

MODUL 4. TURUNAN



DISUSUN OLEH

CRISTALLIA ANGELLI SAPUTRI

(2115150004)

Program Studi Pendidikan Biologi

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Kristen Indonesia

2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena dengan tuntunan-Nya kami dapat menyelesaikan makalah ini untuk memenuhi tugas kelompok mata kuliah Matematika Dasar dengan materi “Modul 4. Turunan”.

Kami mohon maaf jika makalah ini jauh dari kata sempurna karena kurangnya pengetahuan kami. Maka dari itu kami menerima apapun bentuk kritikan, dan masukan agar kedepannya bisa menjadi lebih baik. Kami berharap makalah ini dapat diterima dengan baik.

Jakarta, 28 September 2021

Penyusun

DAFTAR ISI

Halaman	i
Kata Pengantar	ii
Daftar Isi	iii
Tujuan Pembelajaran.....	iv
Pendahuluan	1
Pembahasan.....	2
Rumus Turunan.....	2
Turunan Fungsi	3
Turunan Fungsi Aljabar	4
Turunan Akar	5
Turunan Parsial	6
Turunan Implisit.....	6
Turunan Trigonometri.....	7
Contoh Soal.....	8
Latihan Soal	13
Pembahasan.....	14
Kesimpulan dan Saran	16
Daftar Pustaka	17

TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa mampu memahami arti turunan.
2. Mahasiswa mampu memahami konsep aturan pencarian turunan.
3. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan fungsi turunan.

BAB I

PENDAHULUAN



Turunan atau yang biasa disebut dengan diferensial adalah perhitungan terhadap suatu nilai fungsi karena perubahan nilai variabel. Proses menentukan turunan dalam suatu fungsi disebut diferensiasi. (Ibrahim Boiliu et al., 2021)

Turunan dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Turunan suatu fungsi f adalah f' (dibaca f aksen).

BAB II

PEMBAHASAN

1. PENERAPAN TURUNAN

- Turunan dapat digunakan sebagai cara untuk menyelesaikan soal mengenai gradien garis singgung kurva.(J. H. Lumbantoruan, 2019)
- Rentang suatu fungsi meningkat atau menurun dapat diselesaikan menggunakan rumus turunan. (J. H. Lumbantoruan & Male, n.d.)
- Untuk menentukan nilai stasioner dari suatu fungsi dapat menerapkan rumus turunan untuk menyelesaikannya. Persamaan gerak dapat dipecahkan tau diselesaikan dengan menerapkan rumus turunan.
- Turunan juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah minimum- maksimum.

Dibawah ini merupakan beberapa rumus turunan.

2.1 Rumus Turunan

Berikut merupakan cara untuk menentukan turunan.

- $f(x) = c$, dengan c adalah kostanta.
Sehingga turunan dari fungsi tersebut yaitu $f'(x) = 0$.
- $f(x) = x$.
Sehingga turunan dari fungsi tersebut yaitu $f'(x) = 1$.
- $f(x) = ax^n$
Sehingga turunan dari fungsi tersebut yaitu $f' = anx^{n-1}$

- Penjumlahan fungsi: $h(x) = f(x) + g(x)$.
Turunan fungsi tersebut yaitu :
 $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- Pengurangan fungsi: $h(x) = f(x) - g(x)$.
Turunan fungsi tersebut adalah
 $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.
- Perkalian konstanta dengan suatu fungsi (kf) (x).
Turunan fungsi tersebut adalah $k \cdot f'(x)$.

2.2 Turunan Fungsi

Dengan contoh terdapat fungsi $f(x) = ax^n$.

Turunan dari fungsi tersebut yaitu $f'(x) = nax^{n-1}$.

Contoh:

1. $f(x) = 2x^2$

Jadi, turunan fungsinya adalah:

$$f'(x) = 2 \cdot 2 x^{2-1} = 4x.$$

2. $g(x) = -4y^{-3}$

Jadi, turunan fungsinya adalah:

$$g'(x) = -3 \cdot -4y^{-3-1} = 12y^{-4}.$$

2.3 Turunan Fungsi Aljabar

Turunan yang berbentuk perkalian dan turunan dalam pembagian fungsi aljabar termasuk dalam pembahasan turunan fungsi aljabar. (H. J. Lumbantoruan, 2020)

1) Bentuk perkalian dalam turunan fungsi aljabar dapat dilihat sebagai berikut:

Contoh: $h(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Jadi, turunan fungsi tersebut adalah

$$h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Keterangan:

- $h(x)$: fungsi dalam bentuk perkalian fungsi.
- $h'(x)$: turunan fungsi dalam bentuk perkalian.
- $u(x), v(x)$: fungsi dengan variabel x .
- $u'(x), v'(x)$: turunan fungsi dengan variabel x .

2) Bentuk pembagian dalam turunan fungsi aljabar dapat dilihat sebagai berikut:

Contoh: $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Turunan dari fungsi tersebut adalah:

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Keterangan:

- $h(x)$: fungsi dalam bentuk perkalian fungsi.
- $h'(x)$: turunan fungsi bentuk perkalian.
- $u(x), v(x)$: fungsi dengan variabel x .
- $u'(x), v'(x)$: turunan fungsi dengan variabel x .

2.4 Turunan Akar

Contoh: $f(x) = \sqrt[b]{x^a}$.

Sebelum menyelesaikan soal tersebut, (Male & Lumbantoruan, 2021)soal harus diubah terlebih dahulu ke bentuk perpangkatan. Salah satu bentuk fungsi perpangkatan tersebut adalah $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$.

Turunan dari fungsi tersebut yaitu $f'(x) = \frac{a}{b} \cdot x^{\frac{a}{b}-1}$.

Lalu bagaimana jika terdapat soal seperti contoh dibawah ini?

$$f(x) = \sqrt[b]{g(x)^a}.$$

Sebagai penyelesaiannya, terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk perpangkatan yaitu:

$$f(x) = g(x)^{\frac{a}{b}}.$$

Turunan dari fungsi tersebut yaitu

$$f'(x) = \frac{a}{b} \cdot g(x)^{\frac{a}{b}-1} \cdot g'(x).$$

2.5 Turunan Parsial

Fungsi peubah banyak terhadap suatu peubah yang mempertahankan peubah lainnya suatu turunan merupakan pengertian dari turunan parsial. (Belajar et al., 2014)

Contoh: $f(x, y) = x^2y^3$, sehingga didapat turunan parsial dari fungsi tersebut terhadap variabel x adalah

$$f_x'(x, y) = 2xy^3.$$

Sedangkan turunan parsial terhadap variabel y adalah:

$$f_y'(x, y) = 3x^2y^2.$$

2.6 Turunan Implisit

Variabel yang terdapat dalam fungsi yang telah ditentukan merupakan pengertian dari turunan fungsi. (J. H. Lumbantoruan, n.d.)

Turunan suatu fungsi dengan variabel x adalah: $x \frac{d}{dx}$.

Turunan suatu fungsi dengan variabel y adalah: $y \frac{d}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Turunan suatu fungsi dengan variabel x dan y adalah: $xy \frac{d}{dx} + xy \frac{d}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

2.7 Turunan Trigonometri

Rangkuman rumus- rumus turunan fungsi trigonometri

- $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x.$
- $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x.$
- $f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x.$
- $f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x.$
- $f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x. \tan x.$
- $f(x) = \operatorname{cosec} x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec} x. \cot x.$

Contoh Soal:

1. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ adalah?

Penyelesaian:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$$

$$f'(x) = 3.1x^{3-1} - 2.2x^{2-1} + 1.3x^{1-1}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

Sehingga turunan pertama fungsi

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x \text{ adalah } f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

2. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = (3x + 2)(2x + 5)$!

Penyelesaian:

$$f(x) = (3 + 2)(2x + 5)$$

$$f(x) = (3x.2x) + (3x.5) + (2.2x) + (2.5)$$

$$f(x) = 6x^2 + 15x + 4x + 10$$

$$f(x) = 6x^2 + 19x + 10$$

$$f'(x) = 2.6.x^{2-1} + 1.19.x^{1-1} + 0.10.x^{0-1}$$

$$f'(x) = 12x + 19 + 0$$

$$f'(x) = 12x + 19$$

Jadi, turunan pertama fungsi $f(x) =$

$$(3x + 2)(2x + 5) \text{ adalah } f'(x) = 12x + 19.$$

3. Carilah turunan pertama dari fungsi

$$f(x) = (x^2 + 3x + 4).$$

Penyelesaian:

$$f(x) = (x^2 + 3x + 4)(2x + 3)$$

Misal:

$$u: x^2 + 3x + 4$$

$$v: 2x + 3$$

Maka:

$$u' = 2x + 3v' = 2$$

Sehingga:

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = (2x + 3)(2x + 3) + (x^2 + 3x + 4) \cdot 2$$

$$f'(x) = 4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 + 6x + 8$$

$$f'(x) = 6x^2 + 18x + 17$$

Jadi, turunan dari $f(x) = (x^2 + 3x + 4)(2x + 3)$ adalah

$$f'(x) = 6x^2 + 18x + 17.$$

4. Carilah turunan pertama dari $f(x) = \frac{(x^3+4)}{(2x+3)}$.

Penyelesaian:

Misal,

$$u: x^3 + 4$$

$$v: 2x + 3$$

Maka:

$$u' : 3x^2$$

$$v' : 2$$

Jadi,

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{3x^2(2x + 3) - (x^3 + 4) \cdot 2}{v^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 9x^2 - 2x^3 - 8}{4x^2 + 12x + 9}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 9x^2 - 8}{4x^2 + 12x + 9}$$

Sehingga turunan pertama dari $f(x) = \frac{(x^3+4)}{2x+3}$ adalah

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 9x^2 - 8)}{(4x^2 + 12x + 9)}$$

5. Berapakah turunan pertama dari fungsi $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$?

Penyelesaian:

$$f(x) = 4\sqrt{x}$$

$$f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot x^{\frac{3}{2}-1}$$

$$f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 6\sqrt{x}$$

Jadi, turunan pertama dari fungsi $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ adalah

$$f'(x) = 6\sqrt{x}.$$

6. Tentukan turuna terhadap x dan y dari $Z = 3x^2y^5 + x^2y^2 - 2xy^4$.

Penyelesaian:

Turunan parsial terhadap x

$$Z_x = 2 \cdot 3xy^5 + 2xy^2 - 2y^4$$

$$Z_x = 6xy^5 + 2xy^2 - 2y^4.$$

Turunan parsial terhadap y

$$Z_y = 3 \cdot 5x^2y^4 + 2 \cdot 2x^2y$$

$$Z_y = 15x^2y^4 + 2x^2y - 8xy^3.$$

7. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $16y^2 - 9x^2 = 9$.

Penyelesaian:

$$16y^2 - 9x^2 = 9$$

$$16y \frac{dy}{dx} - 2 \cdot 9x = 0$$

$$32y \frac{dy}{dx} - 18x = 0$$

$$32y \frac{dy}{dx} = 18x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x}{32y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{16y}.$$

8. Hitunglah urutan pertama dari $f(x) = \sin x \cdot \cos x$.

Penyelesaian:

Penyelesaian:

Misal:

$$u: \sin x$$

$$v: \cos x$$

Maka:

$$u' : \cos x$$

$$v' : -\sin x$$

Sehingga:

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x (-\sin x)$$

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f'(x): \cos 2x \text{ (identitas trigonometri).}$$

Jadi turunan pertama dari $f(x): \sin x \cdot \cos x$ adalah $f'(x) = \cos 2x$.

Latihan Soal

1. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = 4x^5$.
2. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = 3x^4 + 7x$.
3. Diketahui $f'(x)$ adalah turunan dari $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 6x + 12$. Tentukan nilai $f'(3)$ adalah
4. Tentukan turunan dari $f(x) = (x - 2)^2$.
5. Tentukan turunan dari $f(x) = x^3 + 2x + 4\sqrt{x}$.
6. Jika diketahui $f(x) = \frac{2x-1}{3-4x}$. Tentukan $f'(x)$.
7. Jika $f(x) = x^2 + 3x$ dan $f'(1 - x) = 15$. Maka nilai x adalah?
8. Tentukan turunan dari $\sin x$.
9. Tentukan turunan dari $\cos(5x + 1)^2$.
10. Tentukan $f'(x)$ dari $f(x) = \cos x + 6 \sin x$.

Pembahasan Soal:

1. $f(x) = ax^n = f'(x) = anx^{n-1}$

$$f(x) = 4x^5$$

$$f'(x) = 20x^4.$$

2. $f(x) = 3x^4 + 7x$

$$f'(x) = 12x^3 + 7.$$

3. $f(x) = 15x^2 + 2x^2 6x + 12$

$$f'(x) = 15x^2 + 4x + 6$$

$$f'(3) = 15(3)^2 + 4(3) + 6$$

$$f'(3) = 135 + 18 = 153.$$

4. $f(x) = (x - 2)^2$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$\text{Atau } 2(2x - 2) = 2x - 4.$$

5. $f(x) = x^3 + 2x + 4\sqrt{x}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 + 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

6. $f(x) = \frac{2x-1}{3-4x}$

Misal:

$$u: 2x - 1, u' = 2$$

$$v: 3 - 4x, v' = -4$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{2(2 - 4x) - (2x - 1) - 4}{(3 - 4x)^2}$$

$$= \frac{6 - 8x + 8x - 4}{(3 - 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(3 - 4x)^2}.$$

1. $f(x) = x^2 + 3x, f'(x) = (1 - x) = 15$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$15 = 2(1 - x) + 3$$

$$15 = 2 - 2x + 3$$

$$10 = -2x$$

$$x = -5.$$

2. $\sin 5x = \cos 5x. 5.$

3. $\cos(5x. 5)^2$

$$f'(x) = -\sin(5x + 1)^2$$

$$= 10(5x + 1).$$

4. $f(x) = \cos x + 6 \sin x$

$$f'(x) = -\sin x + \cos x.$$

Kesimpulan

Mahasiswa diharapkan mampu mengetahui bahkan menguasai suatu penyelesaian dalam matematika, sehingga mendapatkan pengalaman untuk memecahkan suatu masalah. Turunan merupakan bagian dari kurikulum matematika yang penting dalam masa perkuliahan ataupun penyelesaiannya.(J. H. Lumbantoruan, n.d.)

Saran

Memahami matematika dan proses penyelesaiannya (Ibrahim Boiliu et al., 2021) tidaklah mudah, sehingga mahasiswa harus terus belajar hingga mampu memahami matematika dalam proses penyelesaiannya dalam Bahasa logika. Wawasan yang luas dalam memahami matematika dapat menjadi bekal untuk membuktikan fakta- fakta yang rumit, dan menjadi modal untuk melakukan beberapa riset matematika.(Male & Lumbantoruan, 2021).

DAFTAR PUSTAKA

- Holzner, S. (2008). *Differential Equations for Dummies*. Indiana: Wiley Publishing.
- Jitu Halomoan Lumbantoruan, S. N. (2021). Development of a Constructivism-Based Statistics Module for Class VIII Junior High School Students. *Solid State Technology*, 64(2), 4427-4444.
- Lumbantoruan, J. H. (2015). *Modul Kalkulus Lanjut*. Jakarta: Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.
- Lumbantoruan, J. H. (2017, Juli). Pengembangan Bahan Ajar Integral Tak Tentu Berbasis Model Small Group Discussion di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UKI Tahun 2016/2017. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 10(2), 99-118.
- Lumbantoruan, J. H. (2019). *Buku Integral Tentu*. Jakarta: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia.
- Lumbantoruan, J. H. (2019). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017/2018. *Jurnal EduMatSains*, 3(2), 147-168.
- Lumbantoruan, J. H. (2021). *Mata Kuliah : Matematika Dasar II*. Jakarta: UKI.

Lumbantoruan, J. H. (2021). *Mata Kuliah : Persamaan Differensial*. Jakarta: UKI.

Nagle, S. S. (2018). *Fundamentals of Differential Equations*. Boston: Pearson.

Richard Bronson, G. B. (2014). *Schaum's Outlines Differential Equations*. New York: McGraw Hill Education.

Ron Larson, B. E. (2014). *Multivariable Calculus*. Boston: Liz Covello.