MODUL 3

PERSAMAAN DIFERENSIAL METODE SUBSTITUSI

DISUSUN OLEH:

NAMA : MAYAWI FARIDA

NIM : 1913150011

Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Kristen Indonesia

2021

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan atas kehadirat Tuhan yang Maha Esa atas berkat, rahmat dan karunia yang melimpah kepada kami, sehingga kami dari kelompok 3 dapat menyelesaikan penyusunan modul ini dalam memenuhi tugas kelompok untuk mata kuliah Persamaan differensial. Kami berharap semoga modul ini dapat menambah wawasan serta ilmu pengetahuan pembaca dalam memahami metode-metode yang digunakan dalam penyelesaian persamaan differensial.

Dalam penyusunan makalah ini, kami sadar bahwa dalam pembuatan makalah ini masih jauh dari kesempurnaan, masih banyak kekurangan dan kelemahan. Oleh karena itu, kami sangat berharap masukan dan kritikan dari pembaca yang dapat membangun. Sehingga, kami dapat memperbaiki kekurangan yang terdapat dalam makalah kami ini.

Kami, sangat mengucapkan terimakasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam proses penyusunan makalah ini. Baik itu berupa ide, gagasan, serta saran selama proses penyusunan makalah ini. Semoga dengan adanya makalah ini dapat menambah pengetahuan para pembaca terutama dalam memahami materi Persamaan Differensial Metode Substitusi.

Jakarta, 8 November 2021

DAFTAR ISI

MODUL 3

PERSAMAAN DIFERENSIAL METODE SUBSTITUSI

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mampu memahami konsep persamaan diferensial dengan metode substitusi dengan membuktikan metode substitusi homogen dan nilai konstanta	1. Menyelesaikan persamaan diferensial metode substitusi 2. Menyelesaikan Integrasi Langsung 3. Menyelesaikan Pemisahan Variabel 4. Menyelesaikan Substitusi $y = vx$ 5. Rangkuman Materi 6. Contoh soal mandiri dan diskusi kelompok

Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah Suatu Persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih fungsi sembarang (atau variabel terikat), terhadap satu atau lebih variabel bebas(J. H. Lumbantoruan, 2019d). Jika persamaan diferensial memiliki satu peubah bebas maka disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB), Contoh :$y' = \cos x$, $y" + 9y = e^{-2x}$. Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memiliki dua atau lebih peubah bebas, contohnya : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Suatu persamaan yang memiliki peubah/variable tak bebas atau turunan persamaan itu bersifat linier maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa . orde pada persamaan diferensial merupakan derajat tertinggi dari turunan tertinggi(Saputro & Lumbantoruan, 2020).

Bentuk umum Persamaan Diferensial Biasa orde-*n* adalah sebagai berikut : $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$ dengan $a_n(x) \neq 0$ dan $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ adalah koefisien Persamaan diferensial dan Bila $f(x) = 0$ disebut persamaan diferensial biasa linear Homogen, sebaliknya jika tidak disebut persamaan diferensial biasa linear Tak Homogen(Utami, n.d.).

Persamaan diferensial ini banyak dijumpai dalam matematika, fisika, dan bidang ilmu lainnya(Boiliu, Noh Ibrahim, Intarti, Esther Rela, Lumbantoruan, 2021). Adapun tujuan penulisan modul ini adalah mampu menentukan atau mampu memahami konsep dari persamaan diferensial dengan sesuai syarat dari beberapa metode penyelesaian, seperti dengan menggunakan Metode Subtitusi yang membuktikan metode subtitusi homogen dan nilai kostanta(Manalu, 2019), Metode Integrasi Langsung, maupun Metode Pemisahan Variabel.

Cara menggunakan buku panduan persamaan diferensial ini memberikan latihan soal yang bisa digunakan untuk mengasah pengetahuan(J. H. Lumbantoruan, 2017).

Kegiatan Pembelajaran 1

3.1 Metode Substitusi

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tidak diketahui dari fungsi tersebut dengan turunannya sendiri pada derajat turunan(Lumbantoruan, 2017). Ada 2 macam persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial

Persamaan diferensial biasa (PDB) yaitu suatu persamaan diferensial yang memiliki satu peubah bebas atau satu variable bebas.

Contoh:

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}xy = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3y - \frac{dy}{dx} = e^x$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$

Sedangkan persamaan diferensial parsial (PDP) yaitu suatu persamaan yang memiliki dua atau lebih peubah bebas atau variable bebas(J. H. Lumbantoruan, 2016)

Contoh:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Dalam persamaan diferensial derajat tertinggi dari turunan disebut orde(J. H. Lumbantoruan, 2019a). Sedangkan pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan disebut derajat.

Contoh:

1. $\frac{dy}{dx} + 5x - 5 = 0$ (disebut PD orde 1 derajat 1)

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{1}{2}xy = 0$ (disebut PD orde 1 derajat 3)

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ (disebut PD orde 2 derajat 1)

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + \frac{y}{x+1} = e^x$ (disebut PD orde 3 derajat 3)

Dengan mengeliminasi semua konstanta yang sembarang dalam suatu persamaan atau dengan cara substitusi maka dengan cara tersebut kita dapat membentuk suatu persamaan diferensial(Martubi, 2004). Kita dapat melihat orde tertinggi dari derivative dalam sebuah persamaan dengan cara melihat banyaknya konstanta pada persamaan tersebut. Untuk lebih memahaminya maka bisa diperhatikan beberapa contoh soal berikut ini:

Contoh 1

Persamaan $y = Ax^2 + Bx$ bentuk PD nya

Penyelesaian:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2Ax + B$$

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = 2A \leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$$

Substitusikan konstanta A ke:

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

Sehingga:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2\left(\frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\right)x + B$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}x + B$$

$$B = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - x\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$$

Selanjunya substitusikan A dan B ke persamaan:

$$y = Ax^2 + Bx$$

Maka:

$$y = \frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\ x^2 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - \mathrm{x}\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\ \right)x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} + \ x\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\ -\ x^2\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$$

$$=\ x\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} -\ \frac{1}{2}\ x^2\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$$

Contoh 2

$Y\ =\ A.Sin\ x\ +\ B\ cos\ x$, maka bentuklah persamaan diferensialnya. Dimana *A* dan *B* merupakan konstanta sembarang.

Penyelesaian:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} =\ A.cos\ x - B.sin\ x$$

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} =\ -A\ Sin\ x\ -\ B\ cos\ x$$

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} =\ -\ (A\ Sin\ x\ +\ B\ cos\ x)$$

Jadi $\quad \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} =\ -y$ atau $\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} +\ y\ =\ 0$

Contoh 3

Bentuklah persamaan diferensial dari fungsi berikut: $y\ =\ x\ +\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}}$

Penyelesaian:

$y = x + \frac{A}{x} = x + Ax^{-1}$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 1 - Ax^{-2}$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 1 - \frac{A}{x^2}$

Dari fungsi diberikan konstanta sembarang *A* yaitu:

Jika $\frac{A}{x} = y - x$ maka $\mathrm{A} = \mathrm{x}(\mathrm{y} - \mathrm{x})$

Sehingga

$\frac{dy}{dx} = 1 - Ax^{-2}$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 1 - \frac{\mathrm{x}(\mathrm{y} - \mathrm{x})}{x^2}$

$= 1 - \frac{(\mathrm{y}-\mathrm{x})}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}-(\mathrm{y}-\mathrm{x})}{\mathrm{x}} = \frac{2\mathrm{x}-\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$

Maka:

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{2\mathrm{x}-\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$ atau $x.\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2x - y$

Persamaan $y = Ax^2 + Bx$ bentuk PD nya

Penyelesaian:

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2Ax + B$

$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = 2A \leftrightarrow A = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$

Substitusikan konstanta A ke:

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

Sehingga:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2\left(\frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\right)x + B$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}x + B$$

$$B = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - x\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$$

Selanjunya substitusikan A dan B ke persamaan:

$$y = Ax^2 + Bx$$

Maka:

$$y = \frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\ x^2 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - \mathrm{x}\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\right)x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} + x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - x^2\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$$

$$= x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - \frac{1}{2}\ x^2\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$$

Contoh 2

$Y = A.Sin\,x + B\,cos\,x,$ maka bentuklah persamaan diferensialnya(J. H. Lumbantoruan, 2019b). Dimana A dan B merupakan konstanta sembarang.

Penyelesaian:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = A. \cos x - B. \sin x$$

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = -A \, Sin \, x - B \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = -(A \, Sin \, x + B \cos x)$$

Jadi $\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = -y$ atau $\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} + y = 0$

Contoh 3

Bentuklah persamaan diferensial dari fungsi berikut: $y = x + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}}$

Penyelesaian:

$$y = x + \frac{A}{x} = x + Ax^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 1 - Ax^{-2}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 1 - \frac{A}{x^2}$$

Dari fungsi diberikan konstanta sembarang *A* yaitu:

Jika $\frac{A}{x} = y - x$ maka $\mathrm{A} = \mathrm{x}\,(\mathrm{y} - \mathrm{x})$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = 1 - Ax^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x(y-x)}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{(y-x)}{x} = \frac{x-(y-x)}{x} = \frac{2x-y}{x}$$

Maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x} \quad \text{atau } x.\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

Contoh 4

Persamaan $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, Konseplah persamaan diferensial(J. H. Lumbantoruan, 2019c)

Penyelesaian:

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad (i)$

$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$

$y'' = -(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \qquad (ii)$

Substitusi pers (i) ke pers (ii), diperoleh

$y'' = -y$

PD:

$y'' + y = 0$

Kegiatan Pembelajaran 2

3.2 Metode Integral Langsung

Metode integrasi langsung

(J. H. Lumbantoruan, 2020), metode ini tepat digunakan, Jika persamaannya dapat disusun atau dinyatakan dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$, maka persamaan itu dapat dipecahkan dengan integrasi langsung.

Langkah-langkah dalam menyelesaikannya yaitu :

1. Kita tulis soal kedalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$
2. Kemudian kita nyatakan dalam bentuk $dy = f(x)dx$
3. Setelah itu, kita integralkan persamaan itu sehingga dapat dibentuk menjadi

$y = f(x) + c$, bentuk ini merupakan penyelesaian dari persamaan differensial tersebut(Rudhartono, 2014).

<u>Contoh 1</u>

Selesaikan soal dibawah ini :

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2$$

Penyelesiaan :

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2$$

$$dy = x - x^2\ dx$$

$$\int dy = \int x - x^2\ dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$$

Contoh 2

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$$

$$dy = (3x^2 - 6x + 5)dx$$

$$\int dy = \int (3x^2 - 6x + 5)dx$$

$$y = 3\int x^2 - 6\int x + \int 5 \ dx$$

$$y = 3.\frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\,.\frac{x^{1+1}}{1+1} + 5x + C$$

$$y = 3.\frac{x^3}{3} - 6.\frac{x^2}{2} + 5x + C$$

$$y = \ \frac{3x^3}{3} - \ \frac{6x^2}{2} + 5x + C$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 5x + C$$

Contoh 3

$$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4\sin x}{x}$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4\sin x}{x}$$

$$dy = 5x^2 + \frac{4\sin x}{x} \ dx$$

$$\int dy = \int 5x^2 + \frac{4\sin x}{x}\ dx$$

$$y = 5.\frac{x^{2+1}}{2+1} + 4.\frac{\sin x}{x} + C$$

$$y = \frac{5x^3}{3} + 4\sin x + C$$

Contoh 4

Tentukan solusi khusus persamaan berikut jika $y = 3$ untuk $x = 0$:

$$e^x \frac{dy}{dx} = 4$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$e^x \frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\ e^{-x}$$

$$dy = 4\ e^{-x}\ dx$$

$$\int dy = \int 4\ e^{-x}\ dx$$

$$y = 4. \int e^{-x}\ dx$$

$$y = 4\ . -\frac{1}{e^{x}} + C$$

$$y = -4e^{-x} + C$$

Di soal telah diketahui nilai $y = 3$ untuk $x = 0$, maka kita bisa mencari nilai c nya yaitu :

$$y = -4e^{-x} + C$$

$$3 = -4e^{-0} + C$$

$$3 = -4\ .1 + C$$

$$3 = -4 + C$$

$$3 + 4 = C$$

$$7 = C$$

$$C = 7$$

Maka :

$$y = -4e^{-x} + C$$

$$y = -4e^{-x} + 7$$

Contoh 5

Selesaikan persamaan differensial berikut ini :

$$x\frac{dy}{dx} = 5x^3 + 4$$

Penyelesaian :

$$x\frac{dy}{dx} = 5x^3 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^3+4}{x}$$

$$dy = \frac{5x^3 + 4}{x}\ dx$$

$$\int dy = \int 5x^2 + \frac{4}{x}\ dx$$

$$y = 5.\int x^2 + 4x^{-1}\ dx$$

$$y = 5\,.\frac{x^3}{3} + 4\ln x \ + C$$

$$y = \frac{5x^3}{3} + 4\ln x + C$$

<u>Contoh 6</u>

Selesaikan Persamaan Diferensial dibawah ini :

$$x\frac{dy}{dx} = 15x^3 - 6x^2 + 7x - 8$$

Penyelesaian :

$$x\frac{dy}{dx} = 15x^3 - 6x^2 + 7x - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^3 - 6x^2 + 7x - 8}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 6x + 7 - 8x^{-1}$$

$$dy = (15x^2 - 6x + 7 - 8x^{-1})dx$$

$$\int dy = \int (\,15x^2 - 6x + 7 - 8x^{-1})dx$$

$$y = 15\,.\int x^2 - 6\,.\int x + \int 7 - \int 8x^{-1}\ dx$$

$$y = 15.\frac{x^3}{3} - 6.\frac{x^2}{2} + 7x - 8\ln x + C$$

$$y = \frac{15x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 7x - 8\ln x + C$$

$$y = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 8\ln x + c$$

Contoh 7

Selesaikan soal dibawah ini

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x + \frac{3}{x} + 5$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x + \frac{3}{x} + 5$$

$$dy = \left(x^2 - x + \frac{3}{x} + 5\right) dx$$

$$\int dy = \int \left(x^2 - x + \frac{3}{x} + 5\right)\, dx$$

$$y = \int x^2 - x + 3x^{-1} + 5x\, dx$$

$$y = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} + 3\ln x + 5\frac{x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3\ln x + 5x + C$$

Contoh 8

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 2x + 4$$

$$dy = (5x^4 - 2x + 4)dx$$

$$\int dy = \int (5x^4 - 2x + 4)dx$$

$$y = 5.\int x^4 - 2.\int x + \int 4 \ dx$$

$$y = 5\,.\frac{x^{4+1}}{4+1} - 2\,.\frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + C$$

$$y = 5\,.\frac{x^5}{5} - 2\,.\frac{x^2}{2} + 4x + C$$

$$y = \frac{5x^5}{5} - \frac{2x^2}{2} + 4x + C$$

$$y = x^5 - x^2 + 4x + C$$

Contoh 9

Tentukan solusi khusus persamaan differensial berikut jika diketahui $y = 3$ untuk $x = 0$:

$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 4x + 2$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 4x + 2$$

$$dy = 12x^2 - 4x + 2\ dx$$

$$\int dy = \int 12x^2 - \int 4x + \int 2\ dx$$

$$y = 12\int x^2 - 4\int x + 2x + C$$

$$y = 12.\frac{x^{2+1}}{2+1} - 4.\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2x + C$$

$$y = 12.\frac{x^3}{3} - 4.\frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$y = \frac{12x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 2x + C$$

$$y = 4x^3 - 2x^2 + 2x + C$$

Di soal telah diketahui nilai $y = 8$ untuk $x = 0$, maka kita bisa mencari nilai c nya yaitu :

$$y = 4x^3 - 2x^2 + 2x + C$$

$$8 = 4 - 2 + C$$

$$8 = 2 + C$$

$$8 - 2 = C$$

$$6 = C$$

$$C = 6$$

Sehingga :

$$y = 4x^3 - 2x^2 + 2x + C$$

$$y = 4x^3 - 2x^2 + 2x + 6$$

Contoh 10

Selesaikan soal dbawah ini jika diketahui $y = 4$ untuk $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = x\cos x$$

$$dy = x\cos x\ \ dx$$

$$\int dy = \int x\cos x\ \ dx$$

$$y = x\sin x + \cos x + C$$

Karena disoal telah diketahui $y = 4$ untuk $x = 0$ maka untuk mencari nilai C nya adalah sebagai berikut :

$$y = x\sin x + \cos x + C$$

$$4 = 0.\sin 0 + \cos 0 + C$$

$$4 = 0 + 1 + C$$

$$4 - 1 = C$$

$$3 = C$$

$$C = 3$$

Sehingga :

$$y = x\sin x + \cos x + C$$

$$y = x\sin x + \cos x + 3$$

Kegiatan Pembelajaran 3

3.3 Metode Pemisahan Variabel

Jika PDB (Persamaan Diferensial Biasa) berbentuk :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Dimana

$$M(x,y)dx = f_1(x)g_1(y)$$

$$N(x,y)dy = f_2(x)g_2(y)$$

Maka, jika disubtitusikan akan menjadi :

$$f_1(x)g_1(y)\,dx + f_2(x)g_2(y)\,dy = 0$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

Catatan : Tanda negatif tidak mutlak ada dalam solusi, tergantung persamaan diferensial biasa(J. H. Lumbantoruan, 2015).

Jika persamaan diferensial berbentuk $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(x,y)$,yaitu :

Ruas kanan pada persamaan ditunjukan sebagai pembagian atau perkalian fungus *x* dan fungsi *y*, sehingga pembahasan persamaan diferensial parsial dengan melakukan pemisahan variable sehingga factor dari *y* bisa kita gabungkan dengan *dy* dan factor *x* gabungkan dengan *dx* (J. H. Lumbantoruan & Natalia, 2021).

Contoh 1

Selesaikan persamaan diferensial biasa berikut :

$(1+y^2)dx + xy\,dy = 0$

Penyelesaian :

$(1+y^2)dx = -xy\,dy$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{y\,dy}{1+y^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{y\,dy}{1+y^2}$$

Gunakan pemisalan : $u = 1 + y^2$

$$\frac{du}{dy} = 2y \rightarrow \frac{du}{2} = y\,dy$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{y\,dy}{1+y^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{du}{2u}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln u + \ln c$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln c$$

Sehingga kita peroleh Persamaan diferensial tersebut adalah $\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln c$

Contoh 2

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$y' - xy = x$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} - xy = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

$$\frac{dy}{dx} = x(1+y)$$

$$\frac{dy}{1+y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x\,dx$$

Gunakan pemisalan : $u = 1 + y$

$$\frac{du}{dy} = 1 \rightarrow du = dy$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x\, dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int x\, dx$$

$$\ln u = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\ln(1+y) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Maka, solusi Persamaan diferensial tersebut adalah $\ln(1+y) = \frac{1}{2}x^2 + C$

<u>Contoh 3.</u>

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$$

Penyelesaian:

Pisahkan berdasarkan variabelnya untuk mendapatkan sebuah bentuk umum

$$\frac{1}{(1+\mathrm{y})} dy = (1 + x)\, dx$$

jika kita integrasikan kedua ruas menjadi:

$$\int \frac{1}{(1+\mathrm{y})} dy = \int (1 + \ x)\ dx$$

$$ln\ (1\ +\ y)\ =\ x\ + \frac{1}{2}\mathrm{x}^2\ +\ c$$

<u>Contoh 4</u>

$$\frac{dy}{dx} = xy - x$$

Penyelesaian :

Perlu kita ketahui bahwa :

$xy - x = x(y - 1)$

Maka, solusinya

$$\frac{dy}{dx} = x(y - 1)$$

Langkah selanjutnya adalah kita pisahkan antara fungsi x dan fungsi y

$$\frac{dy}{y-1} = x\ dx$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int x\ dx$$

- $\int \frac{dy}{y-1}$

Misalkan :

$u = y - 1$

$du = dy$

$$\int \frac{dy}{y-1}$$

$$\int \frac{du}{u}$$

$= \ln u$ **subtitusi $u = y - 1$

$= ln\,(y-1)$

Maka,

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int x\,dx$$

$$\ln(y-1) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\ln(y-1) = \frac{x^2}{2} + c$$

<u>Contoh 5</u>

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$y' = \frac{2x}{(y+1)}$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+1}$$

$$(y+1)dy = 2x\ dx$$

$$\int (y+1)dy = \int 2x\ dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + y + c_1 = x^2 + c_2$$

Kita pindahkan ke ruas kiri untuk variabel dan ruas kanan untuk konstanta

$$\frac{1}{2}y^2 + y - x^2 = C; c = c_2 - c_1$$

Contoh 6.

Selesaikan Persamaan Diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{6y+2}$$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{6y+2}$$

$$(6y + 2)dy = (8x)dx$$

$$\int (6y + 2)\, dy = \int (8x)\, dx$$

$$3y^2 + 2y + c_1 = 4x^2 + c_2$$

Kita pindahkan ke ruas kiri untuk variabel dan ruas kanan untuk konstanta

$$3y^2 + 2y - 4x^2 = C \,; C = c_2 - c_1$$

Kegiatan Pembelajaran 4

3.4 Metode Substitusi $y = vx$

Beberapa bentuk persamaan diferensial tak linier orde satu dengan variabel tak terpisah namun koefisien merupakan fungsi homogen dengan orde sama dapat dicari solusinya menggunakan metode substitusi sehingga didapatkan bentuk persamaan diferensial variabel terpisah(J. Lumbantoruan, 2018).

Solusi persamaan diferensial dicari dengan mensubstitusikan: $y = vx$ dan $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ kedalam persamaan diferensial sehingga didapatkan bentuk persamaan diferensial dengan peubah terpisah(J. H. Lumbantoruan, 2021).

Cara penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode substitusi yaitu sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial disubstitusi dengan : $y = vx$
2. Substitusi dengan : $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = v + x \frac{dy}{dx}$
3. Selanjutnya melakukan metode pemisahan variable
4. Lakukan metode integralkan(Male & Lumbantoruan, 2021)
5. Kemudian menyatakan Kembali v dalam bentuk x dan y

Contoh 1

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{x} + 3\mathrm{y}}{2\mathrm{x}}$$

Persamaan diatas tidak dapat diselesaikan dengan cara integrasi langsung ataupun pemisahan variabel, karena dari penyebutnya terdapat dua variable yaitu x dan y. maka kita lakukan substitusi $y = vx$, dengan v adalah fungsi x.

Untuk $y = vx$ terdapat pekalian antara $v \, dan \, x$ maka kita menggunakan rumus uv.

Dari $y = vx$ dideferensialkan menjadi

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{x} + 3(\mathrm{v}.\mathrm{x})}{2\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x} + 3\mathrm{vx}}{2\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}(1 + 3v)}{2\mathrm{x}} = \frac{1 + 3\mathrm{v}}{2}$$

Sehingga

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{1 + 3\mathrm{v}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ persamaan (1)}$$

Kita bisa melihat Rumus :

$Y = v \,.\, x,$ maka turunannya :

$u = v \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$

$v = x \rightarrow \frac{dv}{dx} = 1$

Sehingga:

rumus $Y = U.V$ maka $Y' = U.V' + V.U'$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = v \,.\, 1 + x \,.\, \frac{dy}{dx}$ ... persamaan (2)

Selanjutnya pers (1) kita masukkan ke pers (2) maka:

$\frac{1+3\mathrm{v}}{2} = v + x \,.\, \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

$x \,.\, \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = \frac{1+3\mathrm{v}}{2} - v$

$x \,.\, \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = \frac{1+3\mathrm{v}}{2} - \frac{2\mathrm{v}}{2}$

$x \,.\, \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = \frac{1+\mathrm{v}}{2}$

Lakukan pemisahan variabel

$\frac{2}{(1+\mathrm{v})}\, dv = \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ sudah dinyatakan dalam bentuk v dan x

Kemudian masing-masing ruas diintegrasikan ke x menjadi

$$\int \left(\frac{2}{1+\mathrm{v}}\right) dv = \int \frac{1}{\mathrm{x}}.\, dx$$

$$2\, ln\, (1 + v) = ln\, x + c$$

Jika Constanta C diganti bentuk lain yaitu : $C = ln\ A$

$2\ ln\ (1 + v) = ln\ x + ln\ A$

$\ln(1 + \mathrm{v})^2 = ln\ (A\ .x)$

$(1 + \mathrm{v})^2 = A\ .x \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\ (3)$

Substitusi dengan $v = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$

dapat ditulis menjadi $\left(1 + \frac{\mathrm{y}}{x}\right)^2 = AX$

apabila semua ruas dikalikan x^2 maka $1 + 2yx + y^2 = A\mathrm{X}^3$

Persamaan $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{x+3y}}{\mathrm{2x}}$ (karena x dan y memiliki pangkat yang derajatnya sama yaitu 1 maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial homogen).

Contoh 2

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{x^2+y^2}}{\mathrm{xy}}$$

Penyelesaian:

Pertama kita substitusikan $y = vx$ (dimana v merupakan suatu fungsi dari x)

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = v + x\ \frac{dy}{dx}$$

$y = vx$ dideferensialkan menjadi

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2+v^2+y^2}{vx^2} = \frac{1+v^2}{v}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v^2}{v} \text{ …… pers 1}$$

Selanjutnya substitusi dengan

rumus $Y = U.V$ maka $Y' = U.V' + V.U'$

$$\frac{dy}{dx} = v\,.\,1 + x\,.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dy}{dx} \text{ …..pers 2}$$

Jika persamaan (1) dimasukkan ke persamaan (2)

$$\frac{1+v^2}{v} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-v^2}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

Selanjutnya menggunakan metode pemisahan variable, sehingga akan menghasilkan v dan x

$$v\,dv = \frac{1}{x}$$

Kedua ruas kita integralkan menjadi

$$\int vdv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \ln x + C$$

Kemudian nyatakan Kembali v dalam x dan y

Substitusikan yang telah digunakan adalah $y = vx \rightarrow \; v = \frac{y}{x}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln x + C$

$y^2 = 2x^2 (\ln x + C)$

<u>Contoh 3</u>

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3}{4x}$$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3}{4x}$$

Substitusi $y = v.x$ atau $v = \frac{y}{x}$, sehingga:

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ dan soal menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3vx}{4x} = \frac{2+3v}{4}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2+3v}{4}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2+3v}{4} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2-3v}{4} - \frac{4}{4}v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2-v}{4}$$

$$\frac{4}{2-v}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{4}{2-v} dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$4\ In\ (2-v) = In\ x + C$$

$$4\ In\ (2-v) = In\ x + In\ A$$

$$In\ (2-v)^4 = In\ A.x \rightarrow (2-v)^4 = A.x$$

$v = \dfrac{y}{x}$ di masukkan kembali sehingga :

$$\left(2-\frac{y}{x}\right)^4 = A.x$$

$$\left(2\frac{x}{x}-\frac{y}{x}\right)^4 = A.x \rightarrow \left(\frac{2x}{x}-\frac{y}{x}\right)^4 = A.x$$

$$\left(\frac{2x-y}{x}\right)^4 = A.x$$

Jadi: $(2x-y)^4 = A.x^5$

<u>Contoh 4</u>

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut

$$(x^2+2xy)\frac{dy}{dx} = 2xy + 3y^2$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy+3y^2}{x^2+2xy}$$

Substitusi $y = v.x$ atau $v = \dfrac{y}{x}$, sehingga:

$\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ dan soal menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x.v.x + 3(v.x)^2}{x^2 + 2x.vx} = \frac{2v.x^2 + 3v^2.x^2}{x^2+2v.x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2v.x^2 + 3v^2.x^2}{x^2+2v.x^2} = \left(\frac{2v + 3v^2}{1 + 2v}\right)\frac{x^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2v+3v^2}{1+2v}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2v + 3v^2}{1 + 2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v + 3v^2}{1 + 2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v + 3v^2}{1 + 2v} - \frac{v + 2v^2}{1 + 2v} = \frac{v + v^2}{1 + 2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v + v^2}{1 + 2v}$$

$$\frac{1 + 2v}{v + v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1 + 2v}{v + v^2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$In\ (v + v^2) = In\ x + C$$

$$In\ (v + v^2) = In\ x + In\ A$$

$$In\ (v + v^2) = In\ A.x \rightarrow v + v^2 = A.x$$

$v = \frac{y}{x}$ di masukkan kembali sehingga :

$$v = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = A.x$$

$$\frac{xy + y^2}{x^2} = A.x \rightarrow xy + y^2 = A.x^3$$

Kegiatan Pembelajaran 5

3.5 Rangkuman

1. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tidak diketahui dari fungsi tersebut dengan turunannya sendiri pada derajat turunan
2. Derajat tertinggi dari turunan dalam suatu persamaan disebut orde
3. Jika persamaannya dapat disusun atau dinyatakan dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$, maka persamaan itu dapat dipecahkan dengan integrasi langsung.

   Langkah-langkah dalam menyelesaikannya yaitu :

   - Tulis soal kedalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$
   - Kemudian nyatakan dalam bentuk $dy = f(x)dx$
   - Setelah itu integralkan persamaan itu sehingga dapat dibentuk menjadi

     $y = f(x) + c$, yang merupakan penyelesaian persamaan differensial tersebut.
4. Jika persamaan diferensial berbentuk: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(x, y)$,yaitu : pada ruas kanan persamaan dapat dinyatakan sebagai pembagian atau perkalian fungsi x dan fungsi y, maka penyelesaian persamaan diferensial dengan cara memisahkan

variabelnya sehingga factor *y* kita gabungkan dengan *dy* dan factor *x* dengan *dx*

5. Jika suatu persamaan tidak dapat diselesaikan dengan cara integrasi langsung ataupun pemisahan variabel, karena dari penyebutnya terdapat dua variable yaitu x dan y. maka kita lakukan substitusi $y = vx$, dengan v adalah fungsi x. Ingat rumus $Y = U.V$ maka $Y' = U.V' + V.U'$.

   Cara penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode substitusi yaitu sebagai berikut:

   - Persamaan diferensial disubstitusi dengan : $y = vx$
   - Substitusi dengan : $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = v + x \frac{dy}{dx}$
   - Selanjutnya melakukan metode pemisahan variable
   - Lakukan metode integralkan
   - Kemudian menyatakan Kembali v dalam bentuk x dan y

Kegiatan Pembelajaran 6

3.6 Diskusi Kelompok Mahasiswa

Selesaikan soal dibawah ini dengan menggunakan metode integrasi langsung

1. $\frac{dy}{dx} = x - x^2$

Penyelesiaan :

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2$$

$$dy = x - x^2 \; dx$$

$$\int dy = \int \dots \; dx$$

$$y = \cdots - \cdots + c$$

2. $\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4}{x}$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4}{x}$$

$$dy = 5x^2 + \frac{4}{x} \; dx$$

$$\int dy = \int 5 \dots + \cdots dx$$

$$y = 5 \int \dots + 4x^{-1} \; dx$$

$$y = 5 \dots + \cdots \; dx$$

$$y = \frac{5}{3} \dots + \cdots \; dx$$

3. $\frac{dy}{dx} = \sin x + x \cos x$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + x \cos x$$

$$dy = \sin x + x\cos x\ dx$$

$$\int dy = \int \ldots\ dx$$

$$y = -\cos x + \cdots + \cdots + c$$

4. $\frac{dy}{dx} = 5x^2 + 2$

   Penyelesain :

   $$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + 2$$

   $$dy = \cdots + \cdots\ dx$$

   $$\int dy = \int \ldots + 2\ dx$$

   $$y = \cdots \int \ldots + 2\, dx$$

   $$y = \cdots + \cdots + c$$

5. $\frac{dy}{dx} = \sin x + x\cos x$

   Penyelesaian :

   $$\frac{dy}{dx} = \sin x + x\cos x$$

   $$dy = \sin x + x\cos x\ dx$$

   $$\int dy = \int \ldots\ dx$$

   $$y = \cdots + C$$

6. Tentukan solusi khusus persamaan differensial berikut jika diketahui $y = 3$ untuk $x = 0$:

$\frac{dy}{dx} = 4x + 4$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 4$$

$$dy = \cdots + \cdots\ dx$$

$$\int dy = \int \ldots + 4\,dx$$

$$y = \cdots \int \ldots + \ldots + C$$

$$y = \cdots + 4x + C$$

Karena disoal telah diketahui bahwa $y = 9$ dan $x = 1$ maka :

$$y = \cdots + 4x + C$$

$$\ldots = \cdots + 4(1) + C$$

$$\ldots = \cdots + 4 + C$$

$$\ldots = \cdots + C$$

$$\ldots = C$$

$$C = \cdots$$

Sehingga :

$$y = \cdots + 4x + C$$

$$y = \cdots + 4x + \cdots$$

Selesaikan soal-soal dibawah ini dengan menggunakan metode pemisahan variable

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{8y+4}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{8y + 4}$$

$$(\ldots + \cdots)dy = (\ldots)dx$$

$$\int (8y + 4)dy = \int (8x)dx$$

$$4y^4 + \cdots + c = 4x^2 + c$$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{8y-3}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{8y - 3}$$

$$(\ldots - \cdots)dy = (\ldots)dx$$

$$\int (8y - 3)dy = \int (6x)dx$$

$$4y^2 - \cdots + c = \cdots + c$$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+3y^2}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + 3y^2}$$

$$(\ldots + \cdots)dy = (\ldots)dx$$

$$\int (1 + \cdots)dy = \int (x^2)dx$$

$$... + y^3 + c = \frac{1}{3} ... + c$$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{8y-3}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{8y - 3}$$

$$(... - \cdots)dy = (...)dx$$

$$\int (8y - 3)dy = \int (6x)dx$$

$$4y^2 - \cdots + c = \cdots + c$$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+3y^2}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + 3y^2}$$

$$(... + \cdots)dy = (...)dx$$

$$\int (1 + \cdots)dy = \int (x^2)dx$$

$$... + y^3 + c = \frac{1}{3} ... + c$$

12. Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + 4y^2}{3x^2y - x^2}$$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + 4y^2}{3x^2y - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ldots(x + \cdots)}{x^2(\ldots - 1)}$$

$$\frac{(3y - \cdots)}{y^2}\ldots = \frac{(x + 4)}{\ldots}\ldots$$

$$\int \frac{(3y - 1)}{\ldots}\ldots = \int \frac{(x + \cdots)}{x^2}\ldots$$

$$\int (\frac{3}{\ldots} - y^2)\, dy = \int (\frac{\ldots}{x} + \cdots)\, dx$$

$$\ldots. + y^{-1} = In\, x - \cdots. + c$$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{\ldots} = \int \frac{\ldots}{x}$$

$$\ldots + c_1 = \cdots + c_2$$

$$\ln y = \cdots + c$$

$$y = e^{\ldots + c}$$

$$y = \cdots \times \ldots$$

$y = e^c \times \ldots$

$y = C \times x$

14. $yy' + 4x = 0$

Penyelesaian :

$yy' + 4x = 0$

$\ldots \frac{dy}{\ldots} = -4x$

$\ldots dy = -4x$

$\int y \ldots = \int -4x \ldots$

$\frac{1}{2} \ldots + \cdots = \frac{\ldots}{\ldots} x^2 + \cdots$

$\frac{1}{2} y^2 + \cdots = C; C = c_2 - c_1$

15. $xy \frac{dy}{dx} + x^2 + 1 = 0$

Penyelesaian :

$xy \frac{dy}{dx} + x^2 + 1 = 0$

$\ldots \frac{dy}{dx} = \cdots - \cdots$

$y \frac{\ldots}{\ldots} = -\cdots - \frac{1}{x}$

$$\int \dots dy = \int (\dots - \cdots)\, dx$$

$$\frac{1}{2} \dots + \cdots = -\frac{1}{2} \dots - \cdots + c_2$$

$$\frac{1}{2} y^2 + \cdots x^2 + \cdots = C; C = c_2 - c_1$$

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-5y}{8x}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 5y}{8x}$$

Substitusi $y = v.x$ atau $v = \frac{y}{x}$, sehingga:

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ dan soal menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 5v.x}{8x} = \frac{x(4 - 5v)}{8x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 5v}{8}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{4 - 5v}{8}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \cdots - v$$

$$\dots \frac{dv}{dx} = \frac{4 - 5v}{8} - \cdots$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{4-13v}{8}$$

$$\ldots dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{8}{4-13v}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$8\,In\,(\ldots\ldots) = In\,x + c$$

$$8\,In\,(4-13v) = \cdots \ldots.$$

$$In\,(4-13v)^8 = In\,A.x \rightarrow (4-13v)^8 = A.x$$

$v = \dfrac{y}{x}$ di masukkan kembali sehingga :

$$\left(4 - 13\frac{y}{x}\right)^8 = \cdots$$

$$(\ldots\ldots)^8 = A.x$$

Jadi: $(4x - 13y)^8 = A.x^9$

17. $(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = xy$

Penyelesaian:

$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Misalkan : $y = vx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

Dan $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{vx^2}{x^2+v^2x^2} = \frac{v}{1+v^2}$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^2} - v$$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{\dots}{1+v^2} = \frac{v^3}{1+v^2}$

$\int \frac{1+v^2}{v}\, dv = -\int \dots$

$\int (\dots)\, dv = \ln x + C$

Misalnya $C = \ln A$, maka

$\dots + \ln v = -\ln x + \ln A$

18. $2x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

Penyelesaian:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\frac{x^2+y^2}{2x^2} = \frac{\dots\dots}{2x^2} = \frac{1+v^2}{2}$

$\dots . \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2} - \cdots = \frac{1-2v+\cdots}{2} = \frac{(\dots.)^2}{2}$

$\int \frac{2}{(v-1)^2}\, dv = \int \dots dx$

$\dots \dots = \ln x + C$

19. $y' = \frac{4x^2+y^2}{xy}$

Penyelesaian:

$\frac{4x^2+y^2}{xy} = \frac{4x^2+v^2x^2}{vx^2} = \frac{4+v^2}{v}$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{4+v^2}{v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{4+v^2}{v} - \cdots$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{\dots+\cdots-\cdots}{v}$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{4}{v}$$

$$\dots\frac{dv}{dx} = \frac{4}{x}dx$$

$$\int v.dv = \int \frac{4}{x}dx$$

$$\frac{\dots}{2} = \dots + C$$

Substitusikan $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}{2} = 4\ln x + C$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = 4\ln x + C$$

$$y^2 = 2x^2(\dots\dots + C)$$

$$y = x\sqrt{\dots + \dots}$$

20. $2xyy' = 3y^2 + x^2, \quad y(1) = 2$

Penyelesaian:

$$y' = \frac{3y^2+x^2}{2xy}$$

$$\frac{\dots+\dots}{2vx^2} = \frac{3v^2+1}{2v}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2+1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2+1}{2v} - \dots$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2+1-\dots}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{\dots+\dots}{2v}$$

$$\frac{2vdv}{v^2+\dots} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2v}{v^2+1}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$\ln(\ldots + \cdots) + C = \ln x + \cdots$

$\ln(\ldots + \cdots) = \ln x + C$

Substitusikan $v = \frac{y}{x}$

$\ln(\ldots + 1) = \ln x + C$

$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \cdots$

$\frac{y^2 + \cdots}{x^2} = \cdots$

$y^2 + x^2 = \cdots$

$y^2 = \cdots - x^2$

$y^2 = x^2(\ldots - \cdots)$

$y = x\sqrt{\ldots - ..}$

$y(1) = 2$

$\ldots = 1\sqrt{\ldots}$

$C = 5$

$y = x\sqrt{\ldots}$

Kegiatan Pembelajaran 7

3.7 Latihan Mandiri Mahasiswa

Untuk soal nomor 1-3, selesaikan persamaan tersebut dengan metode integrasi langsung. Jika diketahui $y = 8$ untuk $x = 1$.

1. $\frac{dy}{dx} = 2x + 4$

2. $\frac{dy}{dx} = 6x^3 + 2$

3. $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 4x + 3$

Untuk soal nomor 4-5 selesaikan dengan metode integrasi langsung untuk mencari penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut

4. $x\frac{dy}{dx} = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8$

5. $e^x \frac{dy}{dx} = 7x^2 + 4$

6. $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 3x + 2$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+4y}{5x}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+7y}{12x}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{23x}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{7x+2y}{2x}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+3y}{2x}$

Selesaikan persamaan diferensial berikut dengan substitusi $y = vx$:

12. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

13. $-ydx + \left(x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = 0$

14. $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

15. $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos(x^2)}{y}$

Gunakanlah metode substitusi untuk menemukan solusi penyelesaian persamaan differensial berikut ini!

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x}$

18. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x}$

20. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y}{20x}$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{5x}$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+5y}{x}$

24. . $\frac{dy}{dx} = \frac{12x+8y}{3x}$

25. $\frac{dy}{dx} = \frac{20x+8y}{2x}$

26. $\frac{dy}{dx} = \frac{7x+8y}{x}$

27. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x+3y}{x}$

28. . $\frac{dy}{dx} = \frac{8x+18y}{2x}$

29. $\frac{dy}{dx} = \frac{12x+5y}{x}$

30. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+2y}{3x}$

INDEKS

Peubah

Persamaan

Persamaan diferensial

Persamaan diferensial parsial

Persamaan diferensial biasa

R

Relasi

S

Substitusi

Solusi khusus

Solusi umum

Syarat awal

T

Turunan

V

Variable

Variable terpisah

GLOSARIUM

BERELASI

Adanya hubungan antara anggota suatu himpunan dengan himpunan lainnya

BILANGAN REAL

Suatu bilangan yang ditulis dalam bentuk decimal, seperti 2,4

DETERMINAN

Nilai pada unsur matriks persegi yang dapat dihitung

DERAJAT

Pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial

DIFERENSIAL

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tidak diketahui dari fungsi tersebut dengan turunannya sendiri pada derajat turunan

DERIVATIF

Ilmu kalkulus yang mempelajari terhadap bagaimana perubahan suatu nilai fungsi berdasarkan nilai yang di masukan

EKSPONENSIAL

Materi eksponensial menyajikan persamaan yang melibatkan bilangan berpangkat. Eksponensial merupakan fungsi yang penting di matematika

EKSAK

Bilangan pasti

FUNGSI

Sekelompok aktifitas yang tergolong pada jenis

FUNGSI YANG HOMOGEN

Suatu fungsi yang mengalikan fungsi dengan skala

HOMOGEN

Terdiri atas macam, jenis, sifat, watak, dan sebagainya yang sama.

HIMPUNAN

Sekumpulan benda-benda atau objek yang jelas

INTEGRAL

Integral merupakan bentuk operasi matematika yang kontinu yang juga merupakan kebalikan dari turunan atau anti turunan.

INTERVAL

Interval merupakan himpunan bilangan-bilangan real yang ditunjukan sebagai suatu pasangan berurut dan dinyatakan dalam suatu pertidaksamaan

KONSTANTA

Suatu nilai tetap, berlawanan dengan variable yang berubah-ubah.

KOEFISIEN

Bilangan yang mengandung variabel

KUADRAT

Kuadrat adalah suatu kelipatan atau pengalian sebanyak kelipatan tersebut (misalkan $4 \times 4 = 4^2, a \times a = a^2$); pangkat dua

KOMPLEKS

Bilangan kompleks merupakan bilangan yang terdiri dari dua bagian yaitu bagian riil dan bagian imajiner

LINIER

Suatu perkalian konstanta dengan variable tunggal pada persamaan aljabar atau juga setiap sukunya mengandung konstanta

METODE INTEGRASI LANGSUNG

Salah satu metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Dimana dalam proses penyelesaiannya kita langsung mengintegrasikan antara ruas kiri dan ruas kanan.

METODE PEMISAHAN VARIABEL

Suatu metode yang dapat menyelesaikan sebuah persamaan diferensial orde satu dengan menulis variable yang sejenis pada ruas persamaan yang berbeda

METODE SUBSTITUSI

Salah satu metode penyelesaian matematika dengan cara mensubstitusikan nilai satu variable dari satu pesamaan ke pesamaan lain

NUMERIK

Sekumpulan symbol atau sebuah symbol yang mempresentasikan sebuah bilangan

ORDE

Pangkat/turunan tertinggi dari sebuah persamaan diferensial

PECAHAN

Suatu persamaan pada matematika yang terdiri dari pembilang dan penyebut

PEUBAH

Nilai yang dapat berubah/ dapat bervariasi dari suatu himpunan nilai tertentu

RELASI

Suatu himpunan yang saling berpasangan dari anggota satu dan anggota yang lain

TURUNAN

Suatu fungsi yang akan berubah sesuai perubahan lainya

VARIABEL

Perubahan nilai dalam cangkupan soal atau himpunan operasi yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

Boiliu, Noh Ibrahim, Intarti, Esther Rela, Lumbantoruan, J. H. (2021). Influence of the Personal Competence of Teachers of Christian Religious Education on Learning Motivation in High School Students in South Tangerang City. *2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, *560*, 298–302. https://www.atlantis-press.com/article/125957922.pdf

Lumbantoruan, J. (2018). Modul Geometri II (Geometri Analitik dan Transformasi). In J. H. Lumbantoruan (Ed.), *Modul Geometri II (Geometri Analitik dan Transformasi)* (pp. 1–35). Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1634/1/Modul Geometri II%28Geometri Analitik dan Transformasi%29.docx.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2015). *Modul Kalkulus Lanjut 2015* (J. H. Lumbantoruan (ed.)). Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1637/

Lumbantoruan, J. H. (2016). *Modul Kalkukus Lanjut 2016*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1638/

Lumbantoruan, J. H. (2017). Pengembangan bahan ajar integral tak tentu berbasis model small group discussion di program studi pendidikan matematika FKIP UKI tahun 2016/2017. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, *10*(2), 99–118. http://ejournal.uki.ac.id/index.php/jdp/article/view/610

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN GEOMETRI 1*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1655/1/BMP Geometri 1.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1657/1/BMP Matematika.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA*. 1–259. http://repository.uki.ac.id/1811/1/BUKU MATERI PEMBELAJARAN.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2019d). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan. *Jurnal EduMatSains*, *3*(2), 147–168. http://repository.uki.ac.id/id/eprint/1865

Lumbantoruan, J. H. (2020). Analisis Miskonsepsi Pada Soal Cerita Teori Peluang Di Program Studi Pendidikan Matematika. *Jurnal EduMatSains*, *4*(2), 153–168. http://repository.uki.ac.id/1864/

Lumbantoruan, J. H. (2021). *Mata Kuliah: Matematika Kimia*. 1–21. http://repository.uki.ac.id/4805/1/URLbuktidokumenMatematikaKimia161241023.pdf

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). Development of a Constructivism-Based Statistics Module for Class VIII Junior High School Students. *Solid State Technology*, *64*(2), 4427–4444. http://repository.uki.ac.id/id/eprint/4134

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics. *2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, *560*, 507–513. https://www.atlantis-press.com/article/125957918.pdf

Manalu, R. U. (2019). *Probalitas* (J. H. Lumbantoruan (ed.)). UKI Press. http://repository.uki.ac.id/1304/1/Buku Probalitas.pdf

Martubi. (2004). *persamaan diferensial orde satu*. Fakultas Teknik UNY. http://staffnew.uny.ac.id/upload/131453198/pendidikan/Modul+PD+ORDE+SATU.pdf

Rudhartono. (2014, January 6). *Soal dan Pembahasan Persamaan Differensial Metode Integrasi Langsung (1-3) « Istana Mengajar*. ISTANA MENGAJAR. https://istanamengajar.wordpress.com/2014/01/06/soal-dan-pembahasan-persamaan-differensial-metode-integrasi-langsung-1-3/

Saputro, P. A., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *EduMatSains: Jurnal Pendidikan, Matematika Dan Sains*, *1*(1), 35–49. http://repository.uki.ac.id/3480/

Utami, D. P. P. (n.d.). *PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE-PERTAMA*. Academia.Edu. Retrieved January 4, 2022, from https://www.academia.edu/28812624/PERSAMAAN_DIFERENSIAL_ORDE_PERTAMA