MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL KONSTAN

Disusun Oleh:

Dewisar H.Lodo Putri

1913150029

PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN ILMU DAN PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

2021

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa karena telah melimpahkan kasih dan berkat-Nya hingga penulis berhasil menyelesaikan bahan ajar modul “Persamaan Diferensial Konstan”.

Kami sangat mengucapkan terimakasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam proses penyusunan makalah ini. Baik itu berupa ide, gagasan, serta saran selama proses penyusunan makalah ini. Semoga dengan adanya makalah ini dapat menambah pengetahuan para pembaca terutama dalam memahami materi Persamaan Differensial Metode Substitusi.

Modul Ini sangat sederhana dan masih banyak kekurangan. Maka dari itu, dengan segala kerendahan hati kami mengharapkan saran dan kritik dari semua pihak, sehingga kami penulis dapat melakukan perbaikan pada edisi berikutnya. Untuk itu, terima kasih setulus-tulusnya penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu, sehingga modul ini dapat di selesaikan.

Jakarta, 12 Desember 2021

Penulis,

(Dewisar H.Lodo Putri)

DAFTAR ISI

MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL KONSTAN

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mahasiswa dihapkan mampu memahami defenisi dan konsep Persamaan Diferensial konstan, serta dapat menyelesaikan dan membuat contoh persoalan dabam bentuk persamaan diferensial yang konstan	1. Defenisi Persmaan Diferensial Konstan 2. Konsep Persamaan Diferensial Konstan 3. Menyelesaikan Persoalan Diferensial yang konstan

MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL KONSTAN

Suatu fungsi f(x,y) dapat disebut homogen berderajad *n* jika :

$$\mathbf{f}(\lambda x \lambda y) = \lambda^{n}\mathbf{,f}(x,y)$$

Menurut (Sigit Kusmaryanto n.d.)Persamaan diferensial M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 bisa dikatakan homogen jika *M (x,y)* dan *N* (x,y) merupakan homogen berada pada tingkat derajat yang setara, artinya setiap variabel kita kalikan dengan parameter λ. Sehingga dalam persamaan homogen dilakukan substitusi

$$y = vx \text{ dan } dy = vdx + xdv$$

<u>Contoh :</u>

1. $(x^2+y^2)dx + xydy = 0$

   Penyelesaian:

   Misalkan $v = \frac{y}{x}$, maka y = vdx

   Turunkan y = vx dan dy = vdx + xdv

   $(x^2+(vx)^2)dx + x(vx)(vdx+xdv) = 0$

   $(x^2+2x^2v^2)dx + x^3vdv = 0$

   $x^2(1+2v^2)dx + x^3vdv = 0$.... PD Variabel terpisah

   $\frac{dx}{x} + \frac{vdv}{(1+2v^{2)}} = 0 \Rightarrow \int\frac{dx}{x}+\int\frac{vdv}{(1+2v^{2)}} = 0$

$$\ln x + \frac{1}{4}\ln(1+2v^2) = C \Rightarrow \ln x + \frac{1}{4}\ln\left(1+2\frac{y^2}{x^2}\right) = C$$

2. $(x+2y)dx + (2x+3y)dy = 0$

   Penyelesaian :

   Misalkan : $y = ux$, $dy = udx + xdu$

   $(x+2ux)dx + (2x+3ux)(udx+xdu) = 0$

   $(x+2ux)dx + \left(2ux+3u^2x\right)dx\left(2x^2=3ux^2\right)du = 0$

   $\left(x+4ux+3u^2x\right)dx + \left(2x^2+3ux^2\right)du = 0$

   $\underline{\left(1+4u+3u^2\right)x + (2+3u)x^2du = 0}$ $\quad :\left(1+4u+3u^2\right)x^2$

   $$\frac{1}{x}dx + \frac{(2+3u)}{1+4u+3u^2}du = 0$$

   $$= \int\frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int\frac{2(2+3u)}{1+4u+3u^2} = \int 0$$

   $$= \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1+4u+3u^2\right)x^2 = C$$

   $$= \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{4u}{x}+\frac{3y^2}{x^2}\right) = C$$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-y^2}{xy}$

   Penyelesaian:

   $xydy = \left(x^2-y^2\right)dx$

   $\left(y^2-x^2\right) + xydy = 0$

   $y = ux$, $dy = udx + xdu$

   $\left(u^2x^2-x^2\right)dx + x.ux(udx + xdu = 0$

   $\left(2u^2x^2-x^2\right)dx + ux^3du = 0$

   $\underline{\left(2u^2-1\right)x^2dx + ux^3du = 0}$ $:\left(2u^2-1\right)x^3$

   $$\frac{1}{x}dx + \frac{4u}{\left(2u^2-1\right)}du = 0$$

$= \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{4}\int \frac{4u}{(2u^2-1)}$

$= \ln x + \frac{1}{4}\ln\left(2u^2-1\right) = C$

$= \ln x + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2y^2}{x^2}-1\right) = C$

4. $xdy - ydx - \sqrt{x^2-y^2}\, dx = 0$

   Penyelesaian:

   $xdy - (y + \sqrt{x^2-y^2}\, dx = 0$

   $M(tx,ty) \quad = -(ty + \sqrt{t^2x^2-t^2y^2}$

   $= -\left(ty + \sqrt{t^2\left(x^2-y^2\right)}\right)$

   $= -\left(ty + t\sqrt{x^2-y^2}\right)$

   $= t(-(y + \sqrt{x^2-y^2}$

   $= t'M(x,y$

   $N(tx,ty) = tx = t^{'}N(x,y)$

   $y = ax, \ dy = adx + xda$

   $x(adx+xda) - (ax + \sqrt{x^2-a^2x^2}dx = 0$

   $4xdx + x^2da - (ux + \sqrt{x^2-a^2x^2}dx = 0$

   $-\sqrt{x^2-a^2x^2}dx + x^2da = 0$

   $\underline{-\sqrt{-a^2}xdx + x^2da = 0} \qquad : \sqrt{1-a^2}x^2$

   $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{\sqrt{-a^2}}da = 0$

   $= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{-a^2}}$

   $= -\ln x + \arcsin a = C$

   $= -\ln x + \arcsin \frac{x}{y} = C$

6.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Diferensial Tidak Homogen

(Sigit Kusmaryanto n.d.) Persamaan diferensial yang memiliki ciri $(ax + by + c)\,dx + (kx + ly + m)\,dy = 0$ … (i), yang dimana a, b, c, k, l, serta m merupakan konstanta dapat dikatakan Persamaan diferensial tidak homogen. Terdapat beberapa ketentuan dalam menyelesaikan PD tersebut;

(1) jika $\frac{a}{k} \neq \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}$ atau $al - bk \neq 0$

(2) jika $\frac{a}{k} = \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}$ atau $al - bk = 0$

(3) jika $\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m} = n$

Pada ketentuan (1) ketika

$\frac{a}{k} \neq \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}$ atau $al - bk \neq 0$

$ax + by + c = u \quad a\,dx + b\,dy = du$

$kx + ly + m = v \qquad k\,dx + l\,dy = dv$

$a\,dx + b\,dy = du\ (*\,q)$

$\underline{k\,dx + l\,dy = dv\ (*\,b)}$

$ak\,dx + bl\,dy = l\,du$

$\underline{bk\,dx + bl\,dy = b\,dv\ -}$

$(al - bk)dx = l\,du - b\,dv$

$dx = \frac{l.du-b.dv}{(al-bk)}$ … (ii)

dengan cara yang sama yaitu mengeliminasi dx, diperoleh

$$dy = \frac{a.du-b.dv}{(al-bk)} \ldots \text{(iii)}$$

kemudian substitusi u, v, pers (ii) dan (iii) ke PD awal [pers (i)]

$$u\,dx + v\,dy = u\left(\frac{l.du-b.dv}{(al-bk)}\right) + v\left(\frac{a.du-b.dv}{(al-bk)}\right) = 0 = u\,(l\,du - b\,dv) + v\,(a\,dv - k\,du) = 0$$

$$lu\,du - bu\,dv + av\,dv - kv\,du = 0$$

$(lu - kv)\,du + (av - bu)\,dv = 0$, PD Homogen

Setelah PD awal tersebut berbentuk seperti PD terakhir diatas, maka penyelesaiannya dapat menggunakan.

Selesaikan persamaan – persamaan berikut :

Contoh

1. Tentukan penyelesaian $y' = \frac{-x+2y+5}{2x-y-4}$

   Penyelesaian :

   $y' = \frac{-x+2y+5}{2x-y-4}$

   $(2x-y-4)dy = (-x+2y+5)dx$

   $(x-2y-5)dx + (2x-y-4)dy = 0$

   $a = 1, b = -2, c = -5, p = 2, q = -1, r = -4$

   $\frac{a}{k} = \frac{1}{2}, \frac{b}{l} = \frac{2}{1}, \frac{c}{m} = -\frac{5}{-4}$ sehingga $\frac{a}{k} \neq \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}$ **(bentuk 1)**

   - Menentukan (x_1, y_1)

     $\left.\begin{matrix} x-2y-5=0 \\ 2x-y-4=0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2x-4y-10=0 \\ 2x-y-4=0 \end{matrix}\right.$ diperoleh $x_1 = 1$ dan $y_1 = -2$

Diperoleh :

$x = u + 1 \Leftrightarrow dx = du$

$y = v - 2 \Leftrightarrow dy = dv$

Sehingga:

$$(x-2y-5)dx + (2x-y-4)dy = 0$$

$$(u+1-2(v-2)-5)du + (2(u+1)-(v-2)-4)dv = 0$$

$$(u-2v+1+4-5)du + (2u-v+2+2-4)dv = 0$$

$$\underline{(u-2v)du + (2u-u)dv} :u$$

$$\left(1-\frac{2v}{u}\right)du + \left(2-\frac{v}{u}\right)dv = 0 \rightarrow \text{PD Homogen}$$

Misal $v = uz \Leftrightarrow dv = zdu + u.dz$, maka

$$(1-2z)du + (2-z)(z\,du+u\,dz) = 0$$

$$\underline{(1-z^2)du + (2-z)udz = 0} :(1-z^2)u$$

$$\frac{du}{u} + \frac{(2-z)}{(1-z^2)}dz = 0 \rightarrow \text{PD Terpisah}$$

$$\int\frac{du}{u} + \int\frac{(2-z)}{(1-z^2)}dz=0$$

$$\ln u+\int\frac{2}{(1-z^2)}dz-\int\frac{z}{(1-z^2)}dz=0$$

$$\ln u+2\ln\left|\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|1-z^2\right|=\ln c_1 \quad \times 2$$

$$2\ln u+4\ln\left|\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}\right|+\ln\left|1-z^2\right| = \ln C$$

$$\ln u^2\left(\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}\right)^4(1-z^2) = \ln C$$

$$u^2\frac{(1+z)^4}{(1-z^2)} = C$$

$$(x-1)^2\,\frac{\left(1+\frac{y+2}{x-1}\right)^4}{\left(1-\frac{y+2}{x-1}\right)^4} = C$$

$$(x-1)^2\left(\frac{x+y+1}{x-1}\right)^4\left(\frac{x-1}{x-y-3}\right)^2 = C$$

$$\frac{(x+y+1)^4}{(x-y-3)^2} = C$$

2. Tentukan penyelesaian $y' = \dfrac{-x+2y+5}{2x-4y-4}$

   Penyelesaian :

   $$y' = \frac{-x+2y+5}{2x-4y-4}$$

   $(2x-4y-4)dy = (-x+2\ y+5)dx$

   $(x-2y-5)dx + (2x-4y-4)dy = 0$

   $a = 1,\ b = -2,\ c = -5,\ p = 2,\ q = -4,\ r = -4$

   $\frac{a}{k} = \frac{1}{2}, \frac{b}{l} = \frac{2}{4}, \frac{c}{m} = -\frac{5}{-4}$ sehingga $\frac{a}{k} = \frac{b}{l} \neq \frac{c}{m}$ **(bentuk 2)** :

   Misalkan :

   $x-2y = r \Leftrightarrow dx-2dy = dr$

   Sehingga

   $(x-2y-5)dx + (2x-4y-4)\ dy = 0$

   $(r-5)(dr+2dy) + (2x-4)\ dy = 0$

   $\underline{(r-5)dr + (4.r-14)\ dy = 0\ }$:(4r-14)

   $$\int\frac{r-5}{4r-14}dr + \int dy=0$$

   $$\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{-\frac{3}{2}}{z-\frac{7}{2}}\right)dx+y=C$$

   $$\frac{1}{4}\left(r-\frac{3}{2}\ln\left|r-\frac{7}{2}\right|\right) + y = C$$

   $$2x-3\ln\left|(x-2y)-\frac{7}{2}\right|+4y=C$$

3. Tentukan penyelesaian $y' = \frac{-x+2y+3}{2x-4y-6}$

Penyelesaian :

$y' = \frac{-x+2y+3}{2x-4y-6}$

$(2x-4y-6)dy = (-x+2y+3)dx$

$(x-2y-3)dx + (2x-4y-6)dy = 0$

$a = 1, b = -2, c = -3, p = 2, q = -4, r = -6$

$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}, \frac{b}{q} = \frac{2}{4}, \frac{c}{r} = -\frac{3}{6}$ sehingga $\frac{a}{b} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ **(bentuk 3)**

$(x-2y-3)dx + (2x-4y-6)dy = 0$

$dx + 2dy = 0$

$\int dx + \int 2dy = 0$

$x + 2y = C$

Persamaan Differensial linear orde dua dengan koefisien konstan dapat dituliskan sebagai : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$ dengan a, b dan c yaitu konstanta. Jika $f(x) = 0$, sehingga $ay'' + by' + cy = 0$ persamaan tersebut disebut homogen, sedangkan bila $f(x)^1 = 0$ maka persamaan tersebut disebut tak homogen. Untuk dapat menentukan Solusi PD homogen, kita dapat mempelajari pengertian kebebasan linear dan Wronkian dari dua fungsi..

Dua fungsi yaitu f(x) dan g(x) dapat disebut bebas linear di interval I apabila persamaan kombinasi linear dari dua fungsi itu, $mf(x) + ng(x) - 0$ pada setiap x hanya dipenuhi oleh $m = n = 0$. Bila tidak maka dikatakan f(x) dan g(x) bergantung linear.

Persamaan Diferensial merupakan sebuah persamaan yang terdapat satu atau lebih turunan variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Sedangkan apabila dalam Persamaan Diferensial terdapat turunan dari satu atau lebih fungsi sembarang terhadap hanya ada satu variable bebas disebut dengan **Persamaan Diferensial Biasa.** Dan disebut dengan **Persamaan Diferensial Parsial** apabila dalam persamaan terdapat turunan biasa dari satu atau lebih fungsi sembarang terhadap satu atau lebih variable bebas

<u>Contoh</u>

a. $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + xy = 5$ (Persamaan Differensial Parsial)

b. $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 0$ (Persamaan Differensial Biasa Orde Dua)

Orde pada suatu PDB yaitu pangkat yang tertinggi dari suatu turunan dalam persamaan diferensial F(x,y',y'', . . . ,y(n)) = 0

6.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Koefisien Konstanta

menurut, (Jitu Halomoan Lumbantoruan. S.Pd. 2019) Persamaan Diferensial adalah persamaan rasional misalnya antara (x) variabel bebas, misalnya (y) variabel terkait dan satu atau lebih koefisien turunan antara keduanya. Contoh : $\frac{dy}{dx}$. Persamaan diferensial biasa, yitu jika hanya ada satu faktor independen. Perumpaan diferensial segmental, ialah ketika ada beberapa perumpamaan variabel tak bebas. Persamaan diferensial orde pertama adalah dapat dikatakan sebagai tururnan atau fungsi linear berisi satu variabel bebas (x) dengan satu faktor leluasa (y) dan turunan pertamanya (y),dihubungkan oleh eksplisit atau implisit. Solusi umum persamaan diferensial adalah : fungsi yang mencakup konstanta C dan memenuhi persamaan (1) diferensial. Solusi spesifik adalah solusi yang diperoleh dari solusi umum nilai C dari nilai numerik tertentu, atau solusi yang memenuhi kondisi diberikan, misalnya s.

Metode integral langsung, metode pemisahan variabel, dan metode substitusi adalah jumlah cara penyusunan perbandingan diferensial sistem satu. cara langsung dipakai apabila persamaan diferensial bisa dinyatakan dalam bentk $\frac{dy}{dx} = f(x)$ artinya bentuk persamaan dapat diintegralkan secara langsung di dapatkan $\int dy=\int f(x)dx \rightarrow y=F(x)+c$.

Cara diskriminasi faktor dipakai apabila perbandingan diferensial memiliki dua faktor serta bisa di tempatkan di tempat yang berbeda di buku yang berlainan dan bisa dicatat di tatanan : $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \rightarrow$ dengan catatan f(x,y) bisa dipisahkan menjadi f(x) dan g(y) sehingga didapatkan $\int g(y)dy=\int f(x)dx \rightarrow y=F(x)+C$. Dipisahkan, biasanya diambil substitusi $y = v.x \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$. Solusi PD linear Homogen dengan koefisien konstanta koefisien karakteristik). Bentuk $ay'' + by' + cy = 0$ a,b,c = konstanta.

<u>Misalkan :</u>

$y = e^{mx}$

$y' = me^{mx}$

$y'' = m^2e^{mx}$

$ay'' + by' + cy = 0$ $am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$

$(am^2+bm+c)e^{mx} = 0$

Jadi $y = e^{mx}$ menjadi solusi PD jika $(am^2+bm+c) = 0$

$am^2bm + c = 0 \rightarrow$ persamaan karakteristik

Akar persamaan karakteristik adalah :

$$m_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad D = b^2-4ac$$

Akar persamaan karaketristik nilai m adalah

1. apabila $b^2-4ac > 0$, maka m_2 merupakan 2 akar real yang beda dengan $m_{12} \in R$ sehingga penyelesaian umumnya adalah : $y = c_1e^{m_2x} + C_2e^{m_2x}$
2. bila $b^2-4ac = 0$, maka $m_1 = m_2$ dengan $m_{12} \in R$, maka penyelesaian umumnya : $y = c_1em^x$
3. bila $b^2-4ac < 0$, sehingga $m_{12} = a \pm i\beta$ dengan $a,\beta \in R$, penyelesaian umumnya adalah $y = (c_1+c_2)e^{ax}(\cos\beta x) + i(c_1-c_2)e^{ax}(\sin\beta x)$

   $y = Ae^{ax}(\cos\beta x) + ibe^{ax}(\sin\beta x)$

Contoh 1

Cari penyelesaian PD : $12y''-5y'-2y = 0$

Solusi persamaan karakteristiknya,

$12m^2-5m-2 = 0$

$(4m+1)(3m-2) = 0$

$m_1 = -\frac{1}{4} \vee m_2 = \frac{2}{3}$

Sehingga penyelesaian untuk PD di atas ialah, $y(x) = c_1e^{\frac{2}{3}x}$

Contoh 2

Cari PD, solusi umumnya adalah $y = \frac{c+\sin x}{x}$

Penyelesaian :

$$y = \frac{c+\sin x}{x}$$

$$y = (c + \sin x)x^{-1}$$

$$y' = \cos x.x^{-1}(c + \sin x)x^{-1}$$

$$y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{c+\sin x}{x^2}$$

$$y' = \frac{x\cos x-(c+\sin x)}{x^2}$$

$$x^2y' = x\cos x - c - \sin x$$

$$c = x\cos - \sin x - x^2y'$$

Substitusikan nilai yang dihasilkan menjadi : $y\frac{c+\sin x}{x}$

$$y = \frac{x\cos x-\sin x-x^2y'+\sin x}{x}$$

$$y = \cos x-xy'$$

PD, yang solusi umumnya adalah $y = \frac{c+\sin x}{x}$ adalah $xy' + y = \cos x$

Contoh 3

Diberikan penyelesaian berikut$x^3 - cxy + 4 = 0$

Penyelesaian :

Kita turunkan $x^3 - cxy + 4 = 0$ secara implisit

$3x^2 - cy - cxy + 0$

$-c(y+xy) = -3x^2$

$c = \dfrac{3x^2}{y+xy'}$

Substitusikan nilai c ke dalam persamaan $x^3 - cxy + 4 = 0$

$x^3 - \left(\dfrac{3x^2}{y+xy}\right)xy + 4 = 0$

$x^3(y+xy') - 3x^3y + 4y = 0$

$(x^4+4x)y' - 2x^3y + 4y = 0$

Oleh karena itu, $x^3 - cxy + 4 = 0$ ialah penyelesaian umum untuk PD $(x^4+4x)y' - 2x^3y + 4y = 0$

Contoh 4

Tentukan solusi umum persamaan diferensial berikut :

$y'' + 5y' - 6y = 0$

Penyelesaian :

Akar persamaan karakteristik PD diatas adalah

$m^2 + 5m - 6 = 0$

$1x6 = -6$

$-1 + 6 = 5$

$(m-1)(m+6) = 0$

$m_1 = 1$ dan $m_2 = -6$

solusi linear bebas untuk PD adalah :

$y = C_1e^{m1x} + C^2e^{m_2x}$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-6x}$

Contoh 5

Cari penyelesaian umum bagi persamaan diferensial berikut :

$y'' + 2y' + 4y = 0$

Penyelesaian :

Akar-akar persamaan karakteristik PD diatas berikut

$m^2 + 2m + 4 = 0$

$$m^2+2m+4=0$$
$$m_{12}=-1\pm i\sqrt{3}$$
$$m_{12}=a\pm i\beta$$

$$m^2+2m+4=0$$
$$\ldots \quad x\ldots=4$$
$$\ldots \quad +\ldots=2$$

$$m_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$m_{12}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.4}}{2.1}$$
$$m_{12}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}$$
$$m_2=\frac{-2\pm2\sqrt{-3}}{2}$$
$$m_{12}=\frac{2(-1\pm i\sqrt{3})}{2}$$
$$m_{12}=-1\pm i\sqrt{3}$$

Solusi bebas linear untuk PD adalah :

$y = Ae^{ax}(\cos \beta x) + Be^{ax}(\sin \beta x)$

$y = Ae^{-x}\cos\sqrt{3x} + Be^{-x}\sin\sqrt{3x}$

6.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Metode Koefisien Tak Tentu

Menurut (Sigit Kusmaryanto n.d.) Jika fungsi memenuhi salah satu daripada syarat berikut, kita bisa menyebutnya sebagai fungsi koefisien tak tentu:

1. Fungsi mempunyai format atau bentuk berikut :
   a. x^n → sebuah bilangan bulat positif atau nol
   b. e^{ax} → sebuah konstanta dan tidak sama dengan nol
   c. sin (px+q) → p dan q adalah konstanta dan q ≠ 0
   d. cos (px+q) → p dan q adalah konstanta dan q ≠ 0
2. Fungsi yang terdiri dari perkalian finite hingga dari empat angka pada poin 1 di atas

Aturan untuk metode koefisien tak tentu

a ketentuan dasar, contohnya. Bila r(x) ialah satunya berguna di tabel, tentukan kegunaan y_p dengan sinkron serta pilih koefisien tidak pastinya mengunakan pergantian y_p di perbandingan tadi.

b Modifikasi perintah. Kalikan y_p yang bersesuaian dengan tabel dengan x (atau x^2 jika r(x)persis menggunakan penyelesaian akar ganda PD tunggal) mengalikan y_p serta sama di tabel oleh x (atau x^2) apabila r(x) persis menggunakan penyelesaian.

c Penjumlahan Aturan. Bila r(x) mengacu di jumlah fungsi yang ditemukan di kolom pertama tabel, y_p mengacu pada jumlah fungsi yang ditemukan pada kolom kedua tabel.

Tabel 1 Metode Koefisien Tak Tentu

Suku pada **r(x)**	Pilihan untuk y_p
ke^{yx}	ce^{yx}
kx^n**(n = 0,1…)**	$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0$
kcos ωx atau ksin **ω**x	kcos ωx + Msin ωx

Kesimpulan :

- cara koefisien tidak pasti dipakai khusus untuk unsur logam linear ak homogen dengan homogen serta koefisien konsisten.
- Agar bisa menetapkan pemenggalan serta sama wajib dicari lebih awal pengerjaan perbandingan kesamaannya.
- trik koefisien tak tentu cuma bisa dipakai apabila kegunaan f(x) dalam buku kanan yaitu berbentuk polinomial, kegunaan trigonomeri, fungsi eksponen serta penambahan / perkalian melalui ketiga peranan ruangan awal pada diagram satu.

  Contoh : PD $y'' + y = \tan x$ tak bisa terselesaikan jika cara koefisien tak tentu deisebakan tan x tidak tergolong ketiga kegunaan pada tabel satu.

Penerapan Aturan Dasar

Tentukan PD tak homogen berikut:

$$y'' + 4y = 8x^2$$

Jawaban :

Langkah 1. Menentukan solusi dari PD homogen $y'' + 4y = 0$

Persamaan karakteristik : $m^2 + 4 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = 2i, m_2 = -2i$

Solusi umum y_h = Acos 2x + Bsin 2x

Langkah 2. Menetukan solusi PD tak homogen $y'' + 4y = 8x^2$

$f(x) = 8x^2$ sehingga dari tabel 1, $y_p = k_2x^2 + k_1x + k_0$

$y'_p = 2k_2x + k_1$

$y'', y''_p = 2k_2$

Substitusikan y_p, y'_p, y''_p ke persamaan di dapatkan :

$$2k_2 + 4\left(k_2x^2 + k_1x + k_0\right) = 8x^2$$

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat :

$$4k_2 = 8$$

$$4k_1 = 0$$

$$2k_2 + 4k_0 = 0$$

Nilai konstanta :

$$k_2 = 2, \quad k_{0=-1,} \quad k_1 = 0$$

Solusi umum PD tak homogen :

$$y_p = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$$y = y_h(x) + y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$$

Penerapan Aturan Modifikasi

Selesaikan solusi PD berikut :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

Penyelesaian :

Langkah 1. Tentukan solusi PD homogen $y'' - 3y' + 2y = 0$

Persamaan karaketeristik : $m^2 - 3m + 2 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = 1, m_2 = 2$

Solusi umum $y_h = c_1e^x + c_2e^x$

Langkah 2. Tentukan solusi PD tak homogen $y'' - 3y' + 2y = e^x$

$f(x) = e^x$, yakni solusi PD homogen pada langkah 1 sehingga sama dengan aturan B, $y_p = cxe^x$, $y_p = ce^x$ dikarena $f(x) = e^x$ yakni solusi PD homogen pada langkah 1 maka sesuai aturan B, $y_p = cxe^x$

Jadi, $y'_p = ce^x + cxe^x, y''_p = 2ce^x + cxe^x$

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat:

$$c = -1$$

Solusi umum PD tak homogen : $y_p = -xe^x$

Penerapan Aturan Penjumlahan

Contoh 1. Selesaikan penyelesaian umum PD berikut :

$$y'' - 2y' + y = e^x + x$$

Jawaban :

Langkah 1. Tentukan solusi PD homogen $y'' - 2y' + y = 0$

Persamaan karakteristik ; $m^2 - 2m + 1 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = m_2 = 1$

Solusi umum $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$

Langkah 2. Menentukan solusi PD tak homogen $y'' - 2y' + y = e^x + x$

$f(x) = e^x + x, \quad y_p = c_1e^x + c_2x + c_3$

Suku pada f(x) yaitu e^x merupakan solusi ganda PD homogen solusi umum PD homogen solusi umum PD homogen menjadi $y_p = c_1x^2e^x + c_2x + c_3$

Sehingga $y'_p = 2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2$

$y''_p = 2c_1e^x + 2c_1xe^x + 2c_1xe^xe^x + c_1x^2e^x$

Substitusikan $y_p y'_p y''_p$ ke persamaan di dapatkan :

$$2c_1e^x + 4c_1xe^x + 2c_1xe^xe^x - 2\left(2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2\right) + c_1x^2e^x + c_2x + c_3$$
$$= e^x + x \leftrightarrow 2c_1e^x + c_2x - 2c_2 + c_3 = e^x + x$$

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat:

$$c_1 = \frac{1}{2}; c_2 = 1; c_3 = \frac{1}{2}; c_2 = 1; c_3 = 2$$

Solusi umum PD tak homogen :

$y_p = c_1x^2e^x + c_2x + c_3$

$= \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$$y = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$$

Contoh 2. Tentukan penyelesaian PD berikut :

$$y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$$

Penyelesaiannya :

Langkah 1. Tentukan solusi PD homogen $y'' + 2y' + 5y = 0$

Persamaan karaketristik : $m^2 + 2m + 5 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik : $m_1 = -1 + 2i$ $m_2 = -1 - 2i$

Solusi umum $y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Langkah 2. Menentukan solusi PD tak homogen $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$

$f(x) = 16e^x + \sin 2x$

$y_p = ce^x + k\cos 2x + M\sin 2x$

Substitusikan y_p, y'_p, y''_p ke persamaan di dapatkan :

$8ce^x + (-4k+4m+5k)\cos 2x + (-4k-4m+5m)\sin 2x = 16^x + \sin 2x$

Kita samakan koefisien yang memiliki pangkat sama didapat:

$$c = 2;\ k = \frac{4}{17};\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

Langkah 3. Menentukan solusi DP $y = y_h(x) + y_p(x)$

$$= e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2e^x - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

6.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Metode Variasi

Menurut (Sigit Kusmaryanto n.d.), Metode variasi parameter merupakan metode yang menentukan suatu penyelesaian khusus persamaan diferensial linear koefisien variabel. Ketentukan dari metode ini yaitu mengganti variabel konstonta c_k dengan variasi parameter $v_k(a)$. Metode tersebut dapat dipakai dalam menyelesaikan permasalahan persamaan yang tidak bisa diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Penggunaan metode koefisien tak tentu bersifat terbatas pada fungsi yang tak dapat digunakan dalam metode koefisien tak tentu, maka bisa di pakaikan metode variasi parameter. Prinsip metode varlasi parameter pada PD Linear tak homogen orde 2:

$$y'' - p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

PD Linear tak homogen orde-2 dengan koefisien variabrel diselesaikan dengan metode variasi parameter. Variasi parameter dapat dituliskan dengan:

$$y'' + p(a)y' + q(a)y = r(a)$$

Penyelesaian dari PD ini yaitu melalui 3 langkah,seperti berikut:

Langkah 1:

Menentukan penyelesaian PD homogen

$$y'' + p(a)y' + q(a)y(r(a)) = 0$$

$$y_h = c_1y_1(a) + c_2y_2(a)$$

Langkah 2:

Memilah penyelesaian PD non homogen menggunakan metode variasi parameter

- Tentukan solusi persamaan umum:

$$y_p = v_1(x)y_1(x)$$

- Tentukan turunan y_p:

$$y_p' = v_1(x)y_1(x) + v_1(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_2(x)y_2'(x)$$

- Menentukan persamaan syaratnya:

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$$

Sehingga

$$y_p' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)$$

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_2'(x)y_2'(x)$$

- Substitusikan $y_p, y_p' y_p''$ pada PD:

$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0$

$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0$

$v_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + v_2'(x)[y_2'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)$

Karena: $y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0$

$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0$

Dengan demikian hasil substitusi dari $y_{p,} y_p', y_p''$ pada PD adalah:

$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) = r(x)$

- Menetukan $v_1(x)$dan $v_2(x)$

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)$$

Maka dari kedua persamaan diatas diperoleh:

$$v_2'(x) = \frac{y_2(x).r(x)}{w} \rightarrow v_1(x) = \int -\frac{y_{2(x)r.(x)}}{w}$$

$$v_2'(x) = \frac{y_{1\,(x).r(x)}}{w} \rightarrow v_2(x) = \int \frac{y_1(x).r(x)}{w}$$

$w = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$adalah wronskian $y_{1(x),}y_2(x)$

Jadi, $y_p = v_1(x)y_2(x) + v_2(x)y_2(x) = \int \frac{y_{2(x).r(x)}}{w} y_1(x) + \int \frac{y_{1(x).r(x)}}{w} y_2(x)$

Langkah 3:

Solusi umum dari PD

$y = y_h + y_p$

$y = c_1y_1(x) + v_1(x)y_1(x) + v_2(x)$

$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int \frac{y_{2\,(x).r(x)}}{w} y_{1(x)} + \int \frac{y_{1\,(x).r(x)}}{w} y_2(x)$

<u>Contoh Soal 1</u>

Menentukan penyelesaian dari persamaan y" - 5y' + 6y = x.

Penyelesaiannya:

- Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$,untuk mencari solusi tak homogenya,

  misalkan $y_p = Ax + B$. maka,$y_p' = A$ dan $y_p'' = 0$.

  substitusikan ke PDB diatas:

  -5A + 6(Ax+B) = x.

Jadi,6A = 1 dan -5A + 6B = 0,sehingga A = $\frac{1}{6}$ dan B = $\frac{5}{36}$.

Jadi solusi umum PDBnya adalah y = $c_{1e^{2x}} + c_{2e^{3x}} + \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$

Contoh Soal 2

Tentukan solusi umum PDB y” + y = csc x.cot x

Penyelesaiannya:

Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Maka solusi khusus harus berbentuk:

y_p = c1(x).cosx +c2(x).sin x

Dengan: c1.cos xc2'.sin x = 0

c1'.(-sin x) + c2’.cos x = csc x.cot x

Maka,dari kedua persamaan ini didapat:

$$c_1' = (-\cot x \text{ dan } + c_2' = \cot^2 x.$$

Jadi,

$c_1(x) = \int(-\cot x)dx = -\ln|\sin x|$;

$c_2(x) = \int \cot^2 x.dx = \int(\csc^2 x - 1)dx = -\cot \quad x - x$

Maka solusi khususnya adalah:

$$y_p = (-\ln|\sin x|.\cos x - (x + \cot x).\sin x$$

Maka solusi umum PDBnya adalah:

$$Y = (\ln|\sin x| + c_1).\cos x - (x + \cot x + c_2).\sin$$

Menurut (Sigit Kusmaryanto n.d.) PD linear homogennya orde 2 dengan koefisien konstan adalah:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} - 4ac$$

Terdapat 3 kemungkinan pada persamaan tersebut dengan ciri:

- Apabila $\sqrt{b^2 - 4a\,c > 0.}$ $m_{1,2}$ merupakan 2 akar real yang beda dengan $m_{1,2} \in R$ sehingga bentuk umumnya adalah: $y = c_1 e^{m_{1x}} + c_2 e^{m_{2x}}$
- Apabila $\sqrt{b^2 - 4a\,c = 0.}$ $m_1 = m_2$ pada $m_{1,2} \in R$, sehingga umumnya$c_1 e^{m_x} + c_2 e^{m_x}$
- Jika $\sqrt{b^2 - 4a\,c > 0,}$ maka,$m_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ dengan $\alpha, \beta \in R$, maka solusi umumnya adalah: $y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$

Dengan menggunakan rumus EULER,yaitu $e^{xi} = \cos x + I \sin x$ maka bentuk trigonometri dapat ditentukan:

$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 x e^{(\alpha - i\beta)x}$

$y = c_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x) c_2 e^{ax}(-c0s\beta x - i\sin \beta x) - \cos\beta x = \cos\beta x$

$y = (c_{1+} c_2) e^{\alpha x} i(c_1 - c_2) e^{\alpha x}(\sin \beta x)$

$y = Ae^{\alpha x}\cos \beta x + \sin \beta x, A, B\varepsilon$ konstanta bilangan kompleks.

Contoh Soal

1. Tentukan solusi umum dari persamaan linear berikut ini:

$$Y'' + 5y' - 6y = 0$$

Jawab:

Akar-akar dari persamaan karakteristik PD adalah:

$$m^2 + 5m - 6 = 0$$

$$(m-1)(m+6) = 0$$

$$m_1 = 1 \text{ dan } m_2 = -6$$

Solusi bebas linear PDnya adalah:

$$y_1(x) = e^x \text{ dan } y_2(x) = e^{-6x}$$

Maka solusi PD umumnya adalah:

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-6x}$$

2. Selesaikan PD berikut

$$y'' - y = 0, y(0) = 1, \ y'(0) = 0$$

Jawab:

Akar-akar persamaan karakteristiknya PDnya adalah

$$m^2 - 1 = 0$$

$$(a-1)(a+1) = 0$$

$$a_1 = 1 \quad \text{dan} \quad a_2 = -1$$

Solusi bebas linear PD nya adalah

$$y_1(a) = e^x; y_2(a) = e^{-x}$$

Sehingga penyelesaian umum PD nya yaitu

$$y(a) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Nilai awal $y(O) = 1, y'(O) = 0$

$y'(O) = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$y'(O) = 0 \rightarrow c_1 - c_2 = O$

Maka,solusi khusus PDnya adalah $y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

3. Menemukan v(t) (2 dari 3)

Jawab:

$tu' + u = 0$,$u(t) = v't$

Untuk u, kita dapat menggunakan metode pemisahan variabel :

$t\frac{du}{dt} + u = 0 \iff \int\frac{du}{u} = -\int\frac{1}{t}dt \iff \ln|u| = -\ln|t| + c$

$\iff |u| = |t|^{-1}e^c \iff u = ct^{-1}$, since $t > 0$.

Demikian $v' = \frac{c}{t}$ dan karenanya $v(t) = c\ln t+k$

Solusi Umum (3 dari 3)

Kita memiliki $v(t) = c\ln t+k$

Sehingga

$y_2(t) = (c\ln t+k)t^{-1}=ct^{-1}\ln t+kt^{-1}$

$y_1(t) = t^{-1}$.

Dan karenanya kita dapat mendapatkan istilah kedua,y_2 yaitu $y_2(t) = t^{-1}\ln t$. Oleh karena itu solusi umum untuk persamaan diferensial adalah $y(t) = c_1t^{-1} + c_2t^{-1}\ln t$

6.7. Kegiatan Pembelajarn 7. Rangkuman

Persamaan Differensial linear order dua pada koefisien konstan dapat dituliskan sebagai : ay " + by ' + cy = f(x) dengan a, b dan c konstanta. Apabila f(x) = 0 maka ay" + by ' + cy = 0 dapat disebut persamaan differensial linear order dua homogen, bila $f(x)^1 = 0$

Persamaan diferensial tidak homogen merupakan PD yang memiliki (ax + by + c) dx + (px + qy + r) dy = 0 … (i),dimana a, b, c, p, q, serta r kostanta. Koefisien konstan dinyatakan dalam bentuk umum yaitu:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_ny = 0$$

atau

$$\left(P_0D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\dots+P_{n-1}D+P_n\right)y = 0.$$

Bila F(D) dapat difaktorkan, maka $m_1,m_2,m_3,\dots,m_n$ disebut akar-akar persamaan karakteristik

Persamaan karakteristik f(m) = 0 setelah ditentukan akar-akarnya, untuk menentukan selesaian umum persamaan:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_ny = 0.$$

Beberapa Aturan pada metode koefisien tak tentu:

1. Aturan dasar :

   Apabila r(x) adalah salah satu fungsi seperti pada tabel, pilih bentuk y_p yang sesuai dan merupakan kombinasi linier dengan konstanta tak tentu. Turunan r(x) harus bebas linier pula.

2. Aturan Penjumlahan :

Apabila r(x) adalah penjumlahan, pilih y_p yang merupakan penjumlahan fungsi yang sesuai.

3. Aturan Modifikasi :
   Apabila r(x) adalah solusi dari persamaan homogen, sehingga pilihan dapat dimodifikasi seperti berikut, Kalikan pilihan pada kolom 2 dengan x_1 atau x_2 tergantung dari apakah pada kolom 3 berupa akar tunggal atau akar-akar ganda dari persamaan homogen.

PD Linear tak homogen orde-2 dengan koefisien variabrel yang diselesaikan menggunakan metode variasi parameter. Variasi parameter dapat dituliskan dengan:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

6.8 Kegiatan Pembelajarn 8 Soal Diskusi Kelompok

1. Persamaan diferensial homogen dari $(x+y)dx + xdy = 0$

   Jawab:

   $M(x,y) = x + y$

   $M(tx, ty) = tx + ty = t(x+y) = t.\ M(x,y)$

   $(x+xz)dx + x(zdx+xdz) = 0$

   $(1+z)xdx + \cdots + \ldots dz = 0$

   $[(1+z)x + zx)]dx + \ldots dz = 0$

   $\int \frac{x\ dx}{\ldots} + \int \frac{dz}{\ldots} = \int 0 \Rightarrow \ln x + \frac{1}{2} \ln (1+2z) = \ln C$

   $2\ln x + \ln (1+2z) = 2\ln C$

   $\ln \ldots + \ln (1+2z) = \ln c^2$

   $\ln \ldots + (1+2z) = \ln c$

   $\ldots .(1+2z) = c$

   $\ldots (1 + 2.\frac{y}{x}) = c$

   $\ldots + 2xy = c$

2. Kerjakan persamaan diferensial non homogen berikut!

   $$(3a+3b+6)da + (b+b+2)db = 0$$

   Jawab:

   $(3a+3b+6)da + (a+b+2)db = 0$

   ambil $m = 3$

   $(3a+3b+6)da + (a+b+2)db = 0$ bagi dengan $(a + b + 2)$

   $\ldots da + db = 0$

$\int ...da+\int ...=C$

$... + ... = C$

3. Persamaan umum diferensial $(d^4 + 9d^2)y = 0$

   Jawab:

   Persamaan PD di atas adalah $(m^{...}+...m^{...})y = 0$, akar-akarnya yaitu $m_{...} = m_{...} = 0$, dan $m_{3,4} = ...$

   Diperoleh penyelesaian umumnya $(D^4+4D^2)y = 0$

   $y = (C_{...}+C_{...}) + (C_{...}\cos ...+C_{...}\sin ...)$

4. Menentukan penyelesaian umum PD $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$

   Jawab:

   Persamaan karakteristik PD diatas yaitu $m^{...} - ...m + ... = 0$. dengan memfaktorkannya menjadi $(m-...)(m-...) = 0$, maka didapatkan akar karakterisiknya $m = ...$ atau $m = ...$ dimana $m1 \neq m2$, dan didapat penyelesaian umum PD yaitu:

   $y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$
   $y = C_1e^{...} + C_2e^{...}$
   sehingga, penyelesaian umum PD yaitu

   $y = C_1e^{...} + C_2e^{...}$

5. $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya : $r^2 - \ldots r + \ldots = 0$, $(r-\ldots)(r-\ldots) = 0$

Sehingga didapat $r_1 = \ldots$ dan $r_2 = \ldots$

Kemudian masukan dipersamaan diatas:

$Ae^{\ldots} + \ldots Ae^{\ldots} + \ldots Ae^{\ldots} = e^{\ldots}$

$\ldots Ae^{\ldots} = e^{\ldots}$

$A = \ldots$

Sehingga solusi umum PD di atas yaitu: $y = C_1e^{\ldots} + C_2e^{\ldots} + \ldots e^{\ldots}$

6. $y'' - 4y' - 5y = 3e^{2t}$

Jawab:

Solusi homogen:

$y'' - \ldots y' - \ldots y = 0$

$r^2 - \ldots r - \ldots = 0$

$(r-\ldots)(r+\ldots) = 0$

$r = \ldots$ dan $r = \ldots$

$y_h = C_1e^{\ldots} + C_2e^{\ldots}$

Solusi partikular:

$y_p = Ae^{\ldots}$

$y'_p = \ldots Ae^{\ldots}$

$y''_p = \ldots Ae^{\ldots}$

Substitusikan:

$$..Ae^{\ldots} - ..(\ldots.Ae^{\ldots}) - ..Ae^{\ldots} = ..e^{\ldots}$$

$$..Ae^{\ldots} - ..Ae^{\ldots} - ..Ae^{\ldots} = ..e^{\ldots}$$

$$..Ae^{...} = ..e^{....}$$

$$..A = \ldots$$

$$A = \ldots$$

Maka $y_p = -e^{....}$

Solusi umum:

$y_t = y_h + y_p$

$y_t = C_1e^{...} + C_2e^{...} - e^{...}$

7. Tentukan penyelesaian partikular dari $y'' + y' - 2y = x^2$!

   Jawab

   Misal $y = y_p = ax^2 + bx + c$, maka $y' = 2ax + b$ dan $y' = 2a$

   Substitusikan y, y', dan y'' ke PD didapat

   $2a + 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$

   $-2ax^2 + (2a-\ldots)x + \ldots + b - 2c = x^2$

8. $y'' + 3y' - 2y = 5$

   Jawab

   Persamaan karakterisik:

   $k^2 + 3k + 2 = 0$

   $(k+1)(k+2) = 0$

   $k = -1 \lor k = -2$

   Solusi (y_h) pada persamaan diferensial diatas:

   $(y_h) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

   subsitusikan

   $0 + 3 \cdot 0 + 2A = 5$

$A = \frac{\dots}{\dots}$

Jadi, $y = c_1e^{-x} + c_2e^{\dots} + \frac{\dots}{\dots}$

9. Tentukan persamaan berikut $y'' - 4y' - 3y = 10e^{-2x}$

   Jawab:

   Turunan e^{-2x} yaitu ke^{-2x}

   Maka, $y_p = ke^{-2x}$

   $y_p' = -2ke^{-2x}$ dan $y_p'' = 4ke^{-2x}$

   $4ke^{-2x} - 4\left(-2ke^{-2x}\right) + 3ke^{-2x} = \dots; k = \frac{\dots}{\dots}$

10. $y'' + 5y' + 6y = 0$

    Jawab:

    $(r\times\dots)(r\times\dots) = 0$

    $r_1 = -2$ atau $r_2 = -3$

    $y = \dots + \dots$

6.9 Kegiatan Pembelajaran 9. Soal Latihan Mandiri

Kerjakanlah persamaan diferensi dibawah ini :

1. $y'' + 2y' + 10y = 4{,}5\cos xx - \sin x$
2. $y'' + 2y' + 2y = -2\cos 2x - 4\sin 2x$
3. $y'' + 4y' + 8y = 4\cos x + 7\sin x$
4. $y'' + y = \operatorname{cosec} x + x$
5. $y'' + 9y = \sec 3x$
6. $y'' - 2y' - 4y' - 2y' = 1 - 8x3$
7. $y'' + 2y' + 4y = -4\cos 4x - 4\sin 4x$
8. $y'' + 4y = e-4x$
9. $y'' + 5y' + 5y = 3\cos x + 4\sin x$
10. $\frac{dy}{dx} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x} = 0$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+3y}{2x+y}$
13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4y+3x}{2x+y}$
14. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$
15. $y'' + 4y = 8x^2$
16. $y'' + 3y' = 4x^2 + 3$
17. $y'' - 2y' = 3x^2 + 2$
18. $y'' + 4y = \sin 2x$
19. $y'' - 4y' - 3y = -e^{2x}$
20. $y'' - y' - 2y = 4x^2$

21. $y'' - y' - 2y = 10\cos x$

22. $y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$

23. $y'' + y = \sec x$

24. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

25. $(D^4 - 16)y = 0$

26. $m^4 - 16 = 0$

INDEKS

GLOSARIUM

Akar Real :

Bilangan Bulat : Kumpulan atau himpunan yang nilainya bulat, terdiri dari bilangan cacah dan bilangan negatif.

Differensial : Persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

Eksponen : Bentuk perkalian suatu bilangan yang sama secara berulang-ulang atau dikenal dengan bilangan berpangkat.

Homogen : Terdiri atas jenis, macam, sifat, watak, dan sebagainya yang sama (kamus KKBI).

Integral : Sebuah konsep penjumlahan secara berkesinambungan dalam matematika.

Koefisien : Faktor perkalian dalam beberapa suku dari sebuah polinomial, deret, atau ekspresi; biasanya berupa angka, tetapi bisa juga ekspresi apa pun (termasuk variabel seperti *a*, *b* dan *c*).

Kombinasi : Menggabungkan beberapa objek dari suatu grup tanpa memperhatikan urutan. Di dalam kombinasi, urutan tidak diperhatikan.

Konstan : Dalam matematika, merupakankata untuk suatu variabel , suatu jumlah untuk mengambil nilai numerik tertentu, atau nilai numerik sewenang-wenang tetapi jumlah yang tidak dapat diubah.

Konstanta : Suatu nilai tetap; berlawanan dengan variabel yang berubah-ubah.

Linear : Terletak pada suatu garis lurus.

Metode variasi parameter : Metode untuk menentukan penyelesaian khusus PD linier tak homogen dengan koefisien variabel.

Orde : Tingkatan,sistem.

Pangkat : Perkalian berulang dengan faktor-faktor yang sama.

Parsial : Berhubungan atau merupakan bagian dari keseluruhan.

Persamaan : Suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=).

Persamaan diferensial : Persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

Polinomial : Pernyataan matematika yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien.

Rasional : Hal yang bisa dilakukan dengan hal yang ada.

Solusi umum : Persamaan diferensial orde-n adalah solusi (baik dinyatakan secara eksplisit maupun implisit) yang memuat semua solusi yang mungkin pada suatu interval.

Substitusi : Dalam matematika merupakan penggantian suatu bilangan.

Trigonometri : Sebuah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga.

Turunan : Pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai masukan. Secara umum, turunan menyatakan bagaimana suatu fungsi berubah akibat perubahan variabel.

Variabel : Dalam matematika merupakan sebuah simbol yang melambangkan suatu kuantitas dalam suatu ekspresi matematika, serta sering digunakan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan.

Variabel bebas : Variabel yang memengaruhi variabel terikat yang sengaja dibuat berbeda. Dengan kata lain, variabel bebas adalah variabel penyebab dalam percobaan.

DAFTAR PUSTAKA

Jitu Halomoan Lumbantoruan. S.Pd., M. P. 2019. *Integral Tentu*. Jakarta.

Sigit Kusmaryanto. n.d. “AKAR PERSAMAAN KARAKTERISTIK PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN ORDE-2 DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA.” *Akar Persamaan Karakteristik Matematika Teknik I* 1–6.

Sigit Kusmaryanto. n.d. “Metode Koefisien Tak Tentu Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen Orde-2.” *Metode Koefisien Tak Tentu Untuk Penyelesaian PD Linier Homogen Tak Homogen Orde-2 Matematika Teknik I*.

Sigit Kusmaryanto. n.d. “Metode Koefisien Tak Tentu Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen Orde-2.”

Sigit Kusmaryanto. n.d. “Metode Variasi Parameter Untuk Penyelesaian PD Linier Tak Homogen Orde-2.” *Metode Variasi Parameter Untuk Penyelesaian PD Linier Homogen Tak Homogen Orde-2 Matematika Teknik I*.

(Jitu Halomoan Lumbantoruan, 2019)

(Jitu Halomoan Lumbantoruan, BUKU MATERI PEMBELAJARAN PERSAMAAN DIFERENSIAL, 2019)

(Jitu Halomoan Lumbantoruan. S.Pd., 2020)

(Jitu Halomoan Lumbantoruan, BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR, 2019)

(Jitu Halomoan Lumbantoruan. S.Pd., BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA, 2019)

(Jitu Halomoan Lumbantoruan 1, 2021)