# MODUL 8

# MEREDUKSI ORDER

Di susun Oleh:

Vanisia Deluis Ndambo

(1913150006)

**Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan**

**Program Studi Matematika**

**Universita Kristen Indonesia**

**2022**

# KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan hidayahnya sehingga kami dapat menyelesaikan modul ini yang berjudul “Mereduksi Order” dengan sangat baik. kami berharap lebih jauh lagi agar modul ini bisa pembaca praktekkan dalam kehidupan sehari-hari. Bagi kami sebagai penyusun merasa bahwa modul ini banyak kekurangan dalam penyusunan modul ini karena keterbatasan pengetahuan dan pengalaman penulis. Kami mohon maaf apabila terdapat kesalahan dalam penulisan makalah, dan kami juga sangat mengharapkan kritik serta saran dari para pembaca untuk menjadi bahan pertimbangan perbaikan modul ini.

Jakarta, 10 January 2022

Vanisia Deluis Ndambo

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .................................................... 2

DAFTAR ISI ................................................................ 3

MODUL 8 .................................................................... 4

1. Linear Wornskian ............................................... 5
2. Determinan Wornskian ...................................... 9
3. Wornskian ......................................................... 13

RANGKUMAN .............................................................. 19

SOAL DISKUSI KELOMPOK ........................................ 20

SOAL LATIHAN MANDIRI ............................................ 23

DAFTAR INDEKS ........................................................ 24

GLOSARIUM ................................................................ 26

DAFTAR PUSTAKA ...................................................... 30

# MODUL 8

# MEREDUKSI ORDER

| Capaian Pembelajaran | Uraian Materi |
| --- | --- |
| Diharapkan dengan adanya modul ini dapat membantu rekan-rekan mempelajari tentang reduksi order, yang dimana juga di harapkan dapat menerapkan konsep dari reduksi order tersebut, dengan demikian dapat menambah pengetahuan | 1. Wornskian beserta contoh soal<br>2. Determinan Wornskian<br>3. Soal diskusi<br>4. Rangkuman tentang reduksi Wornskian<br>5. Soal mandiri |

# MODUL 8

# MEREDUKSI ORDER

## 8.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Linear Wornskian

Wornskian dari dua fungsi atau lebih adalah apa yang dikatakan menjadi penentu, dimana merupakan fungsi khusus digunakan untuk membedakan antar objek matematika, membuktikan kenyataan tertentu tentang fungsi tersebut. Dalam kasus linear Wornskian, determinan digunakan untuk membuktikan keterkaitan atau kesamaan dari dua fungsi linear bahkan lebih.(Sugiarto et al., 2005)

Dalam mereduksi suatu order yang menajdi poin pentingnya dari modul ini ialah representasi solusi umum persamaan diferensial linear homogeny orde kedua sebagai kombinasi linear dua solusi yang wornskiannya tidak nol berelasi dengan konsep kebebasan linear dua buah fungsi. Dua buah fungsi $f$ dan $g$ dikatakan saling bebas linear dalam suatu internal jika terdapat dua buah konstan $k_1$ dan $k_2$ sedemikian rupa sehingga,(Lumbantoruan, 2019)

$$k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0$$

untuk setiap $x$ dalam interval terkait.

Bentuk umum Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan adalah (Sugiarto et al., 2005) (Hill & Musthofa, 2013)(Diferensial et al., n.d.)

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

Misalkan $y = e^{mx}$, maka,

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = me^{mx} \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

Sehingga persamaan diferensial di atas dapat di tulis menjadi

$a_0(m^2e^{mx}) + a_1(me^{mx}) + a_2(e^{mx}) = 0$

Faktorkanlah menjadi

$$e^{mx}(a_0m^2 + a_1m + a_2) = 0$$

Sehingga dari sini, haruslah

$$4a_0m^2 + a_1m + a_2 = 0$$

Sebab $e^{mx}$ tidak mungkin bernilai 0 untuk setiap $x$. Persamaan $a_0m^2 + a_1m + a_2 = 0$ selanjutnya disebut persamaan karakteristik. Akar penyelesaian untuk $m$ dinamakan akar karakteristik. (Iv, n.d.)

Aturan:
Misalkan $m_1$ dan $m_2$ adalah akar penyelesaian dari persamaan karakteristik serta D adalah diskriminan persamaan kuadrat itu.

- Jika $m_1 \neq m_2 (D > 0)$, maka solusi umum pada persamaan diferensial tersebut adalah $y = C_1e^{m_{1x}} + C_2e^{m_{2x}}$
- Jika $m_1 = m_2 = m(D = 0)$, maka solusi umum pada persamaan diferensial tersebut adalah $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$
- Jika akarnya imajiner $(D < 0)$ berbentuk $m_{1,2} = a \pm bi$, maka solusi umum pada persamaan diferensial tersebut adalah $y = e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)(Rumus\ Euler)$

Teorema 1
Jika $f$ dan $g$ adalah fungsi yang terdiferensialkan dalam interval buka $I$ dan $W(f, g)(x_0) \neq 0$ untuk satu titik $x_0 \in I$, maka $f$ dan $g$ saling bebas linear. Sebaliknya jika $f$ dan $g$ tidak bebas linear, maka $W(f, g)(x_0) = 0$ untuk setiap titik $x \in I$. Jika $y_1$ dan $y_2$ adalah solusi pada persamaan diferensial $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, dengan $p$ dan $q$ kontinyu dalam interval buka $I$, maka Wornskian $W(y_1, y_2)(x)$ diberikan oleh :

$$W(y_1, y_2)(x) = cex\,p[-\int p(x)\,dx]$$

dengan $c$ suatu konstanta yang hanya bergantung pada $y_1$ dan $y_2$

Bukti :

Misalkan $y_1$ dan $y_2$ memenuhi :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y' + q(x)y_1 = 0$$

Selanjutnya persamaan yang pertama dikalikan dengan $y_2$ persamaan ke dua kalinya dengan $y_1$ yang kemudian kedua kalinya dijumlahkan, diperoleh :

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

Misalnya $W(x) =$

$W(y_1, y_2)(x)$, maka $W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$, sehingga :

$$W' + pW = 0$$

Terlihat bahwa persamaan $W' + pW = 0$ adalah persamaan diferensial linear orde pertama dan persamaan yang terpisahkan, sehingga solusinya dengan mudah dapat ditentukan. Solusi persamaan $W' + pW = 0$ tersebut dapat ditulis sebagai :

$$W(y_1, y_2)(x) = cexp[-\int p(x)\,dx]$$

dengan $c$ adalah konstanta.(Iv, n.d.)

**<u>Contoh</u>**

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial adalah $m^2 - 5m + 6 = 0$. Dengan memfaktorkan menjadi $(m-2)(m-3) = 0$, kita dapatkan akar karakteristiknya $m = 2\ dan\ m = 3$. Karena $m_1 \neq m_2$, maka solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Jadi, penyelesaian umum persamaan diferensial ini adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

**Contoh**

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial

$$4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tersebut adalah $4m^2 + 4m + 1 = 0$. Dengan memfaktorkan menjadi $(2m + 1)(2m + 1) = (2m + 1)^2 = 0$, kita dapatkan akar karakteristiknya $m = -\frac{1}{2}$. Karena akarnya kembar/sama, maka solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$$

$$y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$$

Jadi, penyelesaian umum persamaan diferensial ini adalah

$$y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$$

**Contoh**

PD homogen: $(D2 - 3D + 2)y = 0$
adalah $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ PD: $(D2 - D3 + 2)Y = 4x2$ adalah $2x2 + 6x + 7$,

PD $(D2 - 3D + 2)y = 4x^2$ adalah $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x^2 + 6x$

Contoh 8.1.2

$2e^{3x}, 5e^{3x}, e^{-4x} \quad c_1, c_2, \quad c_3 \quad c_1(2e^{3x}) + c_2(5e^{3x}) + c_3(e^{-4x}) = 0$
dengan $c_1 = -5,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0$

Contoh 8.1.3

$e^x$ dan $e^{ex}$

$$c_1(e^x) + c_2(x^{ex}) = 0 \text{ hanya jika } c_1 = 0, c_2 = 0$$

## 8.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Determinan Wornskian

Untuk menghitung Wronskian untuk fungsi linier, fungsi tersebut perlu dipecahkan untuk nilai yang sama dalam matriks yang berisi fungsi dan turunannya. Misalkan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ kumpulan $n$ buah fungsi yang semuanya dan turunan-turunnya sampai dengan turunan yang ke $n-1$ kontinunya pada selang $a \leq x \leq b$. Wronksi dari $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dihitung pada x dinyatakan oleh $W(f_1, f_2, \ldots, f_n; x)$ dan ditentukan sebagai determinan : (Iv, n.d.)(Amir & Prasojo, 2017)

$$W(\, f_1, f_2, \ldots, \ldots, \ldots, f_n\,) = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_n \\ f_1', f_2', \ldots f_n' \\ f_1'', f_2'', \ldots, f_n'' \\ f_1^{\,n-1}, f_2^{\,n-1}, \ldots, f_n^{\,n-1} \end{bmatrix}$$

Adalah tidak nol paling tidak satu $x$ di dalam Interval I, maka fungsi $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ adalah bebas linear pada I.

Determinan (4) disebut Wornskian dari fungsi $n$ dan ditulis/dinyatakan dengan $W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$.

Theorema

Bila $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah solusi dari

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y^{(\prime)} + a_0(x)y = 0$$

Dimana setiap istilah $a_i(x)$ adalah kontinu pada interval I. maka, kumpulan $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ adalah bebas linear pada I jika dan hanya jika Wornskian $W\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \neq 0$ untuk semua $x$ Pada I.

Kesimpulan dari penjelasan sebelumnya tentang bebas linear dan solusi dasar → nila diasumsikan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah penyelesaian homogen, dimana setiap $a_i(x)$ adalah kontinu atau menerus pada interval I, maka pernyataan berikut adalah ekuivalent (*Persamaan Linear Tingkat Tinggi*, n.d.)

1. $\{y_1, y_2, \ldots., y_n\}$ adalah kumpulan solusi dasar pada I
2. $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ adalah bebas linear pada I
3. $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$ untuk paling tidak satu $x_o$ pada I.
4. $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$ untuk setiap $x$ pada I.

**Contoh**

Bila a,b, dan c adalah bilangan real yang berbeda, maka fungsi $e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}$ membentuk satu kumpulan bebas linear pada setiap interval. Hal ini karena:

Penyelesaian:

$$W[e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}] = \begin{bmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c^2-a^2)-(b+1)(c-a) \end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}\ (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

**Contoh**

Tentukanlah Determinan Wornski (*Wornskian*) untuk fungsi-fungsi berikut.

a. $\{\sin 3x, \cos 3x\}$
b. $\{x, x^2, x^3\}$

Penyelesaian :

a. $W(x) = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3cos3x & -3sin3x \end{vmatrix}$

$$= -3sin^2 3x - 3cos^2 3x$$

$$= -3$$

b. $W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$

$= 12x^2 + 0 + 2x^3 - 0 - 6x^3 - 6x^3 - 6x^3$

$= 2x^3$

**Contoh**

Tunjukkan himpunan fungsi $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ adalah tak bebas linear untuk semua nilai $x$ !

Penyelesaian :

a. Dalam menunjukkan dan memilih konstanta $C1$, $C2$, $C3$ yang tidak semuanya nol, sehingga $C1(1 - x) + C2(1 + x) + C3(1 - 3x) = 0$, jika ditentukan $C1 = 1$, $C2 = -1$, $C3 = 0$ maka $1 - x - 1 - x + 0 = 0$, sehingga himpunan fungsi $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ adalah tak bebas linear.

b. Kita juga dapat menghitung determinan wornski-nya, yaitu :

$$W = \begin{vmatrix} 1 - x & 1 + x & 1 - 3x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Terbukti bahwa wornski-nya = $0$ berarti himpunan fungsi $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ tak bebas linear untuk semua $x$.

**Contoh**

Tentukan apakah himpunan $\{x, \sin x\}$ adalah independen secara linear pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian :

Wronskiannya adalah

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \sin x$$

fungsi ini tidak mempunyai nilai nol untuk semua bialngan $x$ dalam dengan $(-\infty, \infty)$ sehingga membentuk suatu himpunan yang independen secara linear.

**Contoh**

Diketahui $y_1 = 1, y_2 = e^x$ dan $y_3 = e^{2x}$. Tentukan apakah fungsi tersebut adalah linear independen menggunakan determinan wornski.

Penyelesaian :

Wronskiannya adalah

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= (1.e^x.4e^{2x}) + 0 + 0 - 0 + (e^x.2e^{2x}.1) + 0$$
$$= 4e^{3x} - 2e^{3x}$$
$$= 2e^{3x}$$

Jadi $y_1, y_2$ dan $y_3$ adalah linear independen.

**Contoh**

Tentukan determinan wornski (wornskian) untuk fungsi-fungsi berikut :

a. $\{2x, 3x\}$
b. $\{\sin 2x, \cos 2x\}$

Penyelesaian :

a. $W(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ 2 & 2x \end{vmatrix}$

$$= (2x.2x) - (2.x^2)$$
$$= 4x^2 - 2x^2$$
$$= 2x^2$$

b. $W(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}$

$$= -2sin^2 2x - 2cos^2 2x$$
$$= -2(sin^2 2x - cos^2 2x)$$
$$= -2$$

## 8.3 Kegiatan Pembelajaran 3 Wornskian

Wornskian dari dua fungsi atau lebih adalah apa yang dikenal sebagai penentu, yang merupakan fungsi khusus yang digunakan untuk membandingkan objek matematika dan membuktikan fakta tertentu tentang mereka. Dalam kasus Wornskian, determinan digunakan untuk membuktikan ketergantungan atau independensi antara dua fungsi linear atau lebih. (Halomoan, 2019)

Solusi umum adalah :

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

Jadi setiap solusi adalah kombinasi linear dari :

$$y_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}, y_2(t) = te^{-bt/2a}$$

Wornskian dari dua solusi adalah :

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) \quad &= \left| -\frac{b^{e^{-\frac{bt}{2a}}}}{2a} \; e^{-\frac{bt}{2a}} \left( 1 - \frac{bt^{te^{-\frac{bt}{2a}}}}{2a} \right) e^{-\frac{bt}{2a}} \right| \\ &= e^{-\frac{bt}{2a}} \left(1 - \frac{bt}{2a}\right) + \; e^{-\frac{bt}{2a}} \left(\frac{bt}{2a}\right) \\ &= e^{-\frac{bt}{2a}} \neq 0 \end{aligned}$$

untuk semua $t$. Jadi, $y_1, y_2$ bentuk solusi mendasar ditetapkan untuk persamaan.

**<u>Contoh</u>**

Mempertimbangkan

$$y'' + y' + y = 0,$$

$$y\,(0) = 1, y'(0) = 1$$

Dengan asumsi eksponensial mengarah ke persamaan :

$$Y(t) = e^{rt} \leftrightarrow r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\leftrightarrow (r+1)^2 = 0$$

$$\leftrightarrow r = -1$$

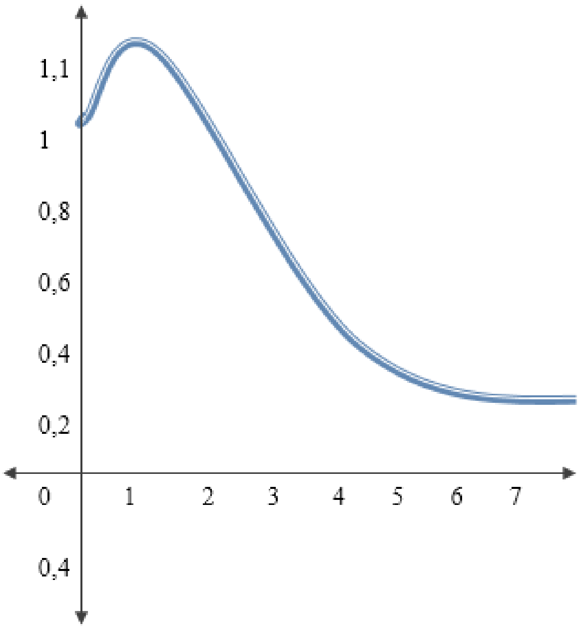
Jadi solusi,

$$Y(t) = c_1 t^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

Menggunakan kondisi awal :

$$\left.\begin{matrix} c_1 & =1 \\ c_2 + c_2 & =1 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow c_1 = 1, c_2 = 2$$

Demikian, $Y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$




Grafik 8.3.1

**Contoh**

Mempertimbangkan masalah nilai awal

$$y'' - y' + 0{,}25y = 0, y(0) = \frac{1}{2}$$

Dengan asumsi eksponensial mengarah ke persamaan :

$$Y(t) = e^{rt} \leftrightarrow r^2 - r + 0{,}25 = 0 \leftrightarrow \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

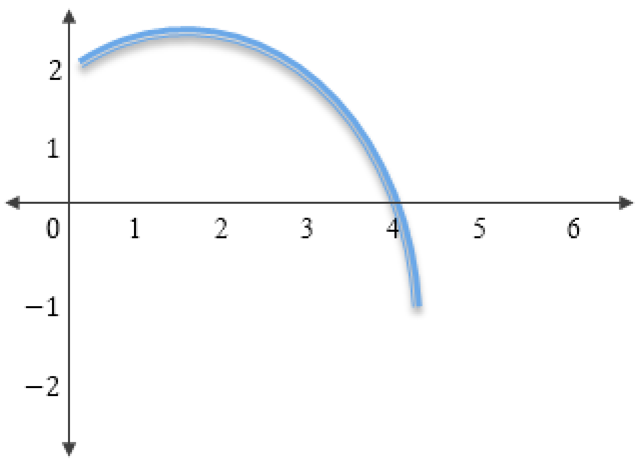
Jadi solusi,

$$Y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

Menggunakan kondisi awal :

$$\frac{1^{c_1}}{2^{c_1}} + c_2 = \frac{1}{2} \leftrightarrow c_1 = 2, c_2 = -\frac{1}{2}$$

Demikian, $Y(t) = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}}$




Grafik 8.3.2

**Contoh**

$y'' - y' + 0{,}25y = 0,$

$y(0) = 2, y'(0) = \frac{3}{2}$

$$Y(t) = e^{rt} \leftrightarrow r^2 - r + 0{,}25 = 0 \leftrightarrow (r - \frac{1}{2)^2} = 0 \leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Jadi solusi,

$Y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}}$

Menggunakan kondisi awal :

$$\frac{1^{c_1}}{2^{c_2}} + c_2 = \frac{3^2}{2} \leftrightarrow c_1 = 2, c_2 = \frac{1}{2}$$

Demikian, $Y(t) = 2e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}}$

**Contoh**

Temukan solusi dari masalah awal $y'' - y' + 0{,}25y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$

Persamaan Karekteristiknya adalah

$r^2 - r + 0{,}25y = 0$

Jadi akar-akarnya adalah $r_1 \neq r_2 = \frac{1}{2}$. Jadi, solusi umum dari

persamaan diferensial adalah

$y = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{\frac{t}{2}}$

Kondisi awal pertama mengharuskan

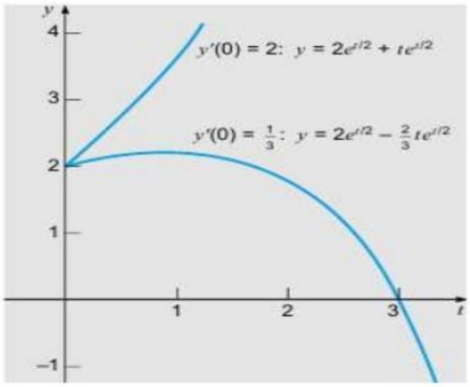
$y(0) = c_1 = 2$

Untuk memenuhi kondisi awal kedua, pertama kita membedakan kedua persamaan tersebut dan kemudian menetapkan $t = 0$. Ini memberikan

$y'(0) = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{3}$

Jadi, $c_2 = -\frac{2}{3}$. Jadi solusi dari masalah nilai awal ini adalah

$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}$




Grafik 8.3.3

**Contoh**

Selesai $y'' + 5y' + 6y = 0$ dengan $y(0) = 2$ dan

$y'(0) = 3$

Penyelesaian :

$y = e^{rx}$

$y' = re^{rx}$

$y'' = r^2e^{rx}$

Subtitusikan ke Persamaan : $y'' + 5y' + 6y = 0$

$\leftrightarrow r^2e^{rx} + 5re^{rx} + 6e^{rx} = 0$

Diperoleh persamaan karakteristik : $r^2 + 5r + 6 = 0$

$(r + 2)(r + 3) = 0$

$r = -2$ atau $r = -3$

Jadi, $y^1 = e^{-2x}$ dan $y^2 = e^{-3x}$ adalah penyelesaian.

Fundamental sehingga penyelesaian umum :

$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

Lalu, subtitusikan $x = 0$ dan $y = 2$, didapat

$c_1 + c_2 = 2$

Dengan menurunkan penyelesaian umum dan mensubstitusikan $x = 0$ dan $y' = 3$, diperoleh

$-2c_1 - 3c_2 = 3$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan tersebut maka diperoleh $c_1 = 9$ dan $c_2 = -7$. Jadi, penyelesaian khususnya adalah $y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$

## 8.4. Kegiatan Pembelajaran 4. Rangkuman

Pada materi reduksi order ini dapat di rangkum beberapa point yaitu:

1. Determinan wornski adalah himpunan fungsi $f_1, f_2, \dots, f_n$ dengan kumpulan $n$ buah fungsi yang semuanya yang mempunyai turunan sampai dengan turunan yang ke $n - 1$.
2. Wronskian dari dua fungsi atau lebih adalah apa yang dikenal sebagai penentu, yang merupakan fungsi khusus yang digunakan untuk membandingkan objek matematika dan membuktikan fakta tertentu.
3. Solusi umum adalah :
$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$
4. Untuk definisi Wornskian dari dua solusi adalah :
$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \left| -\frac{b^{e^{-\frac{bt}{2a}}}}{2a}\ e^{-\frac{bt}{2a}} \left(1 - \frac{bt^{te^{-\frac{bt}{2a}}}}{2a}\right) e^{-\frac{bt}{2a}} \right| \\ &= e^{-\frac{bt}{2a}}\left(1 - \frac{bt}{2a}\right) + \ e^{-\frac{bt}{2a}}\left(\frac{bt}{2a}\right) \\ &= e^{-\frac{bt}{2a}} \neq 0 \end{aligned}$$
5. Fungsi bebas linear apabila masing-masingnya tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari persamaan-persamaan yang lain.
6. Jika $f(x) = 0$ dalam persamaan I dan II, maka kedua persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan homogen, atau dapat dikatakan serupa.

## 8.5. Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Diskusi Kelompok

1. Tentukan determinan wornski (wornskian) untuk fungsi-fungsi berikut :
   a. $\{x^2, x^3, x^4\}$
   b. $\{2x, -x\}$

   Penyelesaian :

   a. $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \dots & x^4 \\ \dots & 3x^2 & \dots \\ \dots & 6x & 12x \end{vmatrix}$
   $= 36x^5 + 8x^6 + \cdots - \cdots + \cdots + 24x^5$
   $= 36x^5 + \cdots - 30x^6 + 24x^5$
   $= 12x^5 - \cdots$

   b. $W(x) = \begin{vmatrix} 2x & -x \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \cdots - (-2x) = \cdots + 2x = \cdots$

2. Tentukan determinan wornski (wornskian) untuk fungsi-fungsi berikut :
   a. $\{\cos 3x, \sin 3x\}$
   b. $\{e^{4x}, xe^{4x}\}$
   c. $\{x, e^x, e^{2x}\}$

   Penyelesaian :

   a. $W(x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ \dots & 3\cos 3x \end{vmatrix}$
   $= \cos 3x . 3\cos 3x - (\dots). \sin 3x$
   $= \cdots + 3sin^2 3x$
   $= \cdots$

   b. $W(x) = \begin{vmatrix} e^{4x} & xe^{4x} \\ 4e^{4x} & \dots \end{vmatrix}$
   $= \cdots (4xe^{4x} + e^{4x}) - 4e^{4x}(\dots)$
   $= 4xe^{8x} + \cdots - 4xe^{8x}$
   $= \cdots$

   c. $W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x & e^{2x} \\ \dots & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & \dots & \dots \end{vmatrix}$

   $= x(\dots - 2e^{3x}) - 4e^{3x} + e^{3x}$

   $= x(\dots) - 3e^{3x}$

   $= 2xe^{3x} - \cdots$

$$= e^{3x}(2x-3)$$

3. Tentukanlah wornskian dari himpunan $[1-x, 1+x, 1-3x]$
   Penyelesaian:

$$W(1-x,1+x,1-3x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & \dots \\ \frac{d(1-x)}{dx} & \frac{d(1+x)}{dx} & \frac{d(1-3x)}{dx} \\ \dots & \frac{d^2(1+x)}{dx^2} & \frac{d^2(1-3x)}{dx^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dots & 1+x & 1-3x \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

4. Tentukanlah Wornskian dari himpunan $[e^x, e^{-x}]$!
   Penyelesaian:

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ \frac{de^x}{dx} & \frac{de^{-x}}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= e^x(\dots) - \cdots(e^x)$$

$$= -2$$

5. $y'' + 4y' - 5y = 0$ dengan $y(0) = 3$ dan $y'(0) = 2$
   Penyelesaian :
   Bentuk karakteristik : $r^2 + 4r - 5 = 0$
   Akar-akar karakteristik : $r = \cdots$ dan $r = \cdots$
   Persamaan umumnya adalah $y = c_1e^x + c_2e^{-5x}$
   $y(0) = 3 \rightarrow c_1 + c_2 = 3$.................... (1)
   $y(0) = 2 \rightarrow c_1 - 5c_2 = 2$ .................. (2)
   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $c_1 = \cdots$ dan $c_2 = \cdots$
   Jadi, diperoleh solusi sebagai berikut : $y = \frac{1}{6}e^x + \frac{17}{6}e^{-5x}$
6. Diketahui $y_1 = 2t - 1, y_2 = t^2 + 5$, dan $y_3 = 4t - 7$.
   Tentukan apakah fungsi tersebut merupakan linear independen menggunakan determinan wornski.
   Penyelesaian :

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 2t-1 & t^2+5 & 4t-7 \\ \dots & 2t & 4 \\ 0 & 2 & \dots \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + (4t-7)(\dots)(2) - 0 + (\dots)(4)(2) + 0$$

$= 16t - \cdots - (16t - 8)$
$= \cdots$

Jadi, $y_1, y_2,$ dan $y_3$ adalah linear independen.

7. Tentukanlah penyelesaian umum dari persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$.
   Penyelesaian:
   Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tersebut adalah $m^2 - 8m + 16 = 0$. Dengan memfaktorkan menjadi ………, kita dapatkan akar karakteristiknya $m = 4$. Karena akarnya kembar/sama, maka solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah
   $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$
   $y = \cdots + \cdots$
   Jadi, penyelesaian umum persamaan diferensial ini adalah $y = \cdots + \cdots$
8. Tunjukkan himpunan fungsi $\{2 - x, 2 + x, 2 - 3x\}$ adalah tak bebas linear untuk semua nilai x.
   Penyelesaian :
   $$W(x) = \begin{vmatrix} 2 - x & \text{...} & 2 - 3x \\ -1 & \text{...} & -3 \\ \text{...} & 0 & \text{...} \end{vmatrix}$$
   $= \cdots - \cdots = \cdots$
   Terbukti bahwa wornskinya $= \cdots$ berarti himpunan fungsi $\{2 - x, 2 + x, 2 - 3x\}$ tak bebas linear untuk semua x.
9. Tentukan solusi umum dari $y'' - 4y' + 3y = 0$ dengan $y(0) = -1$ dan $y'(0) = 1$
   Penyelesaian :
   Persamaan karakteristik : $r^2 - 4r + 3 = 0$
   Akar-akar karakteristik : $r = \cdots$ dan $r = \cdots$
   Persamaan umumnya adalah $y = c_1e^x + c_2e^{3x}$
   $y(0) = -1 \rightarrow c_1 + c_2 = -1$ .................... (1)
   $y(0) = 1 \rightarrow c_1 + 3c_2 = 1$ ....................... (2)
   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $c_1 = \cdots$ dan $c_2 = \cdots$
   Jadi, diperoleh solusi sebagai berikut : $y = -2e^x + e^{3x}$
10. Tentukanlah bentuk umum dari persamaan diferensial orde satu!
    Penyelesaian:
    Untuk persamaan diferensial orde pertama ialah
    $$b_1(x)y' + \cdots = g(x)$$
11. Tentukanlah bentuk umum dari persamaan diferensial orde dua!

Penyelesaian:
Untuk persamaan diferensial orde kedua ialah
$b_2(x)y" + \cdots + \cdots = g(x)$
Jadi solusi umum PD adalah :
$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-6x}$

## 8.6. Kegiatan Pembelajaran 7. Solal Latihan Mandiri

**1.** Tentukan Wornskian dari himpunan $[e^3, e]$.
2. Tentukan Wornskian dari himpunan $[\sin 3x, \cos 3x]$.
3. Tentukan wornskian dari himpunan $[x, x^2, x^3]$
4. Tentukanlah Wornskian dari himpunan $[x + 1, x^2 + x, 2x^2 - x - 3]]$
5. Tentukan persamaan diferensial berikut ini yang linear ialah $y" + xy' + 2y = 0$
6. Tentukan persamaan diferensial berikut ini yang linear ialah $y" + yy' = x^2$
7. Tentukan persamaan diferensial berikut ini yang homogen ialah $y' + y(\sin x) = x$
8. Tentukan persamaan diferensial berikut ini yang homogen ialah $y" + e^y = 0$
9. Tentukanlah wornskian dari himpunan fungsi yang diberikan dan gunakan informasi tersebut secara tepat untuk menentukan apakah himpunan yang diberikan adalah independen secara linear
$[x^2, x]$
10. Tentukanlah wornskian dari himpunan fungsi yang diberikan dan gunakan informasi tersebut secara tepat untuk menentukan apakah himpunan yang diberikan adalah independen secara linear
$[e^{2x}, e^{-2x}]$

# DAFTAR INDEKS


B

berderajat sama,

bilangan real,

D

derivatif,

**determinan**,

diferensial,

E

eksak,

eksistensi,

eksplisit,

eksponensial,

F

fenomena,

fungsi,

fungsi homogen,

G

gejala,

H

himpunan,

homogen,

I

implisit,

independen,

integral,

interval,

K

karakteristik,

kasustik,

keradioaktifan,

ketunggalan,

koefisien pertumbuhan,

kompleks,

konstan,

konstanta,

kontinu,

L

linear,

M

metode,

motode analitik,

motode kualitatif,

motode numerik,

N

nilai awal,
nilai batas,
numerik,

O

orde,
order,

P

parsial,
persamaan,
persamaan diferensial,
persamaan diferensial biasa,
persoalan,
populasi,
produk,

R

**Reduksi order**,

S

solusi khusus/partikulir,
solusi singular,
solusi umum,
substitusi,
syarat awal,
syarat batas,

T

teorema,
tereduksi,
transformasi,
turunan,

V

variabel,
variabel terpisah,

W

wornskian,

# GLOSARIUM

BERELASI

Terjadinya suatu hubungan antara anggota suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lain.

BILANGAN REAL

Bilangan yang bisa dituliskan dalam bentuk desimal, seperti 2,4.
DEPENDEN LINEAR

Tak bebas linear yang semua nilainya adalah nol.

DETERMINAN

Nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi.871773339… atau 3,25678.

DERAJAT

Biasanya disimbolkan dengan °, adalah ukuran sudut yang dapat dibentuk pada sebuah bidang datar, menggambarkan 1/360 dari sebuah putaran penuh. Artinya besar 1 derajat adalah satu juring pada lingkaran yang dibagi menjadi 360 buah juring yang besarnya sama.

DERIVATIF

Salah satu cabang kalkulus dalam matematika yang mempelajari bagaimana nilai suatu fungsi berubah menurut perubahan input nilainya.

DIFERENSIAL

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

DOMAIN

Sembarang subset terbuka yang terhubung dari ruang vektor berdimensi-terbatas.

EKSPONENSIAL

Salah satu fungsi yang paling penting dalam matematika. Materi eksponen menyajikan persamaan yang melibatkan bilangan berpangkat.

EKSAK

Pasti atau Tidak dapat diubah-ubah.

EKSPLISIT

Persamaan sederhana yang hampir semua unsur – unsur di dalam persamaan itu telah diketahui (tersurat).

FORMULA

Ekspresi memberitahu komputer pada operasi matematika untuk melakukan menghitungan pada nilai tertentu.

FUNGSI

Sekelompok aktivitas yang tergolong pada jenis.

HOMOGEN

Terdiri atas jenis, macam, sifat, watak dan sebagainya yang sama.

INTEGRAL

Integral adalah bentuk operasi matematika yang menjadi invers (kebalikan) dari sebuah operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.

INTEGRAL KHUSUS

Suatu proses integral dari bentuk perkalian dan pembagian dengan unsur yang satu merupakan turunan dari unsur lainnya.

INTERVAL

Suatu himpunan bilangan real dengan sifat bahwa setiap bilangan yang terletak di antara dua bilangan dalam himpunan itu juga termasuk ke dalam himpunan.

KOMBINASI

Sebuah cara menggabungkan beberapa objek dari suatu kumpulan tanpa memperhatikan urutannya.

KOMBINASI LINEAR

Penjumlahan hasil kali anggota himpunan pasangan berurutan.

KONSTANTA

Suatu nilai tetap; berlawanan dengan variabel yang berubah-ubah.

KONTINU

Fungsi yang bila dijelaskan secara intuitif, perubahan kecil dalam masukannya berakibat perubahan kecil pula pada keluaran.

KOEFISIEN

Faktor pengali dalam sebuah ekspresi (atau dari sebuah deret aritmatika).

KOMPLEKS

Bilangan yang dinotasikan oleh, dimana a dan b adalah bilangan real, dan i adalah suatu bilangan imajiner di mana $i^2 = -1$.

KUADRAT

Suatu akar dari bilangan x sama dengan bilangan r sedemikian sehingga $r^2 = x$.

KUALITATIF

Sekumpulan nilai numerik berbeda dan mempunyai arti.

LINIER

Sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal.

METODE ANALITIK

Metode ini menghasilkan dua bentuk solusi yaitu bentuk eksplisit dan implisit.

METODE PEMISAH VARIABEL

Salah satu metode untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial orde satu dengan cara menulis variable yang sejenis pada ruas persamaan yang berbeda.

NUMERIK

Sebuah simbol atau kumpulan dari simbol yang merepresentasikan sebuah bilangan.

ORDE

Pangkat tertinggi dari sebuah koefisien diferensial.

OSILASI TEREDAM

Benda yg pada mulanya mulai bergetar atau beosilasi bisa berenti karena mengalami hambatan atau gaya gesekan.

PECAHAN

Istilah dalam matematika yang terdiri dari pembilang dan penyebut.

PEUBAH

Besaran yang bervariasi atau besaran yang dapat mengambil salah satu dari suatu himpunan nilai tertentu (dalam matematika).

RELASI

Suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain.

TURUNAN

Bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya.

WORNSKIAN

Fungsi yang dapat bersifat bebas dan tidak bebas secara linear.

# DAFTAR PUSTAKA


Fitri Monika Sari, Yundari, H. (2017). PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN MENGGUNAKAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON. *Citra:Jurnal Ilmu Komunikasi*, *5*(2), 125–134. https://doi.org/10.31479/citra.v5i2.28

Kusmaryanto, S. (2013a). *Akar Persamaan Karakteristik Matematika Teknik I _Sigit Kusmaryanto*.

Kusmaryanto, S. (2013b). *Metode Koefisien Tak Tentu untuk Penyelesaian PD Linier Homogen Tak Homogen orde-2 Matematika Teknik I_SIGIT KUSMARYANTO*.

Kusmaryanto, S. (2013c). *Metode Variasi Parameter untuk Penyelesaian PD Linier Homogen Tak Homogen orde-2 Matematika Teknik I_SIGIT KUSMARYANTO*.

Kusmaryanto, S. (2013d). *Persamaan Diferensial-Linier Homogen & Non Homogen Tk. n-(Differential: Linier Homogen & Non Homogen Orde n)*.

Lestari, D. (2013). *Diktat Persamaan Diferensial*. 41. http://staffnew.uny.ac.id/upload/198505132010122006/pendidikan/Modul+Persamaan+Diferensialx.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2017). *Jurnal Dinamika Pendidikan* (Vol. 10, pp. 99–225).

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BMP Persamaan Diferensial*. http://repository.uki.ac.id/id/eprint/1659

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN GEOMETRI 1*.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). *Integral Tak-Tentu Jilid I*.

Lumbantoruan, J. H. (2019e). *Integral Tentu Jilid II*.

Lumbantoruan, J. H. (2019f). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown. *Jurnal EduMatSains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2021). *Mata Kuliah : Persamaan Differensial*.

Nuryadi. (2018). *Pengantar Persamaan Diferensial Elementer dan Penerapannya* (1st ed.).

Rochmad. (2016). Bahan Ajar Persamaan Diferensial. In *Academia.edu* (pp. 1–53).

Saputro, P. A., & Lumbantoruan, J. H. (2020). EduMatSains Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS ARTICULATE STORYLINE PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR KELAS VIII. *Edumatsains, Special Issue*, *1*(1), 35–49. http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains

Sugiarto, I., Matematika, J., Matematika, F., & Alam, P. (2005). *DIFERENSIAL LINEAR EKSAK ORDE DUA* (Vol. 10, Issue 2).

Lumbantoruan, J. H. (2019). *Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017 / 2018*. *3*(2), 147–168.

Diferensial, P., Homogen, L., Ir, O., Kusmaryanto, S., & Eng, M. (n.d.). *PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN ORDE 2*. *x*.

Hill, M., & Musthofa, M. W. (2013). *Penyelesaian Masalah Nilai Batas Persamaan Diferensial*. *2*(2), 91–103.

Sugiarto, I., Matematika, J., Matematika, F., & Alam, P. (2005). *DIFERENSIAL LINEAR EKSAK ORDE DUA* (Vol. 10, Issue 2).

Iv, B. A. B. (n.d.). *Tujuan Instruksional :* 1–27.

Amir, M. F., & Prasojo, B. H. (2017). *Buku Ajar Matematika Dasar*.

Iv, B. A. B. (n.d.). *Tujuan Instruksional :* 1–27.

*Persamaan Linear Tingkat Tinggi*. (n.d.).

Halomoan, J. (2019). *Buku Materi Pembelajaran Persamaan Diferensial*.