VARIABEL KOMPLEKS

Penulis:
Jesica Maria O Hutabarat
1813150005

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
2022

PRAKATA

Dengan mengucapkan puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat, rahmat, dan karunia yang diberikan, maka saya dapat melaksanakan dan menyelesaikan tugas dengan baik dan dengan tepat waktu.

Tugas ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat kelulusan mata kuliah Variabel Kompleks. Saya menyadari bahwa tugas ini masih terdapat kekurangan dan kelemahan. Dalam hal ini, saya mengharapkan kepada dosen pengampu dan pembaca kiranya dapat memberikan saran dan masukan yang bersifat membangun untuk dapat memperbaiki dan menyempurnakan tugas ini sehingga akan lebih bermanfaat, khususnya bagi saya sendiri, maupun bagi pihak-pihak lain yang berkepentingan.

Jakarta, 29 Oktober 2021

Jesica Maria O Hutabarat

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Petunjuk Penggunaan Buku

Untuk menggunakan buku ini sebagai bahan belajar, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan oleh peserta didik, yaitu sebagai berikut:

1. Mempelajari buku ini haruslah secara berurutan dari bab satu ke bab berikutnya. Hal ini dikarenakan setiap bab saling keterkaitan.
2. Pelajari dan ulangi kembali buku ini jika kurang memahaminya, jika sudah paham maka boleh lanjut ke bab berikutnya.
3. Kerjakan soal latihan sebagai bahan evaluasi dan untuk mengetahui sejauh mana pemahaman terhadap buku ini.

BAB 2

FUNGSI ANALITIK

2.1 Konsep Dasar

Pada bab ini, hendak mempelajari fungsi-fungsi dengan satu peubah kompleks serta kalkulusnya. Awal mulanya hendak ditinjau tentang fungsi bertipe sangat universal serta mempelajari konsep limit fungsi kompleks. Sehabis itu, dilanjutkan meningkatkan tingkatan-tingkatan fungsi sesuai dengan sifat- sifat *kontinuitas*, *diferensiabilitas*, serta analitisitas(Lumbantoruan, 2019a). Buat tiap langkah, fungsi- fungsi diharapkan penuhi syarat- syarat yang lebih ketat. Pada perihal lain, pembatasan natural fungsi-fungsi tersebut yang menciptakan fungsi-fungsi dengan sifat yang diinginkan jadi lebih menarik serta lebih bermanfaat.

Berikut ini, hendak mengenakan sebutan “himpunan” dengan makna spesial merupakan sebagian kumpulan titik- titik pada bidang-z serta dalam perihal ini tidak butuh mengasumsikan kemampuan terhadap teori himpunan.

Misalkan A serta B himpunan tidak kosong. Kedekatan f dari A ke B diucap guna bila buat tiap $x \in A$ ada dengan tunggal $y \in B$ sehingga $y = f(x)$. Didalam bagian ini, penafsiran fungsi hendak diperluas buat domain definisi (wilayah definisi) serta kodomain di dalam C.

Diberikan himpunan A ⊂ C, fungsi f yang didefinisikan pada A merupakan sesuatu ketentuan yang memasangkan tiap z ∈ A dengan w ∈ C. Dalam perihal ini, bilangan kompleks w diucap nilai fungsi f di titik z serta ditulis f(z).

Jika dimisalkan z_0 artinya suatu titik di bidang datar serta r artinya bilangan konkret positif. **Lingkungan-r** bagi $\boldsymbol{z_0}$ (r-neighborhood of z_0) bisa diartikan menjadi semua titik-titik z di bidang datar sedemikian hingga:

$$\boxed{|z - z_0| < r\ ;}$$

dapat dituliskan dengan

$$\boxed{\boldsymbol{N(z_0, r)}}$$

Lingkungan-*r* terhapus bagi $\boldsymbol{z_0}$ (*deleted r-neighborhood of z_0*) didefinisikan sebagai semua titik-titik z sedemikian hingga:

$$\boxed{0 < |z - z_0| < r\ ;}$$

dapat dituliskan dengan

$$\boxed{\boldsymbol{N * (z_0, r)}}$$

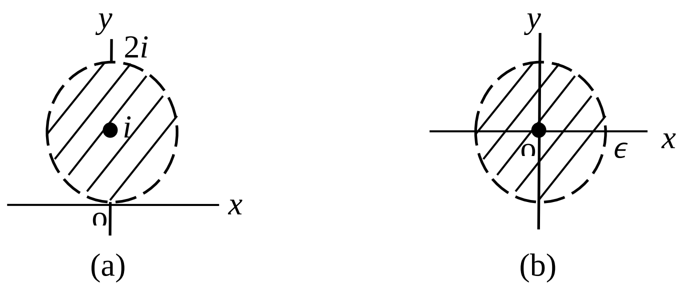
Bisa dicermati bahwa $\boldsymbol{N(z_0, r)}$ adalah cakram yang berpusat di z_0, berjari-jari r namun tak termasuk kelilingnya;

$\boldsymbol{N * (z_0, r)}$ artinya cakram yang sama dengan dibuang titik pusatnya. Bila tidak dibutuhkan menjelaskan secara spesifik jari-ari r, cukup mengatakan lingkungan suatu titik.

C O N T O H 1

(a) $N(\mathrm{i},\ 1)$, "lingkungan-1 bagi i" adalah bagian dalam (*interior*) lingkaran $|z-i|=1$; yaitu terdiri dari semua titik z sedemikin hingga $|z-i|<1$. Perhatikan Gambar 2.1.1 (a)

(b) $\boldsymbol{N}^{*}(\mathbf{0},\boldsymbol{\varepsilon})$ terdiri dari semua z sedemikian hingga $0<|z|<\varepsilon$; yaitu bagian dalam lingkaran $|z|=\varepsilon$ yang pusatnya $z=0$ dibuang. Perhatikan Gambar 2.1.1 (b)



Gambar 2.1.1 (a) Lingkungan $N(i{,}1)$; (b) Lingkungan $\boldsymbol{N}^{*}(\mathbf{0},\boldsymbol{\varepsilon})$

Jika diketahui himpunan S. **Komplemen S** merupakan himpunan seluruh titik dibidang datar yang tidak termasuk dalam S.

C O N T O H 2

(a) Jika dimisalkan S artinya himpunan seluruh z sedemikian sampai $R(z)>1$. Jelaslah, S terdiri dari seluruh titik di bidang datar tepat disebelah kanan garis x = 1. Lalu, komplemen S merupakan himpunan seluruh z pada serta sebelah kiri garis x

(b) = 1, yakni, seluruh z sedemikian hingga S adalah himpunan semua *z* sedemikian hingga $R(z) \leq 1$.

(c) Jika dimisalkan T merupakan suatu himpunan seluruh z sedemikian hingga $1 \leq |z| < 3$. Komplemen T terdiri dari seluruh z sedemikian hingga $|z| < 1$ atau $|z| \geq 3$. Gambarlah bentuknya.

z = x + iy

1 =x + iy

2 = x + iy

Sekali lagi, misalkan S adalah beberapa himpunan titik-titik dibidang datar. Titik w dinamakan **titik batas** S (*boundary point of S*) jikalau tiap lingkungan w mencakup paling sedikit satu titik anggota S dan paling sedikit satu titik anggota komplemen S. Himpunan semua titik batas S tersebut dinamakan batas S (*boundary of S*).

C O N T O H 3

(a) Jika dimisalkan S merupakan cakram $|z| < 3$. Tidaklah sulit untuk melihat batas S adalah lingkaran $|z| = 3$. Hal ini terjadi dikarenakan, setiap mengambil titik sembarang w di lingkaran dan melukis *N*(w, r) untuk sebarang r > 0. Kita bisa meninjau bahwa bagaimanapun kecilnya ukuran r, *N*(w, r) pasti mencakup titik anggota S dan titik anggota komplemen S. Dengan demikian w merupakan titik batas S. Dalam hal ini, titik-titik lain yang mempunyai sifat seperti ini tidak ada,

(b) kecuali titik-titik pada lingkaran tersebut. Perhatikan bahwa S tidak mencakup batasnya.

(c) Jika dimisalkan T merupakan “lajur tak berhingga” yang terdiri dari seluruh titik z dengan $1 < I(z) \leq 3$. Batas T terdiri dari dua garis mendatar y = 1 dan y = 3. Perhatikan bahwa T mencakup sebagian tetapi tidak semua batasnya.

(d) Jika V merupakan himpunan seluruh z dengan $1 < |z - i| \leq 2$ maka dalam hal ini, batas V terdiri dari dua lingkaran $|z - i| \leq 1$ dan $|z - i| \leq 2$. Jadi, V mencakup seluruh batasnya.

Ketiga kasus pada Contoh 3 tersebut menjelaskan pada kenyataan bahwasanya suatu himpunan memiliki peluang tidak mencakup batasnya, atau mencakup hanya sebagian tetapi tidak seluruh batasnya, atau dapat mencakup seluruh batas tersebut. Jika suatu himpunan tidak mencakup batas tersebut, maka himpunan itu disebut **himpunan terbuka** (*open set*) dan jika mencakup seluruh batas tersebut maka disebut **himpunan tertutup** (*closed set*). Jika himpunan itu mencakup hanya sebagian tetapi tidak seluruh batas tersebut, maka himpunan tersebut dapat dikatakan tidak terbuka dan tidak tertutup. Jadi, dalam ketiga kasus pada contoh sebelum ini menjelaskan secara berturut-turut, himpunan terbuka, himpunan tidak terbuka dan tidak tertutup, dan himpunan tertutup.

Konsep himpunan terbuka memiliki hubungan yang tak terpisahkan dengan konsep paling penting dalam teori fungsi kompleks, yakni analitisitas suatu fungsi kompleks. Yang terakhir ini dikatakan pada sub-bab terakhir bab ini. Jenis-jenis himpunan terbuka yang akan diikutsertakan dalam pekerjaan kita relatif dikatakan cukup sederhana. Bisa dalam kenyataan ini, bagi kita gagasan himpunan terbuka akan tetap dinyatakan sebagai gagasan yang sangat sederhana, sekurang-kurangnya dari sudut pandangan intuitif, dan demikian pula gagasan tentang batas suatu himpunan. Kedua konsep tersebut akan dibutuhkan dalam suatu makna yang cukup mendalam pada pengembangan dalam bab-bab berikutnya.

Dalam hal ini, kita akan mempergunakan kata **region** sebagai petunjuk dalam himpunan terbuka tak kosong dibagian bidang datar dan kata **region tertutup** sebagai petunjuk dalam region berikut batasnya.

Pada suatu himpunan B dinamakan **berbatas** (*bounded*) jika dapat ditemukan lingkaran $|z| = M$ yang mencakup seluruh B; sehingga B berbatas, jikalau orang menemukan bilangan positif M sedemikian hingga $|z| < M$ untuk setiap z dalam himpunan B. Jika M seperti itu tidak satupun ditemukan, maka himpunan itu dapat dikatakan **tak terbatas** (*unbounded*)(Pembelajaran, n.d.).

CONTOH 4

(a) Himpunan $R(z) > 1$ dalam Contoh 2(a) disebut tak terbatas.
(b) Himpunan $1 \leq |z| < 3$ dalam Contoh 2(b) disebut berbatas.
(c) Himpunan $1 < I(z) \leq 3$ dalam Contoh 3(b) disebut tak terbatas.

CONTOH 5

(a) Jika suatu lingkungan atau lingkungan terhapus bagi sembarang titik z merupakan suatu region.

(b) “Anulus melingkar” yang termuat atas titik-titik z dengan $2 \leq |z+2| \leq 3$ merupakan region tertutup; himpunan ini termuat atas region diantara dua lingkaran konsentris $|z+2| = 2$ dan $|z+2| = 3$ dan batas regionnya, yaitu kedua lingkaran tersebut.

(c) Beberapa penggal sumbu nyata dengan $-2 \leq x \leq -$ ialah himpunan tertutup, namun hal tersebut bukan region tertutup, hal ini dikarenakan tidak terdiri dari suatu region berikutnya pada batas tersebut. Bisa diperhatikan bahwa himpunan ini termuat atas semuanya titik batas dan tidak mencakup titik dalam.(Monks et al., 2006)

2.2 Defenisi dan Geometri Elementer pada Fungsi Kompleks

Jika dideskripsikan dalam bentuk, pengertian dari fungsi kompleks dapat diartikan sesuai dengan pengertian fungsi peubah nyata. Dalam hal ini, dengan mengubah peubah tak bebas x dengan z dan peubah bebas y dengan w, suatu defenisi $y = f(x)$ dapat dipergunakan sebagai mendefenisikan suatu fungsi kompleks $w = f(z)$.

Yang dapat diartikan dengan **Peubah kompleks z** ialah suatu titik yang relatif umum dari suatu himpunan tertentu pada bidang datar. Suatu pengertian formal fungsi peubah kompleks dapat dipaparkan sebagai pasangan terurut dua bilangan kompleks (z, w) yang memenuhi syarat-syarat tertentu(Lumbantoruan, 2019b). Hal ini dapat dikatakan suatu proses penyetaraan yang menghubungkan setiap nilai peubah z ke nilai w yang tunggal. Mari mencapai tujuan yang sama dengan pengertian yang sedikit kurang formal sebagai berikut.

Jika dimisalkan D merupakan sebuah himpunan titik-titik pada bidang datar; jika diandaikan D dikenakan aturan f yang menghubungkan setiap titik z pada D dengan satu dan hanya satu titik w pada bidang datar(Kusni, 2008).

Maka, f disebut **fungsi peubah kompleks**, atau bisa disimpulkan **fungsi kompleks**. Huruf-huruf lain yang dipergunakan untuk menunjukkan fungsi ialah g, h, k, ……, dan cara yang paling relatif umum untuk memberikan pengertian fungsi ialah dengan menmberikan pernyataan sebagai persamaan yang berbentuk:

$$w = f(z)$$

Himpunan *D* itu bisa disebut **domain** fungsi f dan besaran *f*(*z*) dikatakan nilai *f* pada *z* atau *image* (bayangan) *z* dibawah *f*. Berikut beberapa contoh fungsi peubah kompleks $z = x + iy$ diberikan dibawah ini:

$$w = z, \qquad w = 5i, \qquad w = x - iy^2,$$
$$w = 3z^2 - 16z^8, \qquad w = z^{-1}, \qquad w = |z| - i\bar{z} + z^{-2}$$

jika diandaikan sekarang kita memiliki fungsi *f* pada domain *D* dan fungsi lain g pada domain *E*. Kemudian kita andaikan selanjutnya, pada setiap *z* pada *D*, $f(z)$ pada *E*; dapat dikatakan juga bahwa setiap nilai fungsi f berada pada domain g. Maka dalam hal ini, untuk setiap *z* pada $D, g\big(f(z)\big)$ merupakan suatu fungsi memiliki pengertian pada domain *D* dan disebut **fungsi majemuk** f dan g. Dalam memahami penjelasan hal tersebut, perhatikan fungsi-fungsi(*BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR Disusun Oleh : Jitu Halomoan Lumbantoruan , S . Pd ., M . Pd Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia*, 2019):

$$f(z) = 3z + i \text{ dan } g(z) = z^2 + z + 1 - i$$

Maka dalam hal ini,

$$g(f(z)) = g(3z + i)$$
$$= (3z + i)^2 + (3z + i) + 1 - i$$
$$= 9z^2(3 + 6i)z$$

dapat dikatakan majemuk *f* dan g. Dalam hal ini pula dapat dengan mudah kita ketahui bahwa *pemajemukan dua fungsi tidak komutatif*; yaitu secara umum,

$$g(f(z)) \neq f(g(z))$$

pada suatu bagian yang sangat luas dari pengembangan teori dan terapan fungsi kompleks memiliki ketergantungan pada kenyataan bahwasanya fungsi kompleks $w = f(z)$ dapat dikatakan sebagai dan dapat diuraikan menjadi jumlahan dua fungsi yang masing-masing merupakan fungsi nyata dari dua peubah nyata(Male & Lumbantoruan, 2021):

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dalam hal ini tentu saja, jika sebagai pengubah bentuk siku-siku $x + iy$ dari peubah z dapa kita gunakan bentuk kutub $z = r\, cis\, \theta$, maka *f*(z) dapat dipecahkan menjadi bentuk:

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

C O N T O H 6

Bisa kita perhatikan fungsi $w = z^2 + z + 1$ dengan memperoleh $z = x + iy$, kita mendapatkan:

$$w = (x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y)$$

Dipihak lain, dengan memperoleh $z = r\, cis\, t$ kita dapat menguraikan:

$$w = (r^2 \cos\, 2t + rcos\; t + 1) + i(r^2 \sin 2t + r \sin t)$$

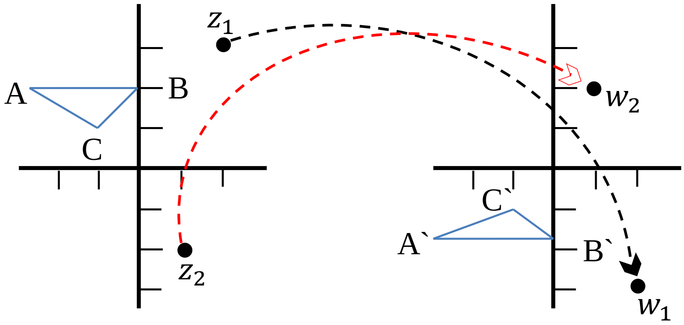
Dalam kedua kasus itu, fungsi tersebut telah diuraikan menjadi bagian-bagian nyata dan khayalnya. Sekarang kita lihat geometri fungsi kompleks yang merupakan kita periksa grafik yang mewakili fungsi $w = f(z)$. Menurut pengertiannya, untuk setiap nilai peubah bebas $z = x + iy$ (dalam domain *f*), fungsi itu menghasilan nilai tunggal $w = u + iv$ sebagai peubah tak bebas(Lumbantoruan & Natalia, 2021). Pada masing-masing peubah ini memiliki dua dimensi dan gabungan mereka membentuk besaran berdimensi empat yang agak sulit untuk digambarkan. Dikarenakan dalam kesulitan ini, grafik yang mewakili suatu fungsi kompleks akan mempermudah dalam mengerjakan pada dua bidang kompleks, lazimnya dikatakan: **bidang *z* dan bidang *w***.

Jika diketahui suatu fungsi $w = f(z)$, pada setiap $z = x + iy$ didalam domainnya di bidang *z*, kita hitung kesetaraannya $w = u + iv$ dan ditempatkan dibidang-*w*. pengulangan proses yang sama pada tiap titik dalam suatu himpunan *S* didalam domain *f* akan menghasilkan “bayangan *S* dibawah *f* ” pada bidang-*w*.

CONTOH7

Mari perhatikan fungsi $w = \bar{z}$. Pada tiap nilai peubah bebas $z = x + iy$ didapatkan nilai $w = x - iy$. Misalnya $z_1 = 2 + 3i$

menghasilkan $w_1 = 2 - 3i, z_2 = 1 - 2i$ menghasilkan $w_2 = 1 + 2i$ dan seterusnya. Perhatikan Gambar 2.2.1



Gambar 2.2.1 Contoh 7

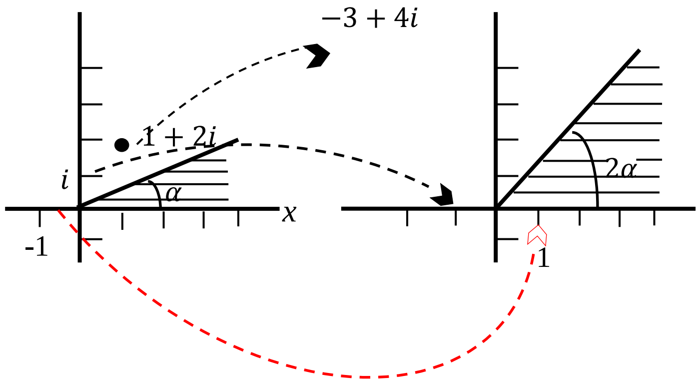
Tidaklah sulit untuk meninjau apa akibat fungsi ini terhadap titik-titik dibidang datar yang merupakan pencerminan terhadap sumbu nyata; dapat dikatakan, pada titik *w* sebagai titik *z* yang diberikan adalah bayangan cermin *z* terhadap sumbu nyata. Dalam pengertian yang lebih umum, sembarang bentuk geometri pada bidang *z* dicerminkan pada sumbu nyata tanpa perubahan bentuk, menghasilkan bentuk kongruen yang "terbalik". Sebagai hasilnya, panjang penggal-penggal garis, demikian pula besar sudut-sudutnya, tidak berubah.

CONTOH 8

Mari perhatikan fungsi $w = z^2$. Dalam Gambar 2.2.2 berikut ini, dilukis tiga titik pada bidang-*z* dan titik kawannya dibidang-*w*. Jadi bisa didapatkan bahwa:

Bidang-z

Bidang-w



Gambar 2.2.2 Contoh 8

dibawah fungsi $w = z^2$.

$$z = i \text{ dihubungkan dengan } w = -1,$$

$$z = 1 + 2i \text{ dihubungkan dengan } w = -3 + 4i, \text{ dan}$$

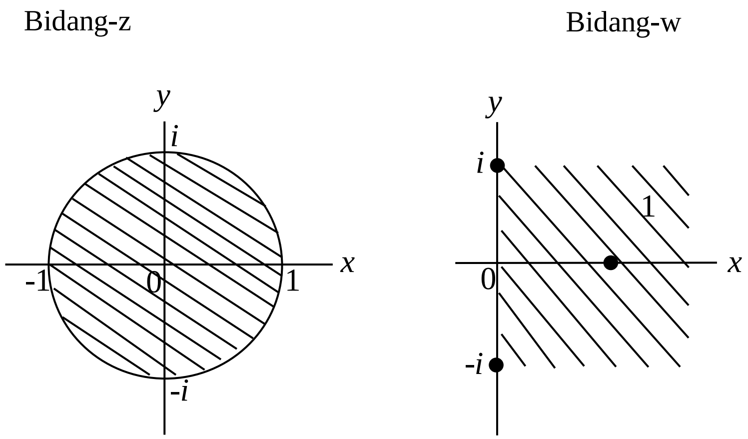
$$z = -1 \text{ dihubungkan dengan } w = 1$$

Daerah yang diarsir dalam Gambar 2.2.2 menjelaskan suatu kenyataan yang akan dibahas secara terperinci, yakni bahwa daerah sudut α radian pada bidang z ditransformasikan menjadi daerah sudut 2α radian pada bidang w, dibawah fungsi yang diberikan $w = z^2$.

CONTOH 9

Pada fungsi $w = \frac{1+z}{1-z}$ merupakan kasus khusus dari fungsi bilinear, yang akan dibahas lebih mendetail pada sub-bab berikutnya. Cukup mudah untuk memperoleh bahwa dibawah fungsi ini, titik-titik

$z = 0, -1, i, -i$ dipetakan berturut-turut pada titik-titik $w = 1, 0, i, -i$. Perhatikan Gambar 2.2.3 berikut ini.



Gambar 2.2.3 Contoh 9

Yang lebih menarik ialah titik $z = 1$, karena pada titik ini tidak mempunyai kawan w. Bisa ditinjau, bila kita telah berkenalan dengan "titik di tak berhingga" kita akan melihat bahwa dibawah fungsi tersebut titik $z = 1$ "menuju ke tak berhingga". Daerah yang diarsir pada Gambar 2.2.3 menunjukkan sifat yang sangat menarik pada fungsi itu yakni bahwa ia memindahkan bagian dalam lingkaran satuan ke setengah bidang datar sebelah kanan.

2.3 Limit Kontinuitas

Pada pelajaran tentang kalkulus fungsi kompleks, kita akan membutuhkan beberapa pengetahuan tentang konsep-konsep limit dan kontinuitas. Pada sub-bab ini diutarakan untuk memperkenalkan kedua hal tersebut dan mempelajari sifat-sifat elementernya(Simorangkir & Lumbantoruan, 2021).

Kita misalkan suatu fungsi $w = f(z)$ diberikan dengan domain D, dan misalkan z_0 merupakan titik tetap didalam D atau pada batas D. Kita andaikan sekarang peubah z mendekati z_0 sepanjang sembarang jalur P yang terletak semuanya didalam domain D. Terbuktilah, untuk setiap z sepanjang P, fungsi itu menghasilkan suatu titik $f(z)$ didalam bidang-w.

Jika nilai-nilai $f(z)$ ini mendekati suatu bilangan tertentu L didalam bidang-w, maka kita katakan bahwa, untuk z mendekati z_0, **limit** $f(z)$ adalah L sehingga kita dapat menuliskannya seperti,

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = L}$$

Dalam bentuk yang lebih formal, bisa dikatakan bahwa:

Limit $f(z)$, untuk $z \to z_0$, merupakan L jika dan hanya jika, diberikan sembarang $N(L, \epsilon)$, dapat ditemukan suatu $N^*(z_0, \delta)$ sedemikian hingga bila titik z adalah anggota D yang terletak didalam $N^*(z_0, \delta)$, maka $f(z)$ didalam $N(L, \varepsilon)$.

Sekali lagi, diucapkan dalam bentuk yang tidak formal, pengertian diatas mengatakan bahwa jika L merupakan limit f, untuk z mendekati z_0, maka kita harus dapat memposisikan $f(z)$ sedekat mungkin ke L dengan cara mengambil titik z cukup dekat ke z_0.

Catatan-catatan berikut merupakan tambahan penting pada pengenalan limit diatas dan bertujuan untuk mengungkapkan beberapa hal pelik mengenai konsep limit.

Catatan 1

Titik z_0 pada pengertian diatas tidak harus terletak pada domain f. Bahkan $f(z)$ boleh tidak diartikan di z_0. Misalnya, fungsi seperti $f(z) = \frac{z^2-9}{z-3}$ dapat ditujukan mempunyai limit sama dengan 6, untuk $z \to 3$, walaupun $f(3)$ tidak mempunyai arti. Pengertian limit membolehkan situasi ini dengan menyebutkan bahwa $z \to z_0$ tetapi $z \neq z_0$.

Ini sesuai dengan kenyataan bahwa kita hanya memperhitungkan titik-titik z didalam lingkungan terhapus $N^*(z_0, \delta)$ dari z_0. Walaupun demikian, z_0 harus berada "seburuk-buruknya" dibatas domain f, sehingga z dapat mendekati z_0 melalui nilai-nilai yang diperbolehkan, ialah sepanjang nilai-nilai yang membuat $f(z)$ didefinisikan.

Catatan 2

Pengertian limit tidak menyebutkan secara khusus dari arah amana z harus mendekati z_0. Bahkan sesungguhnya, pengertian itu menyaratkan bahwa agar suatu limit itu ada, nilainya L harus tidak bergantung dari arah pendekatannya. Pernyataan ini sangat berguna untuk membuktikan bahwa suatu limit itu tidak ada, yaitu dengan menunjukkan bahwa jika $z \to z_0$ sepanjang dua jalur yang berbeda, maka nilai fungsi mendekati dua nilai yang berbeda pula, jadi limitnya tergantung pada jalurnya. Lihat Contoh 9.

<u>Catatan 3</u>

Kadang-kadang, kita lebih mudah menggunakan pengertian limit dalam bentuk berikut:

$\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ (yang biasanya bergantung pada ε) sedemikian hingga, untuk setiap z (dalam domain f) dengan $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Dalam hal ini akan mudah membenarkan hal itu karena bentuk pengertian limit itu ekivalen dengan yang diberikan mula-mula.

Selanjutnya kita nyatakan sejumlah teorema yang menentukan beberapa sifat dasar limit fungsi. Kebanyakan dari teorema-teorema ini sudah sering dikenal oleh pembaca dari kalkulus.

Teorema pertama menjelaskan bahwa jika suatu fungsi diketahui memiliki limit, maka ia memiliki tepat satu limit, artinya jika bilangan L adalah limit suatu fungsi $f(z)$, untuk $z \to z_0$, maka tak ada bilangan lain yang memiliki sifat seperti itu.

Teorema 2.3.1 (Sifat Tunggal Limit)(P. A. & Lumbantoruan, 2020)

Jika diketahui suatu fungsi memiliki limit pada titik z_0 yang diberikan, maka limitnya memiliki nilai tunggal.

Pada banyak hal, persoalan dalam mendapatkan limit suatu fungsi sangat dibantu oleh teorema berikut, yang berakibat, menguraikan soal itu menjadi persoalan mencari limit untuk fungsi nyata dari dua peubah nyata.

Teorema 2.3.2

Misalkan bahwa,

1. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mempunyai domain D
2. Titik $z_0 = a + ib$ didalam D atau pada batas D

Maka, $limit\, f(z) = A + iB$, untuk $z \to z_0$, jika dan hanya jika $\lim u(x, y) = A$ dan $\lim v(x, y) = B$, untuk $(x, y) \to (a, b)$
Dengan istilah sederhana, teorema tersebut menyatakan bahwa jika suatu fungsi f mempunyai limit L, maka komponen-komponen nyata dan khayal u dan v pada f mendekati berturut-turut, bagian-bagian nyata dan khayal A dan B pada L dan sebaliknya.

Jika diingat pada kenyataan bahwa pengertian fungsi kompleks dan limit secara formal sama halnya fungsi nyata, teorema berikutnya tidak akan menjadi sesuatu yang mengherankan. Teorema itu menyatakan secara sederhana yakni jika dua fungsi yang diberikan masing-masing mempunyai limit berturut-turut sama dengan jumlah, selisih, perkalian, dan pembagian masing-masing limit yang diberikan.

Teorema 2.3.3

Misalkan bahwa, untuk $z \to z_0, \lim f(z) = L$ dan $\lim g(z) = M$. Maka untuk $z \to z_0$,

1. $\lim\big(f(z) + g(z)\big) = L + M$
2. $\lim\big(f(z) - g(z)\big) = L - M$
3. $\lim\big(f(z)g(z)\big) = LM$
4. $\lim\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{L}{M}$, asal $M \neq 0$

Bukti: Bukti teorema ini sama dengan teorema yang sesuai untuk fungsi nyata dan oleh karena itu, hal ini tidak diberikan. Pembaca dapat menemukan bukti tersebut didalam kebanyakan buku-buku kalkulus dan penyesuaian dari yang nyata ke yang kompleks membutuhkan hanya pergantian notasi saja.

C O N T O H 10

Perhatikan fungsi identitas $f(z) = z$

Untuk sembarang titik z_0 jelaslah bahwa, untuk $z \to z_0$, $f(z) \to z_0$, karena $f(z) = z$. Jadi bila $z \to z_0$, $\lim f(z) = z_0$.

C O N T O H 11

Dalam menghitung fungsi-fungsi kompleks, dapat mengerjakan beberapa cara yang lebih langsung digunakan didalam kalkulus. Kita bisa menggunakan cara tersebut dengan menghitung

$$\lim_{z \to 3-4i} \frac{iR(z^2) - iR(z) + [I(z^2)^2] - 1}{|z|}$$

Pertama, kita perlu ketahui bahwa:

$R(z^2) = x^2 - y^2, \qquad R(z) = x$

$[I(z^2)^2] = 4x^2y^2, \qquad |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

Kemudian, karena $x \to 3$ dan $y \to -4$ bila $z \to 3 - 4i$, substitusi langsung menghasilkan untuk limit yang diberikan 115-2i.

C O N T O H 12

$$\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2-1}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2i}$$

CONTOH 13

Tunjukkan bahwa jika $f(z)=\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{y+1}i$, maka untuk $z\to 0$, lim *f*(*z*) tidak ada.

Kita menggunakan cara yang disarankan pada Catatan 2. Jadi, kita buat *z* mendekati 0 sepanjang dua jalur yang berbeda dan kita mendapatkan dua nilai limit yang berbeda. Yang pertama, kita buat $z\to 0$ sepanjang sumbu nyata (y = 0) dan kita mendapatkan bahwa: $\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(z)=\lim_{x\to 0}[x^2 i]=0$. Selanjutnya, dengan membuat $z\to 0$ sepanjang garus y = x, kita mendapatkan $\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x^2}{x+1}i\right]=1$.

Karena pendekatan lewat dua jalur yang berbeda menghasilkan nilai yang berbeda, maka limit itu jelas tidak ada.

CONTOH 14

Bila $f(z)=\frac{x^2}{z}$, tentukan $\lim f(z)$ untuk $z\to 0$.

Dikarenakan $|x|\le|z|$ (Perhatikan soal 2.1.4(g)), dipenuhilah $\frac{|x|^2}{|z|}\le|x|$. Jadi $|f(z)|=\frac{|x|^2}{|z|}\le|x|\le|z|$

Kemudian, untuk $z\to 0$, $|z|\to 0$ dan karena $|f(z)|\le|z|$ maka $|f(z)|\to 0$. Namun jika modulus suatu besaran menuju ke nol, maka demikian pula besaran itu sendiri. Oleh karena itu, untuk $z\to 0$, $\lim f(z)=0$.

Konsep Kontinuitas

Jika dimisalkan fungsi *f*(*z*) diartikan pada suatu himpunan *D* dibidang datar dan z_0 merupakan suatu titik dibagian dalam (*interior*)*D**. Maka *f*(*z*) dapat disebut **kontinu** di z_0 asal $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Suatu fungsi kontinu ditiap titik dalam region *R*, maka hal itu dapat disebut **kontinu pada R**. Harus dipahami bahwa pengertian diatas menuntut agar tiga kondisi berikut ini dipenuhi jika suatu fungsi ingin kontinu di z_0:

1. $f(z_0)$ terdefinisikan
2. $\lim f(z)$ ada, untuk $z \to z_0$
3. $\lim f(z) = f(z_0)$

Selanjutnya, pengertian itu secara implisit dinyatakan bahwa jika f(z) kontinu pada z_0, maka harus terdefinisikan pada suatu lingkungan N bagi z_0 karena pengertian itu menyaratkan bahwa z_0 merupakan titik dalam dari domain *f*.

<u>Catatan 4</u>

Jika perlu, definisi kontinuitas suatu fungsi f di titik z_1 dapat diperluas untuk mencakup kasus dimana z_1 suatu titik didalam domain-*D*-nya *f*, merupakan titik batas *D*. Ini dicapai dengan membatasi agar semua jalur yang diambil terletak seluruhnya didalam *D*. Dalam hal demikian, definisi itu akan mengimplikasikan bahwa f terdefinisikan didalam lingkungan parsial *M* bagi z_1, yang termasuk dalam *D*.

Teorema 2.3.4

Misalkan bahwa:

1. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
2. $f(z)$ terdefinisikan pada setiap titik region R
3. $z_0 = a + ib$ adalah suatu titik didalam R

Maka, $f(z)$ kontinu di z_0 jika dan hanya jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ kontinu di (a,b).

Bukti:

Bukti teorema ini merupakan konsekuensi langsung dari Teorema 2.3.2, karena inti dari apa yang harus dibuktikan disini ialah bahwa $\lim f(z) = f(z_0)$, untuk $z \to z_0$ jika dan hanya jika $\lim u(x,y) = u(a,b)$ dan $\lim v(x,y) = v(a,b)$ untuk $(x,y) \to (a,b)$.

Teorema 2.3.5

Andaikan bahwa $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu pada beberapa titik z_0. Maka tiap-tiap fungsi berikut juga kontinu pada z_0:(Belajar et al., 2014)

1. Jumlah $f(z) + g(z)$
2. Selisih $f(z) - g(z)$
3. Perkalian $f(z)g(z)$
4. Pembagian $\frac{f(z)}{g(z)}$, asal $g(z_0) \neq 0$
5. Fungsi majemuk $f\big(g(z)\big)$, asal f kontinu di $g(z_0)$

2.4 Pendiferensialan

Kita telah membahas secara singkat tentang tingkatan-tingkatan fungsi yang disebabkan oleh pertimbangan tiga sifat dasar yaitu kontinuitas, diferensiabilitas, dan analitiksitas(*Buku Utama Analisis Kompleks.Pdf*, n.d.).

Definisi turunan fungsi kompleks secara formal serupa dengan definisi untuk fungsi nyata, yang telah dikenal dengan baik oleh pembaca dari kalkulus. Jadi misalkan $w = f(z)$ adalah suatu fungsi kompleks dan ambillah suatu titik z_0 pada bagian dalam domain D bagi *f*. Misalkan $z = z_0 + \Delta z$ $(\Delta z = \Delta x + i\Delta y)$ adalah suatu titik didalam D dan bentulkan **hasil bagi beda** (*difference quotient*)

$$\boxed{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

Jika limit hasil bagi ini ada untuk $z \to z_0$, maka kita katakan bahwa f(z) dapat **didiferensialkan** di z_0, limitnya dinamakan turunan *f* di z_0 dan dituliskan $f'(z_0)$ atau $w'(z_0)$. Jadi, sekali lagi

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

asal limit ini ada.

Perhatikan bahwa $f'(z_0)$ adalah bilangan kompleks, jika tidak diperlukan menyebutkan titik khusus z_0, maka kita sering menggunakan notasi $\frac{df}{dz}$ atau $\frac{dw}{dz}$ dan dalam hal demikian kita sedang mengarahkan kepada suatu fungsi yang dinamakan fungsi turunan *f* atau secara sederhana turunan *f*. Dua bentuk berikut, yang dapat digunakan sebagai pilihan untuk mendefinisikan turunan $w = f(z)$, berbeda dari yang tela diberikan diatas hanya dalam notasi yang digunakan:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \text{ atau } w'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{w-w_0}{z-z_0}$$

yang dalam hal ini $w_0 = f(z_0)$.

Turunan fungsi dapat diperoleh dengan cara langsung menerapkan definisi; proses ini serupa dengan yang digunakan pada kalkulus dan digambarkan pada contoh-contoh berikut. Nanti, kita akan mengembangkan cara-cara yang lebih canggih dan lebih langsung untuk mendapatkan turunan fungsi-fungsi yang banyak dikenal.

C O N T O H 15

Tentukan turunan fungsi dari konstan $f(z) = c$.

Karena $f(z) = c$ untuk setiap nilai z, kita mempunyai

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c-c}{\Delta z} = 0$$

Jadi, turunan suatu fungsi konstan selalu nol.

C O N T O H 16

Kita membuktikan bahwa, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$ dari setiap titik z_0,

\` Jika $f(z) = z^n$, maka $f(z_0) = nz_0^{n-1}$

Pembaca tentu mengenal rumus di atas sebagai "aturan pangkat" yang sudah sangat dikenal pada pendiferensialan yang digunakan pada kalkulus. Kita mempunyai

$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

$= \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}$

$= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+z_0^{n-2}+z_0^{n-1})}{z-z_0}$

$= \lim_{z\to z_0}(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-2} + z_0^{n-1})$ (n suku)

$= nz_0^{n-1}$

Contoh 15 dan 16 mengilustrasikan suatu kesamaan bentuk antara turunan fungsi nyata dan kompleks.

Teorema 2.4.1

Andaikan bahwa f dan g dapat dideferensialkan pada setiap titik z dalam himpunan S dan bahwa f dapat dideferensialkan pada $g(z)$ untuk setiap z dalam S.

Maka jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi dan komposisi kedua fungsi itu dapat dideferensialkan pada setiap titik dalam S asalkan terdefinisikan dan turunannya diberikan oleh rumus-rumus berikut(Pendidikan & Sains, 2020):

1. $\left(f(z) + g(z)\right)' = f'(z) + g'(z)$
2. $\left(f(z) - g(z)\right)' = f'(z) - g'(z)$
3. $\left(f(z)g(z)\right)' = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$
4. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{g(z)f'(z)-f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$
5. $\left(f\left(g(z)\right)\right)' = f'\left(g(z)\right).g'(z)$ (Aturan Rantai)

Bukti:

Bukti teorema ini serupa dengan bukti teorema yang sesuai untuk fungsi nyata dn itu dapat ditemukan dalam kebanyakan buku kalkulus, oleh karena itu bukti tersebut diberikan di sini.

Kita akan menggunakan beberapa rumus di atas dalam contoh-contoh berikut untuk menurunkan beberapa aturan yang lebih dikena untuk diferensiasi fungsi-fungsi kompleks.

CONTOH 17

Kita menunjukkan bahwa jika c suatu konstanta dan $g(z)$ suatu fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$$[c.g(z)]' = cg'(z)$$

Dengan mengambil $f(z) = c$ pada rumus (3) teorema di atas dan menggunakan Contoh 1 pasal ini, kita mendapatkan

$$\begin{aligned}[c.g(z)]' &= cg'(z) + c'g(z) \\ &= cg'(z) + 0 \\ &= cg'(z)\end{aligned}$$

CONTOH 18

Kita kembangkan hasil pada Contoh 15 dengan membuktikan bahwa

$[z^n]' = nz^{n-1}$, untuk setiap bilangan bulat n.

Tentu saja, dengan mengingat contoh yang pernah diuraikan sebelumnya, cukup membuktikan rumus ini untuk bilangan bulat negatif. Jadi, katakan k adalah bilangan bulat negatif. Maka $-k$ adalah bilangan bulat positif, dan fungsi $g(z) = z^{-k}$ mempunyai turnan yang diberikan oleh

$$g'(z) = -kz^{-k-1}$$

Maka, dengan menggunakan rumus (4) teorema 2.6, kita mendapatkan

$[z^k]' = [\frac{1}{z^{-k}}]'$

$= \frac{z^{-k}.0-(-kz^{-k-1})}{z^{-2k}}$

$= kz^{k-1}$

Jadi "rumus pangkat" berlaku untuk setiap bilangan bulat. Tetapi, jika n negatif kita harus mengeluarkan $z = 0$.

2.5 Persamaan Cauchy-Reimann

Dalam sub-bab ini kita memberikan jawaban lengkap terhadap pertanyaan umum yang diajukan pada sub-bab sebelumnya. Khususnya, kita mengembangkan syarat perlu dan cukup agar suatu fungsi yang diberikan mempunyai turunan. Hal ini dicapai lewat dua teorema. Yang pertama akan melengkapi kita dengan syarat cukup, yang jika dipenuhi oleh fungsi yang diberikan, akan menjamin adanya turunan fungsi itu. Lebih penting lagi, teorema itu akan memberitahukan kepada kita dimana turunan itu berada. Jadi teorema ini menunjukkan pada titik mana turunan iu terdefinisikan dan tentu saja titik-titik mana yang tidak. Teorema yang kedua akan memberikan suatu rumus untuk turunan, asal turunan itu ada (*Geometri 1*, 2019).

Teorema 2.5.1

Diketahui $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, andaikan bahwa

1. $u(x, y), v(x, y)$ dan semua turunan parsialnya $u_x, v_x, u_y,$ dan v_y kontinu di semua titik dalam suatu lingkaran N bagi titik $z_0 = (a, b)$.
2. Pada titik $z_0, u_x = v_y$ dan $v_x = -u_y$

Maka $f'(z_0)$ ada dan

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Bukti:

Perhatikan lampiran 2

Teorema 2.5.2

Andaikan bahwa fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mempunyai turunan pada suatu titik $z_o = (a, b)$.

Maka, pada titik itu

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iv_y$$

Jadi

$$u_x = v_y \quad \text{atau} \quad v_x = -u_y$$

Bukti:

Perhatikan lampiran 2

Persamaan diferensial parsial.

$$u_x = v_y \quad \text{atau} \quad v_x = -u_y$$

Dinamakan **Persamaan Cauchy-Riemann**.

CONTOH 19

Kita membuktikan bahwa turunan $f(z) = z^2$ ada untuk semua z dan bahwa $f'(z) = 2z$.

Dengan menuliskan f dalam bentuk $u + iv$, kita mempunyai

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Jadi

$u(x, y) = x^2 - y^2$ $\quad\quad$ $v(x, y) = 2xy$

$u_x = 2x$ $\quad\quad$ $v_x = 2y$

$u_y = -2y$ $\quad\quad$ $u_y = 2x$

Keenam fungsi di atas kontinu pada setiap titik $z = (x, y)$ pada bidang datar dan jelaslah

$$u_x = v_y \quad \text{atau} \quad v_x = -u_y$$

Untuk semua (x, y). Hal ini memenuhi Teorema 2.5.1, sehingga $f'(z)$ ada untuk semua z. Selanjutnya ini, berakibat bahwa hipotesa Teorema 2.5.2, dipenuhi untuk semua z. Jadi, sesuai dengan kesimpulan teorema yang sama(Lurus, n.d.).

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z$$

CONTOH 20

Tentukan titik-titik, jika ada yang membuat $f(z) = x^2 - iy^2$ mempunyai turunan dan bila f' ada, tentukan turunan itu.

Kita mempunyai

$u = x^2$ $\quad\quad$ $v = -y^2$

$u_x = 2x$ $\qquad\qquad\qquad$ $v_x = 0$

$u_y = 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $u_y = -2y$

Keenam fungsi di atas kontinu di mana-mana, tetapi persamaan Cauchy-Riemann di penuhi hanya bila $y = -x$. Jadi, menurut Teorema 2.7 f' ada hanya pada titik-titik pada garis itu. Akhirnya, dengan menggunakan Teorema 2.5.2, kita mendapatkan bahwa pada titik-titik yang membuat f' ada, turunnnya diberikan oleh

$$f' = u_x + iv_x = 2x \quad \text{atau} \quad f' = v_y - iv_y = -2y$$

Jelaslah, dua pernyataan ini sama pada garis $y = -x$ dan titik pada titik lain.

2.6 Fungsi Analitik

Konsep fungsi analitik merupakan konsep yang terpenting di dalam teori peubah kompleks. Fungsi-fungsi yang memiliki sifat analitik mewarisi suatu struktur dalam yang sangat kokoh dan ini dimanifestasikan ke luar oleh sifat-sfat yang dimiliki oleh fungsi-fungsi yang analitik. Langsung atau tidak langsung, selebihnya buku ini dicurahkan untuk penggunaan dan penyelidikan fungsi-fungsi analitik, yang telah memungkinkan pengembangan yang sangat jauh, baik di bidang teori maupun penerapannya.

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik pada titik z_0, asal turunannya ada di semua titik pada suatu lingkungan z_0. Sangat jelas dari definisi tersebut bahwa terdaapat suatu hubungan yang sangat erat antara diferensibilitas dan analitisitas suatu fungsi pada suatu titik. Tetapi kedua konsep itu tidak sama, karena

Analitisitas di z_0 berimplikasi diferensibilitas di z_0 tetapi tidak sebaliknya.

Alasan mengapa keberadaan f' pada suatu titik tidak mengakibatkan analitisitas pada titik itu, ialah secara umum f' boleh ada pada sembarang tipe himpunan atau bahkan pada titik terasing (*isolated point*) atau suatu penggal garis, sedangkan analitisitas berhubungn secara tak terpisahkan dengan himpunan terbuka, kenyataan ini merupakan akibat definisi analitisitas pada suatu titik z_0, yang menghendaki bahwa f' ada tidak hanya pada z_0 tetapi juga di semua titik yang berada di dalam suatu lingkungan tertentu titik z_0.

C O N T O H 21

Di dalam contoh 19, kita mendapatkan bahwa fungsi $f(z) = x^2 - iy^2$ mempunyai turunan pada titik-titik di garis $y = -x$ dan hanya pada titik-titik itu. Sekarang, setiap lingkungan bagi setiap titik pada garis itu akan memuat titik-titik di luar garis itu yang membuat f' tidak ada. Akibatnya bahwa f tidak analitik di mana-mana, karena analitisitas pada suatu titik menurut adanya f' di seluruh suatu lingkungan tertentu dari titik tersebut.

C O N T O H 22

Fungsi $f(z) = |z|^2$ mempunyai turunan hanya pada $z = 0$. Akibatnya, bahwa f tidak analitik di mana-mana, karena f' tidak ada di setiap lingkungan titik manapun.

Jika suatu fungsi analitik pada setiap titik dalam suatu himpunan S, maka dikatakan analitik pada S. Suatu fungsi yang analitik pada seluruh bidang kompleks dinamakan fungsi menyeluruh (*entire function*). Dari definisi, dapat disimpulkan bahwa jika suatu fungsi f analitik pada suatu titik, maa ia analitik pada suatu himpunan terbuka yang memuat titik itu. Kenyataan ini mengajak kita untuk menggunakan istilah daerah analitisitas (*region of analyticity*) bagi f untuk memberi nama bagi keseluruhan titik pada bidang datar yang membuat f analitik.

CONTOH 23

Suatu polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$

Adalah suatu fungsi menyeluruh, karena seperti yang kita lihat $P'(z)$ ada pada semua z.

Begitu pula dari Contoh 4 Pasal 7, kita simpulkan bahwa

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Juga suatu fungsi menyeluruh.

CONTOH 24

Fungsi

$$f(z) = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 + 1}$$

Adalah hasil bagi dua fungsi menyeluruh, karena pembilang dan penyebutnya merupakan polinomial. Sesuai dengan Teorema 2.6. $f'(z)$ ada pada setiap titik kecuali pada $z = \pm i$, karena pada titik tersebut f tidak terdefinisikan. Jadi f analitik pada semua z kecuali pada i dan $-i$.

Suatu fungsi yang merupakan hasil bagi dua fungsi menyeluruh dinamakan fungsi **Meromorfik**.

Teorema 2.6.1

Andaikan bahwa

1. $f(z)$ dan $g(z)$ analitik pada himpunan S.
2. f analitik pada setiap $g(z)$ untuk semua z dalam S.

Maka jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi dan gabungan (Komposisi) f dan g juga merupakan fungsi analitik pada setiap titik di S asalkan terdefinisikan.

Teorema 2.6.2

Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Andaikan

1. Fungsi-fungsi $u, v,$ dan turunan parsialnya u_x, v_x, u_y dan v_y kontinu di semua titik di dalam suatu lingkungan tertentu N dari titik z_0.
2. Persamaan *Cauchy-Riemann* $u_x = u_y$ dan $v_x = -u_y$ berlaku pada setiap titik di N.

Maka $f(z)$ analitik pada z_0.

Teorema 2.6.3

Andaikan bahwa fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik pada z_o, maka

$$u_x = v_y \quad \text{atau} \quad v_x = -u_y$$

Pada setiap titik di suatu lingkungan titik z_o.

Fungsi analitik memiliki sifat istimewa berikut, yang akan dibuktikan di dalam pasal kemudian:

Jika f analitik pada titik z_o, demikian pula f'.

Misalkan $f(z) = u + iv$ analitik pada z_o, maka f' juga analitik pada z_o. Tetapi karena f'' adalah turunan f', maka dengan alasan yang sama, f'' analitik pada z_o dan demikian pula semua turunan f. Karena diferensiabilitas berakibat kontinuitas, maka dipenuhi bahwa $f, f', f'', \ldots$ semua kontinu pada $z_o = (a, b)$. Sekarang, dari teorema 2.5.2 kita mengetahui bahwa turunan parsial fungsi kompleks dapat dinyatakan dalam turunan parsial fungsi-fungsi komponennya. Kemudian, dengan mengingat Teorema 2.3.1, karena $f', f'', \ldots$ kontinu pada z_o, maka akibatnya turunan parsial fungsi u dan v untuk semua tingkat kontinu pada z_o. Khususnya, kenyataan ini berakibat bahwa turunan parsial silang tingkat dua adalah sama:

$$u_{xy} = v_{yx} \quad \text{atau} \quad v_{xy} = -u_{yx}$$

Tetapi f analitik pada z_o, maka pada titik itu

$$u_x = v_y \quad \text{atau} \quad v_x = -u_y$$

Yang dengan diferensiasi menghasilkan

$$u_{xy} = v_{yx}, \quad v_{xx} = -u_{yx}, \quad v_{yy} = u_{xy}, \quad -u_{yy} = v_{xy}$$

Substitusi yang tepat dalam (1) kemudian menghasilkan

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{dan} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Masing-masing dari kedua persamaan terakhir dinamakan **Persamaan Laplace**, sembarang fungsi $g(x, y)$ yang memenuhi persamaan Laplace di dalam suatu lingkungan titik $z_o = (a, b)$ dikatakan **harmonik** pada z_o, asal fungsi itu mempunyai turunan parsial tingkat dua yang kontinu di titik tersebut. Jadi kita telah menunjukkan bahwa:

Komponen-komponen nyata dan khayal

Fungsi analitik $f = u + iv$ merupakan fungsi harmonik.

Pasangan fungsi harmonik demikian dinamakan fungsi **harmonik sekawan**.

C O N T O H 25

Fungsi $v(x, y) = xy$ dengan mudah nampak harmonik, karena $v_{xx} = v_{yy} = 0$. Kita akan mendapatkan harmonik sekawannya. Kita akan mendapatkan suatu fungsi $u(x, y)$ sedemikian hingga $f(z) = u + iv$ analitik.

Jika f analitik, persamaan Cauchy-Riemann harus dipenuhi, dan karena $v_y = x$, kita juga harus mempunyai $u_x = x$, dengan integrasi diperoleh

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + h(y)$$

Sekarang, marilah kita menentukan $h(y)$. Kita mendapatkan bhawa $u_y = h'(y)$. Tetapi $u'_y = -v_x$, karena dari fungsi yang diberikan $v_x = y$, kita mempunyai

$$h'(y) = -y$$

Maka

$$h(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c$$

jadi,

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + c$$

oleh karena itu,

$$f(z) = u + iv$$

$$= \frac{1}{2}z^2 + c$$

LATIHAN SOAL

Pada soal-soal 1-6, carilah batas tiap himpunan yang diberikan, tentukan apakah himpunan tersebut terbuka, tertutup, atau tidak keduanya, juga apakah berbatas atau tak terbatas.

1. $|z| < 1$

   Z = x + iy

   X + iy < 1

   X – 1 + iy < 0

   R = x – 1

2. $-2 < R(z) < 0$
3. $1 \leq |z| \leq 3$
4. $0 < I(z) \leq 1$
5. $|z + i| < 2$
6. $|z - i| \geq 3$
7. Titik *z* dinamakan **titik dalam** (*interior point*) himpunan *S* jika dan hanya jika *z* didalam *S* tetapi bukan titik batas *S*. Buktikan bahwa suatu himpunan terbuka jika dan hanya jika ia terdiri atas hanya titik dalam saja.
8. Berikan contoh suatu himpunan yang tidak mempunyai batas.

Pada soal 9-13, tentukan nilai fungsi pada tiap-tiap titik yang ditunjuk.

9. $f(z) = z^2 - 2z - 1,$ pada $-1, 1 + 2i$

10. $f(z) = 3x^2 - i\bar{z}$, pada $2i, 2 - i$

11. $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, pada $i, -i, 3i$

12. $f(z) = |z|^2 - [R(z)]^2$, pada $3 + i, -4 - 4i$

13. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, pada $0,1,2 + \pi i$

Pada soal 14-16, uraikan setiap fungsi yang diberikan, pertama dalam bentuk $u(x, y) + iv(x, y)$ dan kemudian dalam bentuk $u(r, \theta) + iv(r, \theta)$

14. $f(z) = z^2 + 3z^3$

15. $f(z) = i\bar{z} + I\left(\frac{i}{z}\right)$

16. $f(z) = 2 + \pi i$

Pada setiap soal 17-20, gambarkan *z* dengan kawannya *w* yang diberikan dibawah fungsi yang bersangkutan. Kemudian, pad setiap kasus katakanlah secara umum bagaimana bidang *z* atau bagiannya ditransformasikan oleh fungsi yang diberikan.

17. $w = z$ $z = 1, -1, i, 0,2 + i$

18. $w = z + 1$ $z = 0,1 + i, -1, -3 + 2i, -i$

19. $w = z - 2i$ $z = 0,2i, 1, i, -2i, 1 + i$

20. $w = iz$ $z = 0,1,2,3,1 + i, 2 + 2i, i, 2i, 3i$

Daftar Pustaka

Belajar, K., Di, L., Di, K. L., Koligatif, S., & Di, L. (2014). *Geometri analitik dan tranformasi*. 1–36. http://repository.ut.ac.id/3891/1/EKSI4417-M1.pdf

BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR Disusun Oleh : Jitu Halomoan Lumbantoruan , S . Pd ., M . Pd Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. (2019).

Buku Utama analisis kompleks.pdf. (n.d.).

Geometri 1. (2019). *April*, 33–35.

Kusni. (2008). *Geometri Datar Dan Ruang*. 1–66.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *Disusun Oleh : Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd 2019*.

Lumbantoruan, J. H. (2019b). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017 / 2018. *Jurnal EduMatsains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). Solid State Technology Volume: 64 Issue: 2 Publication Year: 2021. *Solid State Technology*, *64*(2), 4427–4444.

Lurus, G. (n.d.). *Garis Lurus*. *1*(3), 64–119.

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and

Attitudes Towards Statistics. *Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, *560*(Acbleti 2020), 507–513. https://doi.org/10.2991/assehr.k.210615.095

Monks, F. ., Knoers, A. M. ., & Haditono, S. R. (2006). *Psikologi Perkembangan*. 390.

P. A., S., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *Edumatsains*, *1*(1), 35–49.

Pembelajaran, A. C. (n.d.). *LINGKARAN*. 1–29.

Pendidikan, J., & Sains, M. (2020). *EduMatSains*. *1*(1), 23–34.

Simorangkir, M. R. R., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Aksesibilitas Anak Berkebutuhan Khusus. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, *14*(1), 204–213. https://doi.org/10.33541/jdp.v12i3.1295

Glosarium

Analitik	: sebuah aktivitas yang memuat kegiatan memilih, menguraikan, membedakan sesuatu untuk digolongkan dan dikelompokkan menurut kriteria tertentu lalu dicari ditaksir makna dan kaitannya.
Fungsi	: relasi dari himpunan A ke himpunan B, jika setiap anggota himpunan A berpasangan tepat satu dengan anggota himpunan B.
Himpunan	: kumpulan benda atau objek-objek yang telah didefinisikan dengan jelas.
Kompleks	: bilangan yang terdiri dari dua bagian yaitu bagian riil dan bagian imajiner.
Limit	: suatu batas yang menggunakan konsep pendekatan fungsi
Turunan	: pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai yang dimasukan

Indeks

A

F

H

K

L

T