MODUL 2

BENTUK DASAR PERSAMAAN DIFFERENSIAL

DISUSUN OLEH:

NAMA : JUNI SATRIA SIMANGUNSONG

NIM : 1913150017

Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Kristen Indonesia

2022

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan yang Maha Esa,, karena dengan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan modul pembelajaran ini yang berjudul “Bentuk Dasar Persamaan Differensial”.

Adapun tujuan dari pembuatan modul ini adalah untuk memenuhi tugas mata kuliah Persamaan Differensial. Selain itu, modul ini bertujuan untuk menambah wawasan tentang persamaan Differensial bagi para pembaca dan juga bagi penulis.

Penulis mengucapkan banyak terimakasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam proses penyusunan modul ini. Penulis mengakui ada banyak kekurangan dalam pembuatan modul ini. Oleh karena itu, kritik dan saran dari seluruh pihak senantiasa penulis harapkan sehingga penulis dapat memperbaiki kekurangan pada modul ini. Dengan adanya modul ini penulis harapkan semoga dapat menambah pemahaman dan pengetahuan para pembaca dalam memahami materi Bentuk Dasar Persamaan Differensial.

Jakarta, 17 Januari 2022

Juni Satria Simangunsong

DAFTAR ISI

MODUL 2
BENTUK DASAR PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mahasiswa mampu memahami konsep dasar persamaan differensial serta mampu menyelesaikan solusi persamaan dan masalah nilai awal dari persamaan differensial dengan benar	1. Memahami konsep dasar persamaan differensial 2. Menentukan Orde, Tingkat dan Derajat n 3. Mengklasifikasi Persamaan Differensial 4. Memahami solusi Persamaan Differensial 5. Menyelesaikan Masalah Nilai Awal 6. Rangkuman Materi 7. Contoh soal diskusi kelompok dan latihan soal

Pendahuluan

Persamaan Diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variable terikat terhadap satu atau lebih variable bebas suatu fungsi. Notasi atau cara penulisan Persamaan Diferensial antara lain Notasi Leibniz dan Notasi Pangkat(Nurputri et al., 2017).

Untuk menentukan orde suatu persamaan diferensial tergantung pada fungsi turunan di dalam persamaan diferensial tersebut. **Orde** atau **tingkat** merupakan pangkat tertinggi dari turunan dalam persamaan diferensial. **Derajat** merupakan pangkat dari suku derivative tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial(Saputro.P.A. Lumbantoruan, 2020).

Persamaan differensial ini bayak kita temui dalam bidang matemtaika, fidika, dan bidang ilmu lainnya. Adapun tujuan daropada pembuatan modul ini adalah agar setiap pembaca mampu memahami bentuk dasar persamaan differensial serta solusi-solusi dari persamaaan differensial tersebut. Bentuk dasar dari persamaan differensial merupakan langkah awal yang harus dipahami agar dapat memahami materi persamaaan differensial secara keseluruhan.

Modul pembelajaran ini memberikan latihan soal yang dapat digunakan untuk mengasah pemahaman kita tentang materi persamaan differensial.

Kegiatan Pembelajaran 1

2.1 Konsep Dasar Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variable terikat terhadap satu atau lebih variable bebas suatu fungsi(Lestari, 2013).

Notasi atau cara penulisan Persamaan Diferensial antara lain(Nuryadi, 1375):

1. **Notasi Leibniz**

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

Contoh:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 6x\frac{dy}{dx} = 0$$

2. **Notasi Pangkat**

$$y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$$

Contoh:

$$y' + 5y = e^x$$

$$y'' - y' + 6y = 0$$

Jika pada suatu Persamaan Diferensial mengandung satu atau lebih turunan terhadap suatu variable tertentu, maka variable tersebut dikatakan variable bebas(J. H. Lumbantoruan, 2019a).

Contoh

1. $\frac{dy}{dx} + 3xy = e^x \quad \rightarrow y = variable\ terikat,\ x = variable\ bebas$
2. $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} = -32 \quad \rightarrow s = variable\ terikat,\ t = variable\ bebas$
3. $y' + 5y = e^x \quad \rightarrow y = variable\ terikat,\ x = variable\ bebas$
4. $y'' = e^x + \sin x \quad \rightarrow y = variable\ terikat,\ x = variable\ bebas$
5. $\frac{d^3s}{dt^3} + \frac{d^2s}{dv^2} = 0 \quad \rightarrow s = variable\ terikat,\ t\ dan\ v = variable\ bebas$
6. $\frac{du}{dt} + \frac{ds}{dt} + 3ut = 0 \quad \rightarrow u\ dan\ s = variable\ terikat,\ t = variable\ bebas$

Kegiatan Pembelajaran 2

2.2. Persamaan Differensial Orde *n* atau tingkat *n* *dan derajat n*

Untuk menentukan orde suatu persamaan diferensial tergantung pada fungsi turunan di dalam persamaan diferensial tersebut. **Orde** atau **tingkat** merupakan pangkat tertinggi dari turunan dalam persamaan diferensial. **Derajat** merupakan pangkat dari suku derivative tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial(Saputro.P.A. Lumbantoruan, 2020).

<u>Contoh:</u>

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad \rightarrow Orde\ dua,$

   $derajat\ satu$

2. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y^2 = 4 \qquad \rightarrow Orde\ dua,$

   $derajat\ tiga$

3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = x^3 - y^2 \qquad \rightarrow Orde\ dua,$

   $derajat\ tiga$

4. $y''' + 2y'' + y' = \sin x \qquad \rightarrow Orde\ tiga,$

   $derajat\ satu$

5. $(y'')^3 + (y')^2 + 3y = x^2 \qquad \rightarrow Orde\ dua,$

   $derajat\ tiga$

6. $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x \qquad\qquad \rightarrow Orde\ tiga,$
$derajat\ satu$

Jika dalam suatu persamaan diferensial diberikan suatu kondisi tambahan dengan sebuah nilai yang sama pada variable terikatnya (baik fungsi ataupun turunannya), maka dikatakan persamaan diferensial tersebut sebagai masalah nilai awal (*initial-value problem)*(J. H. Lumbantoruan & Natalia, 2021). Jika kondisi tambahan yang diberikan merupakan nilai yang berbeda pada variable terikatnya, maka dikatakan persamaan diferensial tersebut sebagai nilai-nilai batas (*boundary-value problem)*(J. H. Lumbantoruan & Natalia, 2021).

Contoh:

1. $y'' + 2y' = e^x\,; y(\pi) = 1\,; y'(\pi) = 2$
   Merupakan bentuk *initial-value problem*, karena terdapat dua kondisi tambahan dengan nilai yang sama yaitu $x = \pi$ dan $x = \pi$. Dengan nilai $y = 1$ pada saat $x = \pi$ dan nilai $y' = 2$ pada saat $x = \pi$.

2. $y'' + 2y' = e^x\,; y(0) = 1\,; y'(1) = 2$
   Merupakan bentuk *boundary-value problem*, karena terdapat dua kondisi tambahan dengan nilai yang berbeda yaitu $x = 0$ dan $x = 1$. Dengan nilai $y = 1$ pada saat $x = 0$ dan nilai $y' = 2$ pada saat $x = 1$.

Kegiatan Pembelajaran 3

2.3. Klasifikasi Persamaan Differensial

Persamaan Diferensial biasa orde-n dapat dikatakan linear jika fungsi tersebut liner pada variable terikat dan turunan-turunannya(J. H. Lumbantoruan, 2019b). Persamaan Diferensial biasa orde-n linear dapat dituliskan sebagai:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

$$dimana\ a_0(x) \neq 0$$

Jika tidak mempunyai bentuk seperti rumus di atas maka disebut **Persamaan Diferensial Non Linear**(J. H. Lumbantoruan, 2021)**.**

- Jika nilai koefisien dari $a_n(x)\ , a_{n-1}(x), \dots\ , a_1(x)\ , a_0(x)$ konstan, maka disebut dengan **Persamaan Diferensial Linear dengan Koefisien Konstan**¸sedangkan jika tidak maka disebut dengan **Persamaan Diferensial Linear dengan Koefisien Variable**(JHS, 2019)**.**
- Jika nilai dari fungsi $g(x) = 0$ maka disebut dengan **Persamaan Diferensial Linear Homogen**, tetapi jika nilai fungsi $g(x) \neq 0$ disebut dengan **Persamaan Diferensial Linear Tidak Homogen**(Sari, 2014)**.**

Karakteristik Persamaan Diferensial Linear

a) Variabel terikat dan turunannya berpangkat satu atau berderajat satu
b) Tidak terdapat perkalian antara variable terikat dengan turunannya
c) Variable terikat tidak berbentuk fungsi non-linear, seperti fungsi sinus, cosinus, eksponensial.

Contoh:

1. $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$ → Persamaan Diferensial Non-Linear
2. $x\frac{d^2x}{dy^2}$ → Persamaan Diferensial Non-Linear
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ → Persamaan Diferensial Linear
4. $t\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} = 0$ → Persamaan Diferensial Linear
5. $y'' - 2y' + y = 0$ → Persamaan Diferensial Linear Homogen
6. $yy'' - 2y' = x + 1$ → Persamaan Diferensial non Linear Tidak Homogen

Apabila dalam Persamaan Diferensial terdapat turunan dari satu atau lebih fungsi sembarang (variable terikat) terhadap hanya ada satu variable bebas disebut **Persamaan Diferensial Biasa**(Wayne W. Daniel & Chad L. Cros, 2013)**.**

Contoh:

1. $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$
3. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$
4. $y''' + 2y'' + y' = \sin x$
5. $y' - \sin x - \cos x = 0$
6. $y'' + 3y' - 4y = 0$

Apabila dalam Persamaan Diferensial terdapat turunan biasa dari satu atau lebih fungsi sembarang (variable terikat) terhadap satu atau lebih variable bebas disebut **Persamaan Diferensial Parsial**(J. Lumbantoruan, 2021b)**.**

Contoh

1. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$
2. $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{du^2} - 2\frac{dx}{dt}$
3. $\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dt}$
4. $x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} = u$
5. $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} = e$
6. $\frac{dv}{dz} - \frac{dx}{dy} + 2v = 0$

Contoh Persamaan Diferensial beserta klasifikasinya:

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^3\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x \quad \rightarrow PD\ linear,$

   $Orde\ empat,\ \ Derajat\ satu$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad \rightarrow PD\ linear,$

   $Orde\ dua,\ \ Derajat\ satu$

3. $y'' - 2y + y = 0 \quad \rightarrow PD\ linear,$

   $Orde\ dua,\ \ Derajat\ satu$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \quad \rightarrow$

   $PD\ non\ linear, Orde\ dua, derajat\ satu$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4y^3 = 0 \quad \rightarrow PD\ non\ linear,$

   $Orde\ dua,\ \ Derajat\ satu$

6. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + x^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^3\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x \rightarrow PD\ non\ linear,$

   $Orde\ empat,\ \ Derajat\ dua$

Kegiatan Pembelajaran 4

2.4 Solusi Persamaan Differensial

Pada dasarnya Solusi Persamaan differensial merupakan persamaan yang mempunyai solusi dimana setiap variabelnya memenuhi persamaan terkait(J. H. Lumbantoruan, 2019b). Untuk suatu fungsi dan turunan dari $f(x)$ akan memenuhi solusi $f(x)$ jika $f(x)$ merupakan solusi tersebut. Kedudukan $f(x)$ adalah fungsi awal dari persamaan differensial itu(J. H. Lumbantoruan, 2016).

Persamaan differensial memiliki dua jenis solusi yakni: solusi umum dan solusi khusus. **Solusi umum** persamaan differensial orden n adalah solusi secara eksplisit maupun implisit yang ada pada suatu batas interval dan solusi umum ini biasanya mengandung n konstanta, dan dari solusi umum tersebut dapat diperoleh **Solusi Khusus** jika n konstanta pada solusi umum tadi diberi suatu nilai tertentu(Lestari, 2013).

<u>Contoh</u>

1. Tunjukkan bahwa $y = x^4 + Ax + B$ adalah solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 12x^2$

   Penyelesaian :

   $y = x^4 + Ax + B$

   $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + A$ dan $\frac{d^2y}{x^2} = 12x^2$

   Maka

   $y = x^4 + Ax + B$ merupakan solusi umum dari $\frac{d^2y}{x^2} = 12x^2$

Jika kita misalkan $A = 2$ dan $B = 3$ maka akan didapat solusi khusus yaitu $y = x^4 + 2x + 3$

2. Tunjukkan bahwa $y = x^6 + Mx + N$ merupakan solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 30x^4$

   Penyelesaian :

   $y = x^6 + Mx + N$

   $\frac{dy}{dx} = 6x^5$ +M dan $\frac{d^2y}{x^2} = 30x^4$

   Maka
   $y = x^6 + Mx + N$ merupakan solusi umum dari $\frac{d^2y}{x^2} = 30x^4$

   Jika kita mislkan $M = 4$ dan $N = 5$ maka akan didapat solusi khusus yaitu $y = x^6 + 4x + 5$

3. Tunjukan bahwa $y = x^7 + Ax + B$ merupakan solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 42x^5$

   Penyelesaian :

   $y = x^7 + Ax + B$

   $\frac{dy}{dx} = 7x^6 + A$ dan $\frac{d^2y}{x^2} = 42x^5$

   Maka
   $y = x^7 + Ax + B$ merupakan solusi umum dari $\frac{d^2y}{x^2} = 42x^5$

   Jika kita misalkan $A = 5$ dan $B = 6$ maka kita akan mendapatkan solusi khusus yaitu $y = x^3 + 5x + 6$

4. Tunjukan bahwa $y = x^9 + Px + Q$ merupakan solusi dari persamaan differensial

$\frac{d^2y}{x^2} = 72x^7$

Penyelesaian :

$y = x^9 + Px + Q$

$\frac{dy}{dx} = 9x^8 + P$ dan $\frac{d^2y}{x^2} = 72x^7$

Maka

$y = x^9 + Px + Q$ merupakan solusi umum dari $\frac{d^2y}{x^2} = 72x^7$

Misalkan P=7 dan Q= 8 maka akan diperoleh solusi khusus yaitu $y = x^9 + 7x + 8$

Solusi Explisit dan Implisit

Definisi

Rumus umum persamaan differensial:

$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right] =$

$0 \qquad \dots . (1)$

Dalam hal ini F yang merupakan fungsi real

yang mempunyai (n+2), yaitu

$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}$

a) Jika f didefinisikan pada semua x dalam interval real I serta mempunyai turunan ke –n beserta turunan tingkat yang lebih rendah untuk semua $x \in I$. F merupakan solusi eksplisit dari persamaan (1) pada interval I dengan adanya dua syarat berikut ini:

$$F\begin{bmatrix} x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)], \text{yang terdefinisi} \\ \text{untuk semua } x \in I \end{bmatrix}$$

$$F[x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)] = 0, \text{untuk semua } x \in I$$

Jika f(x) dan turunannya di substitusikan terhadap y dan beserta turunannya berturut-turut yang berkaitan maka akan menghasilkan persamaan (1) pada suatu identitas pada batas interval I(Rochmad, 2016).

b) Jika relasi pada persamaan (1) yakni $g(x, y) = 0$ (solusi implisit) ini mendefinisikan setidaknya satu atau lebih fungsi f pada variable x di selang I sedemikian maka fungsi tersebut merupakan solusi eksplisit dari persamaan 1 pada batas intervali I.

Solusi bentuk eksplisit merupakan solusi dimana variable terikatnya dipresentasikan dalam bentuk variable bebas dan konstanta sehingga fungsi tersebut dapat dibedakan dengan jelas yang mana variable bebas dan variable tidak bebasnya(Drs.Sarjono, 2013). Solusi eksplisit biasanya ditulis dalam bentuk $y = f(x)$.

Contoh $y = 3x^2 + 5x - 7,$

$y = x^2 + \sin x$

Solusi bentuk implisit merupakan suatu relasi $G(x, y(x)) = 0$ pada interval I yang memenuhi setidaknya satu fungsi y yang memenuhi persamaaan differensial tersebut pada interval I.Pada solusi implisit ini dimana fungsi tersebut tidak dapat dibedakan secara jelas yang mana variabel bebas dengan variable tak bebas(J. H. Lumbantoruan, 2015). Fungsi implisit biasanya ditulis dalam bentuk $y = f(x, y = 0)$.

Contoh $y = x^2y + xy^2 = 5$

$\sin(x - y) = \cos y$

Dibawah ini ada beberapa jenis Solusi Persamaan Differensial yaitu:

i. Solusi Umum, solusi ini merupakan solusi persamaaan differensial biasa yang memuat sembarang n konstanta , misalnya C(Lumbantoruan, JH Male, 2020).

Contoh

1. Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^3$

   Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

$dy = \frac{3y}{x} dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x}$ Integrasikan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x}$$

$$\ln y \quad = 3\ln x + C$$

$$= \ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln x^3 C$$

$$y = x^3 C$$

$$y = Cx^3$$

2. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^4$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$$

$dy = \frac{4y}{x} dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

$\frac{dy}{y} = \frac{4dx}{x}$ Integrasikan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{4dx}{x}$$

$$\ln y \quad = 4\ln x + C$$

$$= \ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln x^4 C$$

$y = x^4 C$

$y = Cx^4$

3. Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{5y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^5$

   Penyelesaian :

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{5y}{x}$$

   $dy = \frac{5y}{x} dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

   $\frac{dy}{y} = \frac{5dx}{x}$ Integrasikan kedua ruas

   $$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{5dx}{x}$$

   $$\ln y = 5 \ln x + C$$

   $$= \ln x + \ln C$$

   $$\ln y = \ln x^5 C$$

   $$y = x^5 C$$

   $$y = Cx^5$$

4. Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{6y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^6$

   Penyelesaian :

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{6y}{x}$$

   $dy = \frac{6y}{x} dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

$\frac{dy}{y} = \frac{6dx}{x}$ Integrasikan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{6dx}{x}$$

$\ln y \quad = 6 \ln x + C$

$\quad\quad = \ln x + \ln C$

$\ln y \; = \ln x^6 \, C$

$y = x^6 C$

$y = C x^6$

ii. Solusi Khusus, merupakan penyelesaian PDB yang tidak yang tidak mengandung konstanta n karena terdapat syarat awal pada suatu fungsi awal atau n konstanta nya telah diberi suatu nilai tertentu(Lumbantoruan, JH Male, 2020).

<u>Contoh</u>

1. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 4x^3$

   dengan $x\,(0) = 4$ mempunyai penyelesaian khusus $y = x^4 + 4$

   Penyelesaian:

   $$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

   $dy = 4x^3 dx$ integralkan kedua ruas

   $$\int dy = \int 4x^3 dx$$

   $y = x^4 + C$

   Karena $x\,(0) = 4$ maka penyelesaian khusus $y = x^4 + 4$

2. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

   dengan syarat $x\ (0) = 5$, memiliki solusi khusus $y = x^5 + 5$

   Penyelesaian:

   $$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

   $dy = 5x^4 dx$ integralkan kedua ruas

   $$\int dy = \int 5x^4 dx$$

   $y = x^5 + C$

   Karena $x\ (0) = 5$ maka penyelesaian khususnya adalah $y = x^5 + 5$

3. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 6x^5$

   dengan syarat $x\ (0) = 8$, mempunyai penyelesaian khusus $y = x^6 + 8$

   Penyelesaian:

   $$\frac{dy}{dx} = 6x^5$$

   $dy = 6x^5 dx$ integralkan kedua ruas

   $$\int dy = \int 6x^5 dx$$

   $y = x^6 + C$

   Karena $x\ (0) = 8$ maka penyelesaian khusus $y = x^6 + 8$

4. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 8x^7$

   dengan syarat $x\ (0) = 6$, memiliki solusi khusus $y = x^8 + 6$

   Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = 8x^7$$

$dy = 8x^7 dx$ integralkan kedua ruas

$$\int dy = \int 8x^7 dx$$

$$y = x^8 + C$$

Karena $x\,(0) = 6$ maka solusi khususya adalah $y = x^8 + 6$

iii. Solusi Singular, solusi ini merupakan penyelesian persamaan differensial yang tidak diperoleh dari hasil mensubstitusikan suatu nilai konstanta pada solusi umumnya(Lumbantoruan, JH Male, 2020).

Contoh

1. Persamaan differensial $(y')^3 + xy' = y$ memiliki solusi umum $y = cx + c^3$, akan tetapi PDB tersebut juga memiliki penyelesaian lain $y = -\frac{1}{6}x^3$, dan penyelesaian inilah yang disebut dengan penyelesaian singular, karena tidak diperoleh dari hasil mensubstitusikan nilai konstanta dri solusi umumnya(J. Lumbantoruan, 2021a).

2. Persamaan differensial $(y')^4 + xy' = y$ memiliki solusi umum $y = cx + c^4$, akan tetapi PDB tersebut juga memiliki penyelesaian lain $y = -\frac{1}{8}x^4$,, dan penyelesaian inilah yang disebut dengan penyelesaian singular.

3. Persamaan differensial : $(y')^5 + xy' = y$memiliki solusi umum $y = cx + c^5$, akan tetapi PDB tersebut juga memiliki penyelesaian lain $y = -\frac{1}{10}x^5$,, dan penyelesaian inilah yang disebut dengan penyelesaian singular.

4. Persamaan differensial : $(y')^6 + xy' = y$memiliki solusi umum $y = cx + c^6$, akan tetapi PDB tersebut juga memiliki penyelesaian lain $y = -\frac{1}{12}x^6$,, dan penyelesaian inilah yang disebut dengan penyelesaian singular.

Kegiatan Pembelajaran 5

2.5. Masalah Nilai Awal

Pada pembahasan sebelumnya kita telah membahas tentang solusi persamaan differensial beserta dengan jenis-jenis solusi dari persamaannya. Sebelum mengetahui apakah suatu persamaan differensial mempunyai solusi dan apakah solusinya tunggal, maka kita perlu mengetahui maksud dari masalah nilai awal. Banyak kasus solusi umum persamaan differensial dapat dicantumkan konstanta n jika nilai n diketahui untuk $y(x_0). y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$.

Karena solusi umum masih mengandung konstanta C maka kita tentukan nilai khusus pada konstanta C seperti 4,8,-6,0 dan seterusnya untuk menjadi solusi khusus(Lestari, 2013). Nilai khusus secara teknis bergantung pada syarat awal fungsi. Jadi, dapat disimpulkan bahwa **masalah nilai awal** adalah syarat awal yang terpenuhi untuk suatu persamaan differensial.

Definisi

Pada masalah nilai awal untuk persamaan diferensial order-n $f(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ yakni menentukan solusi persamaan differensial tersebut di syarat awal $x_0 \in I$ merupakan subset real dari interval I dan n memenuhi pada

$y(x_0) = y_0, y'^{(x_0)} = y_1\dots, \dots\dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}$

Konstanta dituliskan dalam bentuk $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Contoh

1. Tentukan solusi persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ di titik $x = 1$ solusi ini bernilai 4.

   Penyelesaian:

   Diketahui

   $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, maka $dy = 3x^2\ dx$

Jika di integralkan maka akan diperoleh

$\int dy = \int 3x^2 dx \quad y = x^3 + c$ (solusi umum)

untuk menyelesaikan masalah nilai awal, maka harus didapat solusi khususnya.

Dimana syarat awal x = 1 dan y = 4

maka akan didapat nilai C yaitu:

$y = x^3 + C$

$4 = 1^3 + C$

$c = 3$

Dapat kita lihat bahwa solusi khusus dari $\frac{dy}{dx} = 3x^2$dengan nilai awal $x = 0$ dan $f(1) = 4$ adalah $y = x^3 + 3$

2. Tentukan solusi f dari persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 13x^{12}$

di titik $x = 2$, solusi ini bernilai 10.

Penyelesaian:

Diketahui:

$$\frac{dy}{dx} = 13x^{12}, \text{maka } dy = 13x^{12}\, dx$$

Jika di integrasikan maka akan diperoleh:

$\int dy = \int 13x^{12} \quad y = x^{13} + c$

untuk menyelesaikan masalah nilai awal, maka harus didapat solusi khususnya.

Dimana syarat awal $x = 2$ dan $y = 10$

maka akan diperoleh nilai C yaitu;

$y = x^{13} + C$

$10 = 2^{13} + C$

$C = -8182$

Dapat kita lihat bahwa solusi khusus dari $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ dengan nilai awal x = 0 dan $f(2)$ = 10 adalah $y = 13x^{12} - 8182$

3. Carilah suatu solusi f dari persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ di titik $x = 3$, solusi ini bernilai 10.

Penyelesaian:

Diketahui:

$\frac{dy}{dx} = 4x^3$, maka $dy = 4x^3dx$

Jika di integralkan maka akan diperoleh:

$\int dy = \int 4x^3dx \quad y = x^4 + c$ (solusi umum)

Dimana x = 3 dan y = 10

maka akan diperoleh nilai C yaitu:

$10 = x^4 + C$

$10 = 3^4 + C$

$c = -71$

Dapat kita lihat solusi khusus dari $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ dimana nilai awal x = 0 dan $f(3)$ = 10 adalah $y = x^4 - 71$

4.Tentukan solusi f dari persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 33x^{22}$

di titik $x = 1$, solusi ini bernilai 4.

Penyelesaian:

Diketahui

$\frac{dy}{dx} = 33x^{32}$, maka $dy = 33x^{22}\ dx$

Jika di integralkan akan diperoleh:

$\int dy = \int 33x^{32}dx \quad y = x^{33} + c$ (Solusi Umum)

untuk menyelesaikan masalah nilai awal, maka harus didapat solusi khususnya.

Dimana $x = 1$ dan $y = 4$

maka diperoleh nilai C yaitu:

$4 = x^{33} + C$

$4 = 1^{33} + C$

$c = 3$

Dapat kita lihat bahwa penyelesaian khusus dari $\frac{dy}{dx} = 33x^{32}$,

Dengan nilai awal x = 1 dan $f(2)$ = 2 yaitu $y = x^{33} + 3$

Teorema A: Eksistensi Dan Keunikan

Pada theorema ni kita akan membahas tentang keunikan untuk masalah nilai awal yang menyatakan

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ dimana:

1. Bidang xy dengan beberapa titik asal D juga f yang merupakan fungsi dari x dan y
2. Bila f adalah fungsi kontinu maka Turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial y}$ juga fungsi kontinu dari *x* dan *y* dengan memisalkan (x_0, y_0) pada titik asal di *D*.

Dengan demikian, terdapat satu solusi persamaan differensial ϕ yang memenuhi $\phi(x_0) = y_0$ dan h cukup kecil pada beberapa interval terdefinisikan di Maka terdapat solusi unik (tunggal) dari persamaan differensial yaitu $\emptyset$ yang terdefinisi pada beberapa interval $|x - x_0| \leq h$.

Contoh

1. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3$ kontinu dalam segiempat pada titik (1,6), apakah solusi tersebut memiliki solusi tunggal?

   Penyelesaian:

   $$f(x, y) = x^2 - xy^3 \; dan \; \frac{\partial f}{\partial y} = -3xy^2,$$

   Kita dapat melihat bahwa fungsi ini kontinu dalam segiempat yang memuat titik (1,6), sehingga pernyataan 1 terpenuhi dan masalah nilai awal mempunyai solusi tunggal dalam suatu interval di sekitar $x = 1$ dengan bentuk $|x - 1| \leq h$ dengan h cukup kecil.

2. Selidikil apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x^3 - xy^4$ kontinu dalam segiempat pada titik (2,7), apakah solusi ini memiliki solusi tunggal?

   Penyelesaian:

   $$f(x,y) = x^3 - xy^4 \; dan \; \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy^3,$$

   Fungsi tersebut kontinu dalam segiempat yang memuat titik (2,7) sehingga pernyataan 1 terpenuhi dan masalah nilai awal mempunyai solusi tunggal(Purwandari, 2018).

3. Selidikilah apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x^5 - xy^6$ kontinu pada segiempat, apakah solusi tersenut memiliki solusi yang tunggal?

   Penyelesaian:

   $$f(x,y) = x^5 - xy^6 \; dan \; \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy^5,$$

   merupakan fungsi yang kontinu dalam segiempat yang memuat titik (3,8) dan pernyataan 1 dipenuhi sehingga memiliki solusi tunggal.

4. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x^7 - xy^8$ kontinu dalam segiempat pada titik (4,9) dan memiliki solusi tunggal?

Penyelesaian:

$$f(x, y) = x^7 - xy^8 \; d\text{an} \; \frac{\partial f}{\partial y} = -8xy^7,$$

Fungsi ini kontinu dalam segiempat pada titik (4,9), dengan demikian pernyataan dari pernyataan 1 dipenuhi dan masalah nilai awal memiliki solusi tunggal.

<u>Contoh</u>

1. Selidiki apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ pada titik $(2) = 0$mempunyai solusi yang tunggal!

Penyelesaian:

$$f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}} \text{ sehingga } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}}$$

akan tetapi $\frac{\partial f}{\partial y}$ tidak kontinu dan tidak didefinisikan di

y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik (2,0) dimana f dan $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$ keduanya kontinu.

Karena hipotesis teorema 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tidak mempunyai solusi.

2. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = 4y^{\frac{3}{4}}, y(3) = 0$ mempunyai solusi yang tunggal

Penyelesaian:

$f(x,y) = 4y^{\frac{3}{4}}$ sehingga $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^{-\frac{1}{4}}$

akan tetapi $\frac{\partial f}{\partial y}$ tidak kontinu dan tidak didefinisikan di

y = 0. sehingga tidak ada segiempat yang memuat titik (3,0) dimana f dan $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$ keduanya kontinu.

Karena hipotesis teorema 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tersebut tidakmemiliki peyelesaian.

3. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = 5y^{\frac{4}{5}}$

Dimana $y(4) = 0$ mempunyai solusi yang tunggal?

Penyelesaian:

$f(x,y) = 5y^{\frac{4}{5}}$

sehingga $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^{-\frac{1}{5}}$

akan tetapi $\frac{\partial f}{\partial y}$ tidak kontinu dan tidak didefinisikan di y = 0. Sehingga fungsi tersebut tidak memuat segiempat pada titik (4,0) dimana f dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ keduanya kontinu.

Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tersebut tidak memiliki penyelesaian.

4. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = 10y^{\frac{9}{10}}$yang memuat titik (9,0) mempunyai solusi tunggal?

Penyelesaian:

$f(x,y) = 10y^{\frac{9}{10}}$

sehingga $\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^{-\frac{1}{10}}$

akan tetapi $\frac{\partial f}{\partial y}$ tidak kontinu dan tidak didefinisikan di y = 0. Sehingga tidak ada segiempat yang memut titik (9,0) dimana f dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ keduanya kontinu.

Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tersebut tidak memiliki solusi

Kegiatan Pembelajaran 6

2.6. Rangkuman

1. Persamaan Diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variable terikat terhadap satu atau lebih variable bebas suatu fungsi.
2. **Orde** atau **tingkat** merupakan pangkat tertinggi dari turunan dalam persamaan diferensial. **Derajat** merupakan pangkat dari suku derivative tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.
3. Apabila dalam Persamaan Diferensial terdapat turunan dari satu atau lebih fungsi sembarang (variable terikat) terhadap hanya ada satu variable bebas disebut Persamaan Diferensial Biasa.

   Apabila dalam Persamaan Diferensial terdapat turunan biasa dari satu atau lebih fungsi sembarang (variable terikat) terhadap satu atau lebih variable bebas disebut Persamaan Diferensial Parsial.
4. Solusi Persamaan differensial merupakan persamaan yang mempunyai solusi dimana setiap variabelnya memenuhi persamaan terkait.
5. Persamaan differensial mempunyai dua solusi yaitu solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum persamaan differensial orden n adalah solusi yang biasanya

mengandung n konstanta, sedangkan solusi khusus ialah solusi yang diperoleh dari solusi umum apabila n konstanta tersebut diberi suatu nilai tertentu.

6. Solusi bentuk eksplisit merupakan solusi dimana variable terikatnya dipresentasikan dalam bentuk variable bebas dan konstanta sehingga fungsi tersebut dapat dibedakan dengan jelas yang mana variable bebas dan variable tidak bebasnya. Solusi eksplisit dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$.
7. Solusi bentuk implisit merupakan suatu relasi $G(x, y(x)) = 0$ pada interval I yang memenuhi setidaknya satu fungsi y yang memenuhi persamaaan differensial tersebut pada interval I.Pada solusi implisit ini dimana fungsi tersebut tidak dapat dibedakan secara jelas yang mana variabel bebas dengan variable tak bebas. Fungsi implisit ditulis dalam bentuk $y = f(x, y = 0)$.
8. Solusi Persamaan Diferensial Biasa dibagi jadi tiga jenis yaitu, Solusi Umum, solusi ini merupakan solusi persamaaan differensial biasa yang memuat sembarang n konstanta , misalnya C. Solusi Khusus, penyelesaian khusus ini merupakan solusi PDB yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada suatu PDB atau n konstanta nya telah diberi suatu nilai tertentu. Solusi Singular, solusi ini merupakan penyelesian persamaan differensial yang tidak diperoleh dari hasil mensubstitusikan suatu nilai konstanta pada solusi umumnya.

9. Pada masalah nilai awal untuk persamaan diferensial order-n $f(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$ yakni menentukan solusi persamaan differensial tersebut di syarat awal $x_0 \in I$ merupakan subset real dari interval I dan n memenuhi pada $y(x_0) = y_0$, $y'^{(x_0)} = y_1 \ldots.$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}$ Konstanta dituliskan dalam bentuk $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

10. Keunikan untuk masalah nilai awal yang menyatakan $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ dimana:
    - Bidang xy dengan beberapa titik asal D juga f yang merupakan fungsi dari x dan y.
    - Bila f adalah fungsi kontinu maka Turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial y}$ juga fungsi kontinu dari x dan y dengan memisalkan (x_0, y_0) pada titik asal D.

Kegiatan Pembelajaran 7

2.7. Diskusi Kelompok Mahasiswa

Untuk soal 1-5 klasifikasikan persamaan differensial di bawah ini.

1. $x^2y'' - 2xy'' + (x^2 - 3)y = 0$

   Penyelesaian:

   Klasifikasi persamaan differensial dari $x^2y'' - 2xy'' + (x^2 - 3)y = 0$ adalah

   a. Orde : 2
   b. Derajat : ….
   c. Koefisien : Variabel
   d. Kehomogenan : ….

2. $y'' + 3t^3y'' - \cos t = 0$

   Penyelesaian:

   Klasifikasi persamaan differensial dari $y'' + 3t^3y'' - \cos t = 0$ adalah

   a. Orde : ….
   b. Derajat : 1
   c. Koefisien : ….
   d. Kehomogenan : Homogen

3. $y''' + 3(y'')^2 + y' = \sin x$

   Penyelesaian:

Klasifikasi persamaan differensial dari $y''' + 3(y'')^2 + y' = \sin x$ adalah

a. Orde : ….
b. Derajat : 2
c. Koefisien : ….
d. Kehomogenan : ….

4. $x^2y'' + 2 + 2xy' + 2y = 3x^3$

Penyelesaian:

Klasifikasi persamaan differensial dari $x^2y'' + 2 + 2xy' + 2y = 3x^3$ adalah

a. Orde : ….
b. Derajat : ….
c. Koefisien : ….
d. Kehomogenan : Non Homogen

5. $y' - y^5 = \cos x$

Penyelesaian:

Klasifikasi persamaan differensial dari $y' - y^5 = \cos x$ adalah

a. Orde : ….
b. Derajat : ….
c. Koefisien : Konstanta
d. Kehomogenan : ….

Dalam soal 6 - 10 ubahlah persamaan differensial dibawah ini dengan notasi lain

6. $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$

Penyelesaian:

Notasi lain dari $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$ adalah

$$y^{\cdots\cdot} + \ldots.^2 = 0$$

7. $\sin xy\ \frac{dy}{dx} + \cos\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Jawab :

Notasi lain dari adalah $\sin xy\ \frac{dy}{dx} + \cos\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$\sin xy \ldots^{\cdots\cdot} + \cos \ldots.^{\cdots\cdot} = 0$$

8. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$

Jawab :

Notasi lain dari $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$ adalah

$$y^{\cdots\cdot} + 3(\ldots.^2)^5 + 5y = 0$$

9. $\frac{dy}{dx} + x^2y = xe^x$

Jawab :

Notasi lain dari $\frac{dy}{dx} + x^2y = xe^x$ adalah

$$\ldots.' + x^2y = xe^x$$

10. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$

Jawab :

Notasi lain dari $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$ adalah

$$y^{\cdots\cdots} + 4 \ldots^{\cdots\cdots} - 5y^{\cdots\cdots} + 3y = \sin x$$

11. Tunjukkan bahwa $y = x^{10} + Ax + B$ merupakan solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 90x^8$

Penyelesaian :

$y = x^{10} + Ax + B$

$\frac{dy}{dx} = \cdots + A$ dan $\frac{d^2y}{x^2} = \cdots$

Maka

$y = \cdots + Ax + B$ merupakan solusi umum dari $\frac{d^2y}{x^2} = \cdots$

Jika kita misalkan A= … dan B= … maka akan didapat solusi khusus yaitu $y = x^{10} + \cdots + \cdots$

12. Tunjukan bahwa $y = x^{21} + Px + Q$ merupakan solusi dari persamaan differensial

$\frac{d^2y}{x^2} = 420x^{19}$

Penyelesaian :

$y = \cdots + Px + Q$

$\frac{dy}{dx} = \cdots + \cdots$ dan ... $= \cdots$

Maka

$y = \cdots + Px + Q$ merupakan solusi umum dari $\frac{d^2y}{x^2} = \cdots$

Misalkan P=… dan Q= … maka akan diperoleh solusi khusus yaitu $y = \cdots + \cdots x +$..

13. Tunjukkan bahwa $y = x^{89} + Mx + N$ merupakan solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 90x^7$

Penyelesaian :

$y = x^{89} + Mx + N$

$\frac{dy}{dx} = \cdots + \text{M}$ dan $\frac{d^2y}{x^2} = \cdots$

Maka

$y = \cdots + Mx + N$ merupakan solusi umum dari $\frac{d^2y}{x^2} = \cdots$

Jika kita misalkan M= … dan N= … maka akan didapat solusi khusus yaitu $y = x^{89} + \cdots + \cdots$

14. Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{19y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{19}$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{...}{x}$$

$dy = \cdots dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

$\frac{dy}{y} = \cdots$ Integrasikan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{19dx}{x}$$

$\ln y \quad = \cdots + C$

$\quad\quad = \cdots + \cdots$

... $= \cdots$

15. Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{28y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{28}$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{...}{x}$$

$dy = \cdots dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

$\frac{dy}{y} = \cdots$ Integrasikan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{28dx}{x}$$

$$\ln y \quad = \cdots + C$$

16. Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{61y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{61}$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dots}{x}$$

$dy = \cdots dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

$\frac{dy}{y} = \cdots$ Integrasikan kedua ruas

$$\int \frac{\dots}{y} = \int \frac{61dx}{x}$$

$$\ln y \quad = \cdots + C$$

17. Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{83y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{83}$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dots}{x}$$

$dy = \cdots dx$ bagi kedua sisi persamaan dengan y sehingga

$\frac{dy}{y} = \cdots$ Integrasikan kedua ruas

$$\int \frac{\dots}{y} = \int \frac{83dx}{x}$$

$$\ln y \quad = \cdots + C$$

18. Persamaan differensial : $(y')^{16} + xy' = y$ memiliki solusi umum $y = \cdots + \cdots$, akan tetapi PDB tersebut juga memiliki penyelesaian lain $y = \cdots$„ dan penyelesaian inilah yang disebut dengan penyelesaian singular.
19. Persamaan differensial : $(y')18^6 + xy' = y$memiliki solusi umum $y = \cdots + \cdots$, akan tetapi PDB tersebut juga memiliki penyelesaian lain $y = \cdots$„ dan penyelesaian inilah yang disebut dengan penyelesaian singular.

20. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = 14x^{13}$

dengan syarat $x\ (0) = 2$ mempunyai penyelesaian khusus $y = x^4 + 2$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

$dy = 4x^3 dx$ integralkan kedua ruas

$$\int dy = \int 4x^3 dx$$

$$y = x^4 + C$$

Karena $x\ (0) = 4$ maka penyelesaian khusus $y = x^4 + 4$

21. Persamaan Differensial $\frac{dy}{dx} = 68x^{67}$, pada titik $x = 4$, solusi ini mempunyai nilai 200.

Penyelesaian :

Diketahui $\frac{dy}{dx} = 68x^{67}$, maka $dy = 68x^{67}dx$ sehingga

$$\int \frac{dy}{y} = \int 68x^{67}dx, \qquad y = \cdots + c$$

Dimana $x = \cdots$ dan $y = \cdots$

maka nilai C adalah $y = x$ ... $+ C$

... = 2 ... $+ C$

$c = \cdots$

Sehingga solusi dari $\frac{dy}{dx} = 68x^{67}dx$

dengan nilai awal $x = 0$ dan $f\ (4) = 200$ adalah $y =$ x ... $+ \cdots$

22. Persamaan Differensial $\frac{dy}{dx} = 120x^{119}$, pada titik $x = 6$, solusi ini mempunyai nilai 800.

Penyelesaian :

Diketahui $\frac{dy}{dx} = 120x^{119}$, maka $dy = 120x^{119}dx$ sehingga

$$\int \frac{dy}{y} = \int 120x^{119}dx, \qquad y = \cdots + c$$

Dimana $x = \cdots$ dan $y = \cdots$

maka nilai C adalah $y = x$ ... $+ C$

... = 2 ... $+ C$

$c = \cdots$

Sehingga solusi dari $\frac{dy}{dx} = 120x^{119}dx$

dengan nilai awal $x = 0$ dan $f\ (6) = 200$ adalah $y =$ x ... $+ \cdots$

23. Persamaan Differensial $\frac{dy}{dx} = 213x^{212}$, pada titik $x = 4$, solusi ini mempunyai nilai 120.

Penyelesaian :

Diketahui $\frac{dy}{dx} = 213x^{212}$, maka $dy = 213x^{212}dx$ sehingga

$$\int \frac{dy}{y} = \int 213x^{212}dx, \qquad y = \cdots + c$$

Dimana $x = \cdots$ dan $y = \cdots$

maka nilai C adalah $y = x$ ... $+ C$

... = 2 ... $+ C$

$c = \cdots$

Sehingga solusi dari $\frac{dy}{dx} = 68x^{67}dx$

dengan nilai awal $x = 0$ dan $f\,(4) = 120$ adalah $y = x$ ... $+ \cdots$

24. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = 8y^{\frac{16}{32}}, y(4) = 0$ mempunyai solusi yang tunggal

Penyelesaian:

$f(x,y) = 8y^{\frac{16}{32}}$ sehingga $\frac{\partial f}{\partial y} = \cdots$ akan tetapi $\frac{\partial f}{\partial y}$

… dan tidak didefinisikan di y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik … dimana f dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ keduanya kontinu.

Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal …

25. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = 10y^{\frac{20}{40}}, y(5) = 0$ mempunyai solusi yang tunggal

Penyelesaian:

$f(x, y) = 10y^{\frac{20}{40}}$ sehingga $\frac{\partial f}{\partial y} = \cdots$ akan tetapi $\frac{\partial f}{\partial y}$

… dan tidak didefinisikan di y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik … dimana f dan $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$ keduanya kontinu.

Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal …

Kegiatan Pembelajaran 8

2.8. Latihan Mandiri Mahasiswa

Pada soal no 1-7 Buatlah Persamaan Diferensial tersebut dalam bentuk notasi lainnya!

1. $x' = x^2 - y^2$
2. $y'' - 4y'' = 6$
3. $\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} = 0$
4. $\frac{dz}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$
5. $(y''')^2 + (y'')^3 + 2xy = 6$
6. $\left(\frac{d^2t}{du^2}\right)^3 - 2\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = 3$
7. $xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$

Pada soal no. 8-14 Tentukan nilai orde atau tingkat dan derajat dari Persamaan Diferensial di bawah ini!

8. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x$
9. $x(y'')^2 + (y')^3 - y = 0$
10. $3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 3x$
11. $xy\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) - y^2 \sin x = 0$
12. $x^2y' + y = 0$
13. $y'' + 5(y')^2 - 4y = x$

14. $c^2 \frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$

Pada soal no 15-21 Tentukan Persamaan Diferensial dibawah ini berdasarkan nilai variabelnya dan jabarkan!

15. $6''' + 3y' = e^x \, ; y(3) = 3 \, ; y(3) = 4$
16. $5y'' + 2y' = e^x \, ; y(-1) = 3 \, ; y(2) = 7$
17. $3y'' + 23y' = e^x \, ; y(2) = 1 \, ; y(2) = 4$
18. $y''' - y' \cos x = e^x \, ; y(2) = 1 \, ; y(1) = 1$
19. $y''' - 2y' = \sin x \; ; y(4) = 3 \, ; y(4) = 2$
20 .$y'' - y' \sin x = e^x \, ; y(-2) = 1 \, ; y(1) = 1$
21. $2y''' + 25y'' = e^x \, ; y(3) = 2 \, ; y(2) = 5$

Pada soal 22-33 Klasifikasikan Persamaan Diferensial berikut ini!

22. $\frac{dy}{dx} + x^2y = xe^x$
23. $(y - x)dx + 4xdy = 0$
24. $x^3 \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 5y = e^x$
25. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = 0$
26. $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^2 + x^3 \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x$
27. $x^2dy + y^2dx = 0$
28. $\frac{d^3t}{ds^3} + 3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^5 + 3t = 0$
29. $\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0$
30. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$

31. $\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right) + x = t$

32. $\frac{d^3y}{dx^2} + y \sin x = 0$

33. $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$

34. Tunjukan bahwa $y = x^{13} + Px + Q$ merupakan solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 156x^{11}$

35. Tunjukan bahwa $y = x^{11} + Mx + N$ merupakan solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 90x^8$

37. Tunjukan bahwa $y = x^{12} + Mx^6 + N$ merupakan solusi dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{x^2} = 132x^{10} + 30x^4$

38. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = \frac{23y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{23}$

39. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = \frac{81y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{81}$

40. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = \frac{82y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{82}$

41. Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} = \frac{69y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = Cx^{69}$

42. Carilah suatu solusi f dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ sedemikian sehingga di titik $x = 2$ solusi ini mempunyai nilai 3.

43. Carilah suatu solusi f dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 24x^{23}$ sedemikian sehingga di titik $x = 6$ solusi ini mempunyai nilai 12.
44. Carilah suatu solusi f dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 27x^{28}$ sedemikian sehingga di titik $x = 2$ solusi ini mempunyai nilai 14.
45. Carilah suatu solusi f dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 124x^{123}$ sedemikian sehingga di titik $x = 18$ solusi ini mempunyai nilai 200.

46. Apakah $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ merupakan solusi eksplisit dari Persamaan Differensial $\frac{d^2y}{x^2} + y = 0$ dimana $x \in R$?
47. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x^{18} - xy^{19}. y(15) = 10$ mempunyai solusi yang tunggal?
48. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x^{21} - xy^{22}. y(18) = 12$ mempunyai solusi yang tunggal?
49. Apakah masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x^{16} - xy^{17}. y(6) = 12$ mempunyai solusi yang tunggal?
50. Tunjukkan bahwa $x^5 + 3xy^2 = 1$ adalah solusi implisit dari persamaan differensial $2xy\frac{dy}{dx} + x^2y^2 = 0$ pada interval $0 < x <$

INDEKS

GLOSARIUM

DIFERENSIAL

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

EKSISTENSI

Segala sesuatu yang dialami dan menekankan sesuatu itu ada.

EKSPLISIT

Persamaan sederhana yang hampir semua unsur – unsur di dalam persamaan itu telah diketahui (tersurat).

EKSPONENSIAL

Salah satu fungsi yang paling penting dalam matematika. Materi eksponen menyajikan persamaan yang melibatkan bilangan berpangkat.

FUNGSI

Sekelompok aktivitas yang tergolong pada jenis.

INTERVAL

Suatu himpunan bilangan real dengan sifat bahwa setiap bilangan yang terletak di antara dua bilangan dalam himpunan itu juga termasuk ke dalam himpunan.

KEUNIKAN

Keadaan atau kondisi dimana sesuatu tidak sepertii hal lain dalam perbandingan.

KONSTANTA

Suatu nilai tetap; berlawanan dengan variabel yang berubah-ubah

KONTINU

Suatu fungsi yang berkelanjutan atau berkesinambungan

LINEAR

Sebuah persamaan aljabar yang tiap sukunya mengandung konstanta

NILAI AWAL

Persamaan differensial dengan n syarat awal pada suatu nilai

NOTASI

Sistem lambing yang menggambarkan bilangan.

PARSIAL

Kaidah yang mengubah integral perkalian fungsi menjadi betuk lain yang lebih sederhana.

SINGULAR

Fungsi yang bila dijelaskan secara intuitif, perubahan kecil dalam masukannya berakibat perubahan kecil pula pada keluaran.

ORDE

Pangkat tertinggi dari sebuah koefisien diferensial

RELASI

Suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain.

TURUNAN

Bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya

TEOREMA

Sebuah pernyataan, yang dapat dibuktikan atas dasar asumsi.

VARIABEL

Nilai yang dapat berubah dalam suatu cakupan soal atau himpunan operasi yang diberikan

DAFTAR PUSTAKA

Desi, D., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Buku Cerita Matematika Pada Kelas VII SMP Dalam Materi Perbandingan. *Edumatsains;Jurnal Pendidikan,Matematika,Dan Sains*,(*1)*,23-34https://doi.org/10.33541/EDUMATSAINS.V1I1.2452

Drs.Sarjono, S. . (2013). *Diktat Persamaan Diferensial*. 41.

JHS. (2019). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN GEOMETRI 1* (Issue April).

Lestari, D. (2013). Modul Persamaan Differensial. *Diktat Persamaan Differensial*. https://scholar.google.co.id/scholar?hl=id&as_sdt=0,5&q=Lestari,+diktat+persamaan+diferensial

Lumbantoruan, JH Male, H. (2020). Analisis Miskonsepsi Pada Soal Cerita Teori Peluang Di Program Studi Pendidikan Matematika. *EduMatSainsEduMatSains, J. L.-J., & 2019, Undefined. (n.d.). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan., 2022, 4*(2), 153–168.

Lumbantoruan, J. (2021a). *Mata Kuliah: Matematika Dasar II*.

Lumbantoruan, J. (2021b). *Mata Kuliah: Persamaan Differensial*.

Lumbantoruan, J. H. (2015). *Modul Kalkulus Lanjut 2015*.

Lumbantoruan, J. H. (2016). *Modul Kalkulus Dasar*.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *Buku Integral Tentu Jilid 2* (J. H. Lumbantoruan (ed.); Edisi 1).

Lumbantoruan, J. H. (2019b). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan. *Jurnal EduMatSains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2021). *Mata Kuliah: Matematika Kimia*.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). *DEVELOPMENT OF A CONSTRUCTIVISM-BASED STATISTICS MODULE FOR CLASS VIII JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS*. *64*(2).

Nurputri, A., Agustina, L., Hernawati, S., Kartika, H., Program, M., Pendidikan, S., Universitas, M., Karawang, S., & Program, S. P. (2017). *Pengoperasian Aturan Rantai Menggunakan Notasi Leibniz serta Aplikasinya*.

Nuryadi, S. P. S. M. (1375). *Persamaaan Differensial Elementer dan Penerapannya*.

Purwandari, Y. (2018). *PENYELESAIAN NUMERIS MASALAH NILAI BATAS MENGGUNAKAN METODE TEMBAKAN*.

Rochmad. (2016). Bahan Ajar Persamaan Diferensial. *Academia.Edu*, 1–53.

Saputro.P.A. Lumbantoruan, J. . (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *EduMatSains : Jurnal Pendidikan, Matematika, Dan Sains*, *1*, 35–49.

Sari, F. M. (2014). PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINEAR HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN MENGGUNAKAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON. *Uletin Ilmiah Mat.Sat Dan Terapannya*, *03*(2), 125–134.

Wayne W. Daniel & Chad L. Cros. (2013). *Buku Probalitas*.