Modul Pembelajaran

Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Satu

Disusun Oleh:

Gracia Friskila (1913150012)

Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Kristen Indonesia

2021

Prakata

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena saya dapat menyelesaikan modul 4 tentang Aplikasi Persamaan Differensial Orde satu.

Modul ini secara terperinci menjelaskan tentang konsep mengaplikasikan persamaan differensial orde 1, menentukan fungsi primitif, dan persamaan differensial yang homogen dengan koefisien konstan. Dengan adanya modul ini, semoga dapat menjadi referensi bagi mahasiswa. Sumber referensi dasar modul aplikasi persamaan differensial berasal dari artikel ilmiah, buku, dan website yang dipilih dan digunakan untuk memperkuat pembahasan.

Saya mengetahui bahwa masih banyak kekurangan dalam penyusunan modul ini. Oleh sebab itu, dengan segala kerendahan hati, saya sangat mengharapkan saran dan kritik dari para pembaca, sehingga penulis gunakan dalam perbaikan.

Jakarta, September 2021

Penulis

MODUL PEMBELAJARAN APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL

Pendahuluan

Persamaan diferensial ialah salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menganalisis masalah-masalah dalam suatu fenomena alam. Persoalan yang terdapat fenomena alam dapat dimodelkan ke dalam bentuk aplikasi persamaan diferensial orde satu.

Aplikasi dalam persamaan diferensial dapat ditemukan dalam bidang biologi, kimia, fisika, teknologi, ekonomi, demografi, dan lain sebagainya. Aplikasi persamaan diferensial merupakan alat untuk mengetahui kelakuan dan sifat-sifat solusi dari permasalahan yang akan dibahas.

Modul ini membahas tentang aplikasi persamaan diferensial orde satu di bidang fisika, biologi, dan ekonomi. Selanjutnya, mempelajari tentang pembuktian metode transformasi. Terakhir, terdapat soal-soal diskusi dan latihan soal mandiri.

Setelah mempelajari modul aplikasi persamaan diferensial, mahasiswa diharapkan dapat:

- Mahasiswa mengeerti cara mengaplikasian Persamaan Differensial
- Mahasiswa mampu menentukan fungsi secara homogen dan menentukan fungsi primitiifnya
- Mahasiswa mampu membuat soal aplikasi persamaan diferensial orde satu dan metode transformasi

Supaya mahasiswa dapat mempelajari modul ini dengan baik dan mudah, perhatikan petunjuk berikut:

1. Membaca pendahuluan terlebih dulu dari modul aplikasi persamaan diferensial dengan cermat
2. Membaca dengan cermat setiap bagian modul aplikasi persamaan diferensial dan cobalah untuk mencari inti dari modul aplikasi persamaan diferensial
3. Mengulang kembali bagian demi bagian dari modul aplikasi persamaan diferensial dengan seksama dan cobalah untuk membuat rangkuman dengan kata-kata sendiri
4. Diskusikan isi modul aplikasi persamaan differensial dengan teman secara individual maupun kelompok
5. Disarankan mahasiswa mencari sumber lain tentang aplikasi persamaan diferensial orde satu di internet maupun buku.

MODUL 4

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mampu memahami konsep Persamaan Diferensial orde 1. Mampu memahami linear yang homogen dengan koofisien konstan. Mampu menentukan fungsi primitifnya dengan baik serta menyelesaikan soal dan membuat soal yang sesuai dengan persamaan diferensial orde 1.	1. Fungsi primitif 2. Persamaan diferensial linear yang homogen dengan kofisien konstan 3. Akar-akar bilangan kompleks

MODUL 4

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

Inti matematika terapan adalah untuk memecahkan persoalan berkaitan dengan fenomena alam ke dalam bahasa matematika atau dapat dikatakan pemodelan matematika (Lumbantoruan, 2019d).

Berkaitan fenomena alam, orang-orang tidak jarang memerlukan pemodelan matematika dari masalah-masalah yang akan dihadapi (Lumbantoruan, 2018a). Banyak persoalan matematika dari gejala-gejala alam yang model matematiknya dapat diterapkan dalam bentuk persamaan diferensial orde satu. Model matematika yang diperoleh ini penyelesaiannya dapat dicari dengan metode yang sesuai dengan persoalan yang diketahui (Lumbantoruan, 2015).

Hingga sekarang belum ditemukan cara terbaik dalam memformulasikan model matematika. Hambatan dalam memformulasikan model matematiknya adalah fenomena baru (*new phenomena*) yang bersifat tidak rutin dan sering melibatkan beberapa variabel (Lumbantoruan, 2016). Dalam memformulasikan model matematika suatu gejala-gejala alam dibutuhkan dasar pengetahuan serta kemampuan yang lebih kompleks. Salah satu cara dalam mempelajari model matematik ini dengan menelaah contoh-

contoh penyusunan model matematika yang telah dikemukakan oleh para ahli. Seperti contoh:

Pertumbuhan dan Peluruhan

Misalkan *N* adalah jumlah kuantitas atau kualitas sesuatu dalam waktu *t*, maka perubahan dapat kita sebut bertambah sama dengan pertumbuhan dan berkurang sama dengan peluruhan yang berbanding lurus dengan kuatitas N, dengan kata lain (Lumbantoruan, 2017):

$$\frac{dN}{dt} - KN = 0$$

Peluruhan Radioaktif

Zat radioaktif meluruh dengan memancarkan radiasi secara spontan. Misalkan *Nt* adalah masssa zat yang tersisa pada saat t, N_0 adalah massa zat, maka laju peluruhan relatif terhadap massanya bernilai konstan (Rina & Husna, 2019). Oleh sebab itu, laju perubahan massa zat terhadap waktu t dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

$$\frac{dN}{N} = K\ dt$$

Diintegralkan terhadap t

$$\ln N = Kt + C$$

Dimana C merupakan konstanta sebarang. Misalkan pada saat $t = 0$, N_0 adalah banyak atom awal atau mula-mula zat radio aktif, maka $C = N_0$. Jika disubtitusikan pada hasil pengintegraian diperoleh:

$$\ln N = Kt + C$$

$$\ln N = Kt + N_0$$

$$e^{\ln N} = e^{kt} \,.\, e^{N_0}$$

$$N = N_0 \,.\, e^{kt}$$

Maka, diperoleh

$$N = Ce^{kt}$$

Contoh soal:

(Bronson & Costa, 2014) Sebuah zat radioaktif tertentu diketahui mengalami peluruhan dengan laju yang professional terhadap jumlah yang diketahui. Bila pada mula-mula terdapat 50 ml gram zat dan sesudah 2 jam diamati bahwa zat tersebut telah kehilangan 10% masa awalnya.

a. Carilah ekspresi matematisnya

b. Masa zat tersebut setelah 4 jam

c. Lamanya waktu dibutuhkan, sehingga zat tersebut luruh jadi $\frac{1}{2}$ massa awalnya

Pembahasan:

a. Diketahui bahwa dari rumus:

$$N = Ce^{kt}$$

N = Jumlah zat yang ada pada waktu t

K = Konstanta

$t = 0, N = 50$

Maka,

$$N = Ce^{kt}$$

$$50 = Ce^{k(0)}$$

$$50 = C$$

Diketahui bahwa sesudah 2 jam zat tersebut kehilangan 10% massa awalnya, maka ketika $t = 2$, yaitu $10\% \times 50$ ml $=$ 5 ml

Maka, massanya menjadi 50 – 5 = 45 ml.

Dari perhitungan tadi kita sudah mendapatkan:

N = 45, C = 50, t = 2

$$N = Ce^{kt}$$

$$45 = 50e^{k(2)}$$

$$\frac{45}{50} = \frac{50e^{k(2)}}{50}$$

$$\frac{9}{10} = e^{k(2)}$$

$$\ln\left(\frac{9}{10}\right) = k(2)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{2} = k$$

$$-0{,}053 = k$$

Maka, ekspresi matematisnya $N = 50e^{-0{,}053t}$

b. $N = 50e^{-0{,}053t}$

$N = 50e^{-0{,}053(4)} = 40{,}5\ ml$ gram

Maka, massa zat setelah 4 jam adalah 40,5 ml gram

c. Diketahui pada soal massanya adalah 50 ml, maka apabila $\frac{1}{2}$ dari massa awalnya berarti massanya menjadi 25 ml, maka

$N = 50e^{-0{,}053t}$

$25 = 50e^{-0{,}053t}$

$\frac{25}{50} = \frac{50e^{-0{,}053t}}{50}$

$\frac{1}{2} = e^{-0{,}053t}$

$-0{,}053t = \ln\frac{1}{2}$

$t = 13$ jam

Contoh soal 2:

Seorang menyimpan 5000 uang dollar di bank, tidak ada penambahan dan pengurangan. Carilah jumlah uang dalam rekening tersebut setelah 7 tahun dengan bunga:

8,5% di 4 tahun pertama

9,25% di 3 tahun terakhir

Pembahasan:

$$N = Ce^{kt}$$

$$5000 = Ce^{k(0)}$$

$$5000 = C$$

k = suku bunga, maka

$$N = Ce^{kt}$$

$$= 5000e^{0,085(4)}$$

$$= 5000e^{0,34}$$

$$= \$7024,7$$

Maka, jumlah uang di 4 tahun pertama dengan bunga 8,5% adalah $\$7024.7$

$$N = Ce^{kt}$$

$$= 7024.7e^{0,0925(3)}$$

$$= \$9271,4$$

Maka, jumlah uang setelah 7 tahun adalah $\$9271,4$.

Perkembangan Populasi

(Lumbantoruan, 2019a) Menurut Thomas Malthus (Tahun 1766-1834) tentang persoalan pertumbuhan populasi, maka model persamaan differensialnya adalah:

$$\frac{dP}{dt} = \text{kP}$$

Dengan *k* ialah koefisien pertumbuhan yang artinya selisih rata-rata kelahiran serta kematian (Lumbantoruan & Natalia, 2021). Dengan menggunakan metode ini terhadap masalah keradioaktifan suatu zat, maka pemecahan masalah persamaan differensial ini ialah:

$$\text{P} = Ce^{kt}$$

Jika mula-mula P_0, maka diperoleh solusi khusus:

$$\text{P} = P_0e^{kt}$$

Persamaan differensial yang diutarakan oleh Thomas Malthus ini adalah model pertumbuhan populasi yang paling biasa yakni dengan berspekulasi bahwa persediaan sumber makanan tidak terbatas dan memantau faktor rata-rata kelahiran serta kematian. Menurut Pierre Fancois Verhulst (Tahun 1804-1849) berdasarkan pada model pertumbuhan populasi Thomas Malthus mengutarakan bahwa model matematika yang disebut model pertumbuhan logistik

$$\frac{dP}{dt} = rMP - rP^2$$

Misalkan $k = r(M - P)$ dimana M merupakan maksimal populasi yang dapat ditampung serta r adalah konstanta (Lumbantoruan, 2020). Kita misalkan $a = Rm$ dan $b = r$, maka persamaan differensial bisa ditulis:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

Persamaan diferensial tersebut ialah persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Bila mula-mula $P(t_0) = P_0$. Pemecahan masalah persamaan diferensial ini bisa dicari dengan (Lumbantoruan, 2019c):

$$\int_{P_0}^{p} \frac{ds}{as - bs^2} \int_{t_0}^{t} du = t - t_0$$

(misalkan $s = P$ dan $u = t$, maka $dP = d$s dan $du = dt$)

$\frac{1}{as-bs^2}$

$$\frac{1}{as - bs^2} = \frac{1}{s(a - bs)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs}$$

Maka, ruas kanan persamaan dapat ditulis:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs} = \frac{A(a - bs) + Bs}{s(a - bs)} = \frac{Aa + (B - bA)s}{s(a - bs)}$$

Jadi,

$$Aa + (B - Ba)s = 1$$

Karena persamaan tersebut berperan untuk semua s, maka dapat berperan juga untuk semua $Aa = 1$ dan $b – Ba = 0$ dan didapat $A = \frac{1}{a}$ dan $B = \frac{b}{a}$

$$\int_{P_0}^{p} \frac{ds}{as - bs^2} = \frac{1}{a}\int_{p_o}^{p} (\frac{1}{s} + \frac{b}{a - bs})ds$$

$$= \frac{1}{a}[ln\frac{p}{p_0} + \ln\frac{a - bP_0}{a - bP}]$$

$$= \frac{1}{a}[ln\frac{p}{p_0} + \ln\frac{a - bP_0}{a - bP}]$$

$$\mathrm{t} - t_0 = \frac{1}{a}[ln\frac{p}{p_0} + \ln\frac{a - bP_0}{a - bP}]$$

karena $\frac{a-bP^0}{a-bP}$ selalu bernilai positif,

$$\mathrm{a}(\mathrm{t} - t_0) = ln\frac{P}{P_0}.\frac{bP_0}{bP}$$

Perhatikan masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

<u>Contoh</u>

Periksa eksistensi dan ketunggalan $m. n. a$:

1. $\mathrm{M.n.a}\, xy = 2y, \mathrm{y}(0) = 0$

   Fungsi $f(x, y) = 2y$ bisa tidak *continue* di $x = 0$, karena $x = 2,$ jadi apabila syarat eksistensi tidak terpenuhi, tetapi jika dicari, akan diperoleh solusi $m.n.a\ y(x) = 0$ dan $y(x) = K x^2$,

$K\ 2^2 = 4k$ untuk $k \in R$.

2. $\mathrm{M.n.a}\ y^2 + x^2 y = 0, y(0) = 0$

   Fungsi $\mathrm{f(x, y)} = -\frac{y^2}{x^2}$

Catatan:

(Lumbantoruan, 2018b) Jika kita meliha contoh di atas, jelas bahwa ke di dalam ke kontinuan $f(x, y)$ adalah syarat yang cukup, tapi bukan syarat yang perlu dibagi eksistensi solusinya.

$\mathrm{M.n.a}\ y = y^2, y(0) = 1$

$$\frac{\mathrm{y} = \mathrm{y}^2 \quad : y}{y = 1}$$

Fungsi f(x,y) = $y^2\ dan\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ *continue* diseluruh R^2. Jadi, teorema membuktikan kewujudan serta ketunggalan solusi pada suatu interval terbuka yang memuat $x_0 = 0$. (Kurniawan et al., 2017) Bila dicari, maka diperoleh solusi $\mathrm{m.n.a}\ y(x) = \frac{1}{1-x}$, perhatikan bahwa solusi tersebut tidak terdefinisi diseluruh R, namun hanya pada $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Contoh tersebut menerangkan bahwa solusi tunggal dari suatu $m.n.a$ yang hanya terdefinisi di suatu selang yang artinya subset dari selang kekontinuan f serta f_y.

4.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Metode Transformasi

BENTUK UMUM

$$M(X,Y)dx + N(X,Y)dy = 0$$

Syaratnya $M(x,y) = dan\, N(x,y)$ merupakan homogen dan berderajat setara (Lumbantoruan, n.d.).

Tahap untuk menemukan solusi umum yaitu:

1. Menggunakan transformasi $y = ux$ dan $dy = x\,du + u\,dx$ atau $x = uy$ dan $dx = y\,du + u\,dy$
2. Persamaan differensial homogen tereduksi ke persamaan differensial variabel terpisah
3. Menggunakan aturan pada persamaan differensial variabel terpisah
4. Gantilah $u = \frac{y}{x}$ apabila menggunakan transformasi $y = ux$ untuk mendapatkan solusi semula.

(Lumbantoruan, 2019b) Persamaan ini ialah persamaan linear tetapi tidak homogen. Perhatikan bentuk persamaan diferensial di bawah ini:

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$$

Dimana a, b, c, p, q, r adalah suatu konstanta

Terdapat 3 kemungkinan yang bisa terjadi

1. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \alpha$

Karena $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \alpha$, maka menggunakan transformasi $px + qy + r = u$,

$ax + by + c = \alpha u$.

2. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$

   Gunakanlah transformasi $px + qy = u$, dan dari sini berarti $dy = \frac{du - q\,dy}{q}$, atau $dx = \frac{du - q\,dy}{p}$

3. $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$

   $Ax + by + c = u \rightarrow a\,dx + b\,dy = du$

   $Px + qy + r = v \rightarrow p\,dx + q\,dy = dv$

(KHATIZAH et al., 2015) Dari dua persamaan diatas diperoleh bahwa:

$$dx = \frac{q\,du - b\,dv}{aq - bp}$$

dan

$$dy = \frac{q\,du - p\,dv}{aq - bp}$$

Selesaikan persamaan diferensial di atas, kemudian ubahlah kembali *u* dan *v* dengan transformasi kebentuk awal untuk mendapatkan pemecahan masalah persamaan differensial awal (Lumbantoruan, 2019e).

Contoh

1. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$

Pembahasan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$$

$$xy^2\,dy - (x^3 + y^3)dx = 0$$

Fungsi $M\ (x, y) = xy^2$

$\mathrm{M(ax, ay)} \quad = a^3[M(x, y)]$

$\mathrm{M(x, y)dx} \quad = \ axa^3y^3$

$= a^3\ (\ xy^2)$

$\mathrm{M(ax, ay)} \ = \ a^3[\mathrm{M(x, y)}]$

Fungsi $N\ (x, y) = -(x^3 + y^3)$

$\mathrm{N(ax, ay} \quad = a^3[M(x, y)]$

$\mathrm{M(ax, ay)} \ = \ a^3[-(\mathrm{x}^3 + \mathrm{y}^3)]$

Didapatkan a^3, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogennya berderajat 3.

2. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$

Pembahasan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

$$xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0$$

Fungsi $M(x, y)dx$

$$M(x, y)dx = -x^3 - y^3 = a^3 + x^3$$

$$= a^3(-x^3 - y^3)$$

$$\mathrm{M(ax, ay)} = a^3[M(x, y)]$$

Fungsi $N(x, y)dy$

$$N(x, y)dx = xy^2$$

$$= axa^3y^2$$

$$= a^3(xy^2)$$

$$\mathrm{N(ax, ay)} = a^3[N(x, y)]$$

Didapatkan a^3, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogen berderajat 3.

3. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen $(2x^2y + y^2)dx + (xy^2 - 2x^3)dy = 0$.

Pembahasan:

Fungsi $M(x, y)dx$

$$\mathrm{M(x, y)dx} = -2x^2y + y^3$$

$= 2a^2x^2\ ay +\ a^3$

$= a^3(2x^2y{+}y^3)$

$\mathrm{M(ax, ay)} \quad = \ a^3[M(x,y)]$

Fungsi $N(x,y)dy$

$\mathrm{N(x, y)dx} \ = \ xy^2 - 2x^3$

$= axa^2\ y^2 +\ 2a^3x^3$

$= a^3(xy^2 -\ 2x^3)$

$\mathrm{N(ax, ay} \ = \ a^3[N(x,y)]$

Didapatkan a^3, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogen berderajat 3.

4. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen $(4x^2y + y)dx + (xy^2 -\ 2x^3)dy = 0$

Pembahasan:

Fungsi $M(x,y)dx$

$\mathrm{M(x, y)dx} \ = \ 4x^2y + y^2$

$= 4a^2x^2\ ay +\ a^3y^3$

$= a^3(2x^2y{+}y^3)$

$\mathrm{M(ax, ay)} = a^3[M(x,y)]$

Fungsi $N(x,y)dy$

$\mathrm{N(x,y)dx} = xy^2 - 2x^3$

$= axa^2\ y^2 + 2a^3x^3$

$= a^3(xy^2 - 2x^3)$

$\mathrm{N(ax,ay)} = a^3[N(x,y)]$

Didapatkan a^3, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

5. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen $(9x^2y + y)dx + (xy^2 - 2x^3)dy = 0$.

   Pembahasan:

   $M(x,y)dx$

   $\mathrm{M(x,y)dx} = 9x^2y + y^3$

   $= 9a^2x^2\ ay + a^3y^3$

   $= a^3(9x^2y+y^3)$

   M(ax,ay) $= a^3[M(x,y)]$

   Fungsi $N(x,y)dy$

   $\mathrm{N(x,y)dx} = xy^2 - 2x^3$

   $= axa^2\ y^2 + 9a^3x^3$

   $= a^3(xy^2 - 2x^3)$

   $\mathrm{N(ax,ay)} = a^3[N(x,y)]$

   Didapatkan a^3, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

6. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{xy^3}$

   Pembahasan:

   $M(x, y) = M(ax, ay)$

   $x^2y^2 = a^2x^2(a^2y^2)$

   $= a^4(x^2y^2)$

$$N(x, y) = N(ax, ay)$$

$$xy^3 = ax(a^3y^3)$$

$$= a^4(xy^3)$$

   Didapatkan a^4, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogenya berderajat 4.

7. Apakah persamaan dibawah ini homogen? Buktikanlah!

$$(4x^2y + \ y^2)dx + (xy^2 + \ 2x^3)dy = 0$$

   Pembahasan:

   Fungsi M(x,y)dx

   M(x,y)dx = $4x^2y + y^3$

   = $4a^2x^2 \ ay + \ a^3y^3$

   $= a^3(4x^2y+y^3)$

   M(ax,ay) = $a^3[M(x, y)]$

   Fungsi N(x,y)dy

   N(x,y)dx = $xy^2 + 2x^3$

   $= axa^2 \ y^2 + 2a^3x^3$

   $= a^3(xy^2 + \ 2x^3)$

N(ax,ay) = $a^3[N(x,y)]$

Didapatkan a^3, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

8. Buktikanlah bahwa persamaan dibawah ini adalah homogen.

$$(5x^2y - y)dx + (xy^2 + \ 12x^3)dy = 0$$

Pembahasan:

Fungsi M(x,y)dx

M(x,y)dx = $5x^2y - y^2$

= $5a^2x^2\ ay - \ a^3y^3$

$= a^3(5x^2y{+}y^3)$

M(ax,ay) = $a^3[M(x,y)]$

Fungsi N(x,y)dy

N(x,y)dx = xy^2 $+12x^3$

$= axa^2\ y^2$ + $12a^3x^3$

$= a^3(xy^2 + \ 12x^3)$

N(ax,ay) = $a^3[N(x,y)]$

Didapatkan a^3, maka terbuktilah persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

4.3. Kegiatan Pembelajaran 3. Rangkuman

Semua pemodelan rumus pada matematika merupakan sebuah alat untuk mempermudah suatu fenomena yang terjadi dikehidupan nyata atau dalam kehidupan sehari-hari atau bisa kita katakan sebagai alat yang berkaitan dengan fenomena alam. Salah satu contohnya yaitu keradioaktifan suatu zat. Persamaan diferrensial untuk keradioatifan, yaitu

$$N = Ce^{kt}$$

Perkembangan populasi sesuatu dengan model pertumbuhan adalah persoalan tentang pertumbuhan populasi. Menurut ***Thomas Malthus*** **(Tahun 1766-1834)** model persamaan differensialnya:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Bentuk Umum Metode Transformasi:

$$M(X,Y)dx + N(X,Y)dy = 0$$

Syaratnya $M(x,y) = dan\ N(x,y)$ adalah homogen dan berderajat sama.

4.4. Kegiatan Pembelajaran 4. Soal Diskusi Kelompok Mandiri

1. Bila terdapat 12 juta bakteri dalam 8 jam serta 36 juta bakteri dalam 9 jam. Hitunglah jumlah bakteri pada awalnya!
2. Jika terdapat 18 juta bakteri dalam 6 jam, dengan 7 jam terdapat 42 juta bakteri. Berapakah jumlah bakteri pada awalnya!
3. Dalam suatu negara jumlah penduduk bertambah 4 kali lipat dengan kurun waktu 60 tahun. Menurut pertumbuhan populasinya, dalam kurun waktu berapa tahun jumlah penduduk negara tersebut menjadi 10 kali lipat?
4. Dalam suatu negara jumlah penduduk bertambah 5 kali lipat dengan kurun waktu 30 tahun. Menurut pertumbuhan populasi Malthus, dalam kurun waktu berapa tahun jumlah penduduk negara tersebut menjadi 7 kali lipat?
5. Hitunglah solusi model logistik berikut:

$$\frac{dP}{dt} = aP.bP^2$$

Dimana $a = 0{,}03$ dan $b = (1{,}6).10 - 4.P(t)$ dihitung dalam satuan juta. Uang sebanyak x rupiah diinvestasiikan disuatu perusahaan. Setiap bulan uang berlipat banding langsung dengan banyaknya uang pada saat awal, apabila faktor ke proporsionalnya merupakan r. Maka,

a. Hitunglah persamaan differensial dan solusinya
b. Gambarlah sketsa grafiknya

c. Berapa jumlah uang setelah 1 tahun, jika $r = 0{,}02$?

Untuk nomor 6 sampai 19 tentukan persamaan diferensialnya dengan metode transformasi

6. $(2x^2y + y^3)dx + (xy^2 - 2x^3)dy = 0$
7. $(2x - 5y + 2)dx + (10y - 4x - 4)dy = 0$
8. $(8x + 10y - 3)dx + (8y + 2x - 9)dy = 0$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2y-4x}{1+y+2x}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{8-4y-4x}{1+7y+9x}$
11. $(8x - 2y + 8)dx + (8y - 7x - 3)dy = 0$
12. $(3x - 4y + 1)dx + (2y + 9x - 3)dy = 0$
13. $(7x - 2y + 7)dx + (5y - 4x - 4)dy = 0$
14. $(9x - 7y + 6)dx + (9y - 2x - 5)dy = 0$
15. $(2x - 6y + 3)dx + (2y - 4x - 1)dy = 0$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{2-2y-7x}{3+2y+2x}$
17. $\frac{dy}{dx} = \frac{3-5y-4x}{8+9y+2x}$
18. $\frac{dy}{dx} = \frac{9-7y-8x}{8-2y+2x}$
19. $\frac{dy}{dx} = \frac{8-3y-4x}{1-8y+1x}$
20. $\frac{dy}{dx} = \frac{9+4y-4x}{8-5y-7x}$

Untuk soal 21– 25 buktikan bahwa persamaan homogen

21. $F(x,y) = 5x + 7y$
22. $F(x,y) = 7x^2 - 8xy + 5y^2$

23. $F(x, y) = 8x^3 + 4y^3$

24. $\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} + y sin x = 0$

25. $\frac{d^3y}{dx^3} - y = cos x$

4.5. Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Latihan Mandiri

1. Jika *N(t)* adalah jumlah banyaknya atom dan zat radioaktif pada saat *t*, dan konstanta peluruhannya $\frac{-ln2}{(4,5).10^9}$. Apabila t = 0 merupakan waktu ketika sampel dibuat, hitunglah solusi khususnya?
2. Dalam waktu paro radiium 226 sama dengan 1600 tahun, berapa preosen radiium 226 yang tersissa setelaah 400 taahun?
3. Apabila pada awalnya terdapat 50 gr zat radioaktif dan setelah 2 minggu sisa 30 gr. Sisa berapakah setelah 5 minggu?
4. Dalam masa penelitian perkembangan suatu bakteri, bakteri ditempatkan dalam suatu tabung. Lalu, pertumbuhan jumlah bakteri berbandiing langsung dengan banyak bakteri pada saat uji coba. Hitunglah persamaan diferensialnya dan solusinya.
5. Apabila dalam waktu 4 jam jumlah bakteri menjadi 2 kali lipat. Berapakah jjumlah bakterii pada waktu 6 jam?

Soal nomor 6 hingga 18 tentukan persamaan diferensialnya dengan metode transformasi

6. $(2x - 2y + 9)dx + (2y - 4x - 4)dy = 0$
7. $(4x - 4y + 9)dx + (1y + 7x - 3)dy = 0$
8. $(9x - 8y + 7)dx + (3y - 4x - 9)dy = 0$

9. $(8x - 8y + 6)dx \ + \ (7y - 2x - 5)dy \ = \ 0$

10. $(9x - 9y + 3)dx \ + \ (1y - 3x - 1)dy \ = \ 0$

11. $(3x - 4y + 5)dx \ + \ (7y - 9x - 3)dy \ = \ 0$

12. $(8x - 1y + 1)dx \ + \ (9y + 9x - 3)dy \ = \ 0$

13. $(9x - 8y + 7)dx \ + \ (y - 7x - 4)dy \ = \ 0$

14. $(2x - 8y + 6)dx \ + \ (3y - 9x - 5)dy \ = \ 0$

15. $(2x - 3y + 3)dx \ + \ (6y - 2x - 1)dy \ = \ 0$

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{2-5y-4x}{9+9y+2x}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{9-9y-8x}{7-8y+2x}$

18. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-6y-2x}{2-6y+1x}$

Glosarium

Persamaan Diferensial : Persamaan satu variabel atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde

Aplikasi persamaan diferensial : Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fenomena matematika atau dapat dikatakan pemodelan matematika

Metode transformasi : homongen dan berderajat sama

Peluruhan radioaktif : pemecahan inti atom yang tidak stabil sehingga kehilangan energi dengan memancarkan radiasi

Homogen : suatu sistem persamaan jika konstantanya bernilai 0

Konstanta : suatu nilai tetap

Indeks

Daftar Pustaka

Bronson, R., & Costa, G. (2014). *Schaum's Outlines: Differential Equations, 4th Edition*. In McGraw-Hill Education (4th ed.).

KHATIZAH, E., KARIMA, P. T., & ASTUTI, D. I. (2015). APLIKASI METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA. *Journal of Mathematics and Its Applications*, *14*(2), 1–8. https://doi.org/10.29244/JMAP.14.2.1-8

Kurniawan, A., Holisin, I., & Kristanti, F. (2017). Aplikasi Persamaan Diferensial Biasa Model Eksponensial dan Logistik pada Pertumbuhan Penduduk Kota Surabaya. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *2*(1), 129–141.

Lumbantoruan, J. H. (n.d.). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2015). *Modul Kalkulus Lanjut 2015*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1637/1/Modul Kalkulus Lanjut 2015.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2016). *Modul Kalkulus Lanjut 2016*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

http://repository.uki.ac.id/1638/1/Modul Kalkulus Lanjut 2016.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2017). *Modul Kalkulus Lanjut 2017*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1653/1/Modul Kalkulus Lanjut 2017.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2018a). *Modul Geometri II(Geometri Analitik dan Transformasi)*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1634/1/Modul Geometri II%28Geometri Analitik dan Transformasi%29.docx.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2018b). *PENGEMBANGAN BAHAN AJAR INTEGRAL TAK TENTU BERBASIS MODEL SMALL GROUP DISCUSSION DI PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UKI TAHUN 2016/2017*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN PERSAMAAN DIFERENSIAL*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1659/1/BMP Persamaan Diferensial.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *INTEGRAL TAK-TENTU JILID 1*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). *INTEGRAL TENTU JILID 2*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). *Modul Geometri I (Geometri Datar dan Ruang)*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1633/1/Modul Geometri I %28Geometri Datar dan Ruang%29.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2019e). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017/2018. *urnal EduMatSains, 3(2) Januari 2019, 147-168*, 1–22.

Lumbantoruan, J. H. (2020). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN PEMOGRAMAN LINEAR*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). *DEVELOPMENT OF A CONSTRUCTIVISM-BASED STATISTICS MODULE FOR CLASS VIII JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS*. *64*(2), 1–18. www.solidstatetechnology.us

Rina, I., & Husna, R. (2019). APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA MODEL PERTUMBUHAN POPULASI DENGAN PERTUMBUHAN TERBATAS. *Sainstek : Jurnal Sains dan Teknologi*, *11*(1), 22–27.