

# **MODUL PERSAMAAN DIFERENSIAL**

## **Persamaan Diferensial Orde Satu**

Diajukan untuk Tugas Mata Kuliah

Persamaan Diferensial



Disusun oleh :

Debora Lusiana

1913150010

**Program Studi Pendidikan Matematika**

**Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan**

**Universitas Kristen Indonesia**

**2021-2022**

## **PRAKATA**

Puji dan Syukur kita panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat Tuhan kami penulis mendapatkan kekuatan, semangat, pikiran yang kuat sehingga dapat menyelesaikan penulisan modul ini.

Modul ini berisikan kumpulan pembelajaran persamaan diferensial orde satu. Dengan kehadiran modul ini, semoga dapat menjadi bahan referensi bagi dosen, mahasiswa/i pendidikan matematika, ataupun pihak pendidikan lainnya, pada tahun-tahun berikutnya.

Modul Ini sangat sederhana dan masih banyak kekurangan. Maka dari itu, dengan segala kerendahan hati kami mengharapkan saran dan kritik dari semua pihak, sehingga kami penulis dapat melakukan perbaikan pada edisi berikutnya. Untuk itu, terima kasih setulus-tulusnya penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu, sehingga modul ini dapat di selesaikan.

Jakarta, 11 Januari 2022

(Debora Lusiana)

# DAFTAR ISI

PRAKATA.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
MODUL 1 .....	1
PERSAMAAN DIFERENSIAL UMUM ORDE 1 .....	1
1.1. Bentuk umum orde 1.....	4
1.2. Variabel Terrpisah .....	13
1.3. Variabel yang dipisahkan.....	21
1.4. Rangkuman .....	28
1.5. Soal Diskusi Kelompok Mahasiswa .....	31
1.6. Latihan Mandiri Mahasiswa .....	46
INDEKS .....	50
GLOSARIUM.....	51
DAFTAR PUSTAKA .....	53

# MODUL 1

## PERSAMAAN DIFERENSIAL UMUM ORDE 1

Capaian Kompetensi	Uraian Materi
1. Mahasiswa/i dapat memahami pengertian, konsep, metode Persamaan Diferensial Orde I.	1. Menentukan faktor integrasi terhadap persamaan kategori linear.
2. Mahasiswai/i dapat mengerjakan/menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde I.	2. Menentukan solusi general persamaan diferensial kategori linear. 3. Menentukan Persamaan diferensial yang variabelnya yang dapat terpisahkan maupun dipisahkan 4. P.D yang homogen 5. P.D yang tidak homogen dengan transformasi

## PENDAHULUAN

Pendidikan matematika merupakan pendidikan yang mendasari dasar dan teori – teori matematika, misalkan aljabar, geometri statistika dan lainnya. Dalam pendidikan matematika ada banyak mata kuliah yang dipelajari, sebut saja seperti yang akan dibahas dalam modul ini yaitu persamaan diferensial. Persamaan diferensial memiliki beberapa fungsi yang dapat digunakan dalam pemodelan matematika di bidang teknik dan sains. Persamaan diferensial biasanya mengkaji tentang pengertian persamaan diferensial, jenis dan orde, kemudian persamaan diferensial orde pertama beserta solusinya, persamaan orde kedua dan aplikasi persamaan diferensial. Namun, pada makalah ini kita hanya membahas persamaan diferensial orde satu.

Persamaan diferensial merupakan bagian dari persamaan matematika yang berguna sebagai variabel pertama atau lebih, kemudian saling berkaitan dengan nilai dari fungsi dan juga turunan dalam beragam jenis orde. Selain penting dalam matematika persamaan diferensial juga memiliki peranan yang penting dalam bidang rekayasa, ilmu ekonomi, fisika dan lainnya.

Teori persamaan diferensial dapat dikatakan sudah berkembang dan metode yang digunakan pun beragam variasi sesuai dengan jenisnya yaitu merupakan persamaan diferensial biasa yang fungsinya tidak diketahui atau disebut variabel terikat dan fungsi dari variabel bebas tunggal. Kemudian, ada juga diferensial parsial

merupakan persamaan yang mana fungsinya tidak diketahui atau memiliki fungsi dari banyaknya variabel bebas yang melibatkan turunan parsial. Namun, dalam makalah ini kami akan membahas persamaan diferensial biasa orde satu. Selain itu juga, makalah ini berisi contoh dan soal – soal yang dapat menjadi referensi bagi penulis dan terutama bagi pembacanya.

## **1.2 Tujuan Kajian**

Tujuan makalah ini dibuat yaitu sebagai bahan pengetahuan untuk mengetahui pengertian dan metode penyelesaian persamaan diferensial orde pertama (satu) dan juga bertujuan supaya makalah ini dapat menjadi pengangan atau referensi penulis dan pembaca dan lembaga lainnya.

## **1.3 Kegunaan Kajian**

Dalam makalah persamaan diferensial ini diharapkan dapat bermanfaat bagi semua, baik penulis maupun pembacanya. Bagi penulis, makalah ini digunakan sebagai bahan ajar untuk dipresentasikan dalam kelas dan juga untuk menambah referensi mengenai bidang matematika. Bagi pembaca, makalah ini diharapkan bermanfaat yang dapat menambah wawasan dan juga sebagai literatur atau referensi untuk mempelajari lebih dalam mengenai materi ini.

## MODUL 1

### PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

#### Kegiatan Pembelajaran I

##### 1.1 Bentuk umum orde I

Pada awal materi, penulis akan menjelaskan terkait materi persamaan diferensial baik secara umum hingga khusus yang merujuk ke persamaan diferensial orde 1. Secara umum, adalah persamaan yang memuat turunan, terdiri dari satu atau beberapa variabel bebas dan beberapa pangkat dari variabel terikat. Persamaan tersebut dipecah hingga terdapat beberapa bagian, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial linear. Suatu persamaan dikatakan persamaan diferensial biasa, bila terdapat satu variabel bebas saja (J. Lumbantoruan, 2019a). Kemudian, jika pangkat dari variabel terikat tidak lebih dari satu, maka disebutkan persamaan diferensial linear.

Pada dasarnya, klasifikasi persamaan diferensial ditinjau dari ordenya. Orde merupakan nama lain dari tingkat, sedangkan derajat adalah pangkat (J. Lumbantoruan, 2019c). Berikut bentuk umum dari persamaan diferensial biasa (Nababan, 2021),

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Dikatakan  $F$  merupakan suatu fungsi riil yang diberikan dan  $\frac{d^n y}{dx^n}$  sebagai turunan ke  $n$  dari variabel  $y$  terhadap variabel  $x$ .

Selanjutnya, ada bentuk umum dari persamaan diferensial linear dan tidak linear.

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x)y = F(x)$$

(J. Lumbantoruan, 2019b), persamaan yang di atas adalah gambaran dari persamaan diferensial linear, yang di mana  $a_0, a_1, \dots, a_n$  dan  $F$  adalah fungsi-fungsi yang diberikan dan diperoleh dari variabel  $x$  saja. Dengan syarat,  $a_0(x) \neq 0$ .

(BAB IV PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER, 2013), adapun beberapa contoh bentuk dari persamaan diferensial linear yaitu :

- $x \frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{dy}{dx} - 4xy = 0$
- $a \frac{d^5 b}{da^5} + 6 \frac{d^2 b}{da^2} - 2ab = 4$
- $m \frac{d^8 n}{dm^8} - 10 \frac{d^4 n}{dm^4} = \sin 3x$

Selain itu, ada juga beberapa contoh bentuk persamaan diferensial yang bukan linear yaitu (J. Lumbantoruan, 2015) :

- $x \frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 4xy = 0$
- $a \left( \frac{d^5 b}{da^5} \right)^3 + 6 \frac{d^2 b}{da^2} - 2ab = 4$



- $m \frac{d^3n}{dm^3} - 10 \left( \frac{d^4n}{dm^4} \right)^6 = \sin 3x$

Berikut beberapa contoh persamaan berorde 1, 2, dan 3:

$$\frac{dy}{dx} + 8x - 3 = 0 \quad \text{orde 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6x + 8 = 0 \quad \text{orde 2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4y - 2 = 0 \quad \text{orde 3}$$

$$2 \frac{d^3x}{dy^3} + 4 \frac{d^2x}{dy^2} - \frac{dx}{dy} = 2x + 3 \quad \text{Persamaan Diferensial Orde 1, 2, dan 3}$$

(Saputro, 2020), setelah Anda memahami pernyataan sebelumnya, secara tidak langsung pasti sudah tergambar seperti apa persamaan diferensial orde satu yang akan dikupas lebih dalam lagi. Persamaan diferensial orde pertama merupakan persamaan yang mudah dipahami, karena hanya melibatkan turunan pertama pada fungsi tertentu dan biasanya lebih cepat mencari solusinya dan tidak melibatkan orde lain (Male & Lumbantoruan, 2021).

Bentuk Umum persamaan diferensial orde satu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Keterangan,

$$\frac{dy}{dx} = \text{Turunan pertama}$$

$f(x, y) =$  fungsi yang melibatkan  $x, y$

### **Contoh 1**

Carilah penyelesaian dari persamaan diferensial berikut!

$$\frac{db}{da} = a^2 + 2a + 1$$

#### Pembahasan

Integralkan pada variabel  $x$

$$\int \frac{db}{da} da = \int a^2 + 2a + 1 da$$

$$b = \frac{1}{3} a^3 + a^2 + a + c$$



### **Contoh 2**

Carilah nilai fungsi yang telah diberikan!

$$f(x) = 2 \cos x + 10$$

#### Pembahasan

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin x$$



Berikut persamaan yang dapat diperoleh:

$$\frac{db}{da} + P(a)b = Q(a)$$

Keterangan:

$P(a)b = Q(a)$  merupakan fungsi linear.

(J. Lumbantoruan, 2020), dari bentuk persamaan yang ada, dapat diselesaikan melalui beberapa langkah, sebagai berikut :

1. Jika pada soal tidak sesuai dengan bentuk umum, maka sesuaikanlah,
2. Buatlah ke dalam bentuk integrasi  $e^{\int P(a)dx}$
3. Kalikan kedua ruas dengan hasil faktor integrasi,
4. Selesaikan ke bentuk  $b = \dots$

Materi prasyarat(J. Lumbantoruan, 2021a):

1. Perkalian turunan =  $u \times v' + u' \times v$
2. Integral tak tentu

### Contoh 3

Tentukanlah nilai dari persamaan diferensial berikut!

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

#### Pembahasan

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

*Langkah 1 telah sesuai*

$$e^{\int \left(\frac{2}{x}\right) dx} = e^{2 \ln|x|+c} \quad \text{Langkah 2 telah sesuai}$$

$$= e^{\ln|x|^2+c} = e^{\ln x^2+c} = x^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\sin 3x}{x^2}\right) \times x^2 \quad \text{Langkah 3 telah sesuai}$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = \sin 3x$$

Perhatikan pernyataan di atas seperti pola perkalian turunan, Anda dapat mengikuti pola tersebut.

$$\frac{d}{dx}(u \times v) = u \times v' + u' \times v$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 \times y) = \sin 3x$$

$$\int \frac{dy}{dx}(x^2 \times y) dx = \int \sin 3x dx$$

$$x^2 \times y = \frac{-\cos 3x}{3} + c$$

$$\left(x^2 \times y = \frac{-\cos 3x}{3} + c\right) \times \frac{1}{x^2}$$

$$y = -\frac{\cos 3x}{3x^2} + \frac{c}{x^2}$$

$$y = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x + c\right) x^{-2} \quad \text{Langkah 4 telah sesuai.}$$



#### Contoh 4

$$m \frac{dn}{dm} + (1 + m)n = e^{-m}; n = 0 \text{ bilamana } m = 1$$

#### Pembahasan

Langkah pertama, terlebih dahulu Anda sesuaikan bentuk soal dengan bentuk umum persamaan diferensial orde satu.

$$\left( m \frac{dn}{dm} + (1 + m)n = e^{-m} \right) \times \frac{1}{m}$$

$$\frac{dn}{dm} + \frac{(1+m)}{m}n = \frac{e^{-m}}{m} \quad \text{Langkah 1 telah sesuai}$$

$$e^{\int \left(\frac{1+m}{m}\right) dm} = e^{\int \left(\frac{1}{m} + 1\right) dm} \quad \text{Langkah 2 telah sesuai}$$

#### Catatan

$$e^{\ln a} = a$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\text{Jadi, } e^{\ln|x|+x} = e^{\ln|x|} \times e^x = xe^x$$

$$\left( \frac{dn}{dm} + \frac{(1 + m)}{m}n = \frac{e^{-m}}{m} \right) \times (me^m)$$

$$me^m \frac{dn}{dm} + e^m(1 + m)n = e^{-m} \quad \text{Langkah 3 telah sesuai}$$

$$\text{Kedua ruas dikali } \frac{1}{me^m}$$

$$n = \frac{-e^{-m}}{me^m} + \frac{c}{me^m}$$

$$n = -\frac{1}{me^{2m}} + \frac{c}{me^m}$$

Substitusikan pada  $n = 0$  bilamana  $m = 1$

$$0 = -\frac{1}{e^2} + \frac{c}{e}$$

$$\frac{1}{e^2} = \frac{c}{e} \rightarrow c = \frac{1}{e}$$

Jadi, Anda dapat memasukkan nilai  $c$  pada persamaan yang telah didapatkan sebelumnya.

$$n = -\frac{1}{me^{2m}} + \frac{\frac{1}{e}}{me^m}$$



### Contoh 5

$$\sin(i) \frac{dj}{di} + j \cos(i) = \sin(i)$$

Tentukan solusi umum dari persamaan linear diferensial di atas!

#### Pembahasan

$$\sin(i) \frac{dj}{di} + j \cos(i) = \sin(i) \text{ kedua ruas dibagi } \sin(i)$$

$$\frac{dj}{di} + j \cot(i) = 1$$

*Langkah 1 telah sesuai*

$$v(i) = e^{\int \cot(i) di}$$

*Langkah 2 telah sesuai*

$$= e^{\ln|\sin i|} = \sin i$$

$$\frac{dj}{di} + j \cot(i) = 1$$

$$\sin(i) \frac{dj}{di} + j \cos(i) = \sin(i) \quad \text{Langkah 3 telah sesuai}$$

Perhatikan pernyataan di atas seperti pola perkalian turunan, Anda dapat mengikuti pola tersebut.

$$\frac{d}{di}(u \times v) = u \times v' + u' \times v$$

$$\int \frac{d}{di} (\sin i \cdot j) di = \int \sin(i) di$$

$$\sin i \cdot j = -\cos(i) + C$$

$$j = -\text{ctg}(i) + C \cdot \text{cosec}(i) \quad \text{Langkah 4 telah sesuai}$$



## Kegiatan Pembelajaran II

### 1.2 Variabel Terpisah

Persamaan diferensial variable terpisah adalah “persamaan yang melibatkan turunan, pada suatu fungsi tertentu”(J. Lumbantoruan, 2021b).

Bentuk umum(Umami, n.d.),

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Bentuk persamaan diferensial  $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Solusi nya kedua ruas kita integralkan

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

Dalam persamaan yang memiliki bentuk  $M dx + N dy = 0$  akan selalu memiliki konsep M fungsi adalah x saja dan N adalah variable fungsi y(J. Lumbantoruan et al., 2021). Maka

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Hal ini bentuk paling sederhana dari persamaan diferensial yang disebut dengan eksa (variable terpisah) (Ibrahim Boiliu et al., 2021).

$$\int M dx \int Ndy = C$$



**Contoh 1 :**

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ atau } \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

Pembahasan

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = 0 \text{ dan } \ln y - \ln x = c_1$$

$$\ln \frac{dy}{y} = c_1, \frac{y}{x} = 2^{c_1} = c \text{ dan } y = cx$$



**Contoh 2 :**

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1 + y^3}{xy^2(1 + x^2)} = 0$$

Pembahasan

$$\frac{y^2 dy}{1 + y^3} + \frac{1}{x(1 + x^2)} dx = 0$$

Variabel-variabel nya terpisah maka

$$\frac{y^2 dy}{1 + y^3} + \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{3} \ln|1 + y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = c_1$$

$$2 \ln|1 + y^3| + 6 \ln|x| - 3 \ln(1 + y^2) = 6c_1 = c_2$$

$$\ln \frac{x^6(1 + y^3)^2}{(1 + y^2)^3} = e^{c_2} = C$$



**Contoh 3 :**  $(x + 1)dx(y^2 - 3)dy = 0$

Maka solusinya kita integral kan saja terhadap variabelnya masing-masing menjadi

$$\int (x + 1)dx + \int y^2 - 3dy = 0$$

Pembahasan

$$\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}y^3 - 3y = c$$

Bentuk persamaan diferensial nya (Manalu, 2019):

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{f_1(x)g_1(y)}{g_1(y)f_2(x)} \frac{f_2(x)g_2(y)dy}{g_1(y)f_2(x)} = 0$$

Direduksi dengan mengalikan  $\frac{1}{g_1(y)f_2(x)}$  persamaan diferensial menjadi

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

Karena telah menjadi variabel terpisah, maka persamaan diferensial variable terpisah nya menjadi (J. H. Lumbantoran, 2017).

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = c$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{turunan pertama terhadap variabel } x$$

$$\frac{ds}{dt} = \text{turunan pertama terhadap variabel } t$$

#### **Contoh 4**

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

#### Pembahasan

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad \times (dx)$$

$$\int dy = \int x^2 dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + c$$



(J. Lumbantoruan et al., 2020), persamaan diferensial dengan variable nya dapat di pisahkan, jika pemisahan nya ini bisa dilakukan.

Maka kita dapat tulis

$$f(y)dy + g(x)dx = 0$$

Kemudian jika kita integrasi, kita mendapatkan solusi satu tetapan sembarang K/C menjadi

$$\int f(y)dy + \int g(x)dx = K$$

### Contoh 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$$

### Pembahasan

$$ydy = \frac{dy}{x}$$

$$\int ydy - \int \frac{dx}{x} = k$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln x = k$$

## Contoh 6

Apakah persamaan  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2-y^2}$  merupakan persamaan diferensial yang dapat di pisahkan ?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2-y^2}$$

### Pembahasan

$$= (2 - y^2)dy = (x^2)dx$$

Perlu Anda pahami, bahwa persamaan yang bereksresi  $y = f(x)$  disebut persamaan fungsi eksplisit.

contohnya  $y = 3x^2 + 5x - 7$ ;  $y = x^2 + \sin x$

Kemudian, tidak semua fungsi dapat dituliskan dalam ekspresi eksplisit. Contohnya seperti berikut ini:

$$\cos(x + y) + \sqrt{(xy^2)} - 5x = 0;$$

$$y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 5y^2 - 6$$

$$1. \quad xy' + y^2 + x^2 + 1 = 0 \text{ atau } x \frac{dy}{dx} + y^2 + x^2 + 1 = 0$$

Persamaan diferensial Orde satu Implisit

$$2. \quad y'' - 2y + e^x = 0 \text{ atau } \frac{d^2y}{dx^2} - 2y + e^x = 0$$

**Bukan** Persamaan diferensial orde I, tetapi Persamaan diferensial Orde II bentuk implisit

$$3. y' = 2y + e^x$$

Persamaan diferensial orde satu bentuk eksplisit  $f(x, y) = 2y + e^x$

Secara umum, fungsi  $f(x, y) = c$ , di mana  $c$  adalah anggota bilangan real yang dikatakan sebagai persamaan fungsi implisit. Turunan fungsi implisit dapat memuat fungsi-fungsi implisit tanpa harus mengubah bentuk fungsi implisit menjadi fungsi eksplisit.

Menurunkan fungsi implisit terhadap  $x$  dapat dilakukan dengan cara:

1. Turunkan kedua ruas (ruas kanan dan ruas kiri) terhadap  $x$ ;
2. Menggunakan aturan rantai;
3. Tentukan  $\frac{dy}{dx}$ .

**Contoh 7** :  $(t + 1)dt - \frac{1}{y^2} dy = 0$

Tentukan solusi persamaan diferensial yang dapat dipisahkan pada bentuk di atas!

Pembahasan

$$(t + 1)dt - \frac{1}{y^2} dy = 0 \quad + \left(\frac{1}{y^2} dy\right)$$
$$\int (t + 1)dt = \int \frac{1}{y^2} dy \quad \times (-1)$$

$$\frac{1}{2}t^2 + t + c = \int y^{-2} dy$$

$$\frac{1}{2}t^2 + t + c = -y^{-1} + c$$

$$\frac{1}{2}t^2 + t + c = -y^{-1}$$

$$\left(-\frac{1}{2}t^2 - t - c\right)^{-1} = (y^{-1})^{-1}$$

$$\left(-\frac{1}{2}t^2 - t - c\right)^{-1} = y'$$

**Contoh 5 :**

$$\begin{array}{l} (y - y^2) \frac{dy}{dx} - x^2 = \\ \hline \phantom{(y - y^2) \frac{dy}{dx} = x^2} + x^2 \\ (y - y^2) \frac{dy}{dx} = x^2 \\ \hline \phantom{(y - y^2) \frac{dy}{dx} = x^2} \times (dx) \end{array}$$

$$\int (y - y^2) \cdot dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + c = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + c$$



## Kegiatan Pembelajaran III

### 1.3 Variabel yang dipisahkan

Persamaan diferensial  $y' = \frac{y+x}{x}$  merupakan PD yang tidak dapat dipisahkan (Husnah, n.d.).

Bukti :

$y' = \frac{y+x}{x} = \frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}$  (kemudian dipindah ruaskan namun kita bisa melihat bahwa tidak bisa terpisah)

$$= \frac{dy}{y+x} = \frac{dx}{x} \rightarrow \text{PD tidak dapat dipisahkan}$$



Dalam fungsi suatu persamaan diferensial yang memiliki bentuk  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  dapat disebut homogen jika :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Persamaan  $M(a, b)da + N(a, b)db = 0$  disebut homogen jika  $M(a, b)$  dan  $N(a, b)$  homogen dengan derajat sama. Persamaan homogen dilakukan menggunakan transformasi atau substitusi (Annisa Yanti Efendi, n.d.):

$$b = va$$



$$v = \frac{b}{a}$$

$$db = v da + a dv.$$

$$dv = \frac{b da - a db}{a^2}$$

Dengan transformasi maka diperoleh suatu persamaan diferensial dalam  $a$  dan  $b$  dengan variabel terpisah. Kemudian apabila substitusi dari persamaan homogen diubah menjadi bentuk variabel yang terpisah  $a$  dan  $v$ . Sehingga diperoleh :

**Contoh :**

1.  $x dy + y dx = 0$

Misal :

$$M_x = x, M'_x = 1$$

$$N_y = y, N'_y = 1$$

$$M'_x - N'_y = 1 - 1 = 0$$

$$x dy + y dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = \int 0$$

$$\ln y + \ln x = \ln c$$

$$yx = C$$



2. Selesaikanlah  $b' = \frac{a^2 + b^2}{ab}$

Pembahasan

$$b' = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$\frac{db}{da} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$abdb = (a^2 + b^2) da$$

$$M_a = ab$$

$$M'_a = b$$

$$N_b = (a^2 + b^2)$$

$$N'_b = 2b$$

$$M' - N' = b - 2b = -b \neq 0$$

$$b = va$$

$$a = \frac{v}{b}$$

$$da = \frac{vdb - bdv}{b^2}$$

$$b' = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$b' = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\frac{db}{da} = \frac{1}{v} + v$$

$$db = \left(\frac{1}{v} + v\right) da$$

$$db = \left(\frac{1}{v} + v\right) \left(\frac{vdb - bdv}{b^2}\right)$$

$$v dv - \frac{da}{a} = 0 \quad \frac{1}{2}v^2 - \ln|a| = c_1$$

$$b^2 = a^2 \ln a^2 + ca^2 \text{ untuk } b \neq 0 \text{ dan } a \neq 0$$



3. Tentukan apakah persamaan diferensial ini homogen atau tidak

$$y' = \frac{y^2}{x}$$

### Pembahasan

Kita bisa langsung melihat bahwa persamaan dibawah ini adalah persamaan tidak homogen karena kita dapat membuktikannya langsung.

Bukti :

$$f(tx, ty) = \frac{(ty)^2}{tx} = \frac{t^2 y^2}{tx} = t \frac{y^2}{x} \neq f(x, y)$$



$$4. \quad (x^2 + y^2)dx + xy \, dy = 0$$

### Pembahasan

Substitusikan

$$y = vx \text{ dan } dy = v \, dx + x \, dv$$

Maka :

$$(x^2 + y^2)dx + xy \, dy = 0$$

$$(x^2 + (vx)^2)dx + x(vx) (v \, dx + x \, dv) = 0$$

$$(x^2 + 2x^2v^2)dx + x^3v \, dv = 0$$

$$x^2(1 + 2v^2)dx + x^3v \, dv = 0 \text{ *Persamaan diferensial V. Terpisah*}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v \, dv}{(1 + 2v^2)} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v \, dv}{(1 + 2v^2)} = 0$$

$$\ln x + \frac{1}{4} \ln(1 + 2v^2) = c$$

$$\ln x + \frac{1}{4} \ln \left( 1 + 2 \frac{y^2}{x^2} \right) = c$$



5. Apakah persamaan diferensial  $y' = \frac{y+x}{x}$  merupakan persamaan diferensial homogen ?

Pembahasan

$$y' = \frac{y+x}{x} \rightarrow f(x,y) = \frac{y+x}{x}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y + \lambda x}{\lambda x}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(y+x)}{\lambda x} = \frac{(y+x)}{x} = f(x,y)$$



Maka persamaan diferensial  $y' = \frac{y+x}{x}$  merupakan persamaan homogeny.

6. Apakah persamaan diferensial  $y' = \frac{x^3+3y}{xy}$  merupakan persamaan diferensial homogen :

Pembahasan

$$f(x,y) = \frac{x^3+3y}{xy}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^3 + 3(\lambda y)}{(\lambda x)(\lambda y)}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^3 x^3 + 3\lambda y}{\lambda^2 xy}$$

$$= \frac{\lambda(\lambda^2 x^3 + 3y)}{\lambda^2 xy} = \frac{\lambda^2 x^3 + 3y}{\lambda xy} \neq f(x, y)$$



Maka persamaan diferensial  $y' = \frac{x^3+3y}{xy}$  merupakan bukan persamaan diferensial homogen

## Kegiatan Pembelajaran IV

### 1.4 Rangkuman

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika yang berfungsi untuk satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunan dalam berbagai orde. Persamaan diferensial dapat digolongkan menjadi beberapa bagian, yaitu persamaan diferensial biasa dan linear.

Suatu persamaan dikatakan persamaan diferensial biasa, bila terdapat satu variabel bebas saja. Kemudian, jika pangkat dari variabel terikat tidak lebih dari satu, maka disebutkan persamaan diferensial linear. Persamaan diferensial orde satu, hanya melibatkan turunan pertama pada fungsi tertentu dan biasanya lebih cepat mencari solusinya dan tidak melibatkan orde lain.

Bentuk umum dari berikut persamaan yang dapat diperoleh:

$$\frac{db}{da} + P(a)b = Q(a)$$

Keterangan:

$P(a)b = Q(a)$  merupakan fungsi linear.

Dari bentuk persamaan yang ada, dapat diselesaikan melalui beberapa langkah, sesuai yang telah dijelaskan pada materi subbab satu. Adapun materi prasyaratnya, yaitu perkalian turunan =  $u \times v' + u' \times v$  dan Integral tak tentu.

Persamaan Diferensial Parsial adalah persamaan yang memiliki lebih dari satu variabel terikat. Persamaan Diferensial Orde satu hanya dapat melibatkan turunan pertama atau bisa dikatakan suatu fungsi yang memuat satu variabel bebas ( $x$ ) dan satu variabel yang tak bebas ( $y$ ) beserta turunan pertamanya ( $y'$ ) yang dapat dikaitkan secara *eksplisit* ataupun *implisit*.

Solusi umum Persamaan Diferensial itu adalah fungsi yang memuat konstanta atau sering dikatakan sebagai variabel  $C$  dan memenuhi Persamaan Diferensial. Solusi khusus dapat diperoleh dari solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil nilai  $C$  suatu bilangan tertentu atau solusi yang memenuhi syarat yang diberikan. Persamaan Diferensial yang memiliki solusi umumnya diberikan oleh fungsi  $g(x, y, C) = 0$  dapat ditentukan dengan mengeliminasi  $C$  dari kedua persamaan:

$$\begin{cases} g(x, y, C) = 0 \\ \frac{d}{dx}g(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Metode Integral Langsung dapat digunakan jika persamaan diferensial dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  artinya bentuk persamaannya dapat diintegrasikan secara langsung dan dapat diperoleh menjadi  $\int dy = \int f(x)dx \rightarrow y = F(x) + C$ . Metode Pemisahan Variabel dapat digunakan jika persamaan diferensial mempunyai dua variabel dan dapat dipisahkan pada ruas yang berbeda dan dapat ditulis dalam bentuk:



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

→ dengan catatan  $f(x, y)$  dapat dipisahkan menjadi  $f(x)$  dan  $g(y)$

$$\text{Sehingga dapat diperoleh } \int g(y)dy = \int f(x)dx \rightarrow y = F(x) + C$$

Metode Substitusi biasanya digunakan pada persamaan diferensial homogen yang mempunyai dua variabel tetapi tidak dapat dipisahkan secara langsung pada ruas yang berbeda. Untuk melakukan menyelesaikan perlu diubah agar variabelnya dapat dipisahkan, biasanya diambil substitusi

$$y = v \cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Penyelesaian selanjutnya serupa dengan Metode Pemisahan Variabel.

Dalam fungsi suatu persamaan diferensial yang memiliki bentuk  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  dapat disebut homogen jika :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Persamaan  $M(a, b)da + N(a, b)db = 0$  disebut homogen jika  $M(a, b)$  dan  $N(a, b)$  homogen dengan derajat sama. Persamaan homogen dilakukan menggunakan transformasi atau substitusi:  $b = va$ .

## Kegiatan Pembelajaran V

### 1.5 Soal Diskusi Kelompok Mahasiswa

1.  $\frac{dy}{dx} + 4y = x - 2x^2$

#### Pembahasan

Faktor integral adalah :

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \dots} = e^{\dots}$$

$$e^{\int p(x)dx} y = \int Q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

$$e^{\dots} y = \int x - \dots e^{\dots} + C$$

$$y = \left( \frac{\dots - 2x^2}{4} - \frac{1 - \dots}{\dots} - \frac{1}{\dots} \right) + \frac{C}{\dots}$$

$$y = \left( \frac{\dots - 8x^2 - \dots + \dots - 1}{\dots} \right) + \frac{C}{e^{4x}}$$

$$y = \left( \frac{\dots - \dots - \dots}{8} \right) + \frac{C}{e^{4x}}$$

2.  $\frac{dy}{dx} = -2xy$

#### Pembahasan

$$\int \frac{dy}{dx} = \int -2xy$$

$$\ln y = -\dots + C$$

$$y = e^{-\dots} + C$$

$$y = C \cdot e^{-\dots}$$

3.  $y' + y = (1 + x)^2$

Pembahasan

$$\frac{dy}{dx} + y = (1 + x)^2$$

Faktor Integral adalah

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int 1} = e^x$$

$$e^{\int p(x)dx} y = \int Q(x) e^{\int p(x)dx} + C$$

$$e^x y = \int (1 + x)^2 e^x + C$$

$$e^x y = \int e^x (1 + x)^2 - 2e^x (\dots + x) + 2e^x + C$$

$$y = (1 + x)^2 - 2(\dots + x) + 2 + \frac{C}{e^x}$$

$$4. \quad xy' + y = 3$$

Pembahasan

Persamaan diubah menjadi:

$$x \frac{dy}{dx} = 3 - y \quad \text{kalikan kedua ruas dengan } \frac{dx}{x(3-y)}$$

$$\frac{1}{\dots - \dots} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{3-y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\ln(\dots - \dots) dy = \ln \dots + \ln \dots = \ln \dots$$

$$\ln(3-y)^{-\dots} = \ln \dots$$

$$(3-y)^{-\dots} = Cx$$

$$5. \quad 5. y^2(y+1) dx + y^2(y-1)dy = 0$$

Pembahasan

Persamaan diatas diubah menjadi:

$$\frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{y+1} dy = 0$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{y+1} dy = \ln |\dots|$$

$$\ln|\dots - \dots| + \ln|\dots + \dots| = \ln|\dots|$$

$$\ln|(\dots - \dots)(\dots + \dots)| = \ln|\dots|$$

$$(\dots - 1)(\dots + 1) = \dots$$

6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3x^2}{y^2}$  untuk  $y = 6$  ketika  $x = 0$

### Pembahasan

Persamaan di atas kita ubah menjadi  $y^2 dy = (x + 3x^2) dx$

$$y^2 dy = (x + 3x^2) dx$$

$$\frac{1}{\dots} y^3 = \dots x^2 + \dots + C_0 \quad \text{dikalikan 3}$$

$$y^3 = \frac{\dots}{\dots} x^2 + \dots x^{\dots} + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{\dots}{\dots} x^2 + \dots x^3 + C}$$

Substitusikan  $y = 6$  dan  $x = 0$ , sehingga diperoleh :

$$\dots = \sqrt[3]{\dots + \dots + C} \rightarrow C = \dots^3 = 216$$

Jadi, penyelesaiannya adalah :

$$y = \sqrt[3]{\frac{\dots}{2} x^2 + \dots x^3 + 216}$$

$$7. 2(y + 3)dx - xy dy = 0$$

Pembahasan

$$2(y + 3)dx - xy dy = 0$$

$$\frac{2}{x} dx + \frac{y}{y + 3} dy = 0$$

$$\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{\dots}{\dots + \dots} dy = 0$$

$$\dots \ln x + \int \frac{\dots + \dots - \dots}{\dots + \dots} dy = \dots$$

$$2 \ln x + \int \frac{\dots + \dots}{\dots + \dots} dy - \int \frac{\dots}{y + \dots} dy = \dots$$

$$2 \ln x + \dots - \int \frac{\dots}{y + \dots} \frac{\dots (y + \dots)}{\dots} = C$$

8. Periksa apakah  $(3y - 4x)dx + (y - x)dy = 0$  homogen atau tidak.

Pembahasan

karena persamaan diatas dapat ditulis kembali sebagai

$$v = \frac{y}{x} \text{ maka persamaan ini homogen}$$

9. Apakah PD  $(3y - 4x) dx + (y - x)dy = 0$  homogen atau tidak?

Pembahasan

$$(3y - 4x) dx + (y - x)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dots - 4x}{x - y}$$

$$\frac{x \left( 3 \cdot \frac{y}{x} - 4 \right)}{x \left( \dots - \frac{y}{x} \right)} = \frac{\dots}{dx}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{y}{x} - \dots}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{dy}{\dots}$$

Karena variabel PD di atas dapat ditulis kembali sebagai  $v = \frac{y}{x}$ , maka PD ini homogen.

10. Selesaikan Persamaan Diferensial

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

Pembahasan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy} = -\frac{\{1 + \left(\frac{\dots}{x}\right)^2\}}{2\left(\frac{y}{\dots}\right)}$$

Substitusi  $y = vx$  dan  $dy = vdx + xdv$  maka Persamaan Diferensial menjadi

$$(\dots + v^2)dx + 2v(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{2v dv}{1 + 3v^2} + \frac{\dots}{x} = 0$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{d(\dots + 3V^2)}{1 + \dots} + \int \frac{dx}{\dots} = C$$

$$\ln(1 + 3v^2)x^3 = C$$

maka Persamaan Umum Persamaan Diferensial

$$\left( \dots + 3 \frac{y^2}{x^2} \right) x^3 = C$$

11. Selesaikan persamaan diferensial yang telah diberikan!

$$(r) \frac{ds}{dr} + (2r + 1)s = (r)e^{-2x}$$

### Pembahasan

Langkah pertama, jika pada soal tidak sesuai dengan bentuk umum, maka harus disesuaikan.

$$(r) \frac{ds}{dr} + (2r + 1)s = (r)e^{-2r} \quad \text{kedua ruas dibagi } (r)$$



$$\frac{ds}{dr} + \left(\frac{2r+1}{\dots}\right)s = e^{-2x} \quad \text{Langkah ke 1 telah sesuai}$$

$$e^{\int 2r+\ln\dots} = e^{2r} \cdot e^{\ln\dots} = \dots e^{2r} \quad \text{Langkah ke 2 telah sesuai}$$

$$\left(\frac{ds}{dr} + \left(\frac{2r+1}{\dots}\right)s = e^{-2x}\right) \times \dots e^{2r} \quad \text{Langkah ke 3 telah sesuai}$$

$$\dots e^{2r} \frac{ds}{dr} + (\dots e^{2r}) \left(\frac{2r+1}{\dots}\right)s = (\dots e^{2r})e^{2r}$$

$$\frac{d}{dr}(re^{2r}s) = r$$

$$re^{2r}s = \int \dots dr$$

$$re^{2r}s = \frac{1}{\dots}r^2 + c$$

$$y = \frac{\dots}{2e^{2r}} + c$$

12. Temukanlah solusi dari

$$m \frac{dn}{dm} + 2n = m^{-3}$$

Pembahasan

$$\frac{dy}{dm} + \frac{\dots}{m}n = m^{-4}$$

$$p(m) = \frac{\dots}{m}$$

$$e^{\int \frac{\dots}{m} dm} = e^{2 \ln |\dots|} = e^{\ln |\dots|^2} = m^2$$

$$m^2 \left( \frac{dn}{dm} + \frac{\dots}{m} n = m^{-4} \right)$$

$$m^2 \frac{dn}{\dots} + 2 \dots y = m^{-2}$$

$$\frac{d}{dm} (m^2 \cdot n) dm = \dots dm$$

$$\int \frac{d}{dm} (m^2 \cdot n) dm = \int \dots dm$$

$$m^2 n = -m^{-1} + c$$

$$y = -\frac{1}{\dots} + \frac{c}{\dots}$$

13. Tentukanlah solusi dari

$$\frac{dg}{df} + 4g - e^{-f} = 0, \quad g(0) = \frac{4}{3}$$

Pembahasan

$$\frac{dg}{df} + 4g = e^{-f}$$

$$p(f) = 4$$

$$e^{\int p(f)} = e^{\int \dots df} = e^{4f}$$

$$e^{4f} \left( \frac{dg}{df} + 4g = e^{-f} \right)$$

$$e^{4f} \frac{dg}{\dots} + 4e^{\dots} g = e^{\dots}$$

$$\frac{d}{df} (e^{4f} \cdot g) = e^{\dots}$$

$$\int \frac{d}{df} (\dots \times \dots) = \int e^{3f} df$$

$$e^{4f} \cdot g = \frac{1}{\dots} e^{3f} + c$$

$$y = \frac{1}{\dots} e^{-f} + ce^{-4f}$$

14. Carilah solusi dari

$$\sin(a) \frac{db}{da} + b \cos(a) = a \sin(a), \quad b\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

Pembahasan

$$\int \frac{d}{da} (\sin(\dots)) \cdot b da = \int a \sin(a) da$$

$$\sin(\dots) \cdot b = -a \cos(\dots) + \sin(\dots) + c$$

$$b = -a \cot(a) + \dots + c \cdot \csc(\dots)$$

Ingat!

$$b\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$b(a) = 2$$

$$a = \frac{\pi}{2}$$

$$2 = -\frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots + c \cdot \csc(\dots)$$

$$2 = 0 + 1 + c$$

$$c = 1$$

Jadi,  $b = -a \cot(\dots) + \dots + \dots \csc(a)$

15. Temukanlah penyelesaian dari

$$i' + h^{-1}i = 4h^2$$

Pembahasan

$$\frac{di}{dh} + h^{-1}i = 4h^2$$

$$p(h) = h^{-1}$$

$$e^{\int p(h)dh} = e^{\int h^{-1}dh} = e^{\ln|\dots|} = h$$

$$i \cdot h = \int \dots h^2 \cdot h \, dh + c$$

$$hi = h^4 + c$$

$$i = \dots + \frac{c}{h}$$

16. Buktikan bahwa persamaan diferensial ini adalah persamaan homogen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Pembahasan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dots^2}{2xy} - \frac{\dots^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dots}{\dots} \cdot \frac{y}{x} - \frac{\dots}{\dots} \cdot \frac{x}{y} \rightarrow PD \text{ Homogen}$$

17. Tunjukkan bahwa persamaan berikut merupakan persamaan diferensial homogen

$$(x^3 - 3x^2)dx + 2xy \, dy = 0$$

Pembahasan

$$(x^3 - 3x^2)dx + 2xy \, dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \dots^2 - \dots^2}{2 \dots \dots} = f(x, y) \rightarrow PD \text{ Homogen}$$

18. Carilah solusi dari persamaan diferensial berikut

$$(3x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$$

Pembahasan

$$(3x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

Substitusikan  $y = vx$

Maka diperoleh

$$\frac{d(vx)}{dx} = \frac{... (...)^2 - x^2}{... x(...)}$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{...^2 (...^2 - 1)}{...^2 ...}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{...^2 - 1}{...} - \frac{...^2}{...}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{...^2 - 1}{...}$$

$$\int \frac{...}{...^2 - 1} dv = \int \frac{...}{...}$$

$$\int \frac{d(...^2 - 1)}{...^2 - 1} = \ln ... + \ln ...$$

$$\ln|...^1 - 1| = \ln |...|$$

$$|...^2 - 1| = |...|$$

$$\left| \left( \frac{...}{...} \right)^2 - 1 \right| = |...|$$

Jika  $y \geq x > 0$ , maka diperoleh  $\frac{...^2 - ...^2}{...^2} = ...$

Msaka solusi dari persamaan diferensial berikut adalah  $...^2 - ...^2 = ...^3$

19. Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$$

Pembahasan

Substitusikan

$$u = x + y$$

$$du = dx + dy, dy = du - dx$$

$$\dots dx + (\dots - \dots)(\dots - \dots) = 0$$

$$\dots dx + \dots du - \dots - \dots dx = 0$$

$$-\dots + (\dots - 1)du = 0 \rightarrow \text{bukan persamaan diferensial homogen}$$

$$-\int \dots + \int (\dots - 1) du = \int 0$$

$$\dots + \frac{1}{2} \dots^2 - \dots = C$$

$$\dots + \frac{1}{2} (\dots + \dots)^2 - (\dots + \dots) = c$$

Maka solusi umum dari persamaan diferensial berikut yaitu

$$\frac{1}{2}(x + y)^2 - y = C$$

20. Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

Pembahasan

$$\text{Misalkan } y = vx, dy = v dx + x dv$$

Substitusikan

$$(\dots^2 + \dots^2)dx + (\dots^2 - \dots(\dots))(\dots dx + \dots dv) = 0$$

$$\dots^2 dx + \dots^2 \dots dx + \dots^3 dv - \dots \dots^3 dv = 0$$

$$\dots^2 (1 + \dots)dx + \dots^3 dv \dots \dots^3 dv = 0$$

$$\int \frac{1}{\dots} dx + \int \frac{1 - \dots}{1 + \dots} dv = \int 0$$

$$\ln \dots + \int \frac{-1 + \dots}{1 + \dots} dv = \int 0$$

$$\ln \dots + \int \frac{-1 + \dots}{1 + \dots} + \frac{2}{1 + \dots} = C$$

$$\ln \dots + - \dots + 2 \ln(1 + \dots) = C$$

$$\ln \dots - \frac{\dots}{\dots} + 2 \ln \left( 1 + \frac{\dots}{\dots} \right) = C$$



## Kegiatan Pembelajaran VI

### 1.6 Latihan Mandiri Mahasiswa

1-14. Selesaikan persamaan diferensial orde-pertama

1.  $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$
2.  $(x + 1)\frac{dy}{dx} + y = x^2 - 1$
3.  $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = ax, |x| < 1$
4.  $y' + y \tan x = \sec x$
5.  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x$
6.  $y' - ay = f(x)$
7.  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$
8.  $y' + \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$
9.  $y' + yf(x) = f(x)$
10.  $\frac{dy}{dx} + 2y = x$
11.  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 3x^3; y = 3$  bilamana  $x = 1$
12.  $y' = e^{2x} - 3y; y = 1$  bilamana  $x = 0$
13.  $xy' + (1 + x)y = e^{-x}; y = 0$  bilamana  $x = 1$
14.  $y''' = e^{2x} + 3y; y = -1$  bilamana  $x = -3$

15-45. Selesaikan persamaan diferensial di bawah ini

15.  $x^3 dx + (y + 1)^2 dy = 0$
16.  $x^2(y + 1)dx - y^2(x - 1)dy = 0$

17.  $x\sqrt{y^2+9} dx + 5x^3y dy = 0$
18.  $x\sqrt{y^2+9} dx + 5x^9y dy = 0$
19.  $x\sqrt{y^2+9} dx + 5\sqrt{x^3-3}y dy = 0$
20.  $(x + 3y)dx + (3x - 9y)dy = 0$
21.  $xy^2 dx + 5x^3y dy = 0$
22.  $\sin x \cos y dx + 5 \cos x \sin y dy = 0$
23.  $(2x + 3y)dx + (3x + 8y)dy = 0$
24.  $(7x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0$
25.  $xy' = e - xy - y \quad (xy = v)$
26.  $y' = (y - x)^2 \quad (y - x = v)$
27.  $y' = \frac{y-x+1}{y-x+5} (y - x = v).$
28.  $y' = \frac{2x}{y+1} \rightarrow (y + 1)y' = 2$
29.  $y' = (1 + x)(1 + y)$
30.  $y' = \frac{y^2+xy^2}{x^2y-x^2}$
31.  $y \tan x \cdot y' = (4 + y^2) \sec^2x$
32.  $(x^2 + y^2)y' = xy$
33.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(y+1)}$
34.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x}$
35.  $(2x + y)dx + (x + 3y)dy = 0$
36.  $\frac{x dy}{dx} - 2y = -x$
37.  $y' + x\sqrt{y} = y$

38.  $x^5 dx + (y + 2)^2 dy = 0$   
 39.  $(1 + 2y)dx + (x - 4) dy = 0$   
 40.  $xy dx + (1 + x^2)dy = 0$   
 41.  $(xy + x)dx + (xy - x)dy = 0$   
 42.  $2x dy - 2y dx = 0$   
 43.  $(x + 2y) dx + (2x + 3y) dy = 0$   
 44.  $(y^2 - x^2) dx + xy dy = 0$   
 45.  $(x^3 + y^3) dx + 3xy^2 dy = 0$

46-50. Tentukan solusi dari persamaan diferensial

46.  $\frac{dy}{dx} + xy = 4x$   
 47.  $y' + 2xy = 2x$   
 48.  $x \frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$   
 49.  $\frac{dy}{dx} = -2xy$   
 50.  $4xy dx + (x^2 + 1)dy = 0$   
 51.  $2(y + 3)dx - xy dy$   
 52.  $y dx + (1 + x^2)$   
 53.  $(x^2 + y^2)dx + xy dy = 0$   
 54.  $(x^2 + 2y^2)dy + 2xy dx = 0$   
 55.  $(y \sin 2x - \cos x)dx + (1 + \sin^2 x)dy = 0$   
 56.  $x^2 \frac{dy}{dx} + \sin x - y = 0$   
 57.  $(a + b + 1)da - db = 0$   
 58.  $n \frac{dm}{dn} + 2m = 5n^3$

$$59. \frac{du}{dt} - \frac{u}{t} = te^t, \quad u(1) = e - 1$$

$$60. \frac{dg}{df} + \frac{3g}{f} + 2 = 3f, \quad g(1) = 1$$

$$61. \frac{dy}{dx} = -6xy$$

$$62. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

$$63. \frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$$

$$64. \frac{dy}{dx} = \frac{4y}{xy-3x}$$

$$65. y(x-1)dx + (y+2)x dy = 0$$

$$66. \frac{dy}{dx} = \frac{5y}{xy-2x}$$

$$67. 8xy dx + (x^2 + 3)dy = 0$$

$$68. \frac{dy}{dx} = 9xy$$

$$69. 2x^2y' = \frac{x^2+2}{6y^2+1}$$

$$70. \frac{dy}{dx} - 4y = e^{2t}, y(0) = 5$$

## INDEKS

### D

Diferensial, 3, 4,

### E

Eksak, 2

Eksplisit, 53

### F

Faktor integrasi, 52

### H

Homogen, 2, 23, 32,53

### I

Implisit, 53

Integral, 53

### L

Linear, 52

### O

Orde, 48

### P

Persamaan diferensial, 3,  
52

### S

Substitusi, 53

### T

Transformasi, 53

Turunan, 53

### V

Variabel, 52

## GLOSARIUM

**Diferensial** : Salah satu cabang kalkulus yang membicarakan tentang penurunan suatu fungsi yang berasal dari notasi integral.

**Eksak** : Memiliki arti pasti atau sudah tentu dan tidak dapat diubah-ubah.

**Eksplisit** : Penyampaian secara langsung sehingga makna dan isinya dapat diketahui secara mudah.

**Faktor Integrasi** : Faktor pengali dari hasil integral ekspresi eksponensial.

**Homogen** : Ekspresi persamaan.

**Implisit** : Penyampaian secara tidak langsung dan isinya terkesan tidak jelas.

**Integral** : Anti turunan diferensial.

**Linear** : Perubahan laju yang konstan terhadap waktu yang ditentukan berdasarkan arahnya, yang biasanya membicarakan suatu kuantitas.

**Orde** : pangkat yang tertinggi dari turunan yang muncul pada persamaan diferensial.

**Persamaan Diferensial** : Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung turunan yang terdiri dari satu atau beberapa

variabel bebas dan beberapa pangkat dari variabel terikat (variabel tidak bebas).

**Substitusi** : Metode untuk memperoleh atau mendapatkan penyelesaian dengan cara memasukkan suatu persamaan linear ke persamaan linear lainnya.

**Transformasi** : Suatu fungsi yang memetakan keadaan setiap titik dari posisi awal ke posisi baru.

**Turunan** : Suatu nilai fungsi yang dapat berubah seiring perubahan nilai yang dimasukan.

**Variabel** : Nilai yang berbentuk abjad dan sifatnya dapat berubah dalam soal maupun himpunan yang diberikan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Annisa Yanti Efendi. (n.d.). *Persamaan Diferensial Variabel Terpisah & Homogen* / PDF. Retrieved December 30, 2021, from <https://www.scribd.com/document/435979011/Persamaan-Diferensial-Variabel-Terpisah-Homogen-1>
- BAB IV PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER*. (2013). Matematika Teknik I. <http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/files/2013/05/BAB-IV-PERSAMAAN-DIFERENSIAL-LINIER.pdf>
- EduMatSains, J. L.-J., & 2019, U. (2019). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan. *Jurnal EduMatSains*, 3(2), 147-168 Pengembangan. <http://repository.uki.ac.id/id/eprint/1865>
- Husnah, N. (n.d.). *Persamaan Diferensial Homogen part 1 (bentuk)* - YouTube. Retrieved December 30, 2021, from <https://www.youtube.com/watch?v=haFv0nfvVAY>
- Ibrahim Boiliu, N., Rela Intarti, E., & Halomoan Lumbantoruan, J. (2021). *Influence of the Personal Competence of Teachers of Christian Religious Education on Learning Motivation in High School Students in South Tangerang City*. <https://www.atlantispress.com/article/125957922.pdf>
- Lumbantoruan, J. (2015). *Modul Kalkulus Lanjut 2015*.



Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. <http://repository.uki.ac.id/1637/>

Lumbantoruan, J. (2019a). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*. Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. [http://repository.uki.ac.id/1657/1/BMP Matematika.pdf](http://repository.uki.ac.id/1657/1/BMP%20Matematika.pdf)

Lumbantoruan, J. (2019b). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA*. Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. [http://repository.uki.ac.id/1811/1/BUKU MATERI PEMBELAJARAN.pdf](http://repository.uki.ac.id/1811/1/BUKU%20MATERI%20PEMBELAJARAN.pdf)

Lumbantoruan, J. (2019c). *Integral Tentu Jilid II*. Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. [http://repository.uki.ac.id/705/1/INTEGRAL TENTU JILID 2%2C EDISI 1%28Jitu Halomoan Lumbantoruan%2C S.Pd.%2CM.Pd%29 2.pdf](http://repository.uki.ac.id/705/1/INTEGRAL%20TENTU%20JILID%202%2C%20EDISI%201%28Jitu%20Halomoan%20Lumbantoruan%2C%20S.Pd.%2CM.Pd%29%202.pdf)

Lumbantoruan, J. (2020). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN PEMOGRAMAN LINEAR*. Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. [http://repository.uki.ac.id/1813/1/BUKU MATERI PEMBELAJARAN.pdf](http://repository.uki.ac.id/1813/1/BUKU%20MATERI%20PEMBELAJARAN.pdf)

Lumbantoruan, J. (2021a). *Mata Kualiah: Geometri II*.

Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia.

<http://repository.uki.ac.id/4807/1/URLbuktidokumenGeometriII.pdf>

Lumbantoruan, J. (2021b). *Mata Kuliah: Persamaan Diferensial*. <http://repository.uki.ac.id/3517/>

Lumbantoruan, J., EduMatSains, H. M.-J., & 2020, U. (2020). Analisis Miskonsepsi Pada Soal Cerita Teori Peluang Di Program Studi Pendidikan Matematika. *Jurnal EduMatSains*, 4(2), 156–173. <http://repository.uki.ac.id/1864/>

Lumbantoruan, J. H. (2016). *Modul Kalkulus Dasar*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2017). Pengembangan bahan ajar integral tak tentu berbasis model small group discussion di program studi pendidikan matematika FKIP UKI tahun 2016/2017. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, 10(2), 99–118. <http://ejournal.uki.ac.id/index.php/jdp/article/view/610>

Lumbantoruan, J., Technology, S. N.-S. S., & 2021, U. (2021). Development of a Constructivism-Based Statistics Module for Class VIII Junior High School Students. *Solid State Technology*, 64(2), 4427–4444. <http://repository.uki.ac.id/id/eprint/4134>

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics.

*Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, 560, 507–513.  
<https://doi.org/10.2991/assehr.k.210615.095>

Manalu, R. (2019). *Probalitas* (J. H. Lumbantoruan (Ed.)). UKI Press 2019.  
<http://repository.uki.ac.id/id/eprint/1304>

Nababan, S. (2021). *Persamaan Diferensial Orde Satu*. Universitas Terbuka.

*Rangkuman, Contoh Soal dan Pembahasan - Turunan Implisit*. (n.d.). Retrieved December 30, 2021, from [https://www.sheetmath.com/2017/06/rangkuman-contoh-soal-dan-pembahasan\\_21.html?m=1](https://www.sheetmath.com/2017/06/rangkuman-contoh-soal-dan-pembahasan_21.html?m=1)

Saputro, P. . (2020). Lihat artikel. *PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS ARTICULATE STORYLINE PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR KELAS VIII*, 1(1), 35–49.  
[https://scholar.google.com/citations?view\\_op=view\\_citation&hl=id&user=LOerqUQAAAAJ&alert\\_previ ew\\_top\\_rm=2&citation\\_for\\_view=LOerqUQAAAAJ :ZeXyd9-uunAC](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=id&user=LOerqUQAAAAJ&alert_previ ew_top_rm=2&citation_for_view=LOerqUQAAAAJ :ZeXyd9-uunAC)

Umami, M. (n.d.). *Modul persamaan diferensial 1*. Prodi Pendidikan Matematika FKIP. Retrieved December 30, 2021, from <https://www.slideshare.net/MayaUmami/modul-persamaan-diferensial-1>