

MAKALAH
TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA
“KOMBINASI”



Disusun Oleh:

Juwita (2013150010)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

JAKARTA

2021

PRAKATA

Puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas Kasih dan Anugerah-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan makalah yang berjudul “Kombinasi” dengan baik dan tepat waktu.

Tidak lupa saya ucapkan terima kasih kepada Bapak Jitu Halomoan L. Toruan, S.Pd., M.Pd selaku dosen pengampu yang membimbing saya dalam menyelesaikan tugas ini.

Saya menyadari bahwa makalah ini tak lepas dari kesalahan dan kekurangan dikarenakan kemampuan saya yang terbatas. Oleh karena itu, saya mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun dari pembaca guna kesempurnaan makalah ini.

Saya berharap makalah ini dapat bermanfaat serta menambah pengetahuan bagi pembaca. Sekian saya ucapkan, Terima kasih.

Jakarta, 13 November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

PRAKATA.....	ii
DAFTAR ISI.....	iii
DAFTAR TABEL.....	v
A. PENDAHULUAN.....	1
1. Deskripsi Mata Kuliah.....	1
2. Tujuan Penulisan.....	2
3. Petunjuk Penggunaan Buku.....	2
B. BATANG TUBUH.....	3
1. Definisi Kombinasi.....	3
Konsep dan Perbedaan Kombinasi dan Permutasi.....	4
Kombinasi dan Binomial Newton.....	10
2. Kombinasi dengan Segitiga Pascal.....	13
3. Teori Binomial Newton.....	22
C. PENUTUP.....	26
KESIMPULAN.....	26
SOAL DISKUSI.....	28
SOAL LATIHAN.....	40
GLOSARIUM.....	42
INDEKS.....	44

DAFTAR PUSTAKA45

DAFTAR TABEL

Tabel 1. 1 Pencapaian Pembelajaran.....	1
Tabel 2. 1 Menunjukkan nilai nr , dengan nama segitiga pascal untuk n dari 0-10.	13

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Mata Kuliah

(Lumbantoruan, 2019g) Pada mata kuliah berikut berisi bahasan tentang analisis probabilitas, teori peluang, permutasi, kaidah pencacahan, kombinasi, himpunan, peluang bersyarat, dan kombinatorika. Pada makalah ini, khusus membahas materi kombinasi.

Tabel 1. 1 Pencapaian Pembelajaran

Pencapaian Pembelajaran	Uraian Materi
Memahami konsep kombinasi	1. Mengerti Materi Kombinasi
	2. Memahami perbedaan Kombinasi dan Permutasi
	3. Memahami Kombinasi dan Binomial Newton
	4. Menyelesaikan soal latihan individu materi Kombinasi
	5. Menyelesaikan soal diskusi kelompok materi Kombinasi

2. Tujuan Penulisan

1. Mampu mengerti materi Kombinasi
2. Mampu memahami Perbedaan Kombinasi dan Permutasi
3. Mampu memahami Kombinasi dan Binomial Newton
4. Mampu menyelesaikan soal latihan individu materi Kombinasi
5. Mampu menyelesaikan soal diskusi kelompok materi Kombinasi

3. Petunjuk Penggunaan Buku

1. (Lumbantoruan, 2019f) Bacalah modul ini dengan seksama mulai dari kata pengantar sampai dengan latihan soal, kemudian pahami seluruh materi yang ada di dalamnya.
2. Selesaikan semua latihan soal yang terdapat dalam modul ini agar pemahaman Anda berkembang dengan baik.
3. Setiap mempelajari satu kompetensi, Anda harus mulai dari menguasai pengertian-pengertian dalam uraian materi, melaksanakan tugas-tugas dan mengerjakan latihan soal.
4. Dalam menyelesaikan latihan soal, Anda tidak diperkenankan berdiskusi dengan teman Anda sebelum selesai mengerjakan latihan soal dan diskusi kelompok

B. BATANG TUBUH

1. Definisi Kombinasi

(Nurwahyu et al., 2016) Kombinasi merupakan banyak susunan atas sekelompok unsur dengan tanpa memperhatikan urutannya. Dalam kombinasi susunan AD sama dengan susunan DA. (Male & Lumbantoruan, 2021) Banyaknya kombinasi r unsur dari n unsur berbeda dilambangkan C_r^n atau ${}_n C_r$ atau $C(n,r)$ dengan ($r \leq n$). Adapun kombinasi dirumuskan (Astuti, 2011):

$${}_n C_r = C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Contoh :

Untuk 5 calon dalam audisi bernyanyi yaitu berinisial A,B,C,D,E, kemudian terdapat 3 calon yang akan terpilih. Berapa banyak kemungkinan susunan yang dipilih dari kelima calon audisi tersebut?

Di dalam kombinasi urutan pada susunan tidak diperhatikan, yakni susunan ABC dapat juga sama dengan ACB, BCA, dan sebagainya. Sehingga banyaknya kombinasi calon audisi yang dapat dipilih dengan menggunakan rumus kombinasi (Dosinaeng, 2019) yaitu :

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\begin{aligned}
C_3^5 &= \frac{5!}{(5-3)!3!} \\
&= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} \\
&= 10 \text{ kombinasi}
\end{aligned}$$

2. Konsep dan Perbedaan Kombinasi dan Permutasi

(Wulandari et al., 2020) Permutasi adalah banyak susunan dari sekelompok unsur dengan memperhatikan suatu urutan sedangkan kombinasi tidak memperhatikan suatu urutan. (Lumbantoruan, 2019c) Dalam permutasi susunan AD tidak sama dengan susunan DA. Rumus dari permutasi yaitu :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Untuk lebih jelasnya dapat dibuktikan melalui contoh berikut yang dengan memodifikasi contoh sebelumnya menjadi :

Untuk 5 calon dalam audisi bernyanyi yakni berinisial A,B,C,D,E. Dari lima calon audisi ini akan dipilih tiga calon yang dimana nantinya calon tersebut akan dikirimkan ke luar negeri untuk belajar dan dilatih langsung oleh juri di masing-masing negara tersebut. Adapun penempatan di negara Malaysia satu orang, di negara Filipina satu orang, dan satu orang di negara Singapura, maka dengan rumus permutasi banyaknya kemungkinan susunan yang dapat terpilih :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$$
$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= 60 \text{ permutasi}$$

Jika diuraikan perincian dari kemungkinan susunan yang terpilih dan pengiriman calon audisi antara lain:

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE,
ACB, ADB, AEB, ADC, AEC, AED, BDC, BEC, BED, CED,
BAC, BAD, BAE, CAD, CAE, DAE, CBD, CBE, DBE, DCE,
BCA, BDA, BEA, CDA, CEA, DEA, CDB, CEB, DEB, DEC,
CAB, DAB, EAB, DAC, EAC, EAD, CDB, CEB, DEB, DEC,
CBA, DBA, EBA, DCA, ECA, EDA, DCB, ECB, EDB, EDC.

Dimana urutan pertama ialah untuk calon audisi yang akan dikirimkan ke Malaysia, urutan kedua ialah untuk calon audisi yang akan dikirimkan ke Filipina, dan urutan ketiga ialah untuk calon audisi yang akan dikirimkan ke Singapura.

Jika dibandingkan banyaknya permutasi dengan kombinasi terlihat bahwa $n = 5$ dan $r = 3$, banyaknya permutasi ialah 6 kali dari banyaknya kombinasi, kemudian dimana 6 ini ialah

banyaknya permutasi untuk setiap kombinasi terpilih besarnya menjadi $3! = 6 \rightarrow (r!) .$ Maka didapatlah formulasi rumus untuk kombinasi atas hubungan dengan permutasi yaitu:

$$C_r^n \times r! = P_r^n$$

$$C_r^n \times r! = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Perbedaan permutasi dan kombinasi (Lumbantoruan, 2019g):

Dalam permutasi pengaturan satu kelompok unsur dengan penyusunan banyak cara secara berurutan sehingga urutannya relevan. Sedangkan, kombinasi susunan banyak cara atas sekelompok unsur sehingga urutannya irrelevan (Lumbantoruan, 2020c).

- Dalam permutasi suatu urutan, posisi atau jabatan dan penempatan menjadi suatu permasalahan. Sedangkan dalam kombinasi ketiga hal tersebut tidak menjadi suatu permasalahan.
- Perbedaan urutan akan menyebabkan perbedaan makna dalam permutasi namun sebaliknya dalam kombinasi perbedaan urutan tidak menyebabkan perbedaan makna.

Contoh soal:

- 1) Tentukan pengambilan 2 warna bola dari 3 warna bola atas (merah, kuning, hijau).

Jawab :

Dengan menggunakan permutasi maka akan diperoleh

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_3^5 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!}$$

$$= \frac{3 \times 2 \times 1}{1}$$

$$= 6 \text{ permutasi}$$

yaitu (merah kuning), (kuning merah), (merah hijau), (hijau merah), (kuning hijau), (hijau kuning) dimana (merah kuning) berbeda dengan (kuning merah); (merah hijau) berbeda dengan (hijau merah); (kuning hijau) berbeda dengan (hijau kuning).

Namun jika dengan menggunakan kombinasi maka akan diperoleh

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)! 2!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3!}{1!2!} \\
&= \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} \\
&= 3 \text{ kombinasi}
\end{aligned}$$

yaitu (merah kuning) = (kuning merah), (hijau merah) = (merah hijau), (kuning hijau) = (hijau kuning).

- 2) Suatu perusahaan membuka lowongan pekerjaan. Adapun seleksi dilakukan dengan terlebih dahulu melakukan interview. Adanya 11 orang yang lulus seleksi, namun diketahui perusahaan tersebut hanya membutuhkan sebanyak 5 tenaga kerja. Tentukanlah banyaknya cara yang dapat dilakukan perusahaan untuk memilih 5 orang dari 11 orang yang lulus dari seleksi? (Tidak memperhatikan posisi atau jabatan tenaga kerja)

Jawab:

$$\begin{aligned}
C_r^n &= \frac{n!}{(n-r)! r!} \\
C_5^{11} &= \frac{11!}{(11-5)! 5!} \\
&= \frac{11!}{7! 5!} \\
&= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! 5!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 66 \text{ kombinasi}$$

3) Bola merah \longleftrightarrow Bola hijau

Bola hijau \longleftrightarrow Bola merah

= Dalam hal tersebut termasuk kombinasi dimana tidak menyebabkan perbedaan makna yakni penggabungan bola merah dengan bola hijau dengan garis sama dengan penggabungan bola hijau dengan bola merah dengan garis.

4) Terdapat 30 orang yang menghadiri suatu acara reuni, kemudian mereka saling melakukan jabat tangan satu dengan lain. Berapakah banyaknya jabat tangan yang terjadi?

Jawab :

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$C_2^{30} = \frac{30!}{(30-2)! 2!}$$

$$= \frac{30!}{28!2!}$$

$$= \frac{30 \times 29 \times 28!}{28!2!}$$

$$= 435$$

5) Nilai kombinasi dari ${}_{10}C_4$ adalah...

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$C_2^{30} = \frac{10!}{(10-4)! 4!}$$

$$= \frac{10!}{6!4!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!4!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 210$$

3. Kombinasi dan Binomial Newton

(Wulandari et al., 2020) Masalah terhadap suatu objek sering ditemukan dalam kehidupan sehari-hari yang terdiri atas beberapa unsur dan disusun dengan memperhatikan urutan sesuai dengan posisi yang diinginkan maupun tidak.

(Alwi & Nurman, Try Azisah, 2017) Adapun dalam Matematika susunan dari sekelompok unsur dengan memperhatikan urutan disebut dengan permutasi, sedangkan yang tidak memperhatikan unsur disebut dengan kombinasi.

Contoh soal :

1) Berapa banyak memilih 3 dari 4 angka yang berbeda?

Jawab :

Terlebih dahulu memisalkan angka berbeda tersebut yaitu 6,7,8,9.

Maka banyaknya memilih atau kombinasi 3 dari 6,7,8,9 adalah 678, 679, 689, 789

Berdasarkan soal tersebut, maka banyaknya kombinasi -3 dari 4 angka 6,7,8,9 adalah 4.

2) Contoh soal yang membedakan permutasi dan kombinasi.

Diketahui terdapat 5 cangkir berwarna : pink (p), biru (b), merah (m), kuning (k) dan hijau (h). Tentukanlah berapa cara untuk dapat mengatur atau menyusun cangkir-cangkir tersebut apabila setiap susunannya terdiri atas 3 cangkir yang memiliki syarat yaitu tanpa memperhatikan urutan (kombinasi) dan dengan memperhatikan urutan (permutasi).

Jawab :

Total permutasi dari 5 cangkir diambil 4 cangkir setiap kali sebanyak

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!}$$
$$= \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 60$$

Adapun permutasi dimana urutan daripada cangkir diperhatikan, $p_{bm} \neq b_{pm} \neq p_{mb}$, dan seterusnya.

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!3!}$$

$$= \frac{5!}{2!3!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!}$$

$$= 10$$

Sedangkan dalam kombinasi tanpa memperhatikan urutan, $p_{bk} = k_{bp} = b_{pk}$, dan seterusnya.

Sehingga adanya 2 persoalan yang terlihat bahwa:

- i. Jika setiap susunan cangkir dengan suatu urutan diperhatikan, maka persoalan ini disebut dengan persoalan permutasi dari 5 cangkir (objek) diambil 3 setiap kali.
- ii. Jika setiap susunan cangkir dengan suatu urutan tidak diperhatikan, persoalan ini disebut dengan persoalan kombinasi dari 5 cangkir (objek) diambil 3 setiap kali.

4. Kombinasi dengan Segitiga Pascal

(Lumbantoruan, 2019g) Segitiga pascal untuk $\binom{n}{r}$, $0 \leq r \leq n \leq 10$

Tabel 2. 1 Menunjukkan nilai $\binom{n}{r}$, dengan nama segitiga pascal untuk n dari 0-10.

n/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Pada tabel di atas, menunjukkan nilai $\binom{n}{r}$ atau dikenal dengan nama segitiga pascal. (Lumbantoruan & Male, 2020) Dalam segitiga pascal, baris paling atas selalu ditulis dengan angka 1. Setiap barisnya selalu diawali dan diakhiri dengan angka 1. Jumlah kotak selanjutnya ditulis di baris ke-2 sampai ke-

n yaitu penjumlahan dua bilangan di atasnya (P. A. & Lumbantoruan, 2020).

Contoh:

➤ Untuk $n = 5$, terdapat pada baris ke-6, angka 5 yang pertama di dapat dari $1+4=5$, kemudian $4+6=10$, $6+4=10$, dan $4+1=5$.

➤ Berapa nilai $\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$, untuk $r = 3$

$$\begin{aligned} \bullet \binom{6}{3} &= \frac{6!}{(6-3)!3!} \\ &= \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2.1} \\ &= \frac{120}{6} \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \binom{6}{2} &= \frac{6!}{(6-2)!2!} \\ &= \frac{6.5.4!}{4!.2.1} \\ &= \frac{30}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Jadi nilai } \binom{7}{3} &= \binom{6}{3} + \binom{6}{2} \\ &= 20 + 15 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Rumus dalam kombinasi, yaitu:

$$C_{(n,r)} = C_r^n = \binom{n}{r} \rightarrow \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Contoh Soal:

1) Banyak cara memilih 4 pengurus dari 8 kandidat adalah

Jawab:

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$\begin{aligned} C_{(8,4)} &= \frac{8!}{(8-4)!4!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} \\ &= \frac{1680}{24} \\ &= 70 \text{ cara} \end{aligned}$$

Jadi ada 70 cara.

2) Dalam pesta, terdapat 6 orang tidak saling mengenal. Berapa banyak jabat tangan yang dapat terjadi, agar mereka saling mengenal?

Jawab:

$$\begin{aligned} C_{(n,r)} &= \frac{n!}{(n-r)! r!} \\ C_{(6,2)} &= \frac{6!}{(6-2)! 2!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{30}{2}$$

= 15 jabat tangan

Jadi, untuk membuat mereka saling mengenal maka ada 15 jabat tangan yang bisa dilakukan

- 3) Bima ingin membeli 5 ekor sapi dan 3 ekor kambing dari seorang Rian yang mempunyai 7 ekor sapi dan 5 ekor kambing. Berapa banyak cara yang bisa dilakukan Rian untuk memilih ternak?

Jawab:

➤ Banyak cara memilih sapi

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$C_{(7,5)} = \frac{7!}{(7-5)! 5!}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!}$$

$$= \frac{42}{2}$$

= 21 cara

➤ Banyak cara memilih kambing

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$\begin{aligned}
C_{(5,3)} &= \frac{5!}{(5-3)!3!} \\
&= \frac{5.4.3!}{2.1.3!} \\
&= \frac{12}{2} \\
&= 6 \text{ cara}
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya cara Bima memilih ternak yang diinginkannya
 $= 21 \times 6 = 126$ cara

- 4) Sebuah perusahaan membuka lowongan pekerjaan yang terdiri dari 4 perempuan dan 6 laki-laki. Jika terdapat 18 pelamar yang 11 diantaranya adalah laki-laki. Berapa banyak cara untuk menyeleksi pelamar?

Jawab:

Total pelamar adalah 18 orang, terdiri dari 11 laki-laki. Maka pelamar perempuan berjumlah 7 orang.

Banyak cara untuk menyeleksi pelamar, yaitu:

$$\begin{aligned}
&= C_{(11,6)} \times C_{(7,4)} \\
&= \frac{11!}{(11-6)!6!} \times \frac{7!}{(7-4)!4!} \\
&= \frac{11.10.9.8.7.6!}{5!.6!} \times \frac{7.6.5.4!}{3!.4!} \\
&= \frac{55.440}{120} \times \frac{210}{6}
\end{aligned}$$

$$= 462 \times 35$$

$$= 16.170 \text{ cara}$$

Jadi ada 16.170 cara untuk menyeleksi pelamar.

- 5) Sebuah museum memiliki 8 pintu masuk. Apabila ada 5 orang pengunjung yang ingin masuk ke museum itu, berapa banyak cara yang dapat ditempuh.

Jawab:

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$C_{(8,5)} = \frac{8!}{(8-5)! 5!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!}$$

$$= \frac{336}{6}$$

$$= 56 \text{ cara}$$

Jadi ada 56 cara yang dapat ditempuh oleh 5 orang pengunjung untuk masuk ke museum.

- 6) Berapa nilai dari $C_{(9,5)} \times C_{(10,7)}$

Jawab:

$$= C_{(9,5)} \times C_{(10,7)}$$

$$= \frac{9!}{(9-5)!5!} \times \frac{10!}{(10-7)!7!}$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4! \cdot 5!} \times \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 7!}$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \cdot 024}{24} \times \frac{720}{6}$$

$$= 126 \times 120$$

$$= 15.120$$

Jadi nilai dari $C_{(9,5)} \times C_{(10,7)}$ adalah 15.120.

- 7) Dalam sebuah kantong terdapat 15 permen. Tentukan banyak cara untuk mengambil 12 permen dari kantong.

Jawab:

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_{(15,12)} = \frac{15!}{(15-12)!12!}$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{3! \cdot 12!}$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2.730}{6}$$

$$= 455 \text{ cara}$$

Jadi ada 455 cara untuk mengambil 12 permen di kantong.

- 8) Anggi pergi ke toko peralatan sekolah untuk membeli 3 buku tulis dan 3 pulpen. Toko tersebut memiliki stok 9 buku tulis dan 11 pulpen. Berapa banyak cara untuk Anggi memilih buku tulis dan pulpen.

Jawab:

$$\begin{aligned}C_{(9,3)} \times C_{(11,3)} &= \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} \times \frac{11!}{(11-3)! \cdot 3!} \\&= \frac{9!}{6! \cdot 3!} \times \frac{11!}{8! \cdot 3!} \\&= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\&= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\&= \frac{504}{6} \times \frac{90}{6} \\&= 84 \times 15 \\&= 1.260 \text{ cara}\end{aligned}$$

Jadi ada 1.260 cara yang bisa dilakukan Anggi untuk memilih buku tulis dan pulpen.

- 9) Berapa cara untuk memilih 16 pengurus kelas dari 20 calon yang ada.

Jawab:

$$\begin{aligned}
C_{(20,16)} &= \frac{20!}{(20-16)!16!} \\
&= \frac{20.19.18.17.16!}{4!.16!} \\
&= \frac{20.19.18.17}{4.3.2.1} \\
&= \frac{116.280}{24} \\
&= 4.845 \text{ cara}
\end{aligned}$$

Jadi ada 4.845 cara untuk memilih 16 pengurus dari 20 pengurus.

- 10) Angga ingin memberi 4 buah durian dan 5 buah melon dari Anggi yang menjual 7 buah durian dan 7 buah melon. Berapa banyak cara yang bisa dilakukan.

Jawab:

$$\text{Buah durian} = C_{(7,4)}$$

$$\text{Buah melon} = C_{(7,5)}$$

$$\begin{aligned}
C_{(7,4)} \times C_{(7,5)} &= \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} \times \frac{7!}{(7-5)! \cdot 5!} \\
&= \frac{7!}{3! \cdot 4!} \times \frac{7!}{2! \cdot 5!} \\
&= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} \\
&= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{210}{6} \times \frac{42}{2} \\
&= 35 \times 21 \\
&= 735 \text{ cara}
\end{aligned}$$

Jadi ada 735 cara untuk Angga dapat memilih buah durian dan semangka sesuai dengan keinginannya.

5. Teori Binomial Newton

(Susilo, 2012) Newton merupakan seorang matematikawan, fisikawan, ahli astronomi, dan teolog yang berasal dari Inggris. Newton juga dikenal sebagai bapak ilmu fisika klasik. (Lumbantoruan & Natalia, 2021) Dalam matematika, Newton berhasil menjabarkan teori binomial dan mengembangkan kalkulus diferensial serta kalkulus integral. (Lumbantoruan, 2019e) Oleh karena itu, Ia diakui sebagai penemu dari teorema binomial.

Binomial Newton adalah salah satu materi pengayaan yang menjelaskan penggunaan kombinasi (Lumbantoruan, 2017). Pada binomial Newton dijelaskan mengenai binom atau suku dua yang dipangkatkan dengan n , dimana n adalah bilangan asli. (Lumbantoruan, 2016) Binomial Newton juga merupakan salah satu cara untuk dapat menentukan suatu koefisien dari sebuah perpangkatan suku aljabar. (Lumbantoruan, 2020b) Teorema

binomial ini memberikan bentuk ekspansi dari pangkat binomial $(x + y)^n$, untuk setiap n bilangan bulat positif dan bilangan real.

Rumus binomial Newton:

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n-0} y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \\ &\quad \dots + \binom{n}{n} y^n \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Bentuk diatas dinamakan binominal newton (ekspansi binomial).

Ada beberapa penjabaran binomial, yaitu :

$$\begin{aligned} 1) (x + y)^0 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^0 \frac{0!}{0! (0-k)!} x^{0-k} y^k \\ &= \frac{0!}{0! (0-0)!} x^{0-0} y^0 \\ &= 1 \cdot x^0 y^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(x + y)^0 = \binom{0}{0}$$

$$2) (x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$$

$$3) (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$

$$4) (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$

Pada penjabaran di atas dapat dituliskan dalam bentuk pola segitiga pascal, (Lumbantoruan, 2019h) yaitu:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \binom{0}{0} \\
 & & & \\
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3}
 \end{array}$$

Contoh Soal :

1) Tentukan hasil penjabaran $(x + 3)^2$

Jawab :

$$\begin{aligned}
 (x + 3)^3 &= \binom{n}{0}x^{n-0}y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \dots + \binom{n}{n}y^n \\
 &= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3!}{(3-0)!0!} x^3 + \frac{3!}{(3-1)!1!} x^2 \cdot 3 + \frac{3!}{(3-2)!2!} x \cdot 3^2 \\
&\quad + \frac{3!}{(3-3)!3!} \cdot 3^3 \\
&= x^3 + 9x^2 + 27x + 27
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) (2x + 5y)^3 &= \binom{n}{0} x^{n-0} y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n} y^n \\
&= \binom{3}{0} (2x)^3 + \binom{3}{1} (2x)^2 \cdot (5y) + \\
&\quad \binom{3}{2} (2x) \cdot (5y)^2 + \binom{3}{3} (5y)^3 \\
&= \frac{3!}{(3-0)!0!} (2x)^3 + \frac{3!}{(3-1)!1!} (2x)^2 \cdot (5y) \\
&\quad + \frac{3!}{(3-2)!2!} (2x) \cdot (5y)^2 + \frac{3!}{(3-3)!3!} 5y^3 \\
&= (1 \cdot 2)^3 x^3 + (3 \cdot 2^2 \cdot 5) x^2 y + (3 \cdot 2 \cdot 5^2) x y^2 \\
&\quad + (1 \cdot 5)^3 y^3 \\
&= 8x^3 + 60x^2 y + 150x y^2 + 125y^3
\end{aligned}$$

C. PENUTUP

KESIMPULAN

1. Kombinasi adalah banyak susunan dari sekelompok unsur dengan tanpa memperhatikan urutannya. Banyaknya kombinasi r unsur dari n unsur berbeda dilambangkan C_r^n atau ${}_n C_r$ atau $C(n,r)$ dengan $(r \leq n)$ (Lumbantoruan, 2018). Adapun kombinasi dirumuskan:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

2. Permutasi dan kombinasi memiliki beberapa perbedaan, yaitu:
 - 1) Dalam permutasi pengaturan satu kelompok unsur dengan penyusunan banyak cara secara berurutan sehingga urutannya relevan. Sedangkan, kombinasi susunan banyak cara atas sekelompok unsur sehingga urutannya irrelevan (Lumbantoruan, 2008).
 - 2) Dalam permutasi suatu urutan, posisi atau jabatan dan penempatan menjadi suatu permasalahan. Sedangkan dalam kombinasi ketiga hal tersebut tidak menjadi suatu permasalahan (Lumbantoruan, 2014).
 - 3) Perbedaan urutan akan menyebabkan perbedaan makna dalam permutasi namun sebaliknya dalam kombinasi

perbedaan urutan tidak menyebabkan perbedaan makna (Lumbantoruan, 2019a).

3. Dalam segitiga pascal, baris paling atas selalu ditulis dengan angka 1. Setiap barisnya selalu diawali dan diakhiri dengan angka 1. Jumlah kotak selanjutnya ditulis di baris ke-2 sampai ke- n yaitu penjumlahan dua bilangan di atasnya (Lumbantoruan, 2019d).

Rumus kombinasi:

$$C_{(n,r)} = C_r^n = \binom{n}{r} \rightarrow \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

4. Binomial Newton juga merupakan salah satu cara untuk dapat menentukan suatu koefisien dari sebuah perpangkatan suku aljabar.(Lumbantoruan, 2020a).

Rumus binomial Newton:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n-0} y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \\ &\quad \binom{n}{n} y^n\end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

SOAL DISKUSI

1. (Lumbantoruan, 2020a) Tentukan berapa cara untuk dapat memilih 5 pengurus dari 9 kandidat adalah ...

Jawab:

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$C_{(9,5)} = \frac{9!}{(9-5)! 5!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 126 \text{ cara}$$

2. Dalam suatu acara, ada 8 orang yang belum saling mengenal. Ada berapa banyak jabat tangan yang bisa dilakukan, agar mereka dapat saling mengenal...

Jawab:

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$C_{(8,2)} = \frac{8!}{(8-2)! 2!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

= 28 jabat tangan

3. Peternak akan membeli 8 ekor kambing dan 4 ekor sapi dari pedagang yang mempunyai 9 ekor kambing dan 5 ekor sapi. Berapa banyak cara yang bisa dilakukan...

Jawab:

- Banyak cara memilih kambing

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_{(9,8)} = \frac{9!}{(9-8)!8!}$$

= ...

= ...

= 9 cara

- Banyak cara memilih sapi

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_{(5,4)} = \frac{5!}{(5-4)!4!}$$

= ...

= ...

= 5 cara

➤ Banyak cara

$$= C_{(9,8)} \times C_{(5,4)}$$

$$= \dots$$

4. Sebuah perusahaan membuka lowongan pekerjaan yang terdiri dari 3 perempuan dan 3 laki-laki. Jika terdapat 10 pelamar yang 6 diantaranya adalah laki-laki. Berapa banyak cara untuk menyeleksi pelamar ...

Jawab:

Banyak cara untuk menyeleksi pelamar, yaitu:

$$= C_{(6,3)} \times C_{(4,3)}$$

$$= \frac{6!}{(6-3)!3!} \times \frac{4!}{(4-3)!3!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 80 \text{ cara}$$

5. Sebuah rumah memiliki 3 pintu masuk. Apabila ada 6 orang yang ingin masuk, berapa banyak cara yang dapat ditempuh ...

Jawab:

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\begin{aligned}
C_{(6,3)} &= \frac{6!}{(6-3)!3!} \\
&= \dots \\
&= \dots \\
&= 20 \text{ cara}
\end{aligned}$$

6. Berapa nilai dari $C_{(11,4)} \times C_{(9,8)} \dots$

Jawab:

$$\begin{aligned}
&= C_{(11,4)} \times C_{(9,8)} \\
&= \frac{11!}{(11-4)!4!} \times \frac{9!}{(9-8)!8!} \\
&= \dots \\
&= \dots \\
&= 2.970 \text{ cara}
\end{aligned}$$

7. Dalam toples terdapat 18 kelereng. Tentukan banyak cara yang bisa dilakukan untuk mengambil 4 kelereng ...

Jawab:

$$\begin{aligned}
C_{(n,r)} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
C_{(18,4)} &= \frac{18!}{(18-4)!4!} \\
&= \dots
\end{aligned}$$

$$= \dots$$

$$= 3.060 \text{ cara}$$

8. Anggun pergi ke toko buah untuk membeli 4 buah nanas dan 5 buah mangga. Toko tersebut memiliki 10 buah nanas dan 12 buah mangga. Berapa banyak cara untuk Anggun memilih buah tersebut ...

Jawab:

$$C_{(10,4)} \times C_{(12,5)} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} \times \frac{12!}{(12-5)! \cdot 5!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 166.320 \text{ cara}$$

9. Berapa cara untuk memilih 19 pengurus kelas dari 23 calon yang ada ...

Jawab:

$$C_{(23,19)} = \frac{23!}{(23-19)! \cdot 19!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 4.845 \text{ cara}$$

10. Intan ingin memberi 7 penggaris dan 6 tipe-x dari penjual yang menjual 11 penggaris dan 10 tipe-x. Berapa banyak cara Intan untuk memilih penggaris dan tipe-x yang diinginkan ...

Jawab:

$$\begin{aligned}
 C_{(11,7)} \times C_{(10,6)} &= \frac{11!}{(11-7)! \cdot 7!} \times \frac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} \\
 &= \dots \\
 &= \dots \\
 &= 69.300 \text{ cara}
 \end{aligned}$$

11. Toni mengambil 4 jenis mainan dalam kardus mainannya. Jika dalam kardus mainannya ada 7 jenis mainan, maka berapa kombinasi dari empat jenis mainan yang diambil oleh Tono ...

$$\begin{aligned}
 C_4^7 &= \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} \\
 &= \dots \\
 &= \dots \\
 &= 35
 \end{aligned}$$

12. Dalam suatu arisan terdapat 8 orang yang baru pertama kali bertemu dan mengikuti arisan. Untuk mengenal satu sama lain sepuluh orang tersebut pun berkenalan dan saling

berjabat tangan terlebih dahulu. Hitunglah berapa jabat tangan yang dilakukan ...

$$C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)! 2!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 28$$

13. Dari 6 siswa akan dipilih 3 siswa dalam mengikuti lomba puisi. Berapa banyak cara dalam memilih siswa tersebut ...

$$C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)! 3!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 20$$

14. Nilai kombinasi dari ${}_{12}C_5$ adalah...

$$C_5^{12} = \frac{12!}{(12-5)! 5!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 792$$

15. Berapa banyak susunan cara dalam regu perlombaan cerdas cermat yang terdiri dari 3 siswa yang dibentuk dari 9 siswa

...

$$C_3^9 = \frac{9!}{(9-3)!3!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 84$$

16. Dalam membuat suatu lukisan yang abstrak dibutuhkan campuran 3 warna. Jika ada 5 jenis warna yaitu Kuning, Merah, Hijau, Biru dan Hitam, tentukan berapa banyak cara untuk mencampurkan 3 warna...

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!3!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 10$$

17. Hitunglah banyaknya jabat tangan yang terjadi ketika 12 anak dalam suatu acara ulang tahun saling berjabat tangan untuk berkenalan ...

$$C_2^{12} = \frac{12!}{(12-2)!2!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 66$$

18. Dalam sebuah kotak terdapat 10 bola yang bertuliskan bilangan romawi I sampai X. Sisca ingin mengambil 6 bola sekaligus secara acak, maka berapa banyak cara bola tersebut terambil ...

$$C_6^{10} = \frac{10!}{(10-6)!6!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 210$$

19. Guru memberi siswa soal ulangan dan meminta untuk mengerjakan 19 dari 20 soal, tetapi soal 1-11 harus dikerjakan. Maka siswa dapat mengambil berapa banyak pilihan...

$$C_8^{11} = \frac{11!}{(11-8)!8!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 165$$

20. Suatu perusahaan membuka lowongan pekerjaan. Terdapat 8 orang yang lulus seleksi melalui wawancara. Namun, diketahui perusahaan tersebut hanya membutuhkan sebanyak 5 tenaga kerja. Berapa banyak cara yang bisa dilakukan oleh perusahaan ...

$$C_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!5!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 56$$

21. Banyaknya cara yang dapat disusun dari suatu kelompok bimbingan belajar (bimbel) yang terdiri dari 4 orang yang sebelumnya terbentuk dari 6 orang...

$$C_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!4!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 15$$

22. Suatu gedung pertemuan memiliki 5 pintu masuk. Dua orang ingin memasuki gedung itu. Banyak cara yang dapat dilakukan untuk memasuki gedung tersebut ...

$$C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)! 2!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 10$$

23. Dari 7 orang shipper yang bekerja di Jakarta, 3 diantaranya dipilih untuk mengirimkan barang ke Jakarta Barat. Maka banyak cara memilih shipper tersebut adalah ...

$$C_3^7 = \frac{7!}{(7-3)! 3!}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= 35$$

24. Banyak cara untuk memilih 5 pengurus dari 9 calon pengurus adalah ...

$$C_5^9 = \frac{9!}{(9-5)! 5!}$$

$$\begin{aligned} &= \dots \\ &= \dots \\ &= 126 \end{aligned}$$

25. Dalam sebuah botol terdapat 10 kelereng. Banyak cara yang bisa dilakukan William untuk mengambil 3 kelereng dari botol ...

$$\begin{aligned} C_3^{10} &= \frac{10!}{(10-3)! 3!} \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= 120 \end{aligned}$$

SOAL LATIHAN

1. (Lumbantoruan, 2019b) Dari 9 anggota paduan suara akan dipilih 6 siswa dalam mengikuti lomba bernyanyi. Berapa banyak cara dalam memilih siswa tersebut?
2. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi ketika 7 orang dalam suatu acara pesta ulang tahun saling berjabat tangan untuk berkenalan
3. Dalam sebuah kotak terdapat 10 bola yang bertuliskan bilangan romawi I sampai X. Sisca ingin mengambil 4 bola sekaligus dengan acak. Banyak cara bola tersebut terambil adalah?
4. Dalam membuat suatu lukisan yang abstrak dibutuhkan 4 pensil warna untuk Nita mewarnai gambarnya. Adapun Nita memiliki 8 pensil warna, maka berapa banyak cara Nita mengambil pensil warna tersebut?
5. Guru memberi siswa soal ulangan harian dan meminta untuk mengerjakan 14 dari 15 soal, tetapi soal 1-8 harus dikerjakan. Maka siswa dapat mengambil berapa banyak pilihan?
6. Sebuah perusahaan membuka lowongan yang terdiri dari 8 laki-laki dan 8 perempuan. Jika terdapat 30 pelamar yang 17 diantaranya adalah perempuan. Berapa banyak cara untuk dapat menyeleksi pelamar.

7. Berapa banyak cara untuk dapat memilih 7 orang pengurus organisasi dari 21 peserta yang mendaftar.
8. Bella di suruh Ibunya pergi ke supermarket untuk membeli 9 botol cocacola dan 7 botol sprite. Apabila di supermarket tersebut terdapat 25 botol cocacola dan 15 botol sprite. Berapa banyak cara yang bisa Bella lakukan untuk memilih.
9. Di sebuah pantai, terdapat 26 orang yang tidak saling mengenal. Tentukan berapa banyak jawab tangan yang bisa dilakukan, agar mereka dapat saling mengenal
10. Suatu perusahaan memiliki 4 pintu, apabila ada 12 karyawan yang ingin masuk dalam perusahaan. Berapa banyak cara yang dapat perusahaan lakukan.

GLOSARIUM

- Bilangan = Banyaknya benda dan sebagainya
- Binomial = Terdiri atas dua kata atau dua unsur, gabungan yang dapat dibagi dua.
- Ekspansi = Perluasan wilayah suatu negara dengan menduduki wilayah negara lain
- Fisikawan = Ahli fisika
- Formulasi = Perumusan
- Irrelevan = Tidak ada sangkut pautnya/ tidak ada hubungannya dengan pokok persoalan
- Klasik = Karya sastra yang bernilai tinggi serta langgeng dan sering dijadikan tolok ukur atau karya susastra zaman kuno yang bernilai kekal;
- Koefisien = Bagian suku yang berupa bilangan atau konstan, biasanya dituliskan sebelum lambang peubah,
- Kombinasi = Gabungan beberapa hal (pengertian, perkara, warna, pasukan, dan sebagainya)
- Matematikawan= Ahli Matematika

Objek	= Hal, perkara, atau orang yang menjadi Pembicaraan
Permuatasi	= Perbuatan atau proses mengubah letak urutan benda, perubahan urutan (angka-angka dan sebagainya)
Relevan	= Kait-mengait, bersangkutan, berguna secara Langsung
Seleksi	= Pemilihan (untuk mendapatkan yang terbaik), penyaringan
Suku	= Bilangan yang menjadi bagian dari perbandingan atau jajaran bilangan
Teolog	= Ahli ilmu ketuhanan

INDEKS

- B**
Bilangan, 43, 44
Binomial, iii, 1, 2, 10, 23, 28, 43
- E**
Ekspansi, 43
- F**
Fisikawan, 43
- K**
Klasik, 43
- Koefisien, 43
kombinasi, 11
- M**
Matematikawan, 43
- S**
Suku, 44
- T**
Teolog, 44

DAFTAR PUSTAKA

- Alwi, W. (Uin A. M., & Nurman, Try Azisah, M. S. B. (2017). Aplikasi teorema binomial newton pada perhitungan bilangan pecahan radikal. *Msa*, 5(2), 23–33. <http://journal.uin-alauddin.ac.id/index.php/msa/article/view/4506>
- Astuti, S. (2011). Penyusunan Jadwal Ujian Mata Kuliah dengan Algoritma Pewarnaan Graf Welch Powell. *Jurnal Dian*, 11(1), 68–74. publikasi.dinus.ac.id
- Dosinaeng, W. B. N. (2019). Analysis of students' higher order thinking skills in solving basic combinatorics problems. *Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika*, 5(2), 133–147. <https://doi.org/10.33654/math.v5i2.611>
- Lumbantoruan, J. H. (2008). *Geometri Datar Dan Ruang*. 1–66.
- Lumbantoruan, J. H. (2014). *Geometri analitik dan transformasi*. 1–36. <http://repository.ut.ac.id/3891/1/EKSI4417-M1.pdf>
- Lumbantoruan, J. H. (2016). *Masalah garis singgung memberikan sebuah interpretasi visual mengenai turunan dan dapat dipikirkan walau bagaimanapun kompleksnya suatu aplikasi*. 0.
- Lumbantoruan, J. H. (2017). PENGEMBANGAN BAHAN AJAR INTEGRAL TAK TENTU BERBASIS MODEL SMALL GROUP DISCUSSION DI PROGRAM STUDI

- PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UKI TAHUN 2016/2017. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, 10(2), 99–118.
<https://doi.org/10.51212/JDP.V10I2.610>
- Lumbantoruan, J. H. (2018). *PARABOLA*. 167–196.
- Lumbantoruan, J. H. (2019a). *Buku Integral Tentu Jilid 2*.
- Lumbantoruan, J. H. (2019b). *Buku Materi Pembelajaran Geometri I* (Issue April).
- Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.
- Lumbantoruan, J. H. (2019d). *LINGKARAN*. 1–29.
- Lumbantoruan, J. H. (2019e). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017 / 2018. *Jurnal EduMatsains*, 3(2), 147–168.
- Lumbantoruan, J. H. (2019f). *RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIAL*. April, 33–35.
- Lumbantoruan, J. H. (2019g). *Teori Peluang dan Kombinatorika*.
- Lumbantoruan, J. H. (2019h). *TRANSFORMASI SUSUNAN SUMBU*. 197–223.

- Lumbantoruan, J. H. (2020a). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN PEMOGRAMAN LINEAR* (Vol. 2507, Issue February).
- Lumbantoruan, J. H. (2020b). *Garis Lurus*. 1(3), 64–119.
- Lumbantoruan, J. H. (2020c). *PENGEMBANGAN BUKU CERITA MATEMATIKA PADA KELAS VII SMP DALAM MATERI PERBANDINGAN*. 1(1), 23–34.
- Lumbantoruan, J. H., & Male, H. (2020). *Analisis Miskonsepsi Pada Soal Cerita Teori Peluang Di Program Studi Pendidikan Matematika*.
<https://doi.org/10.33541/EDUMATSAINS.V4I2.1380>
- Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). *DEVELOPMENT OF A CONSTRUCTIVISM-BASED STATISTICS MODULE FOR CLASS VIII JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS*.
www.solidstatetechnology.us
- Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics. *Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, 560(Acbleti 2020), 507–513.
<https://doi.org/10.2991/assehr.k.210615.095>
- Nurwahyu, B., Tatag, Y. E. ., & Suwarsono, S. (2016). Bayangan Konsep (Concept Image) Mahasiswa pada Konsep Kombinasi Ditinjau dari Perbedaan Gender dan Kemampuan Matematika. *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 7(2), 153–162.

<https://doi.org/10.15294/kreano.v7i2.5901>

- P. A., S., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *Edumatsains*, *1*(1), 35–49.
- Susilo, A. E. (2012). *Alur substansi materi pelajaran dalam pembelajaran matematika topik kaidah pencacahan dengan menggunakan buku ajar di kelas xi ipa sma kolese de britto*.
- Wulandari, D., Pujiastuti, H., Sultan, U., & Tirtayasa, A. (2020). *DAN KOMBINASI Dewi Wulandari , Heni Pujiastuti Pendidikan adalah suatu hal suatu bangsa . Pendidikan berperan daya manusia yang berkualitas dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan pembelajaran dengan mutu hasil yang baik pula . Hasil yang baik haruslah ya*. *20*(3), 200–209.