

MODUL PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan Diferensial Orde II

Diajukan untuk Tugas Mata Kuliah

Persamaan Diferensial



Disusun Oleh:

Nadya Nainggolan

1913150013

Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Indonesia
2021-2022

PRAKATA

Puji dan syukur Penulis ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmat-Nya sehingga Penulis dapat menyelesaikan Modul “PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE II”.

Pertama-tama Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd yang telah membimbing dan memberikan masukan kepada Penulis sehingga Penulis dapat menyelesaikan Modul ini. Modul “PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE II” ini membahas tentang bentuk atau tipe persamaan diferensial orde II.

Penulis sadar bahwa Modul ini masih jauh dari kata sempurna karena kurangnya pengetahuan Penulis dalam menyusun Modul ini. Oleh karena itu, penulis menerima kritik dan saran yang membangun serta bersifat positif dari pembaca untuk memperbaiki dan menyempurnakan Modul ini. Semoga Modul ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Jakarta, 22 November 2021

Penulis,

Nadya Nainggolan

DAFTAR ISI

PRAKATA.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
PENDAHULUAN	1
Capaian Pembelajaran.....	4
Uraian Materi	4
7.1. Kegiatan Pembelajaran 1.	
Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 1	6
7.2. Kegiatan Pembelajaran 2.	
Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 2	11
7.3. Kegiatan Pembelajaran 3.	
Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 3	16
7.4. Kegiatan Pembelajaran 4.	
Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 4	20
7.5. Kegiatan Pembelajaran 5. Rangkuman	25
7.6. Kegiatan Pembelajaran 6.	
Soal Diskusi Kelompok Mahasiswa	27
7.7. Kegiatan Pembelajaran 7.	
Soal Latihan Mandiri Mahasiswa	39
INDEKS	44
GLOSARIUM.....	45
DAFTAR PUSTAKA	47

PENDAHULUAN

I. Deskripsi Mata Kuliah

Persamaan Diferensial merupakan persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Pada Modul ini akan dijelaskan tentang materi Persamaan Diferensial Orde II. Pada Persamaan Diferensial Orde II terdapat 4 tipe atau bentuk.

Persamaan Diferensial Orde II Tipe 1 terdapat turunan kedua dan suatu fungsi x dalam persamaannya. Kemudian, Persamaan Diferensial Orde II Tipe 2 terdapat turunan kedua, nilai x dan turunan pertama dalam persamaannya.

Selanjutnya, Persamaan Diferensial Orde II Tipe 3 terdapat turunan kedua, turunan pertama, dan nilai y dalam persamaannya. Terakhir, Persamaan Diferensial Orde II Tipe 4 terdapat turunan kedua, turunan pertama, nilai y , dan juga fungsi x dalam persamaannya, lalu dalam menyelesaikan persamaan diferensialnya dapat menggunakan bentuk fungsi komplementer dan bentuk integral khusus.

II. Tujuan Penulisan Modul

1. Untuk memenuhi tugas modul mata kuliah Persamaan Diferensial
2. Sebagai syarat untuk dapat mengikuti Ujian Akhir Semester mata kuliah Persamaan Diferensial

3. Agar mahasiswa/i mampu memahami Persamaan Diferensial Orde II
4. Agar mahasiswa/i mampu memahami Persamaan Diferensial Orde II Tipe 1 – Tipe 4

III. Petunjuk Penggunaan Modul Materi Pembelajaran

Petunjuk bagi Mahasiswa/i:

1. Bacalah Modul ini dengan teliti dari kata pengantar sampai dengan latihan soal, setelah itu pahami dengan benar seluruh materi dalam Modul.
2. Bacalah dengan seksama tujuan dari Modul ini untuk mengetahui pembelajaran yang dapat diperoleh setelah mempelajari Modul.
3. Modul ini berisi informasi tentang apa yang harus Anda lakukan untuk dapat mencapai tujuan pembelajaran.
4. Pelajari dengan teliti materi tiap kegiatan pembelajaran, lalu jika ada informasi yang kurang jelas atau Anda mengalami kesulitan dalam memahami setiap materi dalam modul, sebaiknya konsultasikan dengan Pengajar.
5. Perhatikan rumus dan langkah-langkah yang tertera dalam Modul, agar mudah dalam menyelesaikan soal-soal dalam Modul.
6. Setiap mempelajari sub-bab, Anda harus terlebih dahulu menguasai uraian-uraian materi, lalu melaksanakan tugas-tugas serta mengerjakan latihan soal (diskusi kelompok dan mandiri).

7. Kerjakan soal-soal dengan kemampuan Anda untuk mengetahui sejauh mana pengetahuan yang Anda punya.
8. Selesaikan latihan diskusi kelompok serta latihan mandiri yang terdapat dalam Modul agar pemahaman Anda semakin berkembang.
9. Kerjakan soal diskusi kelompok dengan teman kelompok belajar Anda.
10. Saat mengerjakan latihan soal mandiri, Anda tidak diperbolehkan berdiskusi dengan teman Anda.
11. Membahas hasil pekerjaan latihan soal mandiri yang sudah selesai Anda kerjakan dengan teman sekelas dalam bentuk kelompok.

MODUL 7

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE II

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
1. Mahasiswa dan mahasiswi diharapkan dapat memahami Persamaan Diferensial Orde II (Lumbantoruan, 2019g)	1. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 1 2. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 2 3. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 3
2. Mahasiswa dan mahasiswa diharapkan dapat mengerjakan atau menyelesaikan persoalan-persoalan yang berkaitan dengan Persamaan Diferensial Orde II (Lumbantoruan & Natalia, 2021)	4. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 4

MODUL 7

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE II

Bentuk umum persamaan diferensial orde II, yaitu:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

(Kusmaryanto, 2013)

atau

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_n(x)y = F(x)$$

(Yudistira, n.d.)

Pada pemodelan persamaan diferensial berorde 2 terdapat 4 tipe atau bentuk yang dapat dilihat di bawah ini (Zdz0DLWp6C, n.d.):

1. Tipe 1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$$

2. Tipe 2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

3. Tipe 3

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0$$

4. Tipe 4

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

7.1. Kegiatan Pembelajaran 1. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 1

Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 1:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Contoh:

1. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 6x^5$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 6x^5$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 3x^2 + 6x^5 dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 3x^2 + 6x^5 dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{6x^{5+1}}{5+1} + C_1$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{6x^6}{6} + C_1$$

$$= x^3 + x^6 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + x^6 + C_1$$

$$dy = x^3 + x^6 + C_1 dx$$

$$\int dy = \int x^3 + x^6 + C_1 dx$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{6+1}}{6+1} + C_1x + C_2 \\
 &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C_1x + C_2
 \end{aligned}$$

2. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 10x^5$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 10x^5$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 4x^3 + 10x^5 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 4x^3 + 10x^5 \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + \frac{10x^{5+1}}{5+1} + C_1$$

$$= \frac{4x^4}{4} + \frac{10x^6}{6} + C_1$$

$$= x^4 + \frac{5}{3}x^6 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + \frac{5}{3}x^6 + C_1$$

$$dy = x^4 + \frac{5}{3}x^6 + C_1 \, dx$$

$$\int dy = \int x^4 + \frac{5}{3}x^6 + C_1 \, dx$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^{4+1}}{4+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{x^{6+1}}{6+1} + C_1x + C_2 \\
 &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{21}x^7 + C_1x + C_2
 \end{aligned}$$

3. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10x^9 + 5x^4 + x$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10x^9 + 5x^4 + x$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 10x^9 + 5x^4 + x \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 10x^9 + 5x^4 + x \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x^{9+1}}{9+1} + \frac{5x^{4+1}}{4+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1$$

$$= \frac{10x^{10}}{10} + \frac{5x^5}{5} + \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$= x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$dy = x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 \, dx$$

$$\int dy = \int x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 \, dx$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^{10+1}}{10+1} + \frac{x^{5+1}}{5+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1x + C_2 \\
 &= \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2
 \end{aligned}$$

4. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4 \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^{5+1}}{5+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + C_1$$

$$= \frac{8}{6}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + C_1$$

$$= \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + C_1$$

$$dy = \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + C_1 \, dx$$

$$\int dy = \int \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + C_1 \, dx$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{6+1}}{6+1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + \frac{3}{10} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + C_1x + C_2 \\
 &= \frac{4}{21}x^7 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{3}{30}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + C_1x + C_2 \\
 &= \frac{4}{21}x^7 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{10}x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2
 \end{aligned}$$

5. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2 \, dx$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^{9+1}}{9+1} + \frac{10x^{5+1}}{5+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} + 2x + C_1 \\
 &= \frac{3}{10}x^{10} + \frac{10}{6}x^6 + \frac{2}{2}x^2 + 2x + C_1 \\
 &= \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + C_1
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + C_1$$

$$dy = \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + C_1 \, dx$$

$$\int dy = \int \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + C_1 \, dx$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{3}{10} \cdot \frac{x^{10+1}}{10+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{x^{6+1}}{6+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} + C_1x + C_2 \\
 &= \frac{3}{110}x^{11} + \frac{5}{21}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + C_1x + C_2 \\
 &= \frac{3}{110}x^{11} + \frac{5}{21}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C_1x + C_2
 \end{aligned}$$

7.2. Kegiatan Pembelajaran 2. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 2

Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

Contoh:

1. Carilah jawaban umum dari:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

Penyelesaian:

Misalnya:

$$p = \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots(1)$$

Maka, turunannya:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots(2)$$

Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam soal, menjadi

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p + 4x = 0$$

$$x \frac{dp}{dx} + p = -4x \quad \dots\dots\dots (3)$$

Perlu diingat:

$$\frac{d(x \cdot p)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d(xp)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot 1$$

$$\frac{d(xp)}{dx} = x \frac{dp}{dx} + p \quad \dots\dots\dots (4)$$

Apabila persamaan (3) = (4), maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = -4x$$

Kemudian kedua ruas diintegalkan, menjadi

$$\int \frac{d(xp)}{dx} = \int -4x \, dx$$

$$xp = -2x^2 + C_1$$

Substitusikan persamaan (1) ke dalam p , maka

$$x \frac{dy}{dx} = -2x^2 + C_1 \rightarrow \text{kedua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x + \frac{C_1}{x}$$

Setelah itu, kita integralkan kedua ruas, menjadi

$$\int \frac{dy}{dx} = \int -2x + \frac{C_1}{x} \, dx$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int -2x + C_1 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$y = -x^2 + C_1 \cdot \ln x + C_2$$

2. Carilah jawaban umum:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 8x = 0$$

Penyelesaian:

Misalnya:

$$p = \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots (1)$$

Maka, turunannya:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots (2)$$

Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam soal, menjadi

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p - 8x = 0$$
$$x \frac{dp}{dx} + p = 8x \dots\dots\dots (3)$$

Perlu diingat:

$$\frac{d(x \cdot p)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot \frac{dx}{dx}$$
$$\frac{d(xp)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot 1$$
$$\frac{d(xp)}{dx} = x \frac{dp}{dx} + p \dots\dots\dots (4)$$

Jika persamaan (3) = (4), maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = 8x$$

Kemudian, kedua ruas diintegalkan, menjadi

$$\int \frac{d(xp)}{dx} = \int 8x \, dx$$
$$xp = 4x^2 + C_1$$

Substitusikan persamaan (1) ke dalam p, maka

$$x \frac{dy}{dx} = 4x^2 + C_1 \rightarrow \text{kedua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{C_1}{x}$$

Setelah itu, kita integralkan kedua ruas, menjadi

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 4x + \frac{C_1}{x} dx$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 4x + C_1 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$y = 2x^2 + C_1 \cdot \ln x + C_2$$

3. Carilah penyelesaian umum dari:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12x = 0$$

Penyelesaian:

Misalnya:

$$p = \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots (1)$$

Maka, turunannya:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots (2)$$

Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam soal, menjadi

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p - 12x = 0$$

$$x \frac{dp}{dx} + p = 12x \dots\dots\dots (3)$$

Perlu diingat:

$$\frac{d(x \cdot p)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d(xp)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot 1$$

$$\frac{d(xp)}{dx} = x \frac{dp}{dx} + p \dots\dots\dots (4)$$

Jika persamaan (3) = (4), maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = 12x$$

Kemudian, kedua ruas diintegalkan, menjadi

$$\int \frac{d(xp)}{dx} = \int 12x \, dx$$
$$xp = 6x^2 + C_1$$

Substitusikan persamaan (1) ke dalam p , maka

$$x \frac{dy}{dx} = 6x^2 + C_1 \rightarrow \text{kedua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x + \frac{C_1}{x}$$

Setelah itu, kita integalkan kedua ruas, menjadi

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 3x + \frac{C_1}{x}$$
$$\int \frac{dy}{dx} = \int 3x + C_1 \cdot \frac{1}{x}$$
$$y = \frac{3x^2}{2} + C_1 \cdot \ln x + C_2$$

7.3. Kegiatan Pembelajaran 3. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 3

Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 3:

$$a \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0$$

Misalnya:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2, \frac{dy}{dx} = m, \text{ dan } y = 1$$

Kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan di atas, sehingga persamaannya menjadi:

$$am^2 + bm + c = 0$$

Maka, $m = m_1$ dan $m = m_2$

Dimana m adalah akar-akar penyelesaiannya (Lumbantoruan, 2015).

Menurut akar-akar penyelesaiannya:

- Apabila $m_1 \neq m_2$, maka
$$Y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

A dan $B =$ Konstanta (dapat juga ditulis C_1 dan C_2)
- Apabila $m_1 = m_2$, maka
$$Y = e^{m_1x}(A + Bx)$$
- Jika akar-akar penyelesaiannya kompleks atau $m = a + bj$ atau $m = a + bi$, maka
$$Y = e^{ax}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

Contoh (Sukardi, 2017)

1. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari PD, yaitu

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow \text{lalu difaktorkan menjadi}$$

$$(m - 2)(m - 3) = 0$$

Maka, $m_1 = 2$ dan $m_2 = 3$

Karena $m_1 \neq m_2$, maka penyelesaian umumnya, yaitu

$$Y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$Y = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

2. Tentukan persamaan umum dari persamaan diferensial berikut ini:

$$4\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari PD, yaitu

$$4m^2 - 12m + 5 = 0 \rightarrow \text{lalu difaktorkan menjadi}$$

$$(2m - 1)(2m - 5) = 0$$

Maka, $m_1 = \frac{1}{2}$ dan $m_2 = \frac{5}{2}$

Karena $m_1 \neq m_2$, maka penyelesaian umumnya, yaitu

$$Y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$Y = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{\frac{5}{2}x}$$

3. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari PD, yaitu

$$m^2 - 8m + 16 = 0 \rightarrow \text{lalu difaktorkan menjadi}$$

$$(m - 4)(m - 4) = 0$$

$$\text{Maka, } m_1 = m_2 = 4$$

Karena $m_1 = m_2$, maka penyelesaian umumnya, yaitu

$$Y = e^{m_1x}(A + Bx)$$

$$Y = e^{4x}(A + Bx)$$

4. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari PD, yaitu

$$m^2 + 9 = 0$$

$$m^2 = -9$$

$$m = \sqrt{-9}$$

$$m = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9}$$

$$m = i \cdot \sqrt{9} \quad \rightarrow \sqrt{-1} = i$$

$$m = 3i$$

Karena akarnya imajiner dengan $a = 0$ dan $\beta = 3$, maka penyelesaian umumnya, yaitu

$$Y = e^{ax}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

$$Y = e^{0x}[A \cos 3x + B \sin 3x]$$

$$Y = A \cos 3x + B \sin 3x$$

5. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini:

$$4 \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari PD, yaitu

$$4m^2 + 4m + 1 = 0 \quad \rightarrow \text{lalu difaktorkan menjadi}$$

$$(2m + 1)(2m + 1) = 0$$

$$\text{Maka, } m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$$

Karena $m_1 = m_2$, maka penyelesaian umumnya, yaitu

$$Y = e^{m_1 x}(A + Bx)$$

$$Y = e^{-\frac{1}{2}x}(A + Bx)$$

7.4. Kegiatan Pembelajaran 4. Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 4

Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 4:

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

Persamaan diferensial tipe 4 juga dikenal dengan 2 istilah, yaitu Fungsi Komplementer dan Integral Khusus.

1. Fungsi Komplementer

Fungsi komplementer didapat dengan memecahkan persamaan jika $f(x) = 0$, yaitu:

- Untuk akar yang berbeda

$$Y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

- Untuk akar kembar

$$Y = e^{m_1x}(A + Bx)$$

- Untuk akar imajiner

$$Y = e^{ax}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

2. Integral Khusus

Integral khusus didapat dengan menggunakan bentuk umum dari fungsi persamaan pada ruas kanan, dengan cara mensubstitusikan bentuk umum ke dalam persamaan dan menyamakan koefisien-koefisiennya (Lumbantoruan, 2019c) (Lumbantoruan, 2017).

Terdapat 2 bentuk umum, yaitu:

- Jika ruas kanan adalah fungsi berderajat satu, maka

$$Y = Cx + D$$

- Jika ruas kanan adalah fungsi berderajat dua, maka

$$Y = Cx^2 + Dx + E$$

3. Jawaban = Jawaban Fungsi Komplementer + Integral Khusus

Contoh

1. Tentukan persamaan diferensial dari:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 13 = 0$$

Penyelesaian:

$$m^2 + 6m + 13 = 0$$

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} \rightarrow \sqrt{-1} = i \\ &= \frac{-6 \pm 4i}{2} \\ &= -3 \pm 2i \end{aligned}$$

Karena akar di atas imajiner dengan $a = -3$ dan $\beta = 2$, maka penyelesaian umumnya, yaitu

$$Y = e^{ax}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

$$Y = e^{-3x}[A \cos 2x + B \sin 2x]$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial di atas adalah

$$Y = e^{-3x}[A \cos 2x + B \sin 2x].$$

2. Selesaikan persamaan diferensial dari:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

dengan menggunakan bentuk integral khusus (Syafi'i, 2011).

Penyelesaian:

$$Y = Cx^2 + Dx + E$$

Maka,

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx + D$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C$$

Kemudian nilai y , $\frac{dy}{dx}$, dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ dimasukkan ke dalam persamaan semula pada soal, maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

$$2C - 5(2Cx + D) + 6(Cx^2 + Dx + E) = x^2$$

$$2C - 10Cx - 5D + 6Cx^2 + 6Dx + 6E = x^2$$

$$6Cx^2 + (6D - 10C)x + 2C - 5D + 6E = x^2$$

Bentuk persamaan di atas dapat ditulis seperti berikut:

$$6Cx^2 + (6D - 10C)x + (2C - 5D + 6E) = 1x^2 + 0x + 0$$

Setelah itu, dengan menyamakan koefisien dari x yang berpangkat sama, maka

$$x^2 \rightarrow 6C = 1$$

$$C = \frac{1}{6}$$

$$x \rightarrow 6D - 10C = 0$$

$$6D - 10\left(\frac{1}{6}\right) = 0$$

$$6D - \frac{5}{3} = 0$$

$$6D = \frac{5}{3}$$

$$D = \frac{5}{18}$$

$$0 \rightarrow 2C - 5D + 6E = 0$$

$$2\left(\frac{1}{6}\right) - 5\left(\frac{5}{18}\right) + 6E = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{25}{18} + 6E = 0$$

$$\frac{6 - 25}{18} + 6E = 0$$

$$-\frac{19}{18} + 6E = 0$$

$$6E = \frac{19}{18}$$

$$E = \frac{19}{108}$$

Integral Khusus:

$$Y = Cx^2 + Dx + E$$

$$Y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan bentuk integral khusus adalah $Y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$.

3. Selesaikan persamaan diferensial dari:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

dengan menggunakan bentuk fungsi komplementer (Lumbantoruan, 2020b).

Penyelesaian:

$$m^2 - 10m + 25 = 0$$

$$(m - 5)(m - 5) = 0$$

$$m = 5 \text{ atau } m = 5$$

Karena akarnya kembar, maka bentuk fungsi komplementernya, yaitu

$$Y = e^{m_1x}(A + Bx)$$

$$Y = e^{5x}(A + Bx)$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan bentuk fungsi komplementer adalah $Y = e^{5x}(A + Bx)$.

7.5. Kegiatan Pembelajaran 5. Rangkuman

1. Tipe Pertama:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

2. Tipe Kedua:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

3. Tipe Ketiga:

$$a \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0$$

Menurut akar-akar penyelesaiannya:

- Jika $m_1 \neq m_2$, maka

$$Y = Ae^{m_1x} + B e^{m_2x}$$

A dan B = Konstanta (dapat juga ditulis C_1 dan C_2)

Jika $m_1 = m_2$, maka

$$Y = e^{m_1x}(A + Bx)$$

- Jika akar-akar penyelesaiannya kompleks atau $m = a + bj$ atau $m = a + bi$, maka

$$Y = e^{ax}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

4. Tipe Keempat

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

Persamaan diferensial tipe 4 juga dikenal dengan 2 istilah, yaitu Fungsi Komplementer dan Integral Khusus.

1. Fungsi Komplementer

Fungsi komplementer didapat dengan memecahkan persamaan jika $f(x) = 0$, yaitu:

- Untuk akar yang berbeda

$$Y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

- Untuk akar kembar

$$Y = e^{m_1x}(A + Bx)$$

- Untuk akar imajiner

$$Y = e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

2. Integral Khusus

Integral khusus didapat dengan menggunakan bentuk umum dari fungsi persamaan pada ruas kanan, dengan cara mensubstitusikan bentuk umum ke dalam persamaan dan menyamakan koefisien-koefisiennya.

Terdapat 2 bentuk umum, yaitu:

- Jika ruas kanan adalah fungsi berderajat satu, maka

$$Y = Cx + D$$

- Jika ruas kanan adalah fungsi berderajat dua, maka

$$Y = Cx^2 + Dx + E$$

3. Jawaban = Jawaban Fungsi Komplementer + Integral Khusus

7.6. Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Diskusi Kelompok Mahasiswa

1. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x^3 + x$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x^3 + x \quad dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \dots + \dots dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^{3+1}}{\dots + \dots} + \frac{x^{1+1}}{\dots + \dots} + C_1$$

$$= \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + C_1$$

$$= \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^4 + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + C_1$$

$$dy = \frac{1}{2} x^4 + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + C_1 \quad dx$$

$$\int dy = \int \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + C_1 \dots + C_2$$

$$= \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + C_1 \dots + C_2$$

2. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^7 + 4x$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^7 + 4x \quad dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \dots + \dots dx$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^{7+1}}{\dots + \dots} + \frac{4x^{1+1}}{\dots + \dots} + C_1 \\ &= \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + C_1 \\ &= \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots x^{\dots} + C_1 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}x^8 + \dots x^{\dots} + C_1$$

$$dy = \frac{3}{8}x^8 + \dots x^{\dots} + C_1 \quad dx$$

$$\int dy = \int \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots x^{\dots} + \dots dx$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{8} \cdot \frac{x^{8+1}}{\dots + \dots} + \frac{2x^{2+1}}{\dots + \dots} + C_1 \dots + C_2 \\ &= \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + C_1 \dots + C_2 \end{aligned}$$

3. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x^5 + x^3 + 6$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x^5 + x^3 + 6 \quad dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \dots + \dots + \dots \quad dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^{5+1}}{\dots + \dots} + \frac{x^{3+1}}{\dots + \dots} + \dots + C_1$$

$$= \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \dots + C_1$$

$$= \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{6} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1$$

$$dy = \frac{5}{6} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1 \quad dx$$

$$\int dy = \int \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1 \quad dx$$

$$y = \frac{5}{6} \cdot \frac{x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + \frac{6x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + C_1 \dots + C_2$$

$$= \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1 \dots + C_2$$

4. Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 11x^{10} + 7x^6 + x + 4$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 11x^{10} + 7x^6 + x + 4 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \dots + \dots + \dots + \dots \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{11x^{10+1}}{\dots + \dots} + \frac{7x^{6+1}}{\dots + \dots} + \frac{x^{1+1}}{\dots + \dots} + \dots + C_1$$

$$= \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \dots + C_1$$

$$= \dots + \dots + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\dots} + \dots + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1$$

$$dy = x^{\dots} + \dots + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + C_1 \, dx$$

$$\int dy = \int x^{\dots} + \dots + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots + \dots \, dx$$

$$y = \frac{x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + \frac{x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + \frac{4x^{\dots+1}}{\dots + \dots} + C_1 \dots + C_2$$

$$= \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots x^{\dots} + C_1 \dots + C_2$$

5. Carilah persamaan diferensial orde 2 berikut ini :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Penyelesaian:

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m - \dots)(m - \dots) = 0$$

$$m_1 = \dots \text{ dan } m_2 = 3$$

Karena $m_1 \neq m_2$, maka:

$$Y = C_1 e^{\dots x} + C_2 e^{\dots x}$$

6. Carilah jawaban umum dari soal berikut:

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 13x = 0$$

Penyelesaian:

Misalnya:

$$p = \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots (1)$$

Maka, turunannya:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots y}{d \dots} \dots\dots\dots (2)$$

Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam soal, menjadi

$$x \cdot \frac{\dots}{dx} + \dots - \dots x = 0$$

$$\dots \frac{\dots}{dx} + \dots = 13x \dots\dots\dots (3)$$

Perlu diingat:

$$\frac{d(x \cdot p)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d(x \cdot p)}{dx} = x \cdot \ddot{\dots} + p \cdot \dots$$

$$\frac{d(x \cdot p)}{dx} = x \ddot{\dots} + \dots \dots \dots (4)$$

Jika persamaan (3) = (4), maka

$$\frac{\dots (\dots)}{dx} = \dots x$$

Kemudian, kedua ruas diintegalkan, menjadi

$$\int \frac{d(xp)}{dx} = \int 13x dx$$

$$\dots = \ddot{\dots} \dots + C_1$$

Substitusikan persamaan (1) ke dalam p , maka

$$x \ddot{\dots} = \ddot{\dots} x^2 + C_1 \rightarrow \text{kedua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{13}{2}x + \frac{C_1}{\dots}$$

Setelah itu, kita integralkan kedua ruas, menjadi

$$\int \frac{dy}{dx} = \int \frac{13}{2}x + \frac{C_1}{x}$$

$$\int \ddot{\dots} = \int \ddot{\dots} x + C_1 \cdot \frac{1}{\dots}$$

$$y = \frac{\ddot{\dots}}{2} x^{\dots} + C_1 \cdot \dots + \dots$$

7. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari PD, yaitu

$$m^2 - \dots + \dots = 0$$

Kemudian, kita faktorkan menjadi:

$$(m - \dots)(m - \dots) = 0$$

Maka,

$$m_1 = \dots \text{ dan } m_2 = \dots$$

Karena $m_1 \neq m_2$, maka penyelesaian umum, yaitu

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

$$y = \dots + \dots$$

8. Tentukan penyelesaian umum dari Persamaan Diferensial berikut ini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 15y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari PD, yaitu

$$m^2 + 15 = 0$$

Perhatikan bahwa:

$$\dots + 15 = 0$$

$$m^2 = \dots$$

$$m = \sqrt{\dots}$$

$$m = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots}$$

$$m = i \cdot \sqrt{\dots} \quad \rightarrow \sqrt{-1} = i$$

$$m = \dots i$$

Karena akarnya imajiner dengan $a = \dots$ dan $\beta = \dots$, maka penyelesaian umumnya, yaitu

$$y = e^{ax}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

$$y = e^{0x}[\dots + \dots]$$

$$y = C_1 \cos \dots + C_2 \sin \dots$$

9. Tentukan persamaan umum persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 13y = 0$$

Penyelesaian:

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

Dengan menggunakan rumus ABC untuk menentukan akar-akar persamaan kuadratnya, maka diperoleh

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - \dots(1)(\dots)}}{\dots(\dots)}$$

$$m_{\dots} = \frac{4 \pm \sqrt{\dots}}{\dots}$$

$$m_{\dots} = \dots$$

Karena akarnya imajiner, dengan $a = \dots$ dan $\beta = \dots$, maka persamaan diferensial tersebut, yaitu

$$Y = e^{ax}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

$$Y = e^{\dots x} [A \dots + B \dots]$$

Jadi, penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut adalah $Y = e^{\dots x} [A \cos \dots x + B \sin \dots x]$.

10. Selesaikan persamaan diferensial berikut ini:

$$y'' + y' - 30y = 0$$

Penyelesaian:

$$m^2 + m - \dots = \dots$$

$$(m - \dots)(\dots + 6) = 0$$

$$m_1 = \dots \text{ atau } m_2 = - \dots$$

Karena akarnya berbeda, maka bentuk persamaan diferensialnya, yaitu

$$Y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

$$Y = Ae^{\dots x} + Be^{- \dots x}$$

11. Selesaikan persamaan diferensial dari:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

dengan menggunakan bentuk fungsi komplementer.

Penyelesaian:

$$\dots^2 - \dots m + 12 = 0$$

$$(m - \dots)(m - \dots) = \dots$$

$$m = \dots \text{ atau } m = \dots$$

Karena akarnya berbeda, maka bentuk fungsi komplementernya, yaitu

$$Y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

$$Y = \dots e^{\dots x} + \dots e^{\dots x}$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan bentuk fungsi komplementer adalah $Y = Ae^{\dots x} + Be^{\dots x}$.

12. Selesaikan persamaan diferensial dari:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = x^2$$

dengan menggunakan bentuk integral khusus.

Penyelesaian:

$$Y = Cx^2 + Dx + E$$

Maka,

$$\frac{dy}{dx} = \dots Cx + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \dots$$

Kemudian nilai y , $\frac{dy}{dx}$, dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ dimasukkan ke dalam persamaan semula pada soal, maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = x^2$$

$$\dots C - 7(\dots + \dots) + 10(\dots + \dots + \dots) = \dots^2$$

$$\dots - \dots Cx - \dots D + \dots Cx^2 + \dots Dx + \dots E = \dots^2$$

$$10C \dots^2 + (\dots D - 14C)x + 2C - \dots D + \dots E = \dots^2$$

Bentuk persamaan di atas dapat ditulis seperti berikut:

$$\dots Cx^2 + (\dots D - \dots C)x + (2C - \dots D + 10E)$$

$$= 1x^2 + 0x + 0$$

Setelah itu, dengan menyamakan koefisien dari x yang berpangkat sama, maka

$$x^2 \rightarrow \dots C = 1$$

$$C = \frac{1}{\dots}$$

$$x \rightarrow 10D - 14C = 0$$

$$\dots D - \dots \left(\frac{1}{10} \right) = 0$$

$$\dots D - \frac{7}{\dots} = 0$$

$$\dots D = \frac{\dots}{\dots}$$

$$D = \frac{\dots}{50}$$

$$0 \rightarrow 2C - 7D + 10E = 0$$

$$2 \left(\frac{\dots}{\dots} \right) - \dots \left(\frac{\dots}{\dots} \right) + \dots E = 0$$

$$\frac{1}{5} - \frac{\dots}{\dots} + \dots E = 0$$

$$\frac{\dots - \dots}{50} + \dots E = 0$$

$$-\frac{\dots}{\dots} + \dots E = 0$$

$$\dots E = \frac{\dots}{\dots}$$

$$E = \frac{\dots}{\dots}$$

Integral Khusus:

$$Y = \dots x^2 + \dots x + \dots$$

$$Y = \frac{\dots}{\dots}x^2 + \frac{\dots}{\dots}x + \frac{\dots}{\dots}$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan bentuk integral khusus adalah $Y = \frac{\dots}{10}x^2 + \frac{\dots}{50}x + \frac{\dots}{500}$.

7.7. Kegiatan Pembelajaran 7. Soal Latihan Mandiri Mahasiswa

1. Carilah jawaban umum persamaan diferensial :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x + 2x$$

2. Carilah jawaban umum persamaan diferensial (Lumbantoruan & Male, 2020):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^8 + 3$$

3. Carilah jawaban umum persamaan diferensial (Lumbantoruan, 2019a):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^4 + 9x^5 + 10$$

4. Carilah jawaban umum persamaan diferensial (Lumbantoruan, 2020a):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2 + 4x^2 + x^2 + 8$$

5. Carilah jawaban umum persamaan diferensial (Lumbantoruan, 2019b):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^3 + 7x^6 + 5x^4 + x^3 + 2$$

6. $y'' + 5y' + 6y = 0$
7. $y'' + 6y' + 9y = 0$
8. $y'' + 67 + 12y = 0$
9. $y'' - 4y' + 13y = 0$
10. $y'' - 9y = x$
11. $y'' - 4y' + 5y = 0$

12. $y'' + y' - 6y = 2x^2$

13. $y'' + y' = 4x$

14. $y'' + 6y' + 9y = 3e^{-2x}$

15. $y'' + 4y = 0$

16. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

17. $y'' - 3y' + 2y = \cos x$

18. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + \cos x$

19. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

20. $y'' - 3y' + 2y = e^x$

21. $y'' - 2y' - 3y = 2e^{4x}$

22. $y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10 \sin x$

23. $y'' - 3y' - 4y = 16x - 12e^{2x}$

24. $y'' - 2y' - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x}$

25. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini (Boiliu et al., 2021):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 100y = 0.$$

26. Carilah penyelesaian persamaan diferensial dari (Lumbantoruan, 2018):

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

27. Carilah penyelesaian persamaan diferensial dari (Lumbantoruan, 2019d):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

28. Carilah penyelesaian umum dari soal berikut ini (Desi & Lumbantoruan, 2020):

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 11x = 0$$

29. Carilah penyelesaian umum dari soal berikut ini (Saputro & Lumbantoruan, 2020):

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 13x = 0$$

30. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini (Lumbantoruan, 2019f):

$$7 \frac{d^2y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

31. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini (Male & Lumbantoruan, 2021):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 12 \frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

32. Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut ini (Lumbantoruan, 2016):

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 14y = 0$$

33. $y'' - 3y' - 4y = 3x^2 + 2$

34. $y'' - 9y = x + 2$

35. $y'' - 3y' - 4y = e^{2x}$

36. $y'' + 4y = 2 \sin x$

37. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

38. $y'' + 4y = 2 \cos 2x$

39. $y'' + 2y' = 3x^2 + 2$

$$40. y'' + 3y' - 4y = 3x^2 + 2$$

$$41. y'' + 9y = \sin 3x + e^{2x}$$

$$42. y'' + y' = e^x + 3x$$

$$43. y'' - 4y = 4 \sin x, y = 4, y' = 0, \text{ bila } x = 0$$

$$44. y'' - 5y' + 6y = 2e^x, y = 1, y' = 0, \text{ bila } x = 0$$

$$45. y'' + y = \tan x$$

$$46. y'' + 9y = \sec^2 3x$$

$$47. y'' + y = \operatorname{cosec} x \cot x$$

$$48. y'' + 3y' - 4y = 4x^2 + 4$$

$$49. y'' + 6y = 2 \cos 2x$$

$$50. y'' + y' = e^x + 6x$$

$$51. y'' + y = \cot x$$

$$52. y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$53. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$$54. y'' + 4y = 3 \operatorname{cosec} 2x$$

$$55. y'' + 4y = 3 \operatorname{cosec} x$$

$$56. 4y'' + y = 2 \sec\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$57. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$$

58. Tunjukkan bahwa fungsi $y = 2e^{-x} + 3e^{2x}$ merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial dari (Simorangkir & Lumbantoran, 2021):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 2y$$

$$59. (5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$$

$$60. y' + (2x + 1)y^2 = 0, y(0) = -\frac{1}{8}$$

$$61. (2y^2 + 3x)dx + 2xy dy = 0$$

$$62. y' = y(xy^3 - 1)$$

$$63. y'' + 10y' + 25y = x^2 + 2x$$

$$64. y'' + 3y' + 2y = 5e^{-2t}, y(0) = 2, y'(0) = 1$$

$$65. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}, x > 0$$

$$66. y^{(4)} - 5y' + 4y = 0$$

$$67. \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$68. y'' + 4y' = x$$

$$69. y'' + y' = 6 \sin 2x$$

70. Persamaan diferensial dari (Lumbantoruan, 2019e):

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 8 = 0$$

INDEKS

A

Akar-akar, 39

D

Derajat, 39

I

Imajiner, 39

Integral, 17, 18, 20, 22, 23, 38, 41, 42

K

Koefisien, 39, 42

Kompleks, 39

Komplementer, 17, 18, 22, 23, 39

Konstanta, 13, 22, 38

O

Orde, 1, 3, 8, 13, 17, 38, 41, 42, 43

P

Pangkat, 38, 39

Persamaan Diferensial, 1, 3, 8, 13, 17, 29, 38, 41, 42, 43

S

Substitusi, 38

T

Turunan, 38

GLOSARIUM

Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi yang belum diketahui, dan atau persamaan itu mungkin juga melibatkan fungsi itu sendiri dan konstanta.

Integral

Bentuk penjumlahan kontinu yang terdiri dari anti turunan atau kebalikan dari turunan.

Orde

Pangkat tertinggi turunan yang muncul pada persamaan diferensial tersebut.

Substitusi

Suatu metode untuk memperoleh penyelesaian dengan memasukkan suatu persamaan linear satu ke persamaan linear yang lain.

Turunan

Suatu perhitungan terhadap perubahan nilai fungsi karena perubahan nilai input (variabel).

Konstanta

Suku pada operasi aljabar yang berupa bilangan dan tidak memuat variabel.

Akar-akar

Sebuah bilangan yang hasilnya bukan termasuk bilangan rasional atau bilangan irasional, dan digunakan sebagai bentuk lain untuk menyatakan sebuah bilangan berpangkat.

Kompleks

Bilangan yang terdiri atau terbentuk dari bilangan real (R) dan imajiner (Im).

Imajiner

Bilangan yang dapat didefinisikan dengan $i^2 = -1$, dengan i merupakan simbol angka imajiner.

Komplementer

Suatu himpunan A adalah himpunan yang anggota-anggotanya di dalam himpunan semesta S dan bukan anggota dari himpunan A.

Koefisien

Faktor perkalian dalam beberapa suku dari sebuah polinomial, deret, atau ekspresi; biasanya berupa angka, tetapi bisa juga ekspresi apapun (termasuk variabel seperti a , b dan c).

Derajat

Biasanya disimbolkan dengan $^\circ$, adalah ukuran sudut yang dapat dibentuk pada sebuah bidang datar, menggambarkan $1/360$ dari sebuah putaran penuh.

Pangkat

Hasil perkalian antara suatu bilangan dengan bilangan itu sendiri atau lebih sederhananya bilangan kuadrat merupakan perkalian berulang.

DAFTAR PUSTAKA

- Boiliu, N. I., Stepanus, Intarti, E. R., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Influence of the Personal Competence of Teachers of Christian Religious Education on Learning Motivation in High School Students in South Tangerang City. *Atlantis Press*, 560, 298–302.
- Desi, D., & Lumbantoruan, J. H. (2020). PENGEMBANGAN BUKU CERITA MATEMATIKA PADA KELAS VII SMP DALAM MATERI PERBANDINGAN. *EduMatSains: Jurnal Pendidikan, Matematika Dan Sains*, 1(1), 23–34. <http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains>
- Kusmaryanto, S. (2013). BAB IV PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER. *Universitas Brawijaya*, 1–27. <http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/files/2013/05/BAB-IV-PERSAMAAN-DIFERENSIAL-LINIER.pdf>
- Lumbantoruan, J. H. (2015). Modul Kalkulus Lanjut 2015. *Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia*.
- Lumbantoruan, J. H. (2016). Modul Kalkulus Dasar. *Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia*.
- Lumbantoruan, J. H. (2017). PENGEMBANGAN BAHAN AJAR INTEGRAL TAK TENTU BERBASIS MODEL SMALL GROUP DISCUSSION DI PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UKI TAHUN 2016/2017. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, 10(2), 99–118.
- Lumbantoruan, J. H. (2018). Modul Geometri II (Geometri Analitik dan Transformasi). *Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia*, 1–35.

- Lumbantoruan, J. H. (2019a). Buku Materi Pembelajaran Matematika Dasar. *Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia*, 1–314.
- Lumbantoruan, J. H. (2019b). Buku Materi Pembelajaran Teori Peluang dan Kombinatorika. *Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia*, 1–259.
- Lumbantoruan, J. H. (2019c). INTEGRAL TENTU JILID 2, EDISI 1. *Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia*, 2, 1–150.
- Lumbantoruan, J. H. (2019d). Modul Geometri I (Geometri Datar dan Ruang). *Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia*.
- Lumbantoruan, J. H. (2019e). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017/2018. *Jurnal EduMatSains*, 3(2), 147–168.
- Lumbantoruan, J. H. (2019f). Rencana Pembelajaran (RPS) Mata Kuliah: Matematika Dasar. *Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia*, xiii–xix.
- Lumbantoruan, J. H. (2019g). RPS Persamaan Diferensial. *Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia*, xi–xvii.
- Lumbantoruan, J. H. (2020a). Buku Materi Pembelajaran Pemograman Linear. *Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia*, 1–380.

- Lumbantoruan, J. H. (2020b). Modul Garis Lurus. *Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia*, 251–278.
- Lumbantoruan, J. H., & Male, H. (2020). Analisis Miskonsepsi Pada Soal Cerita Teori Peluang Di Program Studi Pendidikan Matematika. *Jurnal EduMatSains*, 4(2), 153–168.
- Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). DEVELOPMENT OF A CONSTRUCTIVISM-BASED STATISTICS MODULE FOR CLASS VIII JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS. *Solid State Technology*, 64(2), 4427–4444. www.solidstatetechnology.us
- Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics. *Atlantis Press*, 560, 507–513.
- Saputro, P. A., & Lumbantoruan, J. H. (2020). PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS ARTICULATE STORYLINE PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR KELAS VIII. *EduMatSains: Jurnal Pendidikan, Matematika Dan Sains*, 1(1), 35–49. <http://ejournal.uki.ac.id/index.php/edumatsains>
- Simorangkir, M. R. R., & Lumbantoruan, J. H. (2021). AKSESIBILITAS ANAK BERKEBUTUHAN KHUSUS DI ERA PENDIDIKAN 4.0. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, 14(1), 204–213. <https://doi.org/10.33541/jdp.v12i3.1295>
- Sukardi. (2017, December 6). *Soal dan Pembahasan: Persamaan Diferensial Linear Orde Dua (Homogen) dengan Koefisien Konstan*. MATHCYBER1997. <https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-persamaan-diferensial-linear-orde-dua-dengan-koefisien-konstan/>

Syafi'i. (2011). BAB II PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE-KEDUA. *Syafii.Staff.Uns.Ac.Id*, 16–22.
<https://syafii.staff.uns.ac.id/files/2011/02/bab-ii.pdf>

Yudistira, P. (n.d.). *Persamaan Diferensial Orde N*. SCRIBD.
<https://id.scribd.com/doc/58150098/Persamaan-Diferensial-Orde-n>

Zdz0DLWp6C, A. (n.d.). *Persamaan Diferensial Orde 2*. SCRIBD.
<https://id.scribd.com/document/360225310/Persamaan-Diferensial-Orde-2>