VARIABEL KOMPLEKS

DERET LAURENT, RESIDU

Oleh :

Nama : Ester Mayasari Silaban

NIM : 1813150008

Prodi : Pendidikan Matematika

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

JAKARTA

2022

PRAKATA

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas rahmat dan limpah kasih-Nya penulis dapat menyelesaikan buku ajar tentang materi “Variabel kompleks” dengan topik “**Deret Laurent, Residu**” dengan baik dan tepat waktu.

Penulis meminta maaf apabila terdapat kesalahan penulisan atau kesalahan apapun pada suguhan materi. Saran dan kritik yang membangun akan sangat membantu penulis demi perbaikan materi agar bisa lebih baik lagi.

Akhir kata penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada seluruh pihak atau media yang terlibat, khususnya Dosen pengampu mata kuliah variabel kompleks serta buku referensi yang diberikan. Juga kepada internet (google) sebagai referensi tambahan dan terlebih kepada diri sendiri yang telah berjuang dalam menyelesaikan buku ajar ini.

Penulis

Ester Mayasari Silaban

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PENDAHULUAN

Variabel kompleks merupakan perluasan dari sistem bilangan real. Mata kuliah variabel kompleks dikategorikan ke dalam pelajaran yang cukup sulit. Oleh karena itu, dibutuhkan wawasan yang cukup luas agar dapat memahami mata kuliah ini. Dalam hal ini, Saya membahas tentang materi "**Deret Laurent Residu**"

Tujuan utama penulisan buku ini adalah untuk memenuhi prasyarat lulus mata kuliah variabel kompleks pada tahun ajaran 2021/2022. Sementara, tujuan lainnya adalah untuk menambah wawasan ataupun ilmu pengetahuan serta dapat menjadi pedoman (sumber belajar) bagi para pembaca yang ingin mempelajari atau mendalami materi tentang variabel kompleks.

Kiranya buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca terlebih dapat dipahami dengan mudah.

BAB 7
DERET LAURENT, RESIDU

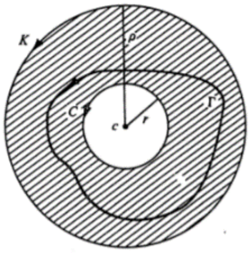
7.1 Deret Laurent

Deret Laurent merupakan bentuk umum dari Deret Taylor yang memuat bentuk $(z - z_0)$ berpangkat bilangan bulat negatif ditambah dengan $(z - z_0)$ berpangkat bilangan bulat positif (berhingga atau tak berhingga).

Penguraian suatu fungsi $f(z)$ ke dalam deret *Taylor* menyatakan fungsi itu di dalam lingkaran konvergensinya. Namun, yang sering hanyalah bagian daerah analitisitasnya, yakni f.

Misalnya, deret $\sum z^2$ konvergen ke $f(z) = \frac{1}{(1-z)}$ hanya pada cakram $|z| < 1$, meskipun f analitik dimana-mana kecuali pada $z = 1$. Lalu pertanyaan yang sesuai adalah; adakah suatu penguraian deret yang menyatakan f di dalam daerah yang lebih lengkap, atau mungkin, pada semua titik dimana f analitik? Nah, hal inilah yang menjadi tujuan utama dari pasal ini, yakni untuk memberikan jawaban terhadap pertanyaan yang umum dan wajar atau sesuia, salah satunya dengan mengembangkan *deret Laurent* pada fungsi analitik.

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa deret Laurent suatu fungsi $f(z)$ ***konvergen***, umumnya terdapat di dalam anulus melingkar $r < |z - c| < \rho$ (Gambar 7.1). Hal inilah yang menjadi dasar penggunaan *anulus konvergensi* sebagai pengganti lingkaran konvergensi.



Gambar 7. 1 Anulus Konvergensi

7.1.1 Teorema Laurent

Jika diketahui fungsi $f(z)$ analitik pada setiap titik di anulus tertutup

$$A: r \leq |z - z_0| \leq \rho$$

Maka terdapat suatu deret dalam $(z - z_0)$ berpangkat positif dan negatif yang menyatakan f pada setiap titik ζ di dalam anulus (terbuka) $r < |z - z_0| < \rho$:

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\zeta - z_0)^n}$$

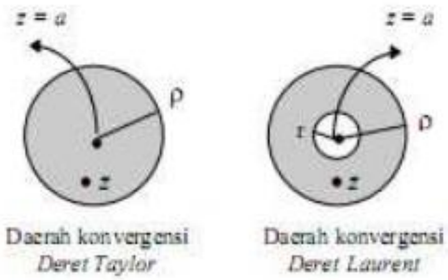
dengan, koefisien deret diberikan oleh rumus berikut :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

dan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} \, dz, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

dimana, $K: |z - z_0| = \rho$ dan $C: |z - z_0| = r$, keduanya berorientasi positif perhatikan gambar berikut ;



Gambar 7. 2 Daerah Konvergensi Deret Taylor dan Laurent

Apabila fungsi $f(z)$ tidak analitik di $z = z_0$ maka $f(z)$ tidak dapat diperderetkan dalam deret Taylor di $z = z_0$. Masalah ini tentunya dapat diselesaikan dengan cara membuang titik singular $z = z_0$ dari daerah $|z - z_0| < R$ sehingga diperoleh daerah $R_1 < |z - z_0| < R_2$ (cincin/annulus) yang merupakan daerah keanalitikan fungsi $f(z)$.

Misalkan, $f(z)$ tidak analitik di $z = z_0$ tetapi analitik pada anulus $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Maka, fungsi $f(z)$ dapat diperderetkan di $z = z_0$ menjadi bentuk deret Laurent seperti berikut :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{(z - z_0)^n} \dots\dots R_1 < |z - z_0| < R_2$$

dengan :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, n = 0,1,2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz, n = 1,2,3, \dots$$

Penguraian deret pada teorema tersebut di atas dinamakan ***deret Laurent f*** pada c dan anulus terbuka $r < |z - c| < \rho$ dinamakan ***anulus konvergensi*** deret. Deret dapat juga dituliskan seperti bentuk berikut :

$$\sum_{\boldsymbol{n}=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c_n} (z - c)^n,$$

dengan koefisiennya diberikan oleh rumus :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

dimana r adalah sembarang lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif yang terletak di dalam anulus konvergensi dan memuat pusat penguraian c di bagian dalamnya (perhatikan gambar 7.1).

P E N T I N G

1. Dengan cara yang sama seperti pada pembuktian Teorema 6.9, dapat diperlihatkan bahwa deret Laurent suatu fungsi $f(z)$ konvergen seragam ke f pada setiap titik dalam sembarang himpunan tertutup di dalam anulus konvergensinya. Akibatnya, seperti halnya dalam kasus deret Taylor, suatu deret Laurent didiferensialkan dan diintegralkan suku demi suku di dalam anulus konvergensinya.

2. Pada Bab 9 diperlihatkan bahwa, jika penguraian deret Laurent suatu fungsi pada anulus yang diberikan ada, maka ia tunggal. Kenyataan ini menjamin bahwa, jika deret Laurent telah diperoleh untuk fungsi yang diberikan $f(z)$, maka penguraian itu pastilah deret Laurent bagi f.

3. Perhatikan bahwa, jika $b_n = 0$ di dalam rumus Teorema 7.1, maka deret Laurent menjadi deret Taylor. Dalam hal ini, suatu deret Taylor merupakan suatu kasus khusus bagi deret Laurent.

Penting untuk diperhatikan bahwa, jika diketahui suatu fungsi $f(z)$ dan suatu titik c pada bidang datar, kemungkinan besar fungsi f dapat mempunyai lebih dari satu deret Laurent dengan pusat c (tergantung pada anulus konvergensi dimana deret Laurent dimaksud menyatakan f. Di sisi lain, pernyataan ini tidak bertentangan dengan catatan 2. Alasannya karena secara umum, banyaknya deret Laurent yang berbeda bagi suatu fungsi f akan bergantung pada pusat c dan banyaknya singularitas fungsi f. Misalnya fungsi :

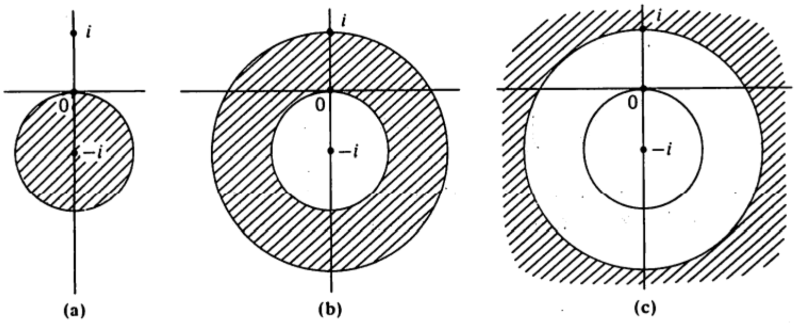
$$f(z) = \frac{3}{z(z-i)}$$

mempunyai tiga penguraian deret yang berbeda dengan pusat pada $c = -i$, yakni :

1. Suatu deret Taylor yang konvergen di dalam cakram terbuka $|z+i| < 1$
2. Suatu deret Laurent yang mempunyai anulus konvergensi $1 < |z+i| < 2$

3. Suatu deret Laurent yang konvergen di dalam anulus $2 < |z+i| < \infty$

Pada contoh berikut, akan diilustrasikan berbagai teknis untuk mengembangkan deret Laurent bagi fungsi analitik. Penentuan koefisien berdasarkan rumus Teorema 7.1.1 pada umumnya sangat rumit, susah dipakai, maka dari itu, biasanya digunakan cara yang lebih simpel (langsung), yakni cara substitusi dan operasi pada deret, seperti yang telah digunakan pada bab 6.



Gambar 7. 3 Tiga Deret Berbeda untuk $f(z) = 3/[z(z-i)]$

C O N T O H 1

Tentukan penguraian deret Laurent bagi fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ dengan pusat $c = 1$ dan anulus konvergensi A: $1 < |z-1| < \infty$.

Pembahasan :

Berdasarkan petunjuk soal, jelaslah bahwa f analitik di dalam A, maka dalam notasi Teorema 7.1.1, $r\ dan\ \rho$ dapat berupa sembarang bilangan nyata yang lebih besar dari 1.
Berikutnya, akan dicari sebuah deret dalam $(z-1)$ yang konvergen ke $f(z)$ untuk semua z sedemikian sehingga $|z-1| > 1$ (perhatikan gambar 7.3(a)). Dari pertidak samaan $|z-1| > 1$ diperoleh :

$$\frac{1}{|z-1|} < 1$$

Oleh karena itu, besaran $\frac{1}{(z-1)}$ dapat disubstitusikan untuk z dalam sembarang deret yang konvergen untuk $|z| < 1$, sekarang Kita punya :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1}$$

$$= \frac{1}{z-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}}$$

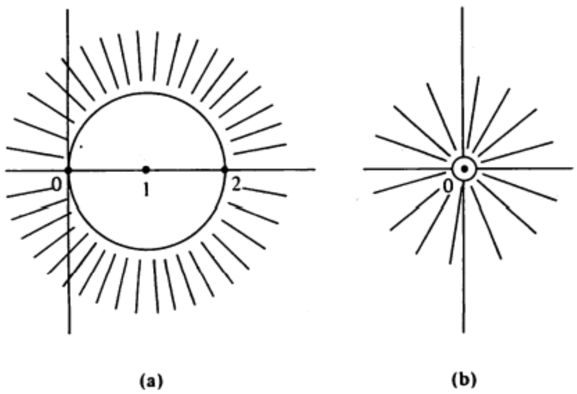
$$= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-1}\right)^n, \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}}, 1 < |z-1| < \infty$$

Jadi, deret Laurent bagi $f(z)$ adalah :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \cdots$$

dan anulus konvergensinya adalah $1 < |z-1| < \infty$.



Gambar 7. 4 Contoh 1

P E N T I N G

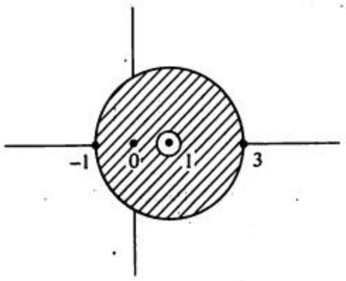
Perhatikan bahwa fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ sudah merupakan deret Laurent dengan pusat pada $c = 0$, yang anulus konvergensinya adalah $0 < |z| < \infty$ (perhatikan gambar 7.3(b)).

C O N T O H 2

Carilah suatu penguraian deret untuk fungsi :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

dalam anulus $0 < |z-1| < 2$ “di antara” kedua titik singular $z = 1$ dan $z = -1$, perhatikan gambar 7.5 berikut :



Gambar 7. 5 Contoh 2

Pembahasan :

Langkah awal : gunakan asas substitusi, diperoleh :

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n, \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, |z-1| < 2$$

Perlu dicatat bahwa, ini merupakan deret Taylor yang konvergen pada bagian dalam lingkaran $|z-1|=2$.

Langkah berikutnya :
gandakan deret di atas dengan $\frac{1}{z-1}$ yang merupakan deret Laurent dalam $(z-1)$, diperoleh :

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z-1) - \cdots.$$

Langkah akhir :
keluarkan titik $z=1$ dari daerah konvergensinya, sehingga menjadi
$0<|z-1|<2$.

C O N T O H 3

Dengan cara yang sama seperti no.2, carilah penguraian deret untuk $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$, dengan pusat pada $c=0$.

Pembahasan :

$$\frac{e^z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, |z|<\infty$$

berikutnya, kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{z^2}$ untuk memperoleh :

$$\frac{e^z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots$$

yang konvergen untuk semua $z \neq 0$; jadi pada anulus $0<|z|<\infty$.

C O N T O H 4

Azaz substitusi akan digunakan sekali lagi untuk deret Laurent bagi

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\, z^{2n}}$$

yang anulus konvergensinya adalah $0 < |z| < \infty$ dan diperoleh dari daerah konvergensi $|z| < \infty$ bagi deret cosinus dengan mengeluarkan $z = 0$.

C O N T O H 5

Uraikan fungsi $f(z) = \frac{5z+2i}{z(z+i)}$ di dalam anulus $1 < |z - i| < 2$ (petunjuk : perhatikan gambar 7.5(a)).

Pembahasan :

Pertama, Kita uraikan menjadi pecahan parsial, diperoleh :

$$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z+i}$$

Deret Laurent untuk $\frac{2}{z}$ dalam anulus $1 < |z - i| < \infty$ (perhatikan gambar 7.5(b)) adalah :

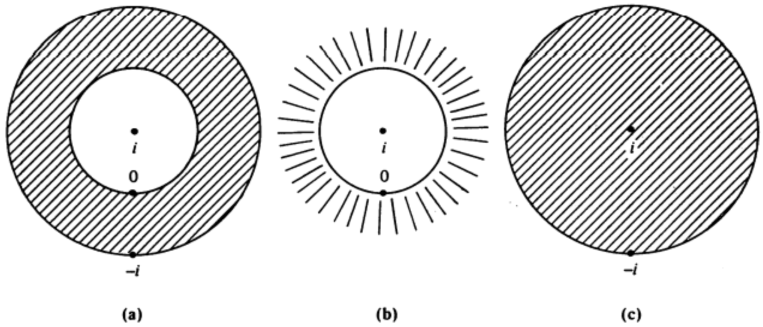
$$\frac{2}{z} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^{n+1}}$$

Di sisi lain, deret Taylor untuk $\frac{3}{z+i}$ dalam cakram $|z - i| < 2$ (perhatikan gambar 7.5(c)) adalah :

$$\frac{3}{z+i} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$$

Kesimpulan :

penguraian deret untuk $f(z)$ adalah jumlah kedua deret tersebut dan daerah konvergensinya adalah irisan daerah konvergensi masing-masing deret tersebut, yaitu : $1 < |z - i| < 2$ yang merupakan anulus dimana kedua deret tersebut secara bersama-sama konvergen di seluruh daerah itu.



Gambar 7. 6 Contoh 5

7.2 Singularitas dan Kenolan Fungsi Analitik

Ingat Kembali defenisi pada bab sebelumnya yang menyatakan demikian :

Suatu titik z_0 merupakan ***singularitas*** fungsi $f(z)$, bila f gagal menjadi analitik pada z_0, sementara setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik dimana f analitik.

Pada dasarnya terdapat dua macam singularitas, yakni :

1. Singularitas tak terasing
2. Singularitas terasing

Suatu titik z_0 merupakan ***singularitas tak terasing*** bagi fungsi f jika dan hanya jika z_0 singularitas bagi f dan setiap lingkaran z_0 memuat paling sedikit satu singularitas f yang lain dari z_0. Sebagai contoh, fungsi :

$$f(z) = Log\, z$$

mempunyai singularitas tak terasing pada setiap titik di sumbu nyata tak positif. Secara umum, setiap fungsi yang dikaitkan dengan suatu potongan cabang memiliki singularitas tak terasing. Hal ini didasari oleh defenisi yang mengatakan bahwa; setiap lingkungan terhapus bagi singularitas tak terasing fungsi f memuat paling sedikit satu singularitas f yang lain. Ini berarti bahwa, jika suatu fungsi memiliki satu singularitas tak terasing, maka ia mempunyai tak berhingga banyak singularitas *meskipun tidak perlu tak terasing*.

Misalkan diketahui bahwa z_0 merupakan singularitas fungsi $f(z)$, maka z_0 akan dinamakan ***singularitas terasing*** f dengan syarat terdapat suatu lingkungan terhapus z_0, dimana f analitik. Misalnya, fungsi :

$$f(z) = \frac{4i}{z^2 + 1}$$

mempunyai singularitas terasing, satu pada $+i$ dan satu lagi pada $-i$. Hal ini cukup mudah untuk dilihat, karena suatu lingkungan terhapus dengan jari-jari 1 (atau kurang) dapat dilukis di sekeliling salah satu dari kedua titik itu dimana f analitik di dalamnya.

Singularitas terasing lebih jauh digolongkan sebagai berikut. Misalkan diketahui bahwa z_0 merupakan singularitas terasing fungsi $f(z)$. Maka $f(z)$ analitik di seluruh suatu lingkungan terhapus $N^*(z_0, \rho)$; dengan kata lain, di seluruh anulus :

$$0 < |z - z_0| < \rho$$

Oleh karena itu, f memiliki penguraian deret Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (\mathbf{1})$$

ada 3 kemungkinan, yakni :

K A S U S 1

Tidak ada $(z - z_0)$ yang berpangkat negatif pada (1). Pada kasus ini, z_0 dinamakan **singularitas yang dapat dihilangkan** (*removable singularity*). Misalnya fungsi :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada $z_0 = 0$ karena penguraian deret di sekeliling titik tersebut adalah :

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots, \qquad \textbf{(2)}$$

yang tidak memuat z berpangkat negatif, jadi deret tersebut benar-benar merupakan deret Taylor.

Selanjutnya perhatikan bahwa deret pada persamaan (2) terdefinisikan pada $z = 0$ dimana ia mencapai nilai 1. Fakta ini menunjukkan bahwa singularitas superfisial pada $z = 0$ dapat dihilangkan dengan mendefinisikan fungsi itu secara tepat pada titik tersebut. Proses pendefinisian fungsi pada titik itu berlangsung sangat alami. Jadi, dengan mengambil limit pada persamaan (2) untuk $z|\rightarrow|0$ diperoleh :

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

yang pada gilirannya menyarankan agar Kita mendefinisikan :

$$f(0) = 1$$

jadi, singularitas tersebut telah dihilangkan.

Secara umum, jika $f(z)$ mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada z_0, maka dengan mendefinisikan fungsi itu agar mempunyai nilai c_0 pada z_0, $f(z_0) = c_0$, maka kita dapat mendalihkan bahwa f analitik pada z_0.

K A S U S 2

Hanya sejumlah berhingga $(z - z_0)$ yang berpangkat negatif muncul dalam (1). Pada kasus ini, (1) berbentuk :

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

$$= \frac{c_{-N}}{(z-z_0)^n} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, \qquad \textbf{(3)}$$

dimana N adalah bilangan bulat positif, dan $c_{-N} \neq 0$. Maka z_0 dinamakan kutub tingkat N (pole of order N).

Misalnya, Kita tunjukkan bahwa :

$f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ mempunyai kutub pangkat 3 pada $z = 0$

$g(z) = \dfrac{1}{(z + 3i)^{15}}$ mempunyai kutub tingkat 15 pada $z = -3i$

$h(z) = \dfrac{1}{(z - i)(z + 2)}$ mempunyai kutub tingkat 1 pada $z = i,$ pada $z = -2i$

$k(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$ mempunyai kutub tingkat 1 pada $z = 0$

Bagian deret Laurent fungsi $f(z)$ yang mengandung $(z - z_0)$ yang berpangkat negatif dinamakan bagian utama (the principal part) f pada z_0.

Misalkan $f(z)$ mempunyai kutub tingkat N pada z_0, maka f mempunyai penguraian Laurent seperti yang diberikan pada (3) dengan $c_{-N} \neq 0$. Dengan mengalikan (3) dengan $(z - z_0)^N$ diperoleh :

$$(z - z_0)^N f(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z - z_0) + c_{-N+2}(z - z_0)^2 + \cdots, \qquad \textbf{(4)}$$

Jelaslah bahwa ruas kanan persamaan (4) adalah suatu deret Taylor yang mempunyai jari-jari konvergensi positif. Oleh karena itu, fungsi :

$g(z) = (z - z_0)^N f(z)$ adalah analitik dan kutub f telah menjadi singularitas yang dapat dihilangkan untuk g. Selain daripada itu, kita ingat bahwa :

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^N f(z) = c_{-N} \neq 0$$

Jadi, jika $f(z)$ mempunyai kutub tingkat N pada z_0, maka $g(z)$ yang didefinisikan seperti di atas, mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada z_0 dan limitnya untuk z mendekati z_0 bernilai tidak nol. Ternyata konvers (kebalikan) pernyataan di muka juga benar.

7.2.1 TEOREMA

Misalkan diketahui bahwa, $f(z)$ analitik di seluruh lingkungan terhapus :

$$0 < |z - z_0| < \rho$$

pada titik z_0.
Maka :

z_0 merupakan kutub tingkat N

jika dan hanya jika $(z - z_0)^N f(z)$ mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada titik z_0 dan :

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^N f(z) \neq 0$$

KASUS 3

Bagian utama (1) mengandung sejumlah tak berhingga $(z - z_0)$ yang berpagkat negatif dengan koefisien tidak nol. Dalam kasus ini, z_0 disebut suatu **singularitas pokok** (essential singularity) fungsi itu. Misalnya fungsi :

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

mempunyai singularitas pokok pada $z = 0$, karena :

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} \dots,$$

T E O R E M A Casorati−Weirstrass yang dibuktikan pada Bab 9, menunjukkan bahwa perilaku suatu fungsi di sekitar salah satu singularitas pokoknya adalah sangat ruwet. Lebih tepatnya, teorema itu menunjukkan bahwa jika z_0 suatu singularitas fungsi $f(z)$, maka nilai $f(z)$ untuk $z \to z_0$, dapat dibuat untuk mendekati suatu limit yang berapapun nilainya dengan memilih secara tepat nilai-nilai yang dapat dicapai oleh z ketika ia mendekati z_0. Kenyataan ini menunjukkan betapa tidak stabilnya suatu fungsi di dekat salah satu singularitas pokoknya. Tentunya berkaitan sangat erat dengan tingkah laku ini, yakni teorema berikut yang dinyatakan tanpa bukti.

T E O R E M A (Teorema Picard)

Pada setiap lingkungan singularitas pokoknya, suatu fungsi mengambil nilai berapapun dengan satu pengecualian sebanyak tak berhingga kali.

C O N T O H 1

Fungsi $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$ mempunyai dua kutub; $z = i$ dan $z = -i$ masing-masing tingkat satu.
Hal pertama yang dilakukan adalah memverifikasi untuk $z = i$ dengan menggunakan teorema 7.2, caranya dengan membentuk fungsi

$$(z - i)f(z) = \frac{z + 1}{z + i}$$

seperti yang diminta oleh teorema itu. Maka, mudah untuk melihat bahwa fungsi itu mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada $z = i$ (yang analitik). Di sisi lain, untuk $z \to i$, $\lim(z - i)f(z) = \frac{1+i}{2i} \neq 0$.
Oleh karena kedua kondisi tersebut terpenuhi, maka teorema itu memastikan bahwa f mempunyai kutub tingkat 1 pada $z = i$.

C O N T O H 2

Fungsi $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2}$ sepertinya mempunyai kutub tingkat 2 pada $z = 0$. Namun pada kenyataannya, fungsi tersebut mempunyai kutub tingkat satu, karena :

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots.$$

C O N T O H 3

Fungsi $f(z) = \sin h\ \frac{z}{z^3}$ sepertinya mempunyai kutub tingkat 3 pada $z = 0$. Namun pada kenyataannya, fungsi tersebut mempunyai kutub tingkat 2. Dalam hal ini, kita dapat melengkapi bagian-bagian yang kurang, berikut :

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots.$$

Sedikit berdalih dari topik, Kita akan membahas konsep kenolan suatu fungsi analitik "jika $\emptyset(z)$ adalah sembarang fungsi, maka suatu bilangan ζ dinamakan kenolan bagi $\emptyset$ jika dan hanya jika $\emptyset\zeta = 0$", suatu bentuk khusus defenisi ini digunakan untuk mendefinisikan kenolan suatu fungsi analitik.
Misalkan diketahui bahwa, $f(z)$ adalah suatu fungsi yang analitik pada titik z_0. Maka f mempunyai penguraian deret Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Jika $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 0\ dan\ a_N \neq 0$, maka tentu saja :

$$f(z) = a_N (z - z_0)^N + a_{N+1}(z - z_0)^{N+1} + \cdots$$

Berdasarkan pernyataan tersebut di atas, f dikatakan mempunyai ***kenolan tingkat*** N pada z_0.

P E N T I N G

1. Jika $g(z)$ adalah suatu fungsi analitik pada z_0, maka dapat dipastikan bahwa fungsi tersebut memiliki penguraian deret :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Namun, apabila $g(z_0) \neq 0$, maksudnya jika $a_0 \neq 0$ maka fungsi :

$$f(z) = (z - z_0)^N g(z)$$

mempunyai kenolan tingkat N pada z_0. Jadi, dapat disimpulkan bahwa :

"Suatu fungsi $f(z)$ mempunyai kenolan tingkat N pada z_0, dengan syarat f dapat dinyatakan dalam bentuk $f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ dimana $g(z)$ analitik pada z_0 dan $g(z_0) \neq 0$".

2. Berdasarkan point 1 di atas, dapat ditunjukkukan, jika z_0 adalah kenolan suatu fungsi $f(z)$ yang analitik di suatu lingkungan z_0 dan jika $f(z)$ bukan fungsi 0, maka terdapat suatu lingkungan z_0 terhapus dengan $f(z) \neq 0$ untuk setiap z dalam lingkungan tersebut. Singkatnya, ***kenolan suatu fungsi analitik adalah terasing***.

7.3 Teori Residu

Teori residu dikerjakan di dalam penggunaan yang beraneka ragam, menjajarkan dari penilaian integral nyata ke stabilitas system linear untuk membayangkan penilaian dalam ilmu fotografi. Dalam pasal ini, hal yang harus dikembangkan dan digambarkan adalah beberapa teknik dasar untuk mengerjakan di dalam integrasi kompleks dengan menggunakan teori residu. Unsur pokok teori ini didapatkan dalam Teorema 7.1 dan pembicaraan langsung yang mengikuti pernyataan teorema tersebut.

Misalkan, $f(z)$ adalah fungsi analitik dan z_0 merupakan singularitas terasing f, maka berdasarkan definisi, f analitik di dalam lingkungan z_0 terhapus :

$$A: 0 < |z - z_0| < r$$

yang merupakan anulus melingkar, berpusat pada z_0. Berdasarkan Teorema 7.1, f mempunyai pengembangan Laurent yang konvergen ke f untuk semua z di dalam A (perhatikan gambar 7.6). Koefisien pengembangan ini dirumuskan dengan :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

dimana c adalah sembarang jalur tertutup sederhana tertentu, tempatnya positif, seluruhnya terletak di dalam A dan memuat z_0 di bagian dalamnya. Secara khusus, untuk $n = -1$ Kita mempunyai :

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

Bilangan c_{-1} yang merupakan koefisien suku $\frac{1}{z-z_0}$ dalam pengembangan Laurent bagi f atas A, dinamakan **residu** f pada z_0; kita akan menuliskan seperti berikut :

$$\textbf{Res}\,[f, z_0]$$

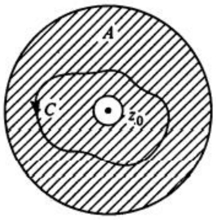
sedemikian sehingga, dengan defenisi;

$$\textbf{Res}\,[f, z_0] = c_{-1}$$

Selanjutnya, kita dapat menuliskan :

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\boldsymbol{Res}\,[f, z_0]$$

rumus ini merupakan unsur pokok dalam penggunaan teori residu. Dengan menggunakan teorema anulus berlipat (halaman 168), bentuk umum Persamaan (1) adalah langsung, seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut :



Gambar 7. 7 Residu Pada z_0

7.3.1 Teorema Residu

Misalkan diketahui bahwa, $f(z)$ analitik pada dan di dalam lintasan tertutup sederhana c yang berorientasi positif, kecuali pada berhingga banyaknya titik $z_1, z_2, \ldots, z_n$ yang dua-duanya merupakan singularitas terasing f. Maka :

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}[f, z_1] + \cdots + \text{Res}[f, z_n])$$

Daya guna teorema tersebut di atas, tentu saja tergantung kepada bagaimana efisiennya kita dapat menghitung residu f pada bermacam-macam singularitas tersebut.

Langkah pertama adalah mengelompokkan jenis-jenis singularitas (umumnya tidak sulit untuk dikerjakan). Dengan catatan, harus berhati-hati (dalam artian, tidak menyimpulkan secara tergesa-gesa yang hanya berdasarkan bentuk luar fungsinya saja (perhatikan bagian (2) dan (3) pada contoh di dalam pasal 28).

Setelah mengetahui jenis singularitasnnya, langkah berikutnya adalah dapat memudahkan dalam kebanyakan kasus :

1. Jika z_i merupakan singularitas f yang dapat dihilangkan, maka $\text{Res}[f, z_i] = 0$, karena penguraian deret f di sekeliling z_i merupakan deret Taylor sehingga $c_{-1} = 0$.
2. Jika z_i merupakan singularitas pokok f, maka penguraian langsung f dalam deret di sekeliling z_i umumnya diperlukan untuk mendapatkan residunya.

3. Jika z_i merupakan sebuah kutub, maka langkah awal adalah tentukan tingkat kutub tersebut dengan cara yang sama seperti pasal 28; dalam banyak hal, proses ini juga akan menghasilkan nilai residunya. Jika tidak, maka gunakan rumus pada Teorema berikut atau rumus pada akibat teoremanya.

TEOREMA

Misalkan diketahui bahwa, $f(z)$ mempunyai kutub tingkat n pada titik z_o. Maka :

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_o} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

berturut-turut, $n = 1, 2, dan\ 3$, rumus di atas menjadi :

$$Res[f, z_0] = \lim_{z \to z_o} [(z - z_0) f(z)]$$

$$Res[f, z_0] = \lim_{z \to z_o} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{2} \lim_{z \to z_o} \frac{d^2}{dz^2} [(z - z_0)^3 f(z)]$$

C O N T O H 1

Hitung $\int_C \frac{e^z}{z^2} dz$, dimana c adalah lingkaran satuan $|z| = 1$ dengan orientasi positif. Dari :

$$\frac{1}{z^2} e^z = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots$$

didapat;

$$Res \left[\frac{e^z}{z^2}, 0 \right]$$

maka;

$$\int_C \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i \, \boldsymbol{Res} \left[\frac{e^z}{z^2}, 0 \right] = 2\pi i$$

C O N T O H 2

Gunakan residu untuk menghitung integral $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ sepanjang $c{:}\, |z| - 3$, dengan orientasi positif.

Jelaslah f mempunyai kutub pada $z = 1$ dan $z = -1$, masing-masing tingkat 1. Dengan menggunakan Teorema 7.4, dimana $n = 1$, diperoleh :

$$Res[f, 1] = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}$$

$$Res[f, -1] = \lim_{z \to -1} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}$$

Oleh karena itu, menurut Teorema 7.3;

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = 2\pi i(Res[f, 1] + Res[f. -1] = 0$$

C O N T O H 3

Hitung integral $f(z) = \frac{e^{iz} - \sin z}{(z-\pi)^3}$ sepanjang $c{:}\, |z - 3| = 1$, dengan orientasi positif. Langkah awal adalah dengan menggunakan Teorema 7.2, Kita menentukan tingkat kutubnya pada $z = \pi$ adalah $n = 3$ karena kedua syarat teorema tersebut dipenuhi :

$$(z - \pi)^3 f(z) = e^{iz} - \sin z$$

analitik pada $z = \pi$, dan untuk :

$$z \to \pi, limit\ (z - \pi)^3 f(z) = e^{i\pi} - \sin \pi \neq 0$$

Selanjutnya, diperoleh :

$$Res\ [f, \pi] = \frac{1}{2} \lim_{z \to \pi} \frac{d^2}{dz^2} \left(e^{iz} - \sin z\right) = \frac{1}{2}$$

Maka :

$$\int_C \frac{e^{iz} - \sin z}{(z - \pi)^3} dz = 2\pi i\, Res\ [f, \pi] = \pi i$$

C O N T O H 4

Hitung integral $f(z) = \frac{e^{2z} - z^3}{(z+1)(z+2)(z-1)}$ sepanjang $c: |z| = 3$, dengan orientasi positif. Dengan menggunakan Teorema 7.2, periksalah bahwa f mempunyai kutub tingkat 1 pada masing-masing titik $z = -1, -2$ dan 1 semuanya terletak di $DI(c)$. Maka, dengan menggunakan Teorema 7.4, diperoleh :

$$Res|f, -1| = \lim_{z \to -1} \frac{e^{2z} - z^3}{(z+2)(z-1)} = -\frac{1}{2}(e^{-2} + 1)$$

$$Res|f, -2| = \lim_{z \to -2} \frac{e^{2z} - z^3}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{3}(e^{-4} + 8)$$

$$Res|f, 1| = \lim_{z \to 1} \frac{e^{2z} - z^3}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{6}(e^{2} - 1)$$

Jadi,

$$\int_C f(z)\, dz \frac{\pi i}{3}(e^2 + 2e^{-4} - 3e^{-2} + 12)$$

Berikut ditetapkan suatu aturan untuk menghitung residu pada **kutub sederhana** (adalah, kutub tingkat satu) yag merupakan akibat Teorema 7.4, seperti ditunjukkan berikut ini :

Misalkan;

1. $f(z)$ dan $g(z)$ keduanya analitik pada titik z_0
2. $f(z_0) \neq 0$
3. $g(z)$ mempunyai kenolan tingkat satu pada z_0

Maka;

$$Res\left[\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right] = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

C O N T O H 5

1. Perhatikan fungsi rasional $h(z) = \frac{z^2+2z+5}{z-i}$
   Fungsi yang menyusun pembilang dan penyebut $h(z)$ keduanya analitik pada $z = i$, dan penyebut mempunyai kenolan tingkat satu pada titik tersebut. Demikian halnya dengan pembilang, tidak bernilai nol pada $z = i$. Oleh karena itu, dengan menggunakan akibat Teorema 7.4, diperoleh :

$$Res[h(z), i] = \frac{-1 + 2i + 5}{1} = 4 + 2i$$

2. Berdasarkan soal 28.13, kita ketahui bahwa $\sin z$ mempunyai kenolan tingkat 1 pada titik $z = 0$. Fungsi e^{iz} dan $\sin z$ analitik pada $z = 0$, e^{iz} tidak bernilai nol. Oleh karena itu, dengan menggunakan akinat Teorema 7.4, diperoleh :

$$Res\left[\frac{e^{iz}}{\sin z}, 0\right] = \frac{e^{oi}}{\cos 0} = 1$$

3. Apabila semua syarat telah dipenuhi, akibat dari Teorema 7.4 dapat digunakan dalam perhitungan berikut :

$$Res\left[\frac{e^{iz}\cos z}{z(z-\pi)}, \pi\right] = \frac{e^{i\pi}\cos \pi}{2\pi - \pi} = \frac{1}{\pi}$$

7.4 Residu dan Penerapannya

7.4.1 Residu dan Kutub

Pada penjelasan sebelumnya di atas, Kita ketahui bahwa suatu titik z_0 disebut **titik singular** dari $f(z)$ dan bila $f(z)$ gagal analitik di z_0 tetapi analitik pada suatu titik dari setiap lingkungan dari z_0. Titik singular z_0 disebut **terisolasi** bila ada lingkungan dari z_0 yang mengakibatkan $f(z)$ analitik pada lingkungan tersebut, kecuali di titik z_0 itu sendiri atau dapat dikatakan ada bilangan positif rill R sehingga $f(z)$ analitik pada daerah berbentuk $0 < |z - z_0| < R$.

C O N T O H 1

a. $f(z) = \frac{1}{z}$
b. $f(z) = \frac{z-1}{z^2(z^2+1)}$
c. $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$

P E M B A H A S A N :

a. $z = 0$ titik singular terisolasi
b. $z = 0$ dan $z = \pm\, i$ titik singular terisolasi
c. $z = \frac{1}{n}((n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ titik singular terisolasi dan $z = 0$ titik singular tetapi tidak terisolasi.

Misalnya $f(z)$ analitik pada $0 < |z - z_0| < R$ dan z_0 merupakan titik singular terisolasi dari $f(z)$. Maka fungsi $f(z)$ dapat diperderetkan menjadi deret Laurent, seperti berikut :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Secara khusus adalah koefisien dari $(z - z_0)^{-n}$ yaitu :

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z_0)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz, n = 1,2, \ldots$$

dengan C merupakan lintasan tutup sederhana yang memuat pada $0 < |z - z_0| < R$ dan menutupi z_0 dengan arah positif. Untuk $n = 1$ maka :

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

Selanjutnya, b_1 disebut residu dari $f(z)$ di z_0 (nilai koefisien dari suku $\frac{1}{z-z_0}$) dan biasanya dinotasikan dengan $b_1 = Res_{z=z_0} f(z)$.

Bagian utama deret dari hasil perderetan fungsi $f(z)$ di $z = z_0$ adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

jika $b_m \neq 0$ dan $b_{m+1} = b_{m+2} = b_{m+3} = \cdots = 0$, maka:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^2 + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

dengan $0 < |z - z_0| < R$ dan $b_m \neq 0$. Dari bagian utama deret di atas dikatakan bahwa titik singular terisolasi z_0 disebut **kutub (pole) order m.** Apabila $m = 1$, maka z_0 disebut **kutub sederhana**. Berikutnya apabila $m = \infty$, maka z_0 disebut **titik singular esensial**.

Dalam menentukan order titik singular dari$f(z)$ kita harus meperderet $f(z)$ ke dalam deret Laurent terlebih dahulu, seperti dipaparkan pada contoh 2 berikut :

C O N T O H 2

Tentukan order dari titik singular fungsi $f(z) = \frac{z^2-2z+3}{z-2}$

P E M B A H A S A N :

Perhatikan bahwa $f(z)$ dapat dinyatakan dengan :

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}, 0 < |z - 2| \infty$$

Suku ketiga deret di atas merupakan bagian utama deret dan terlihat bahwa titik singular $z = 2$ merupakan kutub order 1 (kutub sederhana).

C O N T O H 3

Tentukan order dati titk singular fungsi $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$

P E M B A H A S A N :

Titik singular dari $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$ adalah $z = 0$.
Perderetan fungsi $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$ dengan pusat $z = 0$ adalah :

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \cdots 0 < |z - 2| \infty$$

Berdasarkan pembahasan tersebut di atas, Kita ketahui bahwa $z = 0$ merupakan kutub order 3.

C O N T O H 4

Jika $f(z) = e^{1/z}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}, 0 < |z-2| \infty, \text{maka } z = 0 \text{ merupakan titik } \textbf{singular esensial}.$$

Pada contoh 2 – 4, diperoleh nilai dari residu di titik singularnya secara berturut-turut adalah $\frac{3,1}{6}, dan\ 1$.

Untuk menentukan residu suatu fungsi di titik singularnya, Kita tidak harus memperderetkan fungsi tersebut terlebih dahulu, namun dapat dilakukan dengan cara/langkah berikut :

7.4.2 Menghitung Residu

Misalkan fungsi $f(z)$ dengan titik singular z_0, maka kemungkinan bentuk dari $f(z)$ dan rumus perhitungan residu di z_0 dapat diberikan sebagai berikut :

1. **Kutub sederhana**

Misalkan $f(z)$ mempunyai kutub sederhana di z_0, maka residu dari $f(z)$ di $z = z_0$ dihitung dengan rumus berikut :

$$\mathop{\textbf{Res}}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z)$$

Berdasarkan rumus tersebut, apabila $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dimana P(z) dan Q(z) keduanya analitik di $z = z_0$ dan $z = z_0$ merupakan faktor linier tidak berulang dari Q(z) serta $P(z_0) \neq 0$, maka :

$$\mathop{\textbf{Res}}_{z=z_0} f(z) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

2. **Kutub order m**

Misalkan $f(z)$ mempunyai kutub order m $(m = 2,3,4, \dots)$ di $z = z_0$, maka residu dari $f(z)$ di $z = z_0$ dapat dirumuskan seperti berikut :

$$\mathop{\textbf{Res}}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Jika $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$ dengan $\phi(z)$ analitik di $z = z_0$ dan $\phi(z_0) \neq 0$, maka residu $f(z)$ dirumuskan seperti berikut :

$$\boxed{\operatorname*{\mathbf{Res}}_{z=z_0} \boldsymbol{f(z)} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}}$$

C O N T O H :

Tentukan residu di titik singular dari fungsi berikut :

a. $f(z) = \frac{2z}{z^2+4}$
b. $f(z) = \frac{z^2+2z}{(z-3)^2}$
c. $f(z) = \frac{1}{z(e^2-1)}$

P E M B A H A S A N :

a. Titik singular terisolasi $f(z)$, $z = \pm 2i$, (kutub sedrhana).
   Untuk $z = 2i$, maka $f(z) = \frac{\phi(z)}{z-2i}$, dimana $\phi(z) = \frac{2z}{z+2i}$ analitik di $z = 2i$ dan $\phi(2i) = 1$.
   Jadi, residu di $z = 2i$ adalah :
   $\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = 1$
   Untuk $z = -2i$, maka $f(z) = \frac{\phi(z)}{z+2i}$, dimana $\phi(z) = \frac{2z}{z-2i}$ analitik di $z = -2i$ dan $\phi(-2i) = -1$.
   Jadi, residu di $z = -2i$ adalah : $\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = -1$.
b. Titik singular terisolasi $f(z)$, $z = 3$ (kutub order 2).
   Untuk kasus ini, $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-3)^2}$, $\phi(z) = z^2 + 2z$, fungsi entire dan $\phi'(z) = 2z + 2$.
   $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi'(3)}{1!} = 8$$
c. Titik singular terisolasi $f(z)$ adalah $z = 0$.
   Jika $f(z) = \frac{\phi(z)}{z}$ dengan $\phi(z) = \frac{1}{e^z-1}$, maka $\phi(z)$ tidak analitik di $z = 0$.
   Oleh karena rumus perhitungan residu tidak dapat digunakan, maka penyelesaiannya dapat Kita pecahkan dengan cara memperderetkan e^z di $z = 0$ dan diperoleh lah hasil berikut :
   $$f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} = \frac{1}{z^2\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right)} = \frac{\phi(z)}{z^2}, \text{dimana}$$

$$\phi(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots} \text{ analitik di } z = 0.$$

Jadi, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi'(0)}{2!} = -\frac{1}{2}.$

7.4.3 Penggunaan Residu Untuk Menghitung Integral

Selain menggunakan rumus Cauchy dan bentuk turunannya, integral kompleks dapat dihitung dengan menggunakan residu, yang dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan, C merupakan lintasan tutup sederhana dengan arah positif, $f(z)$ disebut analitik, kecuali titik singular $z_k(k = 1,2,3, \dots, n)$ pada daerah yang dibatasi oleh C, maka :

$$\boldsymbol{\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)}$$

Cara/langkah penyelesaian dari integral kompleks berdasarkan rumus di atas adalah seperti berikut :

1. Menentukan semua titik singular dari integran $f(z)$
2. Mencari residu dari $f(z)$ di semua titik singular yang terletak di dalam lintasan C
3. Mengalikan jumlah hasil kedua dengan $2\pi i$

C O N T O H 1

Tentukan :

$$\oint_C \frac{2z-3}{z(z+1)} dz,$$

dimana C adalah lingkaran $|z| = 2$ dengan arah positif.

P E M B A H A S A N :

Fungsi $f(z) = \frac{2z-3}{z(z+1)}$ mempunyai titik singular $z = 0$ dan $z = -1$ yang keduanya terletak di dalam daerah yang dibatasi oleh C.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -3$$

dan

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = 5$$

Maka dari itu,

$$\oint_C \frac{2z-3}{z(z+1)}dz = 2\pi i(-3+5) = 4\pi i$$

C O N T O H 2

Hitung :

$$\oint_C \frac{z^2+3z}{(z-3i)(z^2+1)}dz,$$

dimana C diambil arah positif adalah :

a. $C: |z+1| = 2$
b. $C: |z| = 4$

P E M B A H A S A N :

Fungs $f(z) = \frac{z^3+3z}{(z-3i)(z^2+1)}$ mempunyai titik singular : $z = 3i$ dan $z = \pm i$.

a. $z = \pm i$ terletak di dalam daerah yang dibatasi oleh C.

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{i-3i}{(-i-3i)(-2i)} = \frac{i}{4}\ dan$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{-i+3i}{(i-3i)(-2i)} = \frac{i}{4}$$

Jadi,

$$\oint_C \frac{z^3+3z}{(z-3i)(z^2+1)}dz = -\pi$$

b. $z = 3i$ dan $z = \pm i$ terletak di dalam daerah yang dibatasi oleh C.

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \frac{9}{4}i.\ \text{Jadi,} \oint_C \frac{z^3+3z}{(z-3i)(z^2+1)}dz = \frac{11\pi}{2}$$

L A M P I R A N

(Bukti Teorema)

<u>*Teorema 7.1 (Teorema Laurent)*</u>

Misalkan bahwa, $f(z)$ analitik pada setiap titik di anulus tertutup :

$$A: r \leq |z-c| \leq \rho$$

maka, terdapat deret $(z-c)$ berpangkat positif dan negatif yang menyatakan f pada setiap titik ζ di dalam anulus (*terbuka*) $r < |z-c| < \rho$:

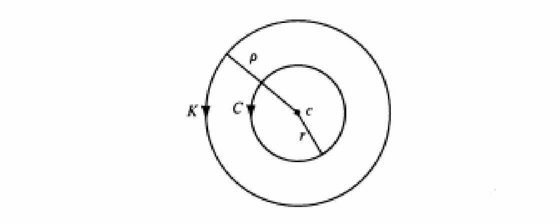
$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta-c)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(\zeta-c)^n}$$

koefisien deret diberikan oleh rumus :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-c)^{-n+1}} dz, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

dimana $K: |z-c| = \rho$ dan $C: |z-c| = r$. Keduanya berorientasi positif (perhatikan gambar 7.8) berikut :



Gambar 7. 8 Teorema Laurent

B U K T I

Untuk kesederhanaan notasi dan tanpa kehilangan sifat umumnya, teorema tersebut akan dibuktikan untuk unsur $c = 0$. Perluasan terhadap sembarang pusat c dapat dilakukan dengan mudah.

Penalaran dalam bukti ini identik dengan yang dipakai pada bukti teorema Taylor (perhatikan halaman 236). Sehubungan dengan alasan ini, bukti diberikan dalam garis besarnya saja, sebaliknya pembaca diminta untuk melengkapi bagian-bagian yang dihilangkan.

Misalkan, ζ adalah titik sembarang tetapi tetap. Sedemikian sehingga $r < |\zeta < \rho|$. Maka, menurut rumus integral Cauchy (halaman 171) :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(z)}{z-\zeta}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}dz \qquad (1)$$

Integral pertama pada ruas kanan (1) sekarang dapat diperlakukan sama seperti dalam bukti teorema Taylor (perhatikan Persamaan (1), (2), (3), pada halaman 273) untuk menghasilkan :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(z)}{z-\zeta}dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \qquad (2)$$

dimana,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan rumus b_n, harus diperhatikan bahwa :

$$-\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{\zeta^2} + \frac{z^n}{\zeta^n(\zeta - z)} \qquad (3)$$

merupakan identitas yang kebenarannya dapat dikukuhkan dengan cara yang sama seperti yang disarankan pada soal 26.23. Sesuai dengan bukti pada halaman 237, bagilah kedua ruas (Persamaan (3)) dengan $2\pi i$, kalikan dengan $f(z)$, lalu integralkan sepanjang lintasan C dalam pengertian positif.
Maka, dengan melambangkan suku terakhir dengan :

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^n f(z)}{\zeta^n(\zeta - z)}dz$$

tunjukkan bahwa, untuk $n \to \infty, R_n \to 0$:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\zeta)}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\zeta^n}$$

dimana,

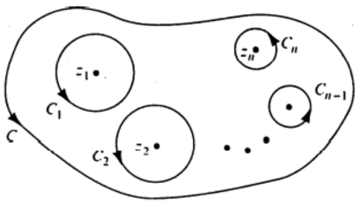
$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \tag{4}$$

Teorema Residu

Misalkan bahwa, $f(z)$ analitik pada dan di dalam lintasan tertutup sederhana C yang berorientasi positif, kecuali pada berhingga banyaknya titik $z_1, z_2, \dots, z_n$, yang masing-masing merupakan singularitas terasing f.

Maka :

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(Res[f, z_1] + \cdots + Res[f, z_n]$$



Gambar 7. 9 Teorema Residu

B U K T I

Karena setiap z_k merupakan singularitas terasing f di DI (C), kemungkinan untuk menemukan lingkaran $C_k, k = 1, 2, \dots, n$, sedemikian sehingga masing-masing keseluruhan terletak di DI (C), lingkaran-lingkaran tersebut berpusat pada z_k yang bersangkutan, tidak mengandung singularitas yang lain di bagian dalamnya, kecuali z_k yang menjadi pusatnya, dan ia tidak melewati suatu singularitas f yang lain (perhatikan gambar 7.8). Maka, untuk setiap C_k yang berorientasi positif kita mempunyai :

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i\, Res[f, z_k]$$

Jadi, berdasarkan teorema anulus berganda (halaman 166), Kita mempunyai :

$$\int f(z)dz = \int f(z)dz + \int f(z)dz + \cdots + \int f(z)dz$$

$$= 2\pi i(Res[f, z_1] + Res[f, z_2] + \cdots + Res[f, z_n]$$

<u>Teorema</u>

Misalkan bahwa, $f(z)$ mempunyai kutub tingkat n pada titik z_0. Maka :

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

B U K T I

Menurut hipotesis, f mempunyai kutub tingkat n pada z_0. Maka dari itu :

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_{-n} \neq 0$$

Dengan mengalikan kedua ruas ini dengan $(z - z_0)^n$, diperoleh :

$$(z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+n}$$

$$= c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+n}$$

yang merupakan deret Taylor, jadi suku demi suku dapat diintegralkan sebanyak mungkin. Setelah mengambil $(n-1)$ turunan, Kita mempunyai :

$$\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)!\, c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [c_k (z - z_0)^{k+n}]$$

Sekarang, setiap suku pada deret terakhir ini mempunyai faktor $(z - z_0)$. Oleh karena itu, jika Kita buat $z \to z_0$, seluruh deret menjadi hilang. Jadi,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)!\, c_{-1}$$

SOAL LATIHAN

Petunjuk soal :

Tentukan penguraian deret untuk fungsi yang diberikan dalam daerah yang dinyatakan!

1. $\frac{1}{z+3}, |z| > 3$
2. $\frac{1}{(z+2)(z-1)}, 1 < |z-2| < 4$
3. $\sin\left(\frac{1}{z}\right), 0 < |z| < \infty$
4. $\frac{1}{(z+2)(z-1)}, 4 < |z-2| < \infty$
5. $\frac{e^z-(z+1)}{z^3}, 0 < |z| < \infty$
6. $\frac{\cos(z-1)}{z-1}, 0 < |z-1| < \infty$
7. $e^{1/z^2}, 0 < |z| < \infty$
8. $\frac{\sinh z}{z^2}, 0 < |z| < \infty$
9. $\frac{1}{z^3-2z^2+z}, 0 < |z-1| < 1$
10. $\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-i}, 0 < |z| < 1$
11. Tentukan penguraian deret untuk $f(z) = (z-c)^{-k}$ untuk $k = 1{,}2$, di dalam anulus $|c| < |z| < \infty$.
12. Tentukan semua kemungkinan penguraian deret, dengan pusat pada $c = 0$, untuk $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$
13. Tentukan deret taylor untuk $f(z) = \frac{1}{z}$ dengan pusat pada $c = 1$. Kemudian gunakan jawabanmu untuk mendapatkan deret Laurent untuk fungsi
    $f(z) = z^{-1}(z-1)^{-2}$
    di dalam anulus $0 < |z-1| < 1$.
14. Tentukan deret Laurent untuk fungsi $f(z) = \frac{1}{z+3}, |z| > 3$ dengan menggunakan prosedur berikut. Ambil $z = w + 1$, uraikan fungsi tersebut dalam pangkat w, kemudian substitusi $w = z - 1$ untuk mendaptkan jawabannya.
15. Lengkapilah detil-detil yang dihilangkan pada bukti Teorema 7.1.
16. Uraikan setiap fungsi berikut sekeliling pusat koordinat dan tentukan daerah konvergensinya untuk setiap kasus.
    (a) $\frac{e^z-1}{z}$ (b) $\frac{\sin z}{z}$
    (c) $\frac{\cos(z^2)-1}{z^2}$ (d) $\frac{e^z-(z+1)}{z^2}$

17. Perhatikan bahwa setiap penguraian deret pada soal $\frac{1}{z+3}, |z| > 3$ merupakan deret Taylor, yang oleh karenanya, konvergen pada pusatnya $c = 0$. Tetapi pada gilirannya, berarti bahwa setiap fungsi itu terdefenisikan dengan pada $z = 0$. Tentukan nilai setiap fungsi itu pada $z = 0$ sehingga deret Taylornya akan menyatakannya pada pusat koordinat.

Petunjuk soal : Tentukan jenis masing-masing singularitas fungsi yang diberikan. Jika singularitas itu dapat dihilangkan, tentukan nilai fungsi itu pada titik yang bersangkutan sedemikian sehingga ia akan analitik disana.

18. $\frac{z^2+1}{z}$
19. $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$
20. $\frac{e^z-\cos(z-1)}{z-1}$
21. $\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$
22. $\frac{\cos z-1}{z^2}$
23. $\frac{\cos(z+i)-1}{(z+i)^4}$
24. $\frac{2}{z^2} + \frac{3}{z-\pi}$
25. $\frac{z^2-3z+2}{z-2}$
26. $\frac{z^3+2z^2-1}{z+1}$
27. $\frac{e^{2z}-1}{z^4}$

Petunjuk soal :
Gunakan definisi kenolan maupun kriterium pada Catatan 1, pasal ini, untuk menunjukkan bahwa, pada setiap kasus itu, titik yang diberikan merupakan kenolan fungsi yang bersangkutan. Juga, pada setiap kasus, tentukan tingkat kenolan tersebut.

28. $z^2 - 1, z_0 = -1$
29. $z^4 - 2z^3 + 2z - 1, z_0 = 1$
30. $\sin z, z_0 = 0$
31. $\cos z, z_0 = \frac{\pi}{2}$

32. Dalam hubungannya dengan Teorema 7.2., pelajarilah pembahasan yang mendahului teorema tersebut. Kemudian, buktikan kebalikannya (konversnya) : Jika $(z - z_0)^N f(z)$ mempunyai singularitas yang dapat dihilangkan pada z_0 dan jika $\lim(z - z_0)^N f(z) \neq 0$, untuk $z \to z_0$, maka $f(z)$ mempunyai kutub tingkat N pada z_0.

33. Berikan gambaran teorema Picard dengan membenarkan bahwa persamaan
$$e^{\frac{1}{z}} = i$$
dipenuhi oleh tak berhingga banyak nilai z pada setiap sekitar $z = 0$

P E T U N J U K : Tulislah $i = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i}$

34. Tunjukkan bahwa fungsi
$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$
mempunyai tak berhingga banyak singularitas, hanya satu dari padanya tak terasing.

35. Tentukan macam singularitas fungsi
$$f(z) = \frac{1}{z^2(e^z - 1)}$$
pada $z = 0$.

36. Selidikilah fungsi $f(z) = z\, cosec\, z$ untuk singularitas pada $z = 0$. Jika ada, sebutkan macamnya.

37. Buktikan bahwa jika z_0 adalah kutub tingkat N fungsi $f(z)$, maka z_0 merupakan zero tingkat N fungsi $1/f\ (z)$.

38. Ulangi Pasal 28 melalui Kejadian 1 dan buktikan pernyataan yang dibuat disana terhadap pengaruh bahwa jika z_0 singularitas yang dapat dipindahkan untuk $f(z)$, maka, dengan definisi yang sepantasnya, f dapat ditunjukkan menjadi analitik pada z_0.

Petunjuk soal :
Tentukan residu fungsi yang diberikan pada setiap titik singularitasnya.

39. $\frac{e^{2z}-1}{z}$

40. $\frac{z^2+1}{z-1}$

41. $\frac{(1-z^2)e^{2z}}{z^4}$

42. $\frac{\sinh z}{z^2}$

43. $\frac{z^2-1}{(z-2)(z+1)(z-\pi)}$

44. $\frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3}$

45. $\frac{ze^z}{z^4-z^2}$

46. $\frac{\tan z}{z^3}$, for $|z| < 1$

47. $\frac{e^z}{z^4-z^2}$

49. $\frac{\cos(z-\pi)+1}{z^5}$

Petunjuk soal :
Hitunglah integral fungsi yang diberikan sepanjang lintasan masing-masing dengan orientasi positif.

50. $\frac{\tan z}{z^3}, |z| = 1$

51. $\frac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-1)^3}, |z| = \frac{1}{2}$

52. $\frac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-1)^3}, |z-2| = 3$

53. $\frac{1}{z^2(z-1)(z+\pi i)}, |z| = 2$

54. $e^{\frac{1}{z}}, |z| = 6$

55. $\frac{z}{z^4-1}, |z| = 4$

56. $\frac{e^{3z}+\cos 2z}{z(z-1)}, |z-1| = 2$

57. $\tanh z, |z| = 1$

58. $\frac{z^3}{(z^4-1)^2}, |z| = 2$

59. $\frac{e^z}{z^3+2z^2-z}, |z| = 2$

60. Buktikan akibat teorema pada halaman 261.

P E T U N J U K : $g(z) = (z - z_0)h(z)$, dimana $h(z_0) \neq 0$. Maka gunakan rumus Teorema 7.4 untuk $n = 1$, dengan mengganti f dengan f/g.

61. Hitung integral $f(z) = \sec\frac{z}{z}$ sekeliling lingkaran $|z| = 2$, dengan orientasi positif. (Perhatikan akibat Teorema pada bab sebelumnya).

SOAL EVALUASI

1. Tentukan penguraian deret untuk $f(z) = \frac{1}{z-z^2}$

   a). pada $0 < |z| < 1$ b). pada $|z| > 1$

   c). pada $0 < |z-1| < 1$ d). pada $|z-1| > 1$

2. Tentukan penguraian deret untuk $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$

   a). pada $|z| < 1$ b). pada $1 < |z| < 2$

   c). pada $|z| > 2$ d). pada $0 < |z-1| < 1$

   e). pada $0 < |z-2| < 1$

3. Jika $C: |z| = 10$, dijelajahi secara positif, gunakan residu untuk menghitung

$$\int_c \frac{z^2 - z + 1}{(z-1)(z+3)(z-4)} dz$$

4. Jika $C: |z - z_0| = 1$, berorientasi positif, gunakan residu untuk menunjukkan bahwa

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

5. Jika $C: |z| = 2$, berorientasi positif, tunjuukan bahwa :

$$\int_c \frac{\sinh z}{z^6} dz = \frac{\pi i}{60}$$

6. (a). Tunjukkan bahwa $g(z) = \cosh z$ mempunyai kenolan sederhana (ialah, kutub tingkat 1) pada $\frac{\pi}{2}$.

   (b). Gunakan bagian (a) dan akibat Teorema 7.4., untuk mendapatkan

$$Res\left[\tanh z \frac{\pi i}{2}\right]$$

7. Tentukan $Res\ [\sinh z, 0]$

8. Gunakan residu untuk menghitung $\int_c tgh\ z\, dz$, dimana $C: |z - 2i| = 1$, berorientasi positif.

9. Hitung $\int_C \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}dz$, dimana $C: |z| = 2$, dijelajahi secara positif.

10. Tentukan jenis singularitas $f(z) = \frac{e^{2z}+\cos 2z-2}{z^2}$ pada $z = 0$.

11. Tentukan $Res[(z-1)cosec\ z, 0]$ (Perhatikan soal 28.13).

12. Tentukan semua singularitas $\frac{1}{\cos z-1}$ dan tentukan jenisnya terasing atau tak terasing.

13. Tentukan deret Laurent untuk z^{-3} pada $|z-1| > 1$.

14. Tentukan $Res\ \left[tg\ z, \frac{\pi}{2}\right]$.

15. Tentukan $Res\ \left[ctg\ z, \frac{\pi}{2}\right]$.

16. Bagian yang bermacam-macam pada soal ini, jika dilengkapi sepantasnya akan membentuk suatu bukti bagi **azas argument** : Andaikan bahwa $(1)'. f(z)$ pada dan di dalam suatu lintasan tertutup sederhana C yang berorientasi positif, kecuali pada kutub yang banyaknya berhingga di $DI\ (C); (2)'. f(z)$ tidak mempunyai kenolan pada $C; (3). N_z$ adalah banyaknya kenolan f di $DI(C)$ dan N_p adalah banyaknya kutub f di $DI(C)$, dimana dalam menentukan N_z dan N_p tingkat kutub dan kenolan dihitung. Maka :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_z - N_p$$

(a) Jika ζ merupakan kenolan fungsi f tingkat m di $DI(C)$, maka dengan menggunakan Catatatn (1), hal.255, tunjukkan bahwa :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-\zeta} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

dimana, $\frac{g\prime(z)}{g(z)}$ analitik pada ζ.

(b) Dari (a), simpulkan bahwa $\frac{f\prime(z)}{f(z)}$ mempunyai kutub tingkat 1 pada ζ. Jadi, $Res\ \left[\frac{f\prime(z)}{f(z)}, \zeta\ \right] = m$

(c) Jika ζ merupakan kutub fungsi f tingkat n di $DI(C)$, maka tunjukkan dengan menggunakan Teorema 7.2 bahwa :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-\ \zeta} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

dimana, $\frac{h'(z)}{h(z)}$ analitik di ζ.

(d) Seperti (b), simpulkan bahwa $Res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},\zeta\right] = -n$.

(e) Ulangi proses di atas untuk setiap kutub dan setiap kenolan f di $DI(C)$ untuk menentukan N_z dan N_p karena itu lengkaplah buktinya.

17. Gunakan hasil dari soal nomor 1 untuk menghitung integral masing-masing fungsi berikut sekeliling $|z| = 3$, dijelajahi dalam arah positif.

(a) $f(z) = \frac{1}{z}$ (b) $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$

(c) $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ (d) $f(z) = \frac{1/(z+1)^2}{z/(z+1)}$

18. Tentukan residu pada titik singular dari fungsi berikut :

a. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)}$ b. $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3(z+3)^2}$

c. $f(z) = \frac{\cosh z}{z^4-1}$ d. $f(z) = \frac{9z+i}{z^3+z}$

e. $f(z) = \frac{2z-3}{z^3+3z^2}$ f. $f(z) = \frac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z}$

g. $f(z) = \frac{z-1}{\sin z}$

19. Dengan menggunakan residu, hitunglah integral berikut

$\oint_C f(z)\,dz$, jika diketahui :

a. $f(z) = \frac{2z-3}{z(z+1)}$; dengan $C: |z| = 2$ arah positif

b. $f(z) = \frac{1}{z^6(1+z)^2}$; dengan $C: |z| = 2$ arah positif

c. $f(z) = \frac{2z-3}{z^3+3z^2}$; dengan $C: |z| = 2$ arah positif

d. $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$; dengan $C: |z| = 4$ arah positif

e. $f(z) = \frac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-1)^3}$; dengan $C: |z-2| = 3$ arah positif

f. $f(z) = \frac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-1)^3}$; dengan $C: |z| = 1/2$ arah positif

g. $f(z) = \frac{z^3}{(z^4-1)^2}$; dengan $C: |z| = 2$ arah positif

20. Dengan menggunakan teorema Residu, selesaikanlah soal berikut :

$$\frac{50z}{z^3 + 2z^2 - 7z + 4} = \frac{50z}{(z+4)(z-1)\text{^}2}$$

simpel pole : -4 &
multiple pole : 1 (orde 2)

21. Dengan menggunakan teorema Residu, selesaikanlah soal berikut :

$$a. \oint \frac{4-3z}{z^2 - z} dz$$

$$b. \oint \frac{\tan z}{z^2 - 1} dz$$

$$c. \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

22. Uraikan fungsi $f(z) = \frac{1}{z^3 - 2z^2 + z}$ dalam deret Laurent untuk daerah konvergensi $0 < |z-1| < 1$.

23. Uraikan fungsi $\frac{1}{(z+2)(z-1)}$ dalam deret Laurent untuk daerah $4 < |z-2| < \infty$.

24. Uraikan fungsi $\frac{1}{z+3}$ dalam deret Laurent untuk daerah konvergensi $|z| > 3$.

25. Uraikan fungsi $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ dalam deret Laurent untuk daerah konvergensi $|z| > 0$.

INDEKS

GLOSARIUM

deret adalah bentuk penjumlahan yang terdiri atas suku-suku barisan bilangan yang tersusun secara berurutan.

deret Laurent merupakan bentuk umum dari Deret Taylor yang memuat bentuk $(z - z_0)$ berpangkat bilangan bulat negatif ditambah dengan $(z - z_0)$ berpangkat bilangan bulat positif (berhingga atau tak berhingga).

deret Taylor adalah representasi dari fungsi matematika yakni sebagai penjumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik.

fungsi analitik adalah funsi yang apabila di suatu dominan tertentu terdefenisi dan dapat diturunkan pada setiap titik dari dominan tersebut.

konvergen artinya adalah memusat atau tidak menyebar.

pecahan parsial adalah pecahan berbentuk fungsi rasional (polinomial) yang merupakan hasil dari penguraian fungsi rasional yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

A. Suhendra, R.Asworowati, T. I. (2020). *Buku Materi Pembelajaran Pemograman Linear*.

Halomoan, J. (2019a). *Geometri-I*.

Halomoan, J. (2019b). *Modul TURUNAN*.

Halomoan, J. (2020). *Dinamika Pendidikan*.

Hamzah, A. (2020). *Modul Kalkulus Lanjut*.

K. Belajar, L. Di, K. D. et al. (2014). *Modul Geometri II (Geometri Analitik dan Transformasi)*.

Kusni. (2008). *Modul Geometri I (Geometri Datar dan Ruang)*.

Lestari, D. (2013). *Deret+Laurentx*.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *Buku Materi Pembelajaran Matematika Dasar*.

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *Disusun Oleh : Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd 2019*.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown. *Jurnal EduMatSains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017 / 2018. *Jurnal EduMatsains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). Solid State Technology Volume: 64 Issue: 2 Publication Year: 2021. *Solid State Technology*, *64*(2), 4427–4444.

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics. *Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, *560*(Acbleti 2020), 507–513. https://doi.org/10.2991/assehr.k.210615.095

Monks, F. ., Knoers, A. M. ., & Haditono, S. R. (2006). *Psikologi Perkembangan*. 390.

P. A., S., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *Edumatsains, 1*(1), 35–49.