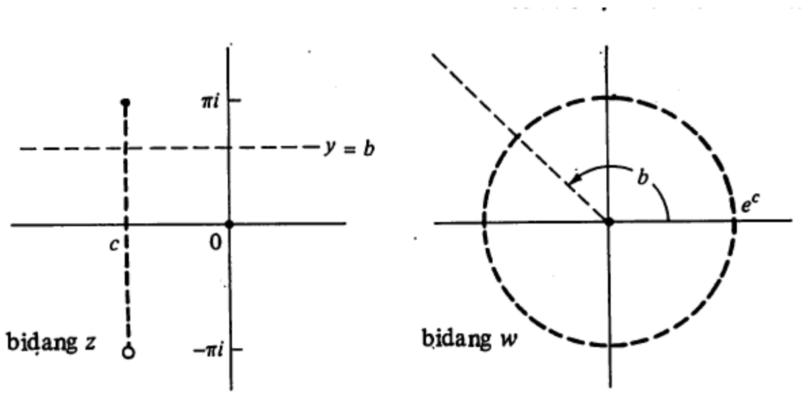
Tentukan bayangan garis mendatar $y = b$ dibawah $w = e^z$

Penyelesaian :

Jika $w = e^z$, maka $|w| = e^x$ dan arg $w = y$. Setiap titik pada garis yang diberikan berbentuk

$$z = x + ib, -\infty < x < \infty$$

Karena$x$ berubah-ubah dari $-\infty$ hingga $+\infty$, nilai ex berubah-ubah dari 0hingga $+\infty$ sementara y tetap pada $y = b$. Dengan kata lain, jika nilai x berubah-ubah dari $-\infty$ hingga $+\infty$, $|w|$ berubah-ubah dari 0 hingga $+\infty$ sedangkan arg w tetap arg $w = b$.Hal ini berarti , jika z berubah-ubah sepanjang garis yang diberikan, $w$menentukan suatu sinar yang dipancarkan dari pusat koordinat (tapi tidak termasuk koordinatnya) dengan sudut inklinasi b radial.



Gambar 3.7.1a (Bayangan $y = b$ dibawah $w = e^z$)

Contoh 2

Tentukan bayangan $x = c$, $-\pi < y < \pi$ dibawah $w = e^Z$

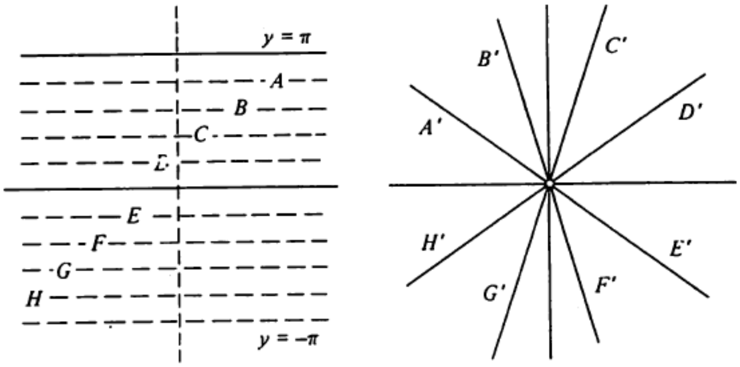
Penyelesaian :

Setiap titik pada penggal garis tersebut berbentuk

$z = c + iy, \quad -\pi < y < \pi$

Jika y berubah-ubah dari $-\pi$ ke π , $\cos y + i \sin y$ menentukan suatu lingkaran lengkap. Sedangkan $|w|$ tetap tinggal pada e^C . Dengan kata lain, jika z berubah-ubah sepanjang penggal garis yang diberikan, w menentukan suatu lingkaran berpusat pada $w = 0$ dan berjari-jari e^C. Jika y diperbolehkan untuk domain yang lebih luas dalam garis tegak yang sama, w akan mengulangi jejaknya pada lingkaran yang sama. Jika diambil seluruh titik pada garis tegak $x = c$, maka lingkaran $|w| = e^C$akan terulang tak berhingga kali.
Dari dua contoh diatas, bisa diikhtisarkan bahwa: "dibawah $w = e^x$garis mendatar dipetakan ke sinar-sinar yang dipantulkan dari $w = 0$ dan garis tegak dipetakan ke lingkaran-lingkaran yang berpusat di $w = 0$".

Jika diambil semua garis mendatar dalam $-\pi < y \leq \pi$, bayangannya merupakan semua sinar dengan sudut-sudut inklinasi yang berbeda-beda dari $-\pi \leq \arg w \leq \pi$. Secara keseluruhan semua sinar-sinar itu menghabiskan semua titik pada bidang w kecuali $w = 0$.



Gambar 3.7.1b (Garis ke sinar dibawah $w = e^z$)

3.7.2 Transformasi Logaritmik

$$\log(e^z) = z$$

Berlaku untuk semua z. Sifat ini menyatakan kenyataan bahwa fungsi log z merupakan invers fungsi ez. Jika ditentukan ez untuk setiap z dan diterapkan fungsi log pada ez , diperoleh kembali z. Secara singkat dapat disimpulkan bahwa “log zz meniadakan apa yang dikerjakan oleh ez untuk sebarang z”.

Dari fungsi diatas dapat diperoleh :

$$w = \ln|z| + i \arg z$$

Artinya

$$u = \ln|z| \text{ dan } v = \arg z$$

Jika z berubah-ubah pada semua nilai kecuali nol, $|z|$ berubah-ubah antara 0 dan $+\infty$; jadi $\ln|z|$ berubah-ubah dari $-\infty$ ke $+\infty$, oleh karena itu $-\infty < u < \infty$. Selain itu karena argumen pokok mempunyai syarat yaitu berada pada $-\pi < \arg z \leq \pi$ didapatkan $-\pi < v \leq \pi$. Dengan menggabungkan u dan v diperoleh lajur pokok pada bidang w.

3.8 Transformasi $w = \sin z$ dan $w = \cos z$

3.8.1 Transformasi $w = \sin z$

Pada fungsi $w = \sin z$ dan $w = \cos z$, $\sin z$ dapat diuraikan menjadi
$\sin z = \sin x \cosh y + b \sinh y \cos x$
Sehingga diperoleh persamaan:

$$u = \sin x \cosh y \text{ dan } v = \sinh y \cos x$$

Persamaan diatas dijadikan pedoman untuk mengenal sifat-sifat pemetaan fungsi sinus.

3.8.2 Transformasi $w = \cos z$

Pada transformasi $w = \cos z$, $\cos z$ dapat diuraikan menjadi:

$$\cos z = \cos x \cosh y - b \sin x \sinh y$$

Dengan menggunakan identitas :

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dapat diketahui sifat-sifat pemetaan $\cos z$. Yaitu melalui gabungan pemetaan:

$$\zeta = z + \frac{\pi}{2} \quad dan \quad w = \sin \zeta$$

Contoh 3.8

1. Perhatikan interval berikut:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

Pembahasan :
Jika $y = 0$, maka $\cosh y = 1$ dan $\sinh y = 0$, sehingga untuk sebarang titik pada interval yang diberikan diperoleh:
$u = \sin x$dan $v = 0$

Karena x berubah-ubah antara $-\pi/2$ dan $\pi/2$ maka nilai sin x berubah- ubah antara -1 dan 1. Akibatnya, dibawah w = sin z, interval yang diberikan dipetakan ke:

$$-1 \leq u \leq 1,\ v = 0$$

2. Tentukan bayangan interval

$$T{:}{-\pi} \leq x \leq 0, y = 0$$

Di bawah pemetaan $w = \sin +(z + \frac{\pi}{2})$

Penyelesaian:

Interval: T: $\pi \leq x \leq 0$, $y = 0$

Dibawah pergeseran: $\zeta = z + \frac{\pi}{2}$

$T\ dipetakan\ ke\ intelval$:

$$T' = -\frac{\pi}{2} \leq R(\zeta) \leq \frac{\pi}{2}, I(\zeta) = 0$$

Selanjutnya di bawah $w\ = sin\,\zeta$

T' di petakan ke

$$T'' :\ -1 \leq\ u\ \leq\ 1\ , \qquad v = 1$$

Akhirnya disimpulkan bahwa dibawah $w = \cos z$, $interval - \pi \leq x \leq$

0, $y = 0$ dipetakan ke $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$.

SOAL LATIHAN

Petunjuk soal:

1. Tentukanlah apakah fungsi dibawah ini merupakan fungsi satu-satu, jika ya berikan pembuktiannya!
   a. $w = 3i$
   b. $w = \frac{(z+1)}{(z-1)}$
   c. $w = z - i$
   d. $w = z^3 - 3$
2. Carilah semua z yang memenuhi setiap persamaan berikut:
   a. $e^z = -3i$
   b. $e^z = 1 - i$
3. Tulislah masing-masing berikut ini dalam bentuk $a + ib$
   a. $e^{i\pi/2}$
   b. $e^{1-\pi i}$
   c. $e^{-7\pi i}$
   d. $e^{\ln 2+\pi i/3}$
   e. $e^{2-2\pi i}$
4. Buktikan bahwa jika $z = re^{it}, maka\ \bar{z} = re^{-it}$
5. Carilah logaritma setiap bilangan berikut:
   a. $-i$
   b. 1
   c. $1 + i$
   d. $3 + 4i$
   e. $2 - i$
6. Carilah semua z yang memenuhi persamaan $\log(z + i) = i\pi$
7. Buktikan:
   a. $\sin z = 0$ jika dan hanya jika $z = n\pi i$
   b. $\cos z = 0$ jika dan hanya jika $z = (n + \frac{1}{2})\pi i$
8. Buktikan bahwa, untuk sembarang z:
   a. $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$
   b. $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$
   c. $\tan \bar{z} = \overline{\tan z}$
9. Buktikan:
   a. $\cos(iz) = \cos z$

b. $\sin(iz) = i \sin z$

10. Buktikan $f(z) = e^{z^2}$ adalah fungsi menyeluruh dan $f'(z) = 2ze^{z^2}$
11. Tunjukkan bahwa, untuk sembarang bilangan nyata *x*:

a. $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

b. $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

12. Nyatakan kebenarannya bahwa jika *I*(*z*)> 0 maka $\left|e^{iz}\right| < 1$.
13. Carilah bayangan kurva-kurva $\arg z = \pi/3,\ |z| = 2, R(z) = -1$ dan $I(z) = 2$ dari setiap fungsi berikut:

a. $w = iz$

b. $w = -iz + 2i$

c. $w = (-1 + i)z$

d. $w = z + 1$

14. Jelaskan secara geometric dan aljabar bayangan daerah sudut

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$$

Dibawah fungsi $w = -2z - 2i$

15. Carilah bayangan parabola $y = x^2$ di bawah pemetaan $w = -2z + 2i$
16. Buktikan bahwa jika $b \neq 0$ maka pemetaan $w = z + b$ tidak mempunyai titik tetap
17. Carilah suatu transformasi linear yang akan memetakan $z = i$ dan $z = -i$ berturut-turut ke $w = 0$ dan $w = 2$.
18. Buktikan bahwa satu-satunya transformasi linear dengan lebih dari satu titik tetap adalah pemetaan identitas $w = z$.
19. Carilah suatu transformasi linear yang memetakan setengah-lingkaran *I*(*z*)> 0 menjadi daerah $R(w) > 1$ dan titik $z = i\ ke\ w = 2 - i$.
20. Buktikan bahwa pemetaan $w = z + b, b \neq 0$ merupakan sau-satunya pemetaan linear tanpa titik tetap.
21. Carilah bayangan sektor $0 < \arg z < \pi/2$ dibawah $w = z^2$
22. Carilah sedemikian hingga, dibawah pemetaan $w = z^4$, bayangan sektor $0 < \arg z < \alpha$ akan menjadi setengah bagian atas bidang w.
23. Carilah bayangan tiap-tiap kurva berikut atau daerah pada bidang *z* dibawah pemetaan $w = z^2$.

a. $x^2 - y^2 = 3$

b. $y = 0$

c. $x = 0$

d. $x = 2$

e. $y = 3$

f. $y = 1 - x$
g. $|z| > 2$
h. $|\arg z| < \pi/2$
i. $1 < R(z) < 2$

24. Tentukan sudut α sedemikian hingga, dibawah pemetaan $w = z^6$, sektor $< \pi/2 < \arg z \leq \alpha$, termasuk z = 0, akan menutupi seluruh bidang w tepat satu kali.
25. Tunjukkan bahwa, dibawah pemetaan $w = z^4$, sektor-sektor
$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$$
Dan
$$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$
Mempunyai bayangan yang sama di bidang w.
26. Dibawah pemetaan $w = z^5, z = 1$ dipetakan ke $w = 1$. Carilah empat titik lagi yang berbeda yang juga dipetakan ke $w = 1$ dibawah fungsi itu.
27. Carilah dan gambarlah bayangan masing-masing titik berikut di bawah transformasi kebalikan.
a) -1
b) $-i$
c) $1 + i$
d) $5 - 12i$
e) $-3 + 4i$
f) $-3i$
g) $1/(1 - i)$
28. Lingkarang satuan $|z| = 1$ dan sumbu koordinat membagi bidang menjadi delapan daerah. Dapatkan bayangan masing-masing daerah ini dibawah $w = \frac{1}{z}$ dan sebutkan apa yang terjadi terhadap batasnya dibawah transformasi ini.
29. Carilah bayangan masing-masing garis atau lingkaran berikut dibawah pemetaan balikan.
a) $y = 1$
b) $x = -1$
c) $y = x - 1$
d) $x + y = 1$
e) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

30. Verifikasi bahwa setiap sudut pada titik potong $|z + 1 + 2i| = 2$ dan $y = x + 1$ tidak berubah dibawah $w = \frac{1}{z}$
31. Carilah bayangan lingkaran satuan dibawah pemetaan kebalikan dan sebutkan apa yang terjadi terhadap setengah bagian atas dan bawahnya.
32. Carilah bayangan lingkaran$|z + 1| = 1$ di bawah $w = \frac{1}{z}$
33. Tunjukkan bahwa sembarang garis $x = c \neq 0$ dipetakan menjadi lingkaran
$$\left|w - \frac{1}{2c}\right| = \frac{1}{2|c|}$$
34. Carilah bayangan untuk lajur tak berhingga $0 < y < \frac{1}{2}$ di bawah pemetaan kebalikan.
35. Gunakan gabungan fungsi $\zeta = z + 1$ dan $w = 1/\zeta$ untuk membahas sifat pemetaan umum bagi pemetaan.
$$w = \frac{1}{z + 1}$$
36. Carilah transformasi bilinear yang akan memetakan $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = 1$ ke $w_1 = -3, w_2 = -1 - 2i, w_3 = -1$

37. Carilah bayangan setiap titik $z = 0, 1, -1, i, -i, \infty$ dibawah pemetaan
$$w = \frac{-iz + 2}{z + 1}$$
38. Carilah titik-titik tetap pada transformasi
    a. $w = \frac{-iz+1}{z-1}$
    b. $w = \frac{z-2}{z-1}$
39. Carilah transformasi bilinear yang memetakan berturut-turut 0, 1, dan *I* ke $-1, 0,$ dan i
40. Carilah bayangan garis $l(z) = \frac{1}{2}$ *dibawah pemetaan* $w = \frac{4z}{2iz+1}$
41. Buktikan bahwa pemetaan bilinear kontinu pada semua $z \neq -d/c$
42. Tentukan bayangan setiap kurva berikut dibawah $w = e^z$
    a. Sinar: $y = 1, x > -2$
    b. Sinar: $y = 1, x > -1$
    c. Sinar: $y = 1, x > 0$
    d. Sinar: $y = 1, x > 1$
    e. Penggal garis: $x = -2, -\pi/2 < y < \pi$
    f. Penggal garis: $x = 0, -3\pi/2 < y < 3\pi/2$
    g. Penggal garis: $x = 1, 0 \leq y < \pi$
    h. Penggal garis: $x = 2, 0 \leq y < 2\pi$

i. Garis: $y = 3$
j. Garis: $x = -8$

43. Carilah bayangan setiap kurva berikut dibawah $w = \log z$.
    a. Lingkaran $|z| = c, c > 0$
    b. Sinar yang dipancarkan dari (tetapi tidak termasuk) pusat koordinat mempunyai sudut inklasi $\alpha = -\pi/4$
    c. Sinar yang dipancarkan dari (tetapi tidak termasuk) pusat koordinat mempunyai sudut inklasi $\alpha = 3\pi/4$
    d. Sinar yang dipancarkan dari (tetapi tidak termasuk) pusat koordinat mempunyai sudut inklasi $\alpha = \pi/6$
44. Carilah bayangan di bawah fungsi eksponensial, persegi Panjang dengan titik-titik sudut pada $-1, 3, 3 + 2i,$ dan $-1 + 2i$.
45. Carilah bayangan di bawah fungsi eksponensial segi banyak yang dibentuk dengan menghubungkan dengan garis lurus titik-titik$0, 2, 2 + i, -2 + i, -2, -2 - 2i, -2i,$ dan 0, dalam urutan seperti itu.
46. Buktikan bahwa, dibawah $w = e^z$, suatu garis $y = mx + b$, dengan $m \neq 0$, dipetakan ke spiral logaritmik, dengan membuktikan dan kemudian menggabungkan dua pernyataan berikut:
    a. $garis\ y = mx + b$ dapat diganti dengan bentuk
    $$z = (1 + im)t + bi, \qquad -\infty < t < \infty$$
    b. Jika $\rho = |w|$ dan $\phi = \arg w,$ maka
    $$\rho = ce^{\theta/m}$$
    Dimana *c* konstan dan θ adalah fungsi θ.
47. Tunjukkan bahwa setiap interval berikut dipetakan di bawah $w = \sin z$, ke interval
    $$S: -1 \leq u \leq 1, \quad v = 0$$
    a. $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, y = 0$
    b. $-\pi \leq x \leq 0, y = 0$
    c. $0 \leq x \leq \pi, y = 0$
    d. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, y = 0$
48. Tunjukkan bahwa $w = \cos z$ mempunyai sifat-sifat pemetaan sebagai berikut:
    a. Setengah garis $x = \pi, y \leq 0$, dipetakan menjadi sinar $v = 0, u \leq -1$ dalam bentuk satu-satu
    b. Setengah garis garis $x = \pi, y \geq 0$, dipetakan menjadi sinar $v = 0, u \leq -1$ dalam bentuk satu-satu

c. Garis $x = 0$ dipetakan menjadi sinar $v = 0, u \geq 1$ dalam bentuk “dua ke satu”.

49. Carilah bayangan garis *I(z)*= $\frac{1}{2}$ dibawah pemetaan :

$$w = \frac{4z}{6iz + i}$$

50. Dengan menggunakan kenyataan bahwa uraian fungsi kuadrat $w = z^2$ menghasilkan $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$, tunjukkan bahwa, untuk fungsi ini, $v^2 = 4x^2(x^2 - u) = 4y^2(u + y^2)$.

51. Tentukan bayangan setiap titik berikut di bawah $w = z^{\frac{1}{2}}$:
    a. 1
    b. i
    c. -i
    d. $2 + 2\sqrt{3}\, i$.
52. Tentukan bayangan sinar dengan $\arg z = 2\pi/3$ dibawah $w = z^{1/4}$.
53. Tentukan bayangan kurva-kurva berikut dibawah $w = \log z$:
    a. Lingkaran $|z| = 1$
    b. Lingkaran $|z| = \pi/2$
    c. Sinar $\arg z = \frac{\pi}{4}$
    d. Sinar $\arg z = \frac{\pi}{2}$
    e. Sektor $\frac{\pi}{4} < \arg z < \pi/2$
54. Tentukan semua cabang yang mungkin untuk masing-masing fungsi bernilai banyak berikut dengan menggunakan sumbu khayal tak negatif sebagai potongan cabang:
    a. $w = z^{1/6}$
    b. $w = \log z$
55. Turunkan invers fungsi cosinus sebagai berikut:
    a. Tulis $w = \cos z$ dalam bentuk eksponensial
    b. Sederhanakan jawabanmu pada (a) untuk memperoleh persamaan
    $$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0$$
    Kemudian gunakan rumus kuadrat untuk menyelesaikan *z*.
    c. Tukarlah *w* dan *z* pada jawaban di (b) untuk memperoleh fungsi bernilai ganda yang diinginkan
    $$w = -i \log\left[z + (z^2 - 1)^{1/2}\right]$$
    Yang biasanya dinyatakan dengan $w = arc \cos z$ atau $w = cos^{-1} z$.

SOAL EVALUASI

1. Tentukan bayangan garis $y = 2x$ di bawah pemetaan $w = z^2$.
2. Tentukan bayangan hiperbola $y = -3/x$ di bawah $w = z^2$.
3. Tentukan bayangan daerah $0 < |z| < 3, 0 < \arg z < \pi/2$, di bawah fungsi-fungsi berikut:
   a. $w = z + 1$
   b. $w = -iz$
   c. $w = z^2$
   d. $w = z^3$
   e. $w = z^4$
   f. $w = \log z$
4. Gambarlah berbagi pemetaan untuk mengerjakan bujur sangkar dengan titik-titik sudut $+1, -1, +i,$ dan $-i$ di bawah pemetaan $w = -3iz - 1 + i$.
5. Dapatkan titik tetap, jika ada, setiap pemetaan berikut:
   a. $w = 2 - 1/z$
   b. $w = 3z - 4$
   c. $w = z + e^z$
   d. $w = z + 1/z$
6. Berapa nilai fungsi
$$w = \frac{z+i}{z-i}$$
   Pada titik $z = \infty$
7. Tentukan bayangan $|z - i| = 1$ di bawah fungsi kebalikan.
8. Tentukan transformasi bilinear yang akan memetakan berturut-turut titik-titik $-1, 0,$ dan 1 ke $-1, i,$ dan 1.
9. Selesaikan masing-masing persamaan berikut untuk semua nilai z:
   a. $e^{2z-i} = i$
   b. $\cosh z = 2$
   c. $\sin z = 2i$
   d. $\log(z - 1) = 3$
10. Buktikan :
    a. $tg^2\, z + 1 = sec^2 z$, untuk semua z.
    b. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, untuk semua z.
11. Tentukan modulus dan argument bagi besaran e^{z^2}.
12. Nyatakan pernyataan berikut benar atau salah

a. Periode e^z adalah 2π.
b. Untuk setiap *z*, selalu benar bahwa $|\cos z| \leq 1$.
c. Fungsi eksponensial bukan pemetaan satu-satu.
d. Fungsi konstan $w = c$ adalah serupa di mana-mana.
e. $\cos(iz) = \cosh z$, untuk setiap *z*.
f. $\log 0 = 0$.
g. Fungsi pangkat $w = z^n$ adalah serupa di mana-mana untuk $n > 0$.
h. Transformasi bilinear adalah pemetaan satu-satu dari bidang z diperluas ke bidang *w*diperluas.
i. Pemetaan linear $w = az + b$ adalah putaran regangan diikuti oleh kesekawanan.
j. Fungsi konstan $w = c$ tidak mempunyai titik tetap.

13. Gunakan fungsi $w = z^2$, suatu titik z_0 yang sesuai, dan dua kurva yang anda pilih sendiri untuk menggambarkan kenyataan bahwa jika syarat $f'(z_0) \neq 0$ ditiadakan, maka keseruapaan ditolak.
14. Gunakan sifat-sifat transformasi serupa untuk mendalihkan bahwa, pemetaan bilinear $w = az + b, a \neq 0$, memutar setiap kurva pada bidang datar dengan sudut sama dengan *arg a*.
15. Verifikasi bahwa, di bawah transformasi kebalikan, garis $x = \frac{1}{2}$ dipetakan ke lingkaran $(u-1)^2 + v^2 = 1$, garis $y = \frac{1}{2}$ dipetakan ke lingkaran $u^2 + (v+1)^2 = 1$, dan garis $y = x + \frac{1}{2}$ dipetakan ke lingkaran $(u+1)^2 + (v+1)^2 = 2$.
16. Tentukan invers fungsi linear $w = az + b, a \neq 0$. Apakah fungsi analitik?
17. Tentukan turunan fungsi invers sinus $w = sin^{-1} z$.
18. Diberikan potensial kompleks $f(z) = z + 1$, tentukan dan gambarlah garis-garis ekipotensialnya.
19. Tunjukkkan bahwa besarnya intensitas suatu medan yang diwakili oleh potensial kompleks $f(z) = u + iv$ diberikan oleh $|E| = |f'|$.
20. Tentukan permukaan Riemann untuk fungsi $w = (z - a)^{1/2}$, di mana *a* sembarang bilangan kompleks bukan nol.

LAMPIRAN

BAGIAN A

Fungsi bernilai banyak

Kita syaratkan bahwa untuk setiap nilai pada peubah bebas dalam domain fungsi itu, kita tentukan satu dan hanya satu nilai pada peubah tak bebas. Akibatnya, orang sering membicarakan tentang suatu “fungsi bernilai tunggal” tidak hanya untuk menekankan “hanya satu” pada defenisi itu, tetapi juga untuk membedakan suatu fungsi dari “ fungsi bernilai banyak” yang kita perkenalkan sekarang.

Kita mempunyai definisi sebagai berikut.

Misalkan *D* adalah suatu himpunan titik-titik pada bidang datar dan misalkan suatu aturan *g* diberikan dengan sifat setiap *z* di *D* dihubungkan dengan paling sedikit satu titik *w* pada bidang datar dan terdapat paling sedikit satu titik di *D* yang dihubungkan dengan paling sedikit dua titik *w* yang berbeda.

Fungsi Akar

Relasi inversi

$$w = z^{1/n}, \quad n = 2,3,4, \dots$$

Yang berasal dari fungsi pangkat akan dinamakan fungsi akar. Kita mengetahui bahwa, untuk setiap *z* tidak nol,dan menghasilkan *n* nilai berbeda untuk *w* dan karenanya didefenisikan sebagai suatu fungsi bernilai banyak dengan seluruh bidang datar sebagai domainnya.

Sekarang kita membatasi kita pada *n* = 3 dan kita membicarakan beberapa aspek dari

$$w = z^{1/3}$$

Ambil bilangan kompleks tidak nol

$$z = re^{it}$$

Maka menghasilkan tiga titik bayangan berbeda, yang diberikan oleh

$$w_k = r^{1/3} e^{i(t+2k\pi)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

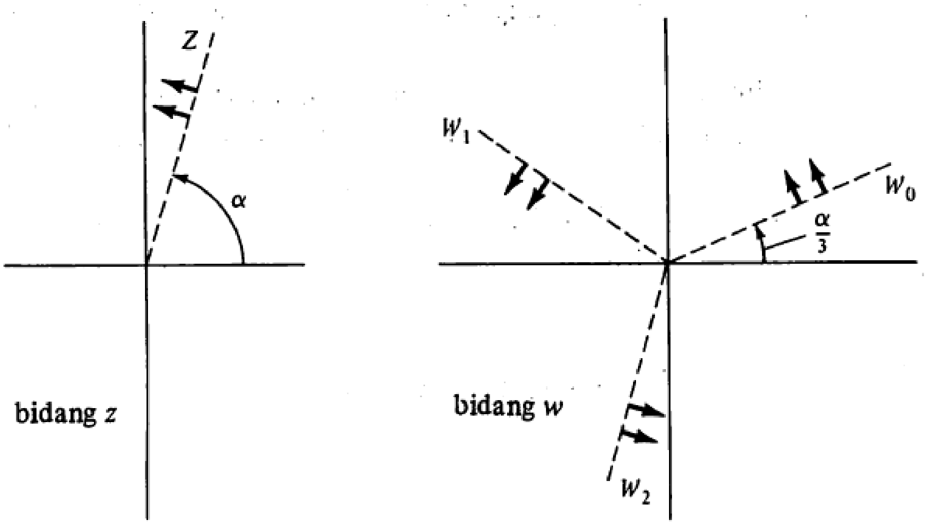
Modulus setiap titik ini, jelas sama dengan $r^{1/3}$, sedang argumennya dibedakan satu dengan yang lain oleh $2\pi/3$.

Perhatikan suatu sinar Z: $\arg z = \alpha$. Maka di bawah $w = z^{1/3}$, Z mempunyai tiga bayangan, yang masing-masing juga merupakan sinar:

$$w_0: \arg w = \frac{\alpha}{3}$$

$$w_1: \arg w = \frac{\alpha + 2\pi}{3}$$

$$w_2: \arg w = \frac{\alpha + 4\pi}{3}.$$



Gambar 3.8 $w = z^{1/3}$

Ciri dari fungsi akar pada gambar diatas bahwa fungsi bernilai ganda

$$w = z^{1/3}$$

Dapat dipisahkan menjadi tiga bagian berikut:

$$w_0 = r^{1/3} e^{it/3}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

$$w_1 = r^{1/3} e^{i(t+2\pi)/3}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

$$w_2 = r^{1/3} e^{i(t+4\pi)/3}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

Maka dapat kita lihat bahwa setiap pernyataan ini menentukan suatu *fungsi bernilai tunggal* yang memetakan seluruh bidang *z* ke "sepertiga" bidang *w*. khususnya,

$$w_0 \text{memetakan bidang } z \text{ ke baji } 0 \le \arg w \ \le \frac{2\pi}{3} \text{ tambah } w = 0.$$

$$w_1 \text{memetakan bidang } z \text{ ke baji } \frac{2\pi}{3} \le \arg w \ \le \frac{4\pi}{3} \text{ tambah } w = 0.$$

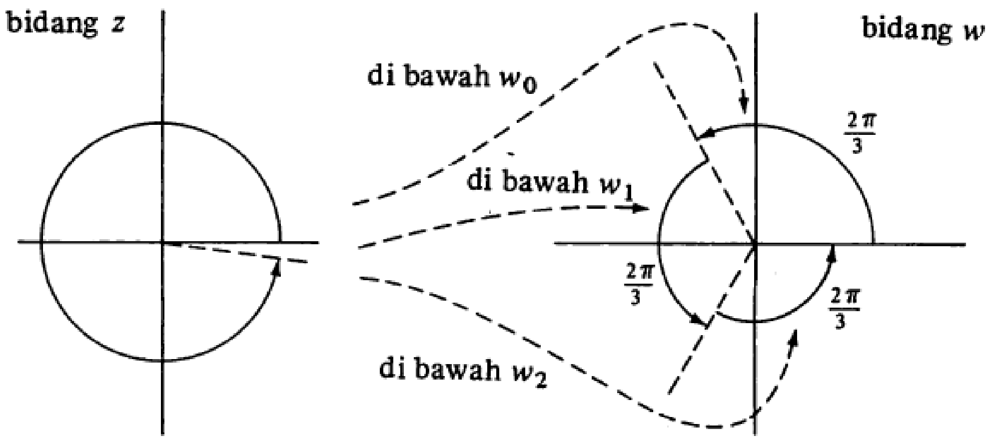
$$w_2 \text{ memetakan bidang } z \text{ ke baji } \frac{4\pi}{3} \le \arg w \ \le 2\pi \text{ tambah } w = 0.$$

Kita dapat menunjukkkan bahwa ketiga fungsi diatas adalah analitik di mana-mana kecuali sepanjang sumbu nyata tak negatif. Kita batasi domainnya dengan menghapuskan sumbu nyata tak negative, dan kita definisikan

$$f_0(z) = r^{1/3} e^{it/3}, 0 \le t < 2\pi, r \ne 0$$

$$f_1(z) = r^{1/3} e^{i(t+2\pi)/3}, 0 \le t < 2\pi, r \ne 0$$

$$f_2(z) = r^{1/3} e^{i(t+4\pi)/3}, 0 \le t < 2\pi, r \ne 0$$



Gambar 3.9 cabang-cabang $w = z^{1/3}$

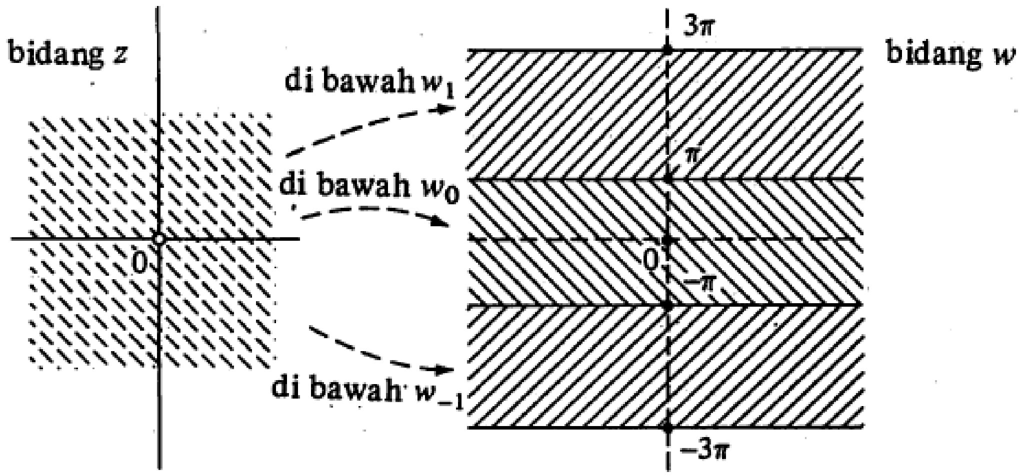
Masing-masing fungsi ini dinamakan cabang fungsi bernilai ganda $w = z^{1/3}$. Sinar yang terdiri dari sumbu nyata tak negative dinamakan potongan cabang, dan titik *z* = 0, dari mana potongan cabang memancar dinamakan titik cabang untuk setiap cabang. Sebagai akibat dari definisi itu, masing-masing dari ketiga cabang itu merupakan fungsi bernilai tunggal yang analitik pada setiap titik domainnya.

Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma merupakan inversi fungsi eksponensial. Aspek pemetaan dari fungsi eksponensial bahwa inversi diambil sebagai pemeetaan, “meniadakan”.

Dalam melihat hubungan $\arg z = \arg z + 2k\pi$. Fungsi bernilai ganda dapat dituliskan sebagai

$$w = ln|z| + i(\arg z + 2k\pi).$$



Gambar 3.10 Pemetaan $w = \log z$

Jika kita ambil $k = 0$, kita memperoleh fungsi bernilai tunggal

$$w_0 = \ln|z| + i \arg z,$$

Jika kita ambil $k = 1$, kita memperoleh fungsi bernilai tunggal yang lain

$$w_1 = \ln|z| + i\ (\arg z + 2\pi)$$

Yang didefinisikan untuk semua $z \neq 0$. Demikian pula untuk $k = -1$, kita memperoleh

$$w_{-1} = \ln|z| + i(\arg z - 2\pi)$$

Juga bernilai-tunggal dan terdefinisikan untuk semua $z \neq 0$. Pada umumnya, sembarang nilai bulat k akan menghasilkan fungsi yang demikian. Dengan catatan bahwa akibat pengambilan $k = 0,1,-2,2,$ ..., $\arg z$ dibatasi menjadi berturut-turut:

$$-\pi < \arg z \leq \pi, \quad \text{yang merupakan domain } w_0$$

$$\pi < \arg z \leq 3\pi, \quad \text{yang merupakan domain } w_1$$

$$-3\pi < \arg z \leq -\pi, \quad \text{yang merupakan domain } w_{-1}$$

Selanjutnya, kita hapus sumbu nyata negative itu dari setiap domain diatas untuk mendefinisikan cabang-cabang fungsi logaritma:

$$f_0(z) = \ln|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi$$

$$f_1(z) = \ln|z| + i \arg z, \quad \pi < \arg z < 3\pi$$

$$f_{-1}(z) = \ln|z| + i \arg z, \quad -3\pi < \arg z < -\pi$$

$$f_2(z) = \ln|z| + i \arg z, \quad 3\pi < \arg z < 5\pi$$

Setiap cabang merupakan fungsi analitik bernilai tunggal di seluruh domain definisinya. Potongan cabang fungsi logaritma telah dipilih pada sumbu nyata tak positif. Tetapi seperti kasus fungsi akar, suatu sinar yang dipancarkan dari pusat koordinat dapat dipakai sebagai potongan cabang.

Titik cabang fungsi logaritma ialah nol dan tak berhingga. Dari pembahasan di atas, kita sekarang dapat menyimpulkan bahwa fungsi logaritma adalah analitik pada setiap titik di bidang datar kecuali pudsat koordinat. Kita menunjukkan bahwa turunan fungsi logaritma diberikan oleh

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

Untuk semua $z \neq 0$.

Suatu konsep sangat menarik yang berhubungan erat dengan fungsi bernilai ganda yaitu *Permukaan Riemann* (Riemann Surface).

BAGIAN B

Pemetaan Serupa

Konsep pemetaan serupa adapat diartikan sebagai interpretasi geometrik pada analitisitas. Aspek geometrik utama pada keserupaan, ialah *kesamaan sudut dalam besar dan arahnya*.

Misalkan fungsi $w = f(z)$ analitik pada titik z_0 dan misalkan bahwa $f'(z_0) \neq 0$. Maka menurut definisi, *f* analitik pada suatu lingkungan $z_{0,}$ sebutlah *N*.

Andaikan suatu kurva $mulus^{*}A$ melewati z_0 dan bahwa suatu titik berubah-ubah *z* mendekati z_0 sepanjang *A*. Di bawah *f*, *A* mempunyai bayangan A' pada bidang *w*, dan karena z mendekati z_0 sepanjang *A*, $w_0 = f(z_0)$ sepanjang A'. Maka karena $f'(z_0)$ ada, kita mengetahui bahwa

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

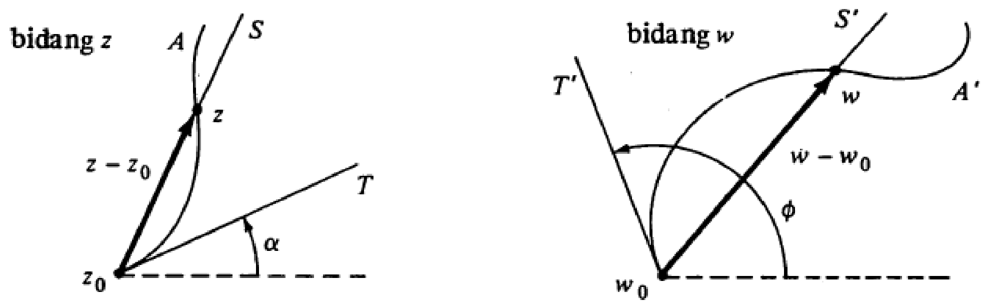
Yang dapat kita sebut sebagai

$$\text{untuk } z \to z_0, \frac{w - w_0}{z - z_0} \to f'(z_0),$$

yang selanjutnya berarti

$$\arg \frac{w - w_0}{z - z_0} \to \arg f'(z_0)$$

Sedangkan hubungan terakhir ini berlaku bagi kelipatan 2π.



Gambar 3.11 $\phi = \alpha + \arg f'(z_0)$.

Sekarang, jika $z \to z_{0,}$ garis sekan *S* menuju ke *T*, yang merupakan garis singgung *A* pada $z_{0,}$ yang kehadirannya di jamin oleh definisi kurva mulus. Dengan melambangkan sudut inklinasi *T* dengan α, kita lihat bahwa

$$\text{jika } z \to z_{0,} \ \arg(z - z_0) \to \alpha$$

Sementara itu, pada bidang *w*,

$$\text{jika } z \to z_{0,} \ w \to w_0$$

maka garis sekan *S'* menuju ke *T'* yang merupakan garis singgung *A'* pada w_0. Dengan melambangkan sudut inklinasi *T'* dengan ϕ, kita lihat bahwa

$$\text{jika } z \to z_{0,} \ \arg(w - w_0) \to \phi.$$

Karena itu, kita dapat menggabungkan persamaan diatas bahwa:

$$\text{jika } z \to z_{0,} \ (\phi - \alpha) \to \arg f'(z_0)$$

dan yang dalam limit

$$\phi = \alpha + \arg f'(z_0).$$

Teorema I

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada z_0 dan bahwa $f'(z_0) \neq 0$. Misalkan A adalah suatu kurva mulus melewati z_0 dan misalkan A' menunjukkan bayangan A di bawah f. Maka, jika sudut inklinasi A pada z_0 adalah α, maka sudut inklinasi A' pada $f(z_0)$ adalah $\alpha + arg\, f'(z_0)$.

Dengan istilah yang berbeda, teorema di atas mengatakan bahwa setiap kurva mulus yang melewati z_0 diputar dengan sudut sama dengan $arg\, f'(z_0)$.

Suatu akibat langsung dari teorema di atas adalah bahwa sudut antar dua kurva mulus sembarang yang berpotongan pada z_0 akan tetap tak berubah, dalam besar dan arahnya, oleh suatu pemetaan *f* yang analitik pada z_0 dan yang turunanya tidak nol pada titik itu. Inilah yang dimaksud dengan sifat *kesamaan sudut* yang ditujukkan di muka, dan suatu fungsi yang memiliki sifat itu dinamakan transformasi serupa atau pemetaan serupa.

Akibat Teorema

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada z_0 dan bahwa $f'(z_0) \neq 0$. Misalkan A dan B adalah dua kurva mulus yang berpotongan pada z_0 dan memebentuk sudut θ diukur dari A ke B. Maka bayangannya, A' dan B', di bawah f, membentuk sudut yang diukur dari A' ke B' sebesar θ. Secara singkat, di bawah f, sudut perpotongan antara A dan B di z_0 adalah tetap tak berubah dalam besar dan arahnya.

Bukti akibat teorema ini sangat jelas, karena sesuai dengan teorema di atas, setiap kurva *A* dan *B* diputar dengan sudut yang sama dengan arg $f'(z_0)$.

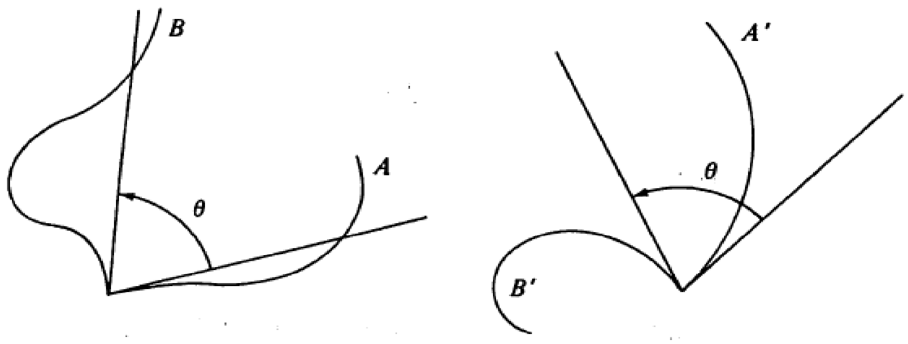
Kita dapat memperoleh bahwa:

$$\text{jika } z \to z_0, \qquad \left|\frac{w - w_0}{z - z_0}\right| \to |f'(z_0)|;$$

jadi

$$\text{jika } z \to z_0, \qquad |w - w_0| \to |f'(z_0)||z - z_0|$$

Pernyataan terakhir ini mengatakan bahwa dalam limit, $|w - w_0|$ merupakan kelipatan konstan $|z - z_0|$, dimana konstanta itu merupakan bilangan nyata positif $|f'(z_0)|$; konstanta kesebandingan $|f'(z_0)|$ sering dinamakan *rasio pembesaran* pada z_0. Jadi setiap Panjang dalam lingkungan z_0 yang kecil diperbesar dengan factor positif yang sama, dan kita katakana bahwa *f* merupakan suatu pemetaan yang memelihara skala pada z_0 dalam pengertian infinitesimal.



Gambar 3.12 Pemetaan Serupa

Teorema II

Andaikan bahwa $w = f(z)$ *analitik pada* z_0 *dan bahwa* $f'(z_0) \neq 0$. *Maka* f *mempunyai suatu inversi* $z = f^{-1}(w)$ *yang merupakan fungsi kontinu (bernilai tunggal) di suatu lingkungan* N *pada titik* $w_0 = f(z_0)$ *dan sedemikian hingga* $f^{-1}(w_0) = z_0$. *Lebih dari pada itu,* f^{-1} *analitik di seluruh N dan, untuk setiap w di N,*

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{dw/dz};$$

Jadi, turunan fungsi inversi merupakan kebalikan turunan fungsi mula-mula.

Bukti lengkap teorema ini mempergunakan sejumlah hasil-hasil yang biasanya termasuk dalam pelajaran kalkulus lanjut sedangkan dalam buku kita tidak mensyaratkan dikuasainya kalkulus lanjut di pihak pembaca ini.

Permukaan Logaritma

Kita harus mengingat Kembali materi kita tentang fungsi bernilai-ganda.

$$w = \log z$$

Bahwa cara lain menuliskan fungsi ini adalah

$$w = ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = bilangan\ bulat$$

Kemudian, bila *k* mengambil semua nilai bulat, kita memperoleh fungsi-fungsi bernilai tunggal

$$\dots w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_{2,} \dots$$

Yang masing-masingnya memetakan bidang *z*, kecuali $z = 0$ ke jalur mendatar pada bidang *w*, yang lebarnya 2π.

INDEKS

GLOSARIUM

Argument	: Pernyataan yang memiliki ungkapan ataupun pernyataan dalam menarik kesimpulan.
Bidang	: Permukaan dari keseluruhan ruang baik dua dimensi maupun tiga dimensi.
Domain	: Daerah asal atau himpunan yang memuat elemen.
Geometri	: Ilmu matematika yang membahas tentang bentuk dan ukuran.
Inklanasi	: Sudut antara bidang yang menjadi patokan dengan bidang yang diukur kemiringannya.
Invers	: Suatu kebalikan dari elemen pada matriks.
Logaritma	: Operasi matematika kebalikan dari eksponensial.
Modulus	: Operasi yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lainnya.
Pemetaan	: Relasi antara himpunan satu dengan himpunan lainnya serta berpasangan tepat satu antar himpunan.

DAFTAR PUSTAKA

Belajar, K., Di, L., Di, K. L., Koligatif, S., & Di, L. (2014). *Geometri analitik dan tranformasi*. 1–36. http://repository.ut.ac.id/3891/1/EKSI4417-M1.pdf

Kusni. (2008). *Geometri Datar Dan Ruang*. 1–66.

Belajar, K., Di, L., Di, K. L., Koligatif, S., & Di, L. (2014). *Geometri analitik dan tranformasi*. 1–36. http://repository.ut.ac.id/3891/1/EKSI4417-M1.pdf

Kusni. (2008). *Geometri Datar Dan Ruang*. 1–66.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-a). *FUNGSI, LIMIT, DAN KONTINUITAS*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-b). *GARIS LRUS*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-c). *LINGKARAN*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-d). *PARABOLA*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-e). *RPS Persamaan Diferensial*.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.-f). *TRANSFORMASI SUSUNAN SUMBU*.

Lumbantoruan, J. H. (2017). *PENGEMBANGAN BAHAN AJAR INTEGRAL TAK TENTU BERBASIS MODEL SMALL GROUP DISCUSSION DI PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UKI TAHUN 2016/2017*. *10*, 99–118.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BUKU INTEGRAL-TENTU*.

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN GEOMETRI 1*.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA*.

Lumbantoruan, J. H. (2019e). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown. *Jurnal EduMatSains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2019f). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017/2018. *Edumatsains*, *3*, 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2019g). *TURUNAN*.

Lumbantoruan, J. H. (2020). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN PEMOGRAMAN LINEAR*.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). Solid State Technology Volume: 64 Issue: 2 Publication Year: 2021. *Solid State Technology*, *64*(2), 4427–4444.

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics. *Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, *560*(Acbleti 2020), 507–513. https://doi.org/10.2991/assehr.k.210615.095

Monks, F. ., Knoers, A. M. ., & Haditono, S. R. (2006). *Psikologi Perkembangan*. 390.

P. A., S., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *Edumatsains*, *1*(1), 35–49.

Pendidikan, J., & Sains, M. (2020). *EduMatSains*. *1*(1), 23–34.

Simorangkir, M. R. R., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Aksesibilitas Anak Berkebutuhan Khusus. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, *14*(1), 204–213. https://doi.org/10.33541/jdp.v12i3.1295