MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL KONSTAN

Disusun Oleh:

Ester Rahmani Laia

1913150024

PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN ILMU DAN PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

2021

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa karena telah melimpahkan kasih dan berkat-Nya hingga penulis berhasil menyelesaikan bahan ajar modul “Persamaan Diferensial Konstan”.

Kami sangat mengucapkan terimakasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam proses penyusunan makalah ini. Baik itu berupa ide, gagasan, serta saran selama proses penyusunan makalah ini. Semoga dengan adanya makalah ini dapat menambah pengetahuan para pembaca terutama dalam memahami materi Persamaan Differensial Metode Substitusi.

Modul Ini sangat sederhana dan masih banyak kekurangan. Maka dari itu, dengan segala kerendahan hati kami mengharapkan saran dan kritik dari semua pihak, sehingga kami penulis dapat melakukan perbaikan pada edisi berikutnya. Untuk itu, terima kasih setulus-tulusnya penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu, sehingga modul ini dapat di selesaikan.

Jakarta, 12 Desember 2021

Penulis,

(Ester Rahmani Laia)

DAFTAR ISI

MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL KONSTAN

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mahasiswa dihapkan mampu memahami defenisi dan konsep Persamaan Diferensial konstan, serta dapat menyelesaikan dan membuat contoh persoalan dabam bentuk persamaan diferensial yang konstan	1. Defenisi Persmaan Diferensial Konstan 2. Konsep Persamaan Diferensial Konstan 3. Menyelesaikan Persoalan Diferensial yang konstan

MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL KONSTAN

6.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Persamaan Diferensial Homogen

Suatu fungsi $f(x, y)$ dapat disebut homogen berderajad n jika :

$$\boldsymbol{f(\lambda x \lambda y) = \lambda^n, f(x, y)}$$

Persamaan diferensial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ bisa dikatakan homogen jika M (*x,y*) dan N (x,y) merupakan homogen berada pada tingkat derajat yang setara, artinya setiap variable kita kalikan dengan parameter λ (Lumbantoruan, 2019a). Sehingga dalam persamaan homogen dilakukan substitusi:

$$y = vx \text{ dan } dy = vdx + xdv$$

<u>Contoh :</u>

1. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$

   Penyelesaian:

   Misalkan $v = \frac{y}{x}$, maka $y = vdx$

   Turunkan $y = vx$ dan $dy = vdx + xdv$

   $(x^2 + (vx)^2)dx + x(vx)(vdx + xdv) = 0$

   $(x^2 + 2x^2v^2)dx + x^3vdv = 0$

   $x^2(1 + 2v^2)dx + x^3vdv = 0 \ldots .PD\ Variabel\ terpisah$

   $\frac{dx}{x} + \frac{vdv}{(1 + 2v^{2)}} = 0 => \int \frac{dx}{x} + \int \frac{vdv}{(1 + 2v^{2)}} = 0$

   $\ln x + \frac{1}{4}\ln(1 + 2v^2) = C => \ln x + \frac{1}{4}\ln\left(1 + 2\frac{y^2}{x^2}\right) = C$

2. $(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0$

Penyelesaian :

Misalkan : $y = ux, dy = udx + xdu$

$(x + 2ux)dx + (2x + 3ux)(udx + xdu) = 0$

$(x + 2ux)dx + (2ux + 3u^2x)dx(2x^2 = 3ux^2)du = 0$

$(x + 4ux + 3u^2x)dx + (2x^2 + 3ux^2)du = 0$

$\underline{(1 + 4u + 3u^2)x + (2 + 3u)x^2du = 0}$ $\quad : (1 + 4u + 3u^2)x^2$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{(2 + 3u)}{1 + 4u + 3u^2}du = 0$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2(2 + 3u)}{1 + 4u + 3u^2} = \int 0$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln(1 + 4u + 3u^2)x^2 = C$$

$$= \ln x + \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + \tfrac{4u}{x} + \tfrac{3y^2}{x^2}\right) = C$$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

Penyelesaian:

$xydy = (x^2 - y^2)dx$

$(y^2 - x^2) + xydy = 0$

$y = ux,\ dy = udx + xdu$

$(u^2x^2 - x^2)dx + x.ux(udx + xdu = 0$

$(2u^2x^2 - x^2)dx + ux^3du = 0$

$\underline{(2u^2 - 1)x^2dx + ux^3du = 0} : (2u^2 - 1)x^3$

$\frac{1}{x}dx + \frac{4u}{(2u^2 - 1)}du = 0$

$= \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{4}\int \frac{4u}{(2u^2 - 1)}$

$= \ln x + \frac{1}{4}\ln(2u^2 - 1) = C$

$= \ln x + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2y^2}{x^2} - 1\right) = C$

4. $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}\, dx = 0$

Penyelesaian:

$xdy - (y + \sqrt{x^2 - y^2}\, dx = 0$

$M(tx, ty) \qquad = -(ty + \sqrt{t^2x^2 - t^2y^2}$

$= -\left(ty + \sqrt{t^2(x^2 - y^2)}\right)$

$= -\left(ty + t\sqrt{x^2 - y^2}\right)$

$= t(-(y + \sqrt{x^2 - y^2}$

$= t'M(x, y$

$N(tx, ty) = tx = t'N(x, y)$

$y = ax,\ dy = adx + xda$

$x(adx + xda) - (ax + \sqrt{x^2 - a^2x^2}dx = 0$

$4xdx + x^2da - (ux + \sqrt{x^2 - a^2x^2}dx = 0$

$-\sqrt{x^2 - a^2x^2}dx + x^2da = 0$

$\underline{-\sqrt{-a^2}xdx + x^2da = 0} \qquad : \sqrt{1 - a^2}x^2$

$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{\sqrt{-a^2}}da = 0$

$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{-a^2}}$

$= -\operatorname{In} x + arc \sin a = C$

$= -\ln x + arc \sin \frac{x}{y} = C$

6.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Diferensial Tidak Homogen

Persamaan diferensial yang memiliki ciri $(ax + by + c)\,dx + (kx + ly + m)\,dy = 0$ ... (i), yang dimana $a, b, c, k, l,$ serta m merupakan konstanta dapat dikatakan Persamaan diferensial tidak homogen (Lumbantoruan, 2021). Terdapat beberapa ketentuan dalam menyelesaikan PD tersebut;

$$(1)\ jika\ \frac{a}{k} \neq \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}\ atau\ al - bk \neq 0$$

$$(2)\ jika\ \frac{a}{k} = \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}\ atau\ al - bk = 0$$

$$(3)\ jika\ \frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m} = n$$

Pada ketentuan (1) ketika

$$\frac{a}{k} \neq \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}\ atau\ al - bk \neq 0$$

$$ax + by + c = u \qquad a\,dx + b\,dy = du$$

$$kx + ly + m = v \qquad k\,dx + l\,dy = dv$$

$$a\,dx + b\,dy = du\ (*q)$$

$$\underline{k\,dx + l\,dy = dv\ (*b)}$$

$$ak\,dx + bl\,dy = l\,du$$

$$\underline{bk\,dx + bl\,dy = b\,dv\ -}$$

$$(al - bk)dx = l\,du - b\,dv$$

$$dx = \frac{l.du - b.dv}{(al - bk)} \ldots (ii)$$

dengan cara yang sama yaitu mengeliminasi dx, diperoleh

$$dy = \frac{a.du - b.dv}{(al - bk)} \ldots (iii)$$

kemudian substitusi $u, v, pers\ (ii)\ dan\ (iii)$ ke PD awal [pers (i)]

$$u\,dx + v\,dy = u\left(\frac{l.du - b.dv}{(al - bk)}\right) + v\left(\frac{a.du - b.dv}{(al - bk)}\right) = 0$$

$$= u\,(l\,du - b\,dv) + v\,(a\,dv - k\,du) = 0$$

$$lu\,du - bu\,dv + av\,dv - kv\,du = 0$$

$(lu - kv)\,du + (av - bu)\,dv = 0$, PD Homogen

Setelah PD awal tersebut berbentuk seperti PD terakhir diatas, maka penyelesaiannya dapat menggunakan Penyelesaian PD Homogen (Lumbantoruan, 2019c).

Selesaikan persamaan – persamaan berikut :

<u>Contoh</u>

1. Tentukan penyelesaian $y' = \frac{-x+2y+5}{2x-y-4}$

   Penyelesaian :

   $y' = \frac{-x+2y+5}{2x-y-4}$

   $(2x - y - 4)dy = (-x + 2y + 5)dx$

   $(x - 2y - 5)dx + (2x - y - 4)dy = 0$

   $a = 1, b = -2, c = -5, p = 2, q = -1, r = -4$

   $\frac{a}{k} = \frac{1}{2}, \frac{b}{l} = \frac{2}{1}, \frac{c}{m} = -\frac{5}{-4}$ sehingga $\frac{a}{k} \neq \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}$ **(bentuk 1)**

   - Menentukan (x_1, y_1)

     $\begin{array}{r|l|r} x - 2y - 5 = 0 & \times 2 & 2x - 4y - 10 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 & \times 1 & 2x - y - 4 = 0 \end{array}$ diperoleh $x_1 = 1\ dan\ y_1 = -2$

Diperoleh :

$x = u + 1 \Leftrightarrow dx = du$

$y = v - 2 \Leftrightarrow dy = dv$

Sehingga:

$(x - 2y - 5)dx + (2x - y - 4)dy = 0$

$(u + 1 - 2(v - 2) - 5)du + (2(u + 1) - (v - 2) - 4)dv = 0$

$(u - 2v + 1 + 4 - 5)du + (2u - v + 2 + 2 - 4)dv = 0$

$\underline{(u - 2v)du + (2u - u)dv} : u$

$\left(1 - \frac{2v}{u}\right) du + \left(2 - \frac{v}{u}\right) dv = 0 \rightarrow PD\ Homogen$

Misal $v = uz \Leftrightarrow dv = zdu + u.dz$, maka

$(1 - 2z)du + (2 - z)(z\,du + u\,dz) = 0$

$\underline{(1 - z^2)du + (2 - z)udz = 0} : (1 - z^2)u$

$\frac{du}{u} + \frac{(2-z)}{(1-z^2)} dz = 0 \rightarrow PD\ Terpisah$

$\int \frac{du}{u} + \int \frac{(2-z)}{(1-z^2)} dz = 0$

$\ln u + \int \frac{2}{(1-z^2)} dz - \int \frac{z}{(1-z^2)} dz = 0$

$\ln u + 2 \ln \left|\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}\right| + \frac{1}{2} ln|1 - z^2| = \ln c_1 \quad \times 2$

$2 \ln u + 4 \ln \left|\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}\right| + ln\,|1 - z^2| = \ln C$

$\ln u^2 \left(\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}\right)^4 (1 - z^2) = \ln C$

$u^2 \frac{(1+z)^4}{(1-z^2)} = C$

$(x - 1)^2 \ \frac{\left(1+\frac{y+2}{x-1}\right)^4}{\left(1-\frac{y+2}{x-1}\right)^4} \ = C$

$(x - 1)^2 \left(\frac{x+y+1}{x-1}\right)^4 \left(\frac{x-1}{x-y-3}\right)^2 \ = C$

$\frac{(x+y+1)^4}{(x-y-3)^2} = C$

2. Tentukan penyelesaian $y' = \frac{-x+2y+5}{2x-4y-4}$

Penyelesaian :

$y' = \frac{-x+2y+5}{2x-4y-4}$

$(2x - 4y - 4)dy = (-x + 2\,y + 5)dx$

$(x - 2y - 5)dx + (2x - 4y - 4)dy = 0$

$a = 1, b = -2, c = -5, p = 2, q = -4, r = -4$

$\frac{a}{k} = \frac{1}{2}, \frac{b}{l} = \frac{2}{4}, \frac{c}{m} = -\frac{5}{-4}$ sehingga $\frac{a}{k} = \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}$ **(bentuk 2)** :

Misalkan :

$x - 2y = r \Leftrightarrow dx - 2dy = dr$

Sehingga

$$(x - 2y - 5)dx + (2x - 4y - 4)\; dy = 0$$

$$(r - 5)(dr + 2dy) + (2x - 4)\; dy = 0$$

$$\underline{(r - 5)dr + (4.r - 14)\; dy = 0\ } : (4r - 14)$$

$$\int \frac{r-5}{4r-14} dr + \int dy = 0$$

$$\frac{1}{4} \int \left(1 + \frac{-\frac{3}{2}}{z-\frac{7}{2}}\right) dx + y = C$$

$$\frac{1}{4}\left(r - \frac{3}{2}\ln\left|r - \frac{7}{2}\right|\right) + y = C$$

$$2x - 3\ln\left|(x - 2y) - \frac{7}{2}\right| + 4y = C$$

3. Tentukan penyelesaian $y' = \frac{-x+2y+3}{2x-4y-6}$

Penyelesaian :

$y' = \frac{-x+2y+3}{2x-4y-6}$

$(2\,x - 4\,y - 6)dy = (-x + 2\,y + 3)dx$

$(x - 2\,y - 3)dx + (2\,x - 4\,y - 6)dy = 0$

$a = 1, b = -2, c = -3, p = 2, q = -4, r = -6$

$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}, \frac{b}{q} = \frac{2}{4}, \frac{c}{r} = -\frac{3}{6}$ sehingga $\frac{a}{b} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ **(bentuk 3)**

$(x - 2y - 3)dx + (2x - 4y - 6)dy = 0$

$dx + 2dy = 0$

$\int dx + \int 2dy = 0$

$x + 2y = C$

Persamaan Differensial linear orde dua dengan koefisien konstan dapat dituliskan sebagai : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f\,(x)$ dengan a, b dan c yaitu konstanta. Jika $f(x) = 0$, sehingga $ay'' + by' + cy = 0$ persamaan tersebut disebut homogen, sedangkan bila $f(x)^1 = 0$ maka persamaan tersebut disebut tak homogen (Lumbantoruan, 2019b). Untuk dapat menentukan Solusi PD homogen, kita dapat mempelajari pengertian kebebasan linear dan Wronkian dari dua fungsi..

Dua fungsi yaitu f(x) dan g(x) dapat disebut bebas linear di interval I apabila persamaan kombinasi linear dari dua fungsi itu, $mf(x) + ng(x) - 0$ pada setiap x hanya dipenuhi oleh $m = n = 0$. Bila tidak maka dikatakan $f(x)$ dan $g(x)$ bergantung linear.

Persamaan Diferensial merupakan sebuah persamaan yang terdapat satu atau lebih turunan variable terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Rochmad, 2016). Sedangkan apabila dalam Persamaan Diferensial terdapat turunan dari satu atau lebih fungsi sembarang terhadap hanya ada satu variable bebas disebut dengan **Persamaan Diferensial Biasa.** Dan disebut dengan **Persamaan Diferensial Parsial** apabila dalam persamaan terdapat turunan biasa dari satu atau lebih fungsi sembarang terhadap satu atau lebih variable bebas (Lestari, 2013).

Contoh

$a.\ \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + xy = 5$ (Persamaan Differensial Parsial)

$b.\ \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 0$ (Persamaan Differensial Biasa Orde Dua)

Orde pada suatu PDB yaitu pangkat yang tertinggi dari suatu turunan dalam persamaan diferensial $F(x, y', y'', \ldots, y(n)) = 0$

6.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Koefiesien Konstanta

Persamaan Diferensial adalah persamaan rasional misalnya antara (x) variable bebas, misalnya (y) variabel terkait dan satu atau lebih koefisien turunan antara keduanya. Contoh : $\frac{dy}{dx}$. Persamaan diferensial biasa, yitu jika hanya ada satu faktor independent (Lumbantoruan, 2019e). Perumpaan diferensial segmental, ialah ketika ada beberapa perumpamaan variabel tak bebas. Persamaan diferensial orde pertama adalah dapat dikatakan sebagai turunan atau fungsi linear berisi satu variabel bebas (x) dengan satu faktor leluasa (y) dan turunan pertamanya (y),dihubungkan oleh eksplisit atau implisit. Solusi umum persamaan diferensial adalah : fungsi yang mencakup konstanta C dan memenuhi persamaan (1) diferensial (Lumbantoruan, 2019d). Solusi spesifik adalah solusi yang diperoleh dari solusi umum nilai C dari nilai numerik tertentu, atau solusi yang memenuhi kondisi diberikan, misalnya s.

Metode integral langsung, metode pemisahan variable dan metode substitusi adalah jumlah cara penyusunan perbandingan diferensial sistem satu. cara langsung dipakai apabila persamaan diferensial bisa dinyatakan dalam bentk $\frac{dy}{dx} = f(x)$ artinya bentuk persamaan dapat diintegralkan secara langsung di dapatkan $\int dy = \int f(x)dx \rightarrow y = F(x) + c$.

Cara diskriminasi faktor dipakai apabila perbandingan diferensial memiliki dua faktor serta bisa di tempatkan di tempat yang berbeda di buku yang berlainan dan bisa dicatat di tatanan : $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \rightarrow$ dengan catatan $f(x,y)$ bisa dipisahkan menjadi $f(x)$ dan $g(y)$ sehingga didapatkan $\int g(y)dy = \int f(x)dx \rightarrow y = F(x) + C$. Dipisahkan, biasanya diambil substitusi $y = v.x \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$. Solusi PD linear Homogen dengan koefisien konstanta koefisien karakteristik (Lumbantoruan, 2017) . Bentuk $ay'' + by' + cy = 0\ a, b, c = konstanta$.

Misalkan :

$y = e^{mx}$

$y' = me^{mx}$

$y'' = m^2e^{mx}$

$ay'' + by' + cy = 0\ am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$

$(am^2 + bm + c)e^{mx} = 0$

Jadi $y = e^{mx}$ menjadi solusi PD jika $(am^2 + bm + c) = 0$

$am^2bm + c = 0 \rightarrow persamaan\ karakteristik$

Akar persamaan karakteristik adalah :

$$m_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad D = b^2 - 4ac$$

Akar persamaan karaketristik nilai m adalah

1. apabila $b^2 - 4ac > 0, maka\, m_2$ merupakan 2 akar real yang beda dengan $m_{12} \in R$ sehingga penyelesaian umumnya adalah : $y = c_1 e^{m_2 x} + C_2 e^{m_2 x}$
2. bila $b^2 - 4ac = 0$, maka $m_1 = m_2$ dengan $m_{12} \in R$, maka penyelesaian umumnya : $y = c_1 e m^x$
3. bila $b^2 - 4ac < 0$, sehingga $m_{12} = a \pm i\beta$ dengan $a, \beta \in R$, penyelesaian umumnya adalah $y = (c_1 + c_2)e^{ax}(cos\beta x) + i(c_1 - c_2)e^{ax}(sin\beta x)$
   $y = Ae^{ax}(cos\beta x) + ibe^{ax}(sin\beta x)$ (Kusmaryanto, 2013a).

Contoh 1

Cari penyelesaian PD : $12y'' - 5y' - 2y = 0$

Solusi persamaan karakteristiknya,

$12m^2 - 5m - 2 = 0$

$(4m + 1)(3m - 2) = 0$

$m_1 = -\frac{1}{4}$ v$m_2 = \frac{2}{3}$

Sehingga penyelesaian untuk PD di atas ialah, $y(x) = c_1 e^{\frac{2}{3}x}$

Contoh 2

Cari PD, solusi umumnya adalah $y = \frac{c+sinx}{x}$

Penyelesaian :

$$y = \frac{c + sinx}{x}$$

$$y = (c + sinx)x^{-1}$$

$$y' = cosx.x^{-1}(c + sinx)x^{-1}$$

$$y' = \frac{cosx}{x} - \frac{c + sinx}{x^2}$$

$$y' = \frac{xcosx - (c + sinx)}{x^2}$$

$$x^2y' = xcosx - c - sinx$$

$$c = xcos - sinx - x^2y'$$

Substitusikan nilai yang dihasilkan menjadi : $y\frac{c+sinx}{x}$

$$y = \frac{xcosx - sinx - x^2y' + \sin x}{x}$$

$$y = \cos x - xy'$$

PD, yang solusi umumnya adalah $y = \frac{c+\sin x}{x}$ adalah $xy' + y = \cos x$

Contoh 3

Diberikan penyelesaian berikut$x^3 - cxy + 4 = 0$

Penyelesaian :

Kita turunkan $x^3 - cxy + 4 = 0$ secara implisit

$$3x^2 - cy - cxy + 0$$

$-c(y + xy) = -3x^2$

$c = \dfrac{3x^2}{y + xy'}$

Substitusikan nilai c ke dalam persamaan $x^3 - cxy + 4 = 0$

$x^3 - \left(\frac{3x^2}{y+xy'}\right)xy + 4 = 0$

$x^3(y + xy') - 3x^3y + 4y = 0$

$(x^4 + 4x)y' - 2x^3y + 4y = 0$

Oleh karena itu, $x^3 - cxy + 4 = 0$ ialah penyelesaian umum untuk PD $(x^4 + 4x)y' - 2x^3y + 4y = 0$

Contoh 4

Tentukan solusi umum persamaan diferensial berikut :

$y'' + 5y' - 6y = 0$

Penyelesaian :

Akar persamaan karakteristik PD diatas adalah

$m^2 + 5m - 6 = 0$

$1x6 = -6$

$-1 + 6 = 5$

$(m - 1)(m + 6) = 0$

$m_1 = 1 \; dan \; m_2 = -6$

solusi linear bebas untuk PD adalah :

$y = C_1e^{m1x} + C^2e^{m_2x}$

$y = C_1e^x + C_2e^{-6x}$

Contoh 5

Cari penyelesaian umum bagi persamaan diferensial berikut :

$y'' + 2y' + 4y = 0$

Penyelesaian :

Akar-akar persamaan karakteristik PD diatas berikut

$$m^2 + 2m + 4 = 0 \quad \begin{matrix} m^2 + 2m + 4 = 0 \\ m_{12} = -1 \pm i\sqrt{3} \\ m_{12} = a \pm i\beta \end{matrix} \left| \begin{matrix} m^2 + 2m + 4 = 0 \\ \dots \quad x \dots = 4 \\ \dots \quad + \cdots = 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} m_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ m_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.4}}{2.1} \\ m_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ m_2 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} \\ m_{12} = \frac{2(-1 \pm i\sqrt{3})}{2} \\ m_{12} = -1 \pm i\sqrt{3} \end{matrix}$$

Solusi bebas linear untuk PD adalah :

$y = Ae^{ax}(\cos \beta x) + Be^{ax}(\sin \beta x)$

$y = Ae^{-x} cos\sqrt{3x} + Be^{-x} sin\sqrt{3x}$

6.4. Kegiatan Pembelajaran 4. Metode Koefisien Tak Tentu

Jika fungsi memenuhi salah satu daripada syarat berikut, kita bisa menyebutnya sebagai fungsi koefisien tak tentu:

1. Fungsi mempunyai format atau bentuk berikut :
   a. x^n → sebuah bilangan bulat positif atau nol
   b. e^{ax} → sebuah konstanta dan tidak sama dengan nol
   c. $\sin(px + q)$ → p dan q adalah konstanta dan $q \neq 0$
   d. $\cos(px + q)$ → p dan q adalah konstanta dan $q \neq 0$
2. Fungsi yang terdiri dari perkalian finite hingga dari empat angka pada poin 1 di atas (Lumbantoruan, 2017)

Aturan untuk metode koefisien tak tentu

a ketentuan dasar, contohnya. Bila $r(x)$ ialah satunya berguna di tabel, tentukan kegunaan y_p dengan sinkron serta pilih koefisien tidak pastinya mengunakan pergantian y_p di perbandingan tadi.

b Modifikasi perintah. Kalikan y_p yang bersesuaian dengan tabel dengan $x\ (atau\ x^2\ jika\ r(x)$persis menggunakan penyelesaian akar ganda PD tunggal) mengalikan y_p serta sama di tabel oleh x (atau x^2) apabila $r(x)$ persis menggunakan penyelesaian (Lumbantoruan, 2017).

c Penjumlahan Aturan. Bila $r(x)$ mengacu di jumlah fungsi yang ditemukan di kolom pertama tabel, y_p mengacu pada jumlah fungsi yang ditemukan pada kolom kedua tabel.

Tabel 1 Metode Koefisien Tak Tentu

Suku pada $r(x)$	Pilihan untuk y_p
$\boldsymbol{ke^{yx}}$	ce^{yx}
$\boldsymbol{kx^n (n = 0, 1 \dots)}$	$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$
$\boldsymbol{k\cos \omega x \ atau \ k\sin \omega x}$	$k\cos \omega x + M\sin \omega x$

Kesimpulan :

- cara koefisien tidak pasti dipakai khusus untuk unsur logam linear tak homogen dengan homogen serta koefisien konsisten .
- Agar bisa menetapkan pemenggalan serta sama wajib dicari lebih awal pengerjaan perbandingan kesamaannya. (Nuryadi, 2018)
- trik koefisien tak tentu cuma bisa dipakai apabila kegunaan $f(x)$ dalam buku kanan yaitu berbentuk polinomial kegunaan trigonomeri, fungsi eksponen serta penambahan / perkalian melalui ketiga peranan ruangan awal pada diagram satu .
  Contoh : PD $y'' + y = \tan x$ tak bisa terselesaikan jika cara koefisien tak tentu deisebakan $\tan x$ tidak tergolong ketiga kegunaan pada tabel satu. (Fitri Monika Sari, Yundari, 2017)

Penerapan Aturan Dasar

Tentukan PD tak homogen berikut:

$$y'' + 4y = 8x^2$$

Jawaban :

Langkah 1. Menentukan solusi dari PD homogen $y'' + 4y = 0$

Persamaan karakteristik : $m^2 + 4 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = 2i, m_2 = -2i$

Solusi umum $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

Langkah 2. Menetukan solusi PD tak homogen $y'' + 4y = 8x^2$

$f(x) = 8x^2$ sehingga dari tabel 1, $y_p = k_2 x^2 + k_1 x + k_0$

$y'_p = 2k_2 x + k_1$

$y'', y''_p = 2k_2$

Substitusikan y_p, y'_p, y''_p ke persamaan di dapatkan :

$$2k_2 + 4(k_2x^2 + k_1x + k_0) = 8x^2$$

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat :

$$4k_2 = 8$$

$$4k_1 = 0$$

$$2k_2 + 4k_0 = 0$$

Nilai konstanta :

$$k_2 = 2, \quad k_{0=-1,} \;\; k_1 = 0$$

Solusi umum PD tak homogen :

$$y_p = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$$y = y_h(x) + y_p(x) = Acos\ 2x + Bsin\ 2x + 2x^2 - 1$$

Penerapan Aturan Modifikasi

Selesaikan solusi PD berikut :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

Penyelesaian :

Langkah 1. Tentukan solusi PD homogen $y'' - 3y' + 2y = 0$

Persamaan karaketeristik : $m^2 - 3m + 2 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = 1, m_2 = 2$

Solusi umum $y_h = c_1 e^x + c_2 e^x$

Langkah 2. Tentukan solusi PD tak homogen $y'' - 3y' + 2y = e^x$

$f(x) = e^x$, yakni solusi PD homogen pada langkah 1 sehingga sama dengan aturan B, $y_p = cxe^x$, $y_p = ce^x$ dikarena $f(x) = e^x$ yakni solusi PD homogen pada langkah 1 maka sesuai aturan B, $y_p = cxe^x$

Jadi, $y'_p = ce^x + cxe^x, y''_p = 2ce^x + cxe^x$ (Saputro & Lumbantoruan, 2020)

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat:

$$c = -1$$

Solusi umum PD tak homogen : $y_p = -xe^x$

Penerapan Aturan Penjumlahan

Contoh 1. Selesaikan penyelesaian umum PD berikut :

$$y'' - 2y' + y = e^x + x$$

Jawaban :

Langkah 1. Tentukan solusi PD homogen $y'' - 2y' + y = 0$

Persamaan karakteristik ; $m^2 - 2m + 1 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = m_2 = 1$

Solusi umum $y_h = c_1 e^x + c_2 xe^x$

Langkah 2. Menentukan solusi PD tak homogen $y'' - 2y' + y = e^x + x$

$f(x) = e^x + x, \;\; y_p = c_1e^x + c_2x{+}c_3$

Suku pada $f(x)\; yaitu\; e^x$ merupakan solusi ganda PD homogen solusi umum PD homogen solusi umum PD homogen menjadi $y_p = c_1x^2e^x + c_2x + c_3$

Sehingga $y'_{\text{p}} = 2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2$

$y''_{\text{p}} = 2c_1e^x + 2c_1xe^x + 2c_1xe^xe^x + c_1x^2e^x$

Substitusikan $y_py'_{\text{p}}y''_{\text{p}}$ ke persamaan di dapatkan :

$$2c_1e^x + 4c_1xe^x + 2c_1xe^xe^x - 2(2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2) + c_1x^2e^x + c_2x + c_3$$
$$= e^x + x \leftrightarrow 2c_1e^x + c_2x - 2c_2 + c_3 = e^x + x$$

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat:

$$c_1 = \frac{1}{2}; c_2 = 1; c_3 = \frac{1}{2}; c_2 = 1; c_3 = 2$$

Solusi umum PD tak homogen :

$y_p = c_1x^2e^x + c_2x + c_3$

$= \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$y = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$

Contoh 2. Tentukan penyelesaian PD berikut :

$$y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$$

Penyelesaiannya :

Langkah 1. Tentukan solusi PD homogen $y'' + 2y' + 5y = 0$

Persamaan karaketristik : $m^2 + 2m + 5 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = -1 + 2i \; m_2 = -1 - 2i$

Solusi umum $y_h = e^{-x}(Acos\; 2x + Bsin\; 2x)$

Langkah 2. Menentukan solusi PD tak homogen $y'' + 2y' + 5y = 16e^{x} + \sin 2\,x$

$f(x) = 16e^{x} + sin2x$

$y_p = ce^{x} + k\cos 2x + M\sin 2x$

Substitusikan y_p, y'_p, y''_p ke persamaan di dapatkan :

$8ce^{x} + (-4k + 4m + 5k)\cos 2x + (-4k - 4m + 5m)\sin 2x = 16^{x} + \sin 2x$

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat:

$$c = 2;\;\; k = \frac{4}{17}; cos2x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

Langkah 3. Menentukan solusi DP $y = y_h(x) + y_p(x)$

$$= e^{x}(Acos\ 2x + B\sin 2x) + 2e^{x} - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

6.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter merupakan metode yang menentukan suatu penyelesaian khusus persamaan diferensial linear koefisien variable (Kusmaryanto, 2013c). Ketentukan dari metode ini yaitu mengganti variabel konstonta c_k dengan variasi parameter $v_k(a)$. Metode tersebut dapat dipakai dalam menyelesaikan permasalahan persamaan yang tidak bisa diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu (Lumbantoruan, 2019f). Penggunaan metode koefisien tak tentu bersifat terbatas pada fungsi yang tak dapat digunakan dalam metode koefisien tak tentu, maka bisa di pakaikan metode variasi parameter. Prinsip metode varlasi parameter pada PD Linear tak homogen orde 2:

$$y" - p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

PD Linear tak homogen orde-2 dengan koefisien variabrel diselesaikan dengan metode variasi parameter(Lumbantoruan, 2019f). Variasi parameter dapat dituliskan dengan:

$$y" + p(a)y' + q(a)y = r(a)$$

Penyelesaian dari PD ini yaitu melalui 3 langkah,seperti berikut:

Langkah 1:

Menentukan penyelesaian PD homogen

$$y" + p(a)y' + q(a)y(r(a)) = 0$$

$$y_h = c_1y_1(a) + c_2y_2(a)$$

Langkah 2:

Memilah penyelesaian PD non homogen menggunakan metode variasi parameter

- Tentukan solusi persamaan umum:

$$y_p = v_1(x)y_1(x)$$

- Tentukan turunan y_p:

$$y_p{}' = v_1(x)y_1(x) + v_1(x)y_1'(x) + v_2{}'(x)y_2(x) + v_2(x)y_2{}'(x)$$

- Menentukan persamaan syaratnya:

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$$

Sehingga

$$y_p' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)$$

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_2'(x)y_2'(x)$$

- Substitusikan $y_p, y_p'y_p"$ pada PD:

$y_1"(x) + p(x)y_1{}'(x) + q(x)y_1(x) = 0$

$y_2"(x) + p(x)y_2{}'(x) + q(x)y_2(x) = 0$

$v_1(x)[y_1"(x) + p(x)y_1{}'(x) + q(x)y_1(x)] + v_2{}'(x)[y_2'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)$

Karena: $y_1"(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0$

$y_2"(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0$

Dengan demikian hasil substitusi dari $y_p, y_p', y_p"\ pada\ PD\ adalah$:

$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) = r(x)$

- Menetukan $v_1(x) dan\ v_2(x)$

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)$$

Maka dari kedua persamaan diatas diperoleh:

$v_2'(x) = \frac{y_2(x).r(x)}{w} \rightarrow v_1(x) = \int -\frac{y_{2(x)}r.(x)}{w}$

$v_2'(x) = \frac{y_{1}(x).r(x)}{w} \rightarrow v_2(x) = \int \frac{y_1(x).r(x)}{w}$

$w = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) adalah\ wronskian\ \ y_{1(x),}y_2(x)$

Jadi, $y_p = v_1(x)y_2(x) + v_2(x)y_2(x) = \int \frac{y_{2(x).r(x)}}{w} y_1(x) + \int \frac{y_{1(x).r(x)}}{w} y_2(x)$

Langkah 3:

Solusi umum dari PD

$y = y_h + y_p$

$y = c_1 y_1(x) + v_1(x) y_1(x) + v_2(x)$

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int \frac{y_{2\,(x)}.r(x)}{w}\ y_{1(x)} + \int \frac{y_{1\,(x)}.r(x)}{w} y_2(x)$

Contoh Soal 1

Menentukan penyelesaian dari persamaan $y" - 5y' + 6y = x$.

Penyelesaiannya:

- Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$,untuk mencari solusi tak homogenya,
  misalkan $y_p = Ax + B. maka, y_p' = A\ dan\ y_p" = 0$.
  $substitusikan\ ke\ P$DB diatas:
  $-5A + 6(Ax + B) = x$.
  Jadi,$6A\ = 1$ dan $-5A + 6B\ = 0$,sehingga $A = \frac{1}{6}$ dan $B\ = \frac{5}{36}$.
  Jadi solusi umum PDBnya adalah $y = c_{1e^{2x}} + c_{2e^{3x}} + \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$

Contoh Soal 2

Tentukan solusi umum PDB $y" + y = \csc x\,.\cot x$

Penyelesaiannya:

Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = c_1 cosx + c_2 \sin x$

Maka solusi khusus harus berbentuk:

$y_p = c1(x).\,\text{cosx} + c2(x).\sin x$

Dengan: $c1.\cos x\, c2'.sin\ x = 0$

$c1'.(-sin\ x)\ + c2'.cos\ x = csc\ x.cot\ x$

Maka,dari kedua persamaan ini didapat:

$$c_1{}' = (-cot\ x\ dan\ + c_2{}' = cot^2 x.$$

Jadi,

$c_1(x) = \int(-\cot x)dx = -ln|\sin x|$;

$c_2(x) = \int cot^2 x . dx = \int(csc^2 x - 1)dx = -\cot\ x - x$

Maka solusi khususnya adalah:

$$y_p = (-ln|\sin x|. \cos x - (x + \cot x). \sin x$$

Maka solusi umum PDBnya adalah:

$$Y = (ln|sin\, x| + c_1). cos\, x - (x + cot\, x + c_2). sin$$

6.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Reduksi Orde

PD linear homogennya orde 2 dengan koefisien konstan adalah:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} - 4ac$$

Terdapat 3 kemungkinan pada persamaan tersebut dengan ciri:

- Apabila $\sqrt{b^2 - 4a\ c > 0.}$ $m_{1,2}$ merupakan 2 akar real yang beda dengan $m_{1,2} \in R$ sehingga bentuk umumnya adalah: y=$c_1\, e^{m_{1x}} + c_2\, e^{m_{2x}}$
- Apabila $\sqrt{b^2 - 4a\ c = 0.}$ $m_1 = m_2$ pada $m_{1,2}\ \in R,$ sehingga bentuk umumnya$c_1\, e^{m_x} + c_2\, e^{m_x}$
- Jika $\sqrt{b^2 - 4a\ c > 0}$, maka,$m_{1,2} = \alpha \pm i\beta\ dengan\ \alpha, \beta \in R$, maka solusi umumnya adalah: y=$c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ (Kusmaryanto, 2013d)

Dengan menggunakan rumus EULER,yaitu $e^{xi} = cos\ x + I$ sin x maka bentuk trigonometri dapat ditentukan:

$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 x e^{(\alpha-i\beta)x}$

$y = c_1 e^{\alpha x}(cos\beta x + i\ sin\beta x)c_2 e^{\alpha x}(-c0s\beta x - i\ sin\ \beta x) - cos\beta x = cos\beta x$

$y = (c_{1+}c_2)e^{\alpha x} i(\ c_1\ \ - c_2)e^{\alpha x}(sin\ \beta x)$

$y = Ae^{\alpha x}\ cos\ \beta x + sin\ \beta x\ , A, B\varepsilon\ konstanta\ bilangan\ kompleks.$

Contoh Soal

1. Tentukan solusi umum dari persamaan linear berikut ini:

$$Y'' + 5y' - 6y = 0$$

Jawab:

Akar-akar dari persamaan karakteristik PD adalah:

$$m^2 + 5m - 6 = 0$$

$$(m - 1)(m + 6) = 0$$

$$m_1 = 1\ dan\ m_2\ = -6$$

Solusi bebas linear PDnya adalah:

$$y_1(x) = e^x\ dan\ y_2\,(x) = e^{-6x}$$

Maka solusi PD umumnya adalah:

$$y_1(x) = c_1\, e^x + c_2 e^{-6x}$$

2. Selesaikan PD berikut

$$y'' - y = 0, y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

Jawab:

Akar-akar persamaan karakteristiknya PDnya adalah

$$m^2 - 1 = 0$$

$$(a - 1)(a + 1) = 0$$

$$a_1 = 1 \text{ dan } a_2 = -1$$

Solusi bebas linear PD nya adalah

$$y_1(a) = e^x;\ y_2\,(a) = e^{-x}$$

Sehingga penyelesaian umum PD nya yaitu

$$y(a) = c_1\, e^x + c_2 e^{-x}$$

Nilai awal $y(0) = 1, y'(0) = 0$

$y'(0) = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = 0 \rightarrow c_1 - c_2 = 0$

Maka,solusi khusus PDnya adalah $y(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2}\, e^{-x}$

3. Menemukan v(t) (2 dari 3)

   Jawab:

   $tu' + u = 0\,, u(t) = v' t$

   Untuk u, kita dapat menggunakan metode pemisahan variable :

   $t\frac{du}{dt} + u = 0 <=> \int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{t} dt <=> ln|u| = -ln|t| + c$

   $<=> |u| = |t|^{-1} e^c <=> u = ct^{-1}, since\ t > 0.$

   Demikian $v' = \frac{c}{t}$ dan karenanya $v(t) = c \ln t + k$

   Solusi Umum (3 dari 3)

   Kita memiliki $v(t) = c \ln t + k$

   Sehingga

   $y_2(t) = (\,c \ln t + k) t^{-1} = ct^{-1} \ln t + kt^{-1}$

   $y_1(t) = t^{-1}$.

   Dan karenanya kita dapat mendapatkan istilah kedua,y_2 yaitu $y_2(t) = t^{-1} \ln t$. Oleh karena itu solusi umum untuk persamaan diferensial adalah $y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1} \ln t$

6.7. Kegiatan Pembelajarn 7. Rangkuman

Persamaan Differensial linear order dua pada koefisien konstan dapat dituliskan sebagai : $ay'' + by' + cy = f(x)$ dengan a, b dan c konstanta. Apabila $f(x) = 0$ maka $ay'' + by' + cy = 0$ dapat disebut persamaan differensial linear order dua homogen, bila $f(x)^1 = 0$

Persamaan diferensial tidak homogen merupakan PD yang memiliki $(ax + by + c)\,dx + (px + qy + r)\,dy = 0 \ldots (i)$,dimana $a, b, c, p, q, serta\ r$ kostanta. Koefisien konstan dinyatakan dalam bentuk umum yaitu:

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

atau

$$(P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \cdots + P_{n-1} D + P_n) y = 0.$$

Bila $F(D)$ dapat difaktorkan, maka $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ disebut akar-akar persamaan karakteristik.

Persamaan karakteristik $f(m) = 0$ setelah ditentukan akar-akarnya, untuk menentukan selesaian umum persamaan:

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0.$$

Beberapa Aturan pada metode koefisien tak tentu:

1. Aturan dasar :

   Apabila $r(x)$ adalah salah satu fungsi seperti pada tabel, pilih bentuk y_p yang sesuai dan merupakan kombinasi linier dengan konstanta tak tentu. Turunan $r(x)$ harus bebas linier pula.

2. Aturan Penjumlahan :

   Apabila $r(x)$ adalah penjumlahan, pilih y_p yang merupakan penjumlahan fungsi yang sesuai.

3. Aturan Modifikasi :

   Apabila $r(x)$ adalah solusi dari persamaan homogen, sehingga pilihan dapat dimodifikasi seperti berikut, Kalikan pilihan pada kolom 2 dengan x_1 atau x_2 tergantung dari apakah pada kolom 3 berupa akar tunggal atau akar-akar ganda dari persamaan homogen (Kusmaryanto, 2013b).

PD Linear tak homogen orde-2 dengan koefisien variabrel yang diselesaikan menggunakan metode variasi parameter (Kusmaryanto, 2013d). Variasi parameter dapat dituliskan dengan:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

6.8. Kegiatan Pembelajarn 8. Soal Diskusi Kelompok

1. Persamaan diferensial homogen dari $(x + y)dx + xdy = 0$

   Jawab:

   $M(x, y) = x + y$

   $M(tx, ty) = tx + ty = t(x + y) = t. M(x, y)$

   $(x + xz)dx + x(zdx + xdz) = 0$

   $(1 + z)xdx + \cdots + \ldots^{\cdots} dz = 0$

   $[(1 + z)x + zx)]dx + \ \ldots^{\cdots} dz = 0$

   $\int \frac{x\,dx}{\ldots} + \int \frac{dz}{\ldots} = \int 0 \ \ => \text{In}\, x + \frac{1}{2}\text{In}(1 + 2z) = \text{In}\, C$

   $2 \ln x + \text{In}(1 + 2z) = 2\, \text{In}\, C$

   $\ln \ldots + \ln(1 + 2z) = \ln c^2$

   $\ln \ldots + (1 + 2z) = \ln c$

   $\ldots^{\cdots}. (1 + 2z) = c$

   $\ldots^{\cdots} (1 + 2. \frac{y}{x)} = c$

   $\ldots^{\cdots} + 2xy = c$

2. Kerjakan persamaan diferensial non homogen berikut!

   $$(3a + 3b + 6)da + (b + b + 2)db = 0$$

   Jawab:

   $(3a + 3b + 6)da + (a + b + 2)db = 0$

   ambil m = 3

   $(3a + 3b + 6)da + (a + b + 2)db = 0\ bagi\ dengan\ (a + b + 2)$

   $\ldots da + db = 0$

   $\int \ldots da + \int \ldots = C$

$... + \cdots = C$

3. Persamaan umum diferensial $(d^4 + 9d^2)\text{y} = 0$

   Jawab:

   Persamaan PD di atas adalah $(m^{\cdots} + \cdots m^{\cdots})y = 0$, akar-akarnya yaitu $m_{...} = m_{...} = 0$, dan $m_{3,4} = \cdots$.

   Diperoleh penyelesaian umumnya $(D^4 + 4D^2)y = 0$

   $y = (C_{...} + C_{...}) + (C_{...}\cos ... + C_{...}\sin ...)$

4. Menentukan penyelesaian umum PD $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$

   Jawab:

   Persamaan karakteristik PD diatas yaitu $m^{\cdots} - ...m + \cdots = 0$. dengan memfaktorkannya menjadi $\left(m - ...\right)(m - \cdots) = 0$, maka didapatkan akar karakterisiknya $m = \cdots$ atau $m = \cdots$. dimana $m1 \neq m2$, dan didapat penyelesaian umum PD yaitu:

   $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
   $y = C_1 e^{\cdots} + C_2 e^{\cdots}$
   sehingga, penyelesaian umum PD yaitu

   $y = C_1 e^{\cdots} + C_2 e^{\cdots}$

5. $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya : $r^2 - \cdots r + \cdots = 0$, $(r - \cdots)(r - \cdots) = 0$

Sehingga didapat $r_1 = \cdots$ dan $r_2 = \cdots$

Kemudian masukan dipersamaan diatas:

$Ae^{\cdots} + \cdots Ae^{\cdots} + \cdots Ae^{\cdots} = e^{\cdots}$

$\ldots Ae^{\cdots} = e^{\cdots}$

$A = \cdots$

Sehingga solusi umum PD di atas yaitu: $y = C_1e^{\cdots} + C_2e^{\cdots} + \cdots e^{\cdots}$

6. $y'' - 4y' - 5y = 3e^{2t}$

Jawab:

Solusi homogen:

$y'' - \cdots y' - \cdots y = 0$

$r^2 - \cdots r - \cdots = 0$

$(r - \cdots)(r + \cdots) = 0$

$r = \cdots$ dan $r = \cdots$

$y_h = C_1e^{\cdots} + C_2e^{\cdots}$

Solusi partikular:

$y_p = Ae^{\cdots}$

$y'_p = \cdots Ae^{\cdots}$

$y''_p = \cdots Ae^{\cdots}$

Substitusikan:

$$..Ae^{\cdots} - ..(\ldots.Ae^{\cdots}) - ..Ae^{\cdots} = ..e^{\cdots}$$

$$..Ae^{\cdots} - ..Ae^{\cdots} - ..Ae^{\cdots} = ..e^{\cdots}$$

$$..Ae^{\cdots} = ..e^{\cdots}$$

$$..A = \cdots$$

$$A = \cdots$$

Maka $y_p = -e^{\cdots}$

Solusi umum:

$y_t = y_h + y_p$

$y_t = C_1 e^{\cdots} + C_2 e^{\cdots} - e^{\cdots}$

7. Tentukan penyelesaian partikular dari $y'' + y' - 2y = x^2$!

   Jawab

   Misal $y = y_p = ax^2 + bx + c$, maka $y' = 2ax + b$ dan $y' = 2a$

   Substitusikan y, y', dan y'' ke PD didapat

   $2a + 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$

   $-2ax^2 + (2a - \cdots)x + \cdots + b - 2c = x^2$

8. $y'' + 3y' - 2y = 5$

   Jawab

   Persamaan karakterisik:

   $k^2 + 3k + 2 = 0$

   $(k + 1)(k + 2) = 0$

   $k = -1$ V $k = -2$

   Solusi (y_h) pada persamaan diferensial diatas:

   $(y_h) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

   subsitusikan

   $0 + 3 \cdot 0 + 2A = 5$

   $A = \frac{\cdots}{\cdots}$

Jadi, $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\cdots} + \frac{\cdots}{\cdots}$

9. Tentukan persamaan berikut $y'' - 4y' - 3y = 10e^{-2x}$

   Jawab:

   Turunan e^{-2x} yaitu ke^{-2x}

   Maka, $y_p = ke^{-2x}$

   $y_p' = -2ke^{-2x}$ dan $y_p'' = 4ke^{-2x}$

   $4ke^{-2x} - 4(-2ke^{-2x}) + 3ke^{-2x} = \cdots; k = \frac{\cdots}{\cdots}$

10. $y'' + 5y' + 6y = 0$

   Jawab:

   $(r \times \ldots)(r \times \ldots) = 0$

   $r_1 = -2$ atau $r_2 = -3$

   $y = \cdots + \cdots$

6.9. Kegiatan Pembelajaran 9. Soal Latihan Mandiri

Kerjakanlah persamaan diferensi dibawah ini :

1. $y'' + 2y' + 10\,y = 4{,}5\cos xx - \sin x$
2. $y'' + 2y' + 2y = -2\cos 2x - 4\sin 2x$
3. $y'' + 4y' + 8y = 4\cos x + 7\sin x$
4. $y'' + y = cosec\ x + x$
5. $y'' + 9y = \sec 3x$
6. $y'' - 2y' - 4y' - 2y' = 1 - 8x3$
7. $y'' + 2y' + 4y = -4\cos 4x - 4\sin 4x$
8. $y'' + 4y = e - 4x$
9. $y'' + 5y' + 5y = 3\cos x + 4\sin x$
10. $\frac{dy}{dx} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x} = 0$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+3y}{2x+y}$
13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4y+3x}{2x+y}$
14. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$
15. $y'' + 4y = 8x^2$
16. $y'' + 3y' = 4x^2 + 3$
17. $y'' - 2y' = 3x^2 + 2$
18. $y'' + 4y = \sin 2x$
19. $y'' - 4y' - 3y = -e^{2x}$
20. $y'' - y' - 2y = 4x^2$
21. $y'' - y' - 2y = 10\cos x$
22. $y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$
23. $y'' + y = \sec x$

24. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

25. $(D^4 - 16)y = 0$

26. $m^4 - 16 = 0$

INDEKS

GLOSARIUM

Akar Real

Gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irrasional

Bilangan Bulat

Kumpulan atau himpunan yang nilainya bulat, terdiri dari bilangan cacah dan bilangan negatif.

Differensial

Persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

Eksponen

Bentuk perkalian suatu bilangan yang sama secara berulang-ulang atau dikenal dengan bilangan berpangkat.

Homogen

Terdiri atas jenis, macam, sifat, watak, dan sebagainya yang sama (kamus KKBI).

Integral

Sebuah konsep penjumlahan secara berkesinambungan dalam matematika.

Koefisien

Faktor perkalian dalam beberapa suku dari sebuah polinomial, deret, atau ekspresi; biasanya berupa angka, tetapi bisa juga ekspresi apa pun (termasuk variabel seperti a, b dan c).

Kombinasi

Menggabungkan beberapa objek dari suatu grup tanpa memperhatikan urutan. Di dalam kombinasi, urutan tidak diperhatikan.

Konstan

Dalam matematika, merupakankata untuk suatu variabel , suatu jumlah untuk mengambil nilai numerik tertentu, atau nilai numerik sewenang-wenang tetapi jumlah yang tidak dapat diubah.

Konstanta

Suatu nilai tetap; berlawanan dengan variabel yang berubah-ubah.

Linear

Terletak pada suatu garis lurus.

Metode variasi parameter

Metode untuk menentukan penyelesaian khusus PD linier tak homogen dengan koefisien variabel.

Orde

Tingkatan,sistem.

Pangkat

Perkalian berulang dengan faktor-faktor yang sama.

Parsial

Berhubungan atau merupakan bagian dari keseluruhan.

Persamaan

Suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=).

Persamaan diferensial

Persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

Polinomial

Pernyataan matematika yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien.

Rasional

Hal yang bisa dilakukan dengan hal yang ada.

Solusi umum

Persamaan diferensial orde-n adalah solusi (baik dinyatakan secara eksplisit maupun implisit) yang memuat semua solusi yang mungkin pada suatu interval.

Substitusi

Dalam matematika merupakan penggantian suatu bilangan.

Trigonometri

Sebuah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga.

Turunan

Pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai masukan. Secara umum, turunan menyatakan bagaimana suatu fungsi berubah akibat perubahan variabel.

Variabel

Dalam matematika merupakan sebuah simbol yang melambangkan suatu kuantitas dalam suatu ekspresi matematika, serta sering digunakan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan.

Variabel bebas

Variabel yang memengaruhi variabel terikat yang sengaja dibuat berbeda. Dengan kata lain, variabel bebas adalah variabel penyebab dalam percobaan.

DAFTAR PUSTAKA

Fitri Monika Sari, Yundari, H. (2017). PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN MENGGUNAKAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON. *Citra:Jurnal Ilmu Komunikasi*, *5*(2), 125–134. https://doi.org/10.31479/citra.v5i2.28

Kusmaryanto, S. (2013a). *Akar Persamaan Karakteristik Matematika Teknik I _Sigit Kusmaryanto*.

Kusmaryanto, S. (2013b). *Metode Koefisien Tak Tentu untuk Penyelesaian PD Linier Homogen Tak Homogen orde-2 Matematika Teknik I_SIGIT KUSMARYANTO*.

Kusmaryanto, S. (2013c). *Metode Variasi Parameter untuk Penyelesaian PD Linier Homogen Tak Homogen orde-2 Matematika Teknik I_SIGIT KUSMARYANTO*.

Kusmaryanto, S. (2013d). *Persamaan Diferensial-Linier Homogen & Non Homogen Tk. n-(Differential: Linier Homogen & Non Homogen Orde n)*.

Lestari, D. (2013). *Diktat Persamaan Diferensial*. 41. http://staffnew.uny.ac.id/upload/198505132010122006/pendidikan/Modul+Persamaan+Diferensialx.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2017). *Jurnal Dinamika Pendidikan* (Vol. 10, pp. 99–225).

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BMP Persamaan Diferensial*. http://repository.uki.ac.id/id/eprint/1659

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN GEOMETRI 1*.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). *Integral Tak-Tentu Jilid I*.

Lumbantoruan, J. H. (2019e). *Integral Tentu Jilid II*.

Lumbantoruan, J. H. (2019f). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown. *Jurnal EduMatSains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2021). *Mata Kuliah : Persamaan Differensial*.

Nuryadi. (2018). *Pengantar Persamaan Diferensial Elementer dan Penerapannya* (1st ed.).

Rochmad. (2016). Bahan Ajar Persamaan Diferensial. In *Academia.edu* (pp. 1–53).

Saputro, P. A., & Lumbantoruan, J. H. (2020). EduMatSains Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS ARTICULATE STORYLINE PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR KELAS VIII. *Edumatsains, Special Issue*, *1*(1), 35–49. http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains