VARIABEL KOMPLEKS

Penulis:

Yelsi Enny A

Nim: 1813150012

FAKULTAS KEGURUAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

2021/2022

PRAKATA

Variabel Kompleks merupakan ekspansi dari system bilangn real.(Monks, Knoers, and Haditono 2006) Dalam mendukung mata kuliah Variabel Kompleks diperlukan banyak wawasan untuk memudahkan mahasiswa dalam mempelajari bidang Variabel Komplekas.(Lumbantoruan 2019)

Makalah ini saya susun untuk memenuhi salah satu syarat dalam pemenuhan penyelesaian tugas ahkir mata kuliah Variabel Kompleks tahun 2021 sampai 2022. Serta diharapkan mampu menjadi pedoman serta mempermudah mahasiswa dalam mempelajari Variabel Kompleks kedepannya.(Male and Lumbantoruan 2021)

Saya banyak mengucapkan banyak terimakasih kepada Tuhan yang Maha Kuasa atas anugrah dan pernyertaan dalam penulisan buku ajar. Serta Ayah dan Ibu berserta kelurga yang selalu mendukung didalam doa dalam penyelesaian buku ajar ini.

Yelsi Enny A

Daftar Isi

Daftar Gambar

Pendahuluan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhn Yang Maha Esa, karena dengan pertolonganNya saya dapat menyelesaikan makalah “Variabel Kompleks” tentang “Bilangan Kompleks”. Meskipun banyak rintangan dan hambatan yang saya alami dalam proses pengerjaannya, tapi saya berhasil menyelesaiakannya dengan baik.

Tak lupa saya mengucapkan terimakasih kepada orang tua yang telah mendukung didalam doa dalam proses saya mengerjakan buku ajar. Saya juga mengucapkan banyak terimakasih kepada teman-teman mahasiswa yang sudah memebrikan kontribusi baik langsung maupun tidak langsung dalam pembuatan buku ajar ini.

Semoga buku ajar ini dapat membuat mahasiswa mempelajari variabael kompleks dengan lebih mudah.

Jakarta, 9 November 2021

Penyusun

Yelsi Enny A

BAB I

Bilangan Kompleks

Bagian 1

A. Definisi Bilagan Kompleks Meliputi:
   1. Notasi Bilangan Kompleks
   2. Diagram Ardend
   3. Bentuk-bentuk lain dari $£ = x + iy$

B. Aljabar Kompleks
   1. Menentukan (i^n) n = Bilangan Bulat
   2. Operassi Penjumlahan Bilangan Kompleks.(Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2019c)
   3. Konyrgate Kompleks
   4. Oprasi Perkalian

Bagian 2

A. Definisi Geometri Bilangan Kompleks (Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2019a)
B. Modulus (Nilai Mutlak) dari Bilangan Kompleks
C. Bentuk Polar *(Kutub)* dan Eksponen

Bagian 1

1.1 Bilangan Kompleks dan Aljabar Kompleks

A. Definisi Bilangan Kompleks

Bilangan Kompleks dan Aljabaranya memiliki arti yang berbeda namun saling berkesinambungan atau berhubungan karena berkitan dengan variabel komplekas.(Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2019b) Bilangan kompleks didefinisikan sebagai “pasangan terurut” *(ordered pair)* bilangan nyata dari dua bilangan real.(Yuninda 2007)

Sedangkan dalam Persamaan diferensial adalah psersamaan ilmu matematika untuk fungsi suatu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. (Program et al. n.d.)

Suatu bilangan di nyatakan bilangan komplekas jika $z = (x, y) = x + yi$, secara geometri dinyatakan sebagai berikut adalah x, y pada bilangan kompleks *(Cartesian)* yaitu bilangan terurut.(Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2019c) Dengan demikian semua bilangan komplekas dapat terwakili oleh semua titik pada bilangan *Cartesian* atau bilangan terurut.(Monks et al. 2006) Himpunan semua pasangan itu dengan oprasi-oprasi tertentu yang sesuai dapat didefinisikan sebagai sistem bilangan komplekas.(Yuninda 2007)

Catatan: tidak ada alasan khusus dalam penggunaan x, y, dan f untuk mempersentasikan domain, daerah hasil, dan fungsi.

Banyak huruf-hiruf lain yang dapat di gunakan. Pada umumnya digunakan $x, y,$ dan f untuk menyatakan domain bebas (atau variabel terkait/dependen. (Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2020)

Contoh:

1. Misal : Tentukan solusi dari $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x_{12} = \sqrt{4} = \begin{cases} x_1 = +2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

2. Misal : Tentukan solusi dari $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x_{12} = \sqrt{-4} = \begin{cases} x_1 \neq +2 \\ x_2 \neq -2 \end{cases}$

$x_{12} = \sqrt{-4} = \sqrt{-1}\,\sqrt{4}$

$= \pm 2\sqrt{-1}$

$= \pm 2\ i$

Ternyata $i = \sqrt{-1}$ didefinisiakn sebagai “bilangan imajiner” (Yuninda 2007)

a. **Notasi Bilangan Kompleks**

£ $= x + i.y$ (notasi Bilangan Kompleks)

Dengan notasi tersebut dapat di ketahui bahwa:

$= x + i.y$

Keterangan:

$= i\ y$: Komponen Imajiner

$= x$: Komponen Ril

Maka bi

$£ = x$

$£ = i\ g$

$= $ bilangan komplekas

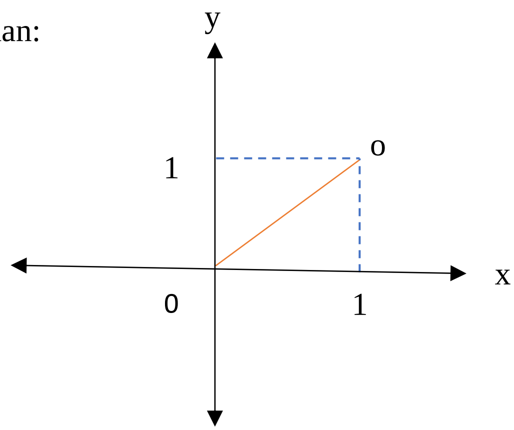
Makna dari $£ = x + iy$

b. Diagram Ardend

Diagram Ardend di sebut juga bilangan Komplekas.

Tentukan $£ = 1 + i$

Penyelesaian:



Gambar diagram 1.1

$£ = 1 + i$

Panjang OA = $|£|$

$|£| = \sqrt{(1^2) + (1^2)} = \sqrt{2}$

Jika : $£ = x + i\ y$, maka

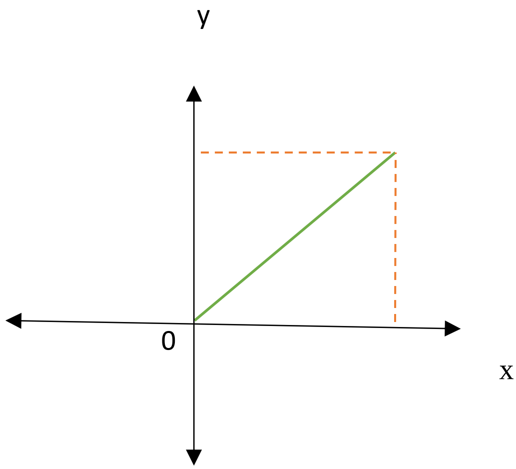
$\left|\sqrt{(1^2)+(1^2)}\right| = \sqrt{(x^2)+(y^2)}$ Nilai mutlak.(Lumbantoruan and Natalia 2021)

c. Bentuk-bentuk lain dari $\pounds = \boldsymbol{x + iy}$

Tentukan:

$\pounds = x + iy$ merupakan bentuk retanguler

Gambar diagaram berikut:



Gambar diagram 1.2

Kita bisa proyeksikan:

$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta$

Sehingga $\pounds = (r\cos\theta + \mathrm{i}\ r\sin\theta)$

Menjadi $£ = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\ \sin\theta)$ karena $r = |£| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Kemudian kita bisa mendapatkan tetanya menjadi $\tan\theta\,\frac{y}{x}$ atau bisa menggunakan: Menggunakan rumus culek

$e^{i} = (\cos\theta + 1\ \sin\theta)$

Jadi $£ = r\ i^{i\,t}$ Ini merupakan bentuk polar.(Lumbantoruan 2019)

B. Aljabar Kompleks

Bilangan komplekas adalah *pasangan terurut* dari dua biangan real x dan y, yang dinyatakan oleh (x, y).

Definisi di atas merupakan definisi formal atau yang sering di gunakan untuk menyatakan bilangan kompleks. Untuk itu selanjutnya, ada bebrerapa hal yang perlu perhatikanlah sebagai lambang dan ketentuan dari bilanagn kompleks (x, y). Bilangan komplekas dilamabangkan dengan berbagai huruf $z = (x, y)$. Bilangan real x disebut *bagian real* dari z, ditulis Re (z). Bilangan real y disebut *bagian imaginer* dari z, ditulis Im (z). Beberapa pasangan terurut didefinisikan secara khusus, yaitu*:* (Anon n.d.)

$(x, 0) = x$, merupakan bilangan asli *(real)*

$(0{,}1) = i$, dinamakan satuan bilangan yang mempunyai sifat *(imaginer).*

a. Menentukan ($\boldsymbol{i^n}$) n = Bilangan Bulat

$i^u = 1$

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^5 = (i^2)^2 . i$ atau

$i^5 = (i^2)^5$

$= (-1)^5$

$= -1$

Perlu di ingat bahwa 1^2 Tidak seperti ini

$i^u = 1 \quad \rightarrow i = \sqrt{-1}$

$i^1 = i \quad \rightarrow i \times i \quad = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$

$= \sqrt{(-1) \times (-1)}$

$i^2 = -1 \rightarrow i^2 = \sqrt{1} = 1$

Seharusnya:

$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \left[(-1)^{1/2}\right]^2 = (-1)^1 = -1$

$i^3 = i^2 . i = -1(i) = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^{16} = i^4 . i^4 . i^4 . i^4 = 1$ (Pendidikan and Sains 2020a)

b. Operasi Penjumlahan Bilangan Kompleks

Definisi dari kesamaan dua bilangan komplekas sebagai berikut.

Dimana dua bilangan komplekas $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ dikatakan ***sama,*** ditulis z_1, z_1, jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Khususnya $z = (x, y) = (0,0)$, jika dan hanya jika $x = 0$ dan $y = 0$.

Definisi oprasi pada penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks sebagai berikut:

Jika $z_1 = (x_1, y_1)$, dan $z_2 = (x_2, y_2)$ adalah bilangan kompleks. Maka *jumlah* dan *hasil kali* z_1 dan z_1, masing-masing adalah bilangan kompleks $z_1 + z_2$ dan z_1, z_2 yang diberikan oleh aturan berikut,

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 x_2 + y_1 y_2)$$

Himpunan bilangan kompleks X yang merupakan oprasi penjumlahan dan perkalian yang membentuk suatu lapangan *(field)*. (Yuninda 2007)

Teorema 1

Himpunan bilangan kompleks X memenuhi sifat-sifat lapangan, yaitu:

1. $z_1 + z_2 \in C$, dan $z_1 z_2 \in C,\ \forall z_1, z_2 \in C$
2. $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$, dan $z_1 z_2 = z_1 z_2,\ \forall z_1 z_2 \in C$
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, dan
$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 (z_1 + z_2), \forall z_1 z_2 \in C$
4. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_2, \forall z_1 z_2 \in C$
5. Ada $0 = (0,0) \in C$,
sehingga $z + 0 = 0 + z;\ \forall z \in C$
6. Ada $1 = (1,0) \neq 0,\ 1 \in C$, sehingga $z. 1 = 1, z = z;\ \forall z \in C$
7. Untuk setiap $z = (x, y) \in C$ ada $-z = (-x, -y) \in C$ sehingga $z + (-z) = (-z) + z = 0$
8. Untuk setiap $z = (x, y) \in C,\ z \neq 0$ ada $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in C$ sehingga $zz^{-1} = z^{-1} z = 1$

Dari Teorema 1 merupakan bukti yang bisa diterapkan dalam berbagai definisi yang telah disampaikan sebelumnya. Pada bagian ini yang merupakan suatu penulisan lain dari bilangan kompleks $z\ x\ y = (\ ,\ )$. (Male and Lumbantoruan 2021) Dengan identifikasi yaitu $x = (x\ ,0)$, dan $i = (0,1)$.

$(0, y)(0,1). (y\ ,0) = iy$, disebut bilangan imajiner sejati, $z = (x, y\ ) = (x\ ,0) + (0, y\ )$.

$$= x + iy$$

$$= x + iy$$

Sehingga $i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (\ 1,0) = 1,$ maka $z = (x, y)$ dapat ditulis dalam bentuk:

$z = x + \ yi$

dengan,

x dan y bilangan real, $i^2 = -1$

x disebut bagian real dari z, ditulis $x = Re(z\ )$

y disebut bagian dari bilangan kompleks *(imajiner)* dari z, ditulis $y = Im(z)$.

Dengan cara menggunakan $z = \ x + yi$, akan lebih memudahkan ketika hendak melakukan operasi pada bilangan kompleks, karena operasinya dapat dilakukan seperti operasi pada bilangan real dengan melihat $i^2 = -1$. Maka berikut ini adalah definisi dan contoh sebagai berikut:(Pendidikan and Sains 2020b)

Definisi

Jika: $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$ adalah bilangan kompleks, maka: $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ $z_1.z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_2)i$

Dalam definisi penjumlahan tersebut terlihat dengan jelas oprasi pada bilangan real dan perkalian.

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2,$$

Dengan mengganti i^2 oleh -1 didapat:

$$z_1z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_2)i$$

Contoh 1:(Lumbantoruan, Pd, and Pd n.d.)

Jika $z = (x, y)$ dan $1 = (1,0)$, maka

$z.1 = (x, y)(1,0) = (x + yi)(1 + 0i) = x + yi = z$

Jika $z = (x, y)$ dan $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$, maka

$$zz^{-1} = (x + yi)\left(\frac{x}{x^2y^2} + \frac{-y}{x^2y^2}i\right)$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \left(\frac{yx - xy}{x^2+y^2}\right)i = 1 + 0.i = i$$

Contoh 2:(Pembelajaran n.d.)

$£_1 = 2i - 3$

$£_2 = 2 - 1$

Tentukan:

1. $|£_1 + £_2|$
2. Nyatakan $£_1 + £_2$ dalam bentuk POLAR

Penyelesaian:

Diketahui:

$£_1 = 2i - 3$

$£_2 = 2 - i$

1. $£_1 + £_2 = (2i - 3) + (2 - i)$

$= 2i - 3 + 2 - i$

$= i = 1$ untuk menentukan harga mutlak $\rightarrow |£| = \sqrt{x^2 + y^2}$

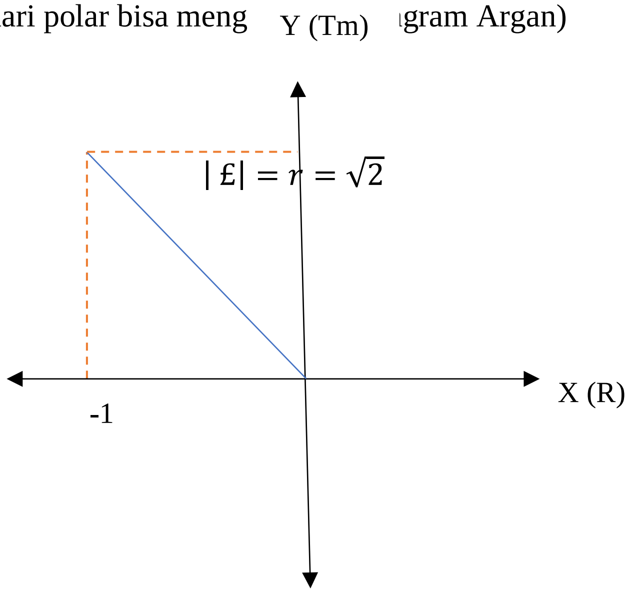
$\therefore |£_1 + £_2| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{2}$

2. $£_1 + £_2 = £$

$\therefore £ = i - 1$

(Bentuk dari polar bisa meng gram Argan)



Gambar diagram 1.3

Kita mau menentukan θ maka menggunakan:

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = (-1)$

$<=> tg\theta = 1$

$\theta = 45^0 = \frac{\pi}{4}$

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} =\rightarrow \theta \frac{3\pi}{4}$

Sehingga kita bisa membuat POLAR menjadi:

$£ = £_1 + £_2 = \sqrt{2}\, e^{i} \frac{3\pi}{4}$

c. Konyrgate Kompleks

Konyugate adalah perubahan tanda $(-\ atau\ +)$ pada komponen imajiner dari bilangan komplek yang di konyugasikan.(Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. 2020)

Contoh 1

Misalkan kita memiliki:

$£_1 = 1 - 2i \ \rightarrow \overline{£_1} = 1 + 2i$

$£_2 = 4i \qquad \rightarrow \overline{£_2} = -4i$

$£_3 = 5 \qquad \rightarrow \overline{£_3} = 5$

Contoh 2

$£ = x + iy$

$£ = x - iy$

Kita mau menentukan perkalian maka:

$£\overline{£} = (x + iy)(x - iy)$

$\quad = (x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$

Penyelesaian:

$££̅ = y^2 + y^2$

$|£| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|£|^2 = x^2 + y^2$

$\therefore ££̅ = |£|^2 = x^2 + y^2$

d. Oprasi Perkalian

Oprasi Perkalian juga berkaitan dan oprasi pembagian.

Contoh 1

Misalkan kita memiliki

$£_1 = 1 - i$

$£_2 = 2 - i$

Tentukan nilai mutlak dari:

1. $\frac{£_1}{£_2}$
2. $£_1 . £_2$

Jawaban

1. $\frac{£_1}{£_2} = \frac{1-i}{2+i}$

Penyelesaian:

$\overline{£}_2 = 2 - i$

$\frac{£_1}{£_1} = \frac{1-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$

$= \frac{2-i-2i-1}{4+1}$

$= \frac{1-3i}{5}$

Tentukan nilai mutlak atau harga mutlaknya

$\left|\frac{£_1}{£_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2}$

$$\left|\frac{£_1}{£_2}\right| = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}}$$

2. $£_1.£_2 = (1-i)(2+i)$

Penyelesaian:

$= 2 + i - 2i - 1$

$= 3i$

$\therefore |£.£_2| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9+1}$

$|£_1.£_2| = 10$

Bagian 2

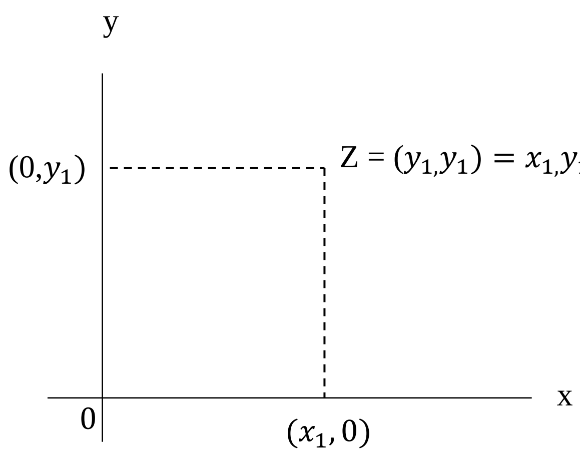
2.1 Geometri Bilangan Kompleks

A. Definisi Geometri Bilangan Kompleks

Geometri merupakan bilangan kompleks yang pasangannya berurutan dua bilangan *real*. Karena dalam bilangan kompleks, $z = (x, y) = x + yi$, dalam geometri disebut sebagai titik (x, y) dalam *Cartesian*, sehingga semua titik pada bidang *Cartesian* dapat terwakili.

Perlu diketahui terdapat sedikit konsep yang mengambarkan matematika dan tidak semua konsep-konsep tersebut tidak saling berkaitan. Turunan, elemen fundamental dari kalkulus diferensial, adalah sebagaian dari konsep turunan yang di mana terdapat dua masalah yang mengarah pada turunan yaitu menampilkan garis singgung pada kurva disuatu titik. (Modul Kalkulus Dasar 2016)

Penyebutan dalam sumbu x merupakan sumbu real karena memiliki sistem satuannya hanya 1 dan sumbu y disebut sumbu imajiner dengan satuan yang dilambangkan dengan i. Sedangkan O merupakan titik asal yang di mana merupakan bilangan kompleks $z = 0$ dan titik koordinatnya merupakan (x_1, y_1) dimana menyatakan bahwa hal tersebut merupakan bilangan kompleks $= (x_1, y_1) = x_1, y_1 i$. Pada bidang dari *Cartesian* yang dinama merupakan *bidang kompleks* atau bidang z. Pada bilangan komplekas dalam bidang geometeri bilangan komplekas yaitu ***diagram Argand* yang** merupakan sistim *Cartesius* yang di gunakan untuk menentukan posisi pada bilanagn kompleks. Dan kita juga bisa menggunakan integral tentu untuk menentukan luas dari daerah-daerah yang berbentuk rumit. Dengan menggunakan $A(R) = \int_a^b f(x)dx$ untuk mencari luas dari daerah-daerah yang berbentuk rumit. (Lumbantoruan 2019)



Gambar diagram 2.1

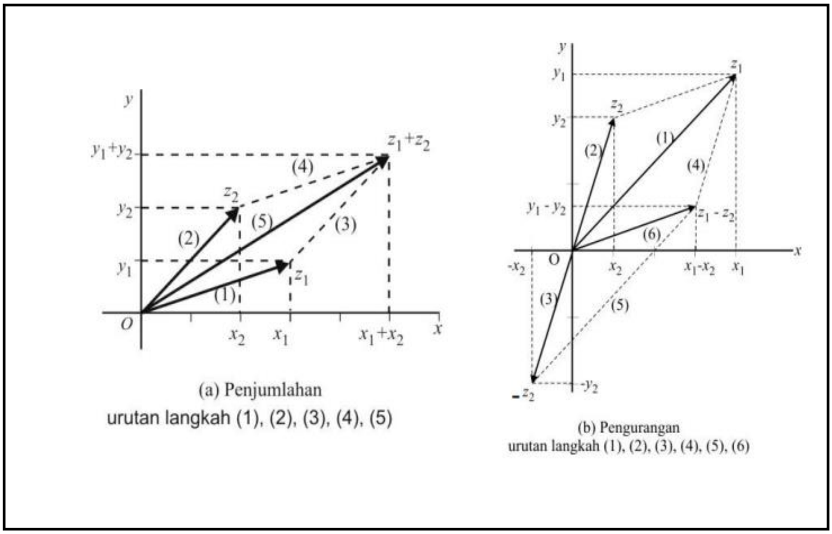
x : sumbu real

y : sumbu imajiner

O : (0,0)

Karena setiap vektor di bilangan Cartesian di sebut sebagai vektor yang bermula dari titik: $O = (0,0)$ dan berujung pada suatu titik (x, y). Sehingga membentuk (x, y) yang merupakan vektor.

Dalam pengertian sempit bilangan komplekas $z = (x, y) = x + yi$ dapat dilihat sebagai vektor (x, y) pada operasi *penjumlahan*, dan *pengurangan* dua bilangan komplekas dalam bentuk geometri yang dimana sama dengan vektor.(Pembelajaran n.d.)



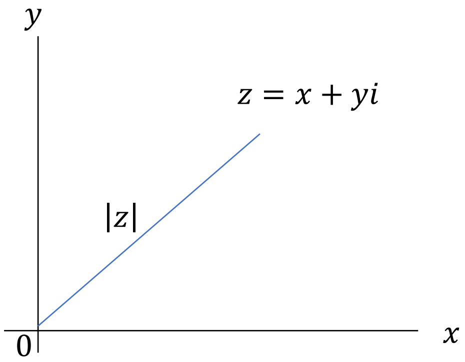
Gambar diagram 2.2 dan gambar 2.3

B. Modulus (Nilai Mutlak) dari Bilangan Kompleks

Diketahui $z = x + yi$ adalah bilangan kompleks, sehingga modulus z, menjadi $|z|$ dan dapat dinyatakan menjadi $|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$

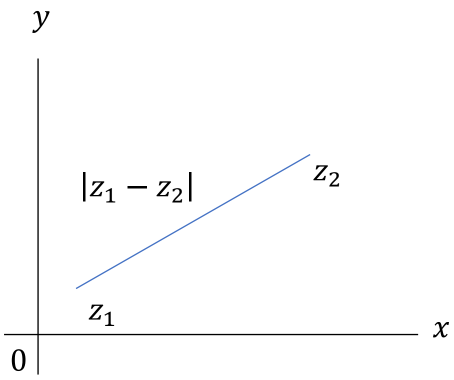
Pengertian ini menjelaskan bahwa $|z|$ adalah bilangan real yang positif atau bernilai nol. Arti geometri sendiri bisa dikatakan $|z|$, merupakan panjang vektor (x, y) yang di mana berasal dari titik asal yaitu $O = (0,0)$ pada titik $z = (x, y)$.

Sehingga dari definisi tersebut, $Z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_1, y_2)$, maka $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1, x_2)^2 + (y_1, y_2)^2}$, menjadi jarak antara titik z_1 dan titik z_2 pada bidang z.



(a)

Gambar diagram 2.4



(b)

Gambar diagram 2.5

Maka apabila $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan t merupakan bilangan real yang positif $|z - z_1| = t$ merupakan lingkaran, yang bertitik di dalam suatu pusat $z_1 = (x_1, y_1)$ yang berjari-jari r, sedangkan $|z - z_1| < r$ merupakan daerah yang berada di dalam lingkaran dan bertumpu ada suatu titik pusat di z_1 dan (x_1, y_1) yang berjari-jari r. (Pembelajaran n.d.)

Perlu diketahui *tidak ada urutan antara dua bilangan kompleks* dari $z_1$dan z_2. Tapi perlu di ingat modulus menggunakan urutan sebab modulus adalah suatu bilangan kompleks yang real.

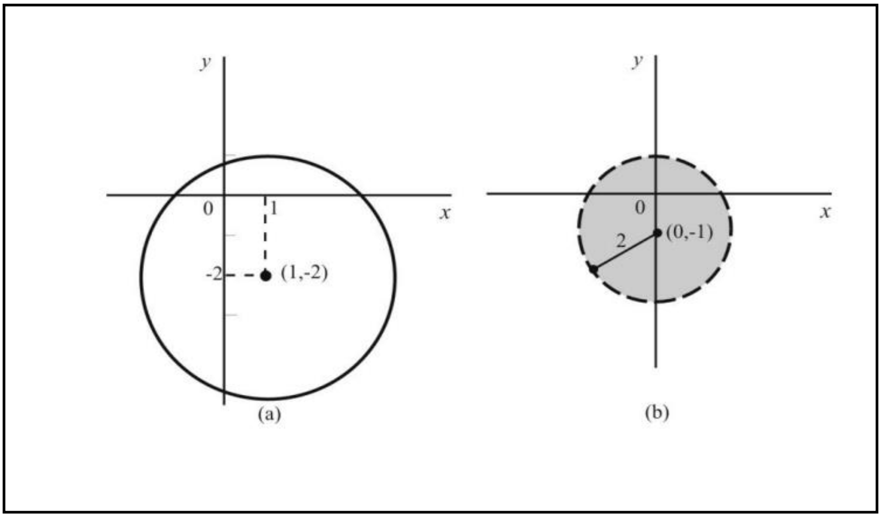
Contoh:

Gambarkan $|z - 1 + 2n| = 3$ dan $|z + n| < 2$ pada bidang z.

Jawab:

$|z - 1 + 2n| = 3$ dapat ditulis $z - (1 - 2n) = 3$ merupakan lingkaran berpusat di $z_1 = 1 - 2n = (1, -2)$ berjari-jari 3 perhatikan gambar di bawah.

$|z + n| < 2$ atau $|z - (-n)| < 2$ menyatakan daerah lingkaran yang berpusat di $z_1 = -n = (0, -1)$ berjari-jari 2 perhatikan gambar dibawah. (Yuninda 2007)



Gambar diagram 2.6

Persamaan dan pertidaksamaan di atas dijabarkan sebagai berikut:

Jika $z = x + yj$. Dari: $|z - 1 + 2j| = 3$ didapat

$|x + yj - 1 + 2j| = 3$ atau $|(x - 1) + (y + 2j| = 3$

Atau,

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3$ atau $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ merupakan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(1, -2)$ berjari-jari 3.

Dengan cara yang sama $|z + j| < 2$, berarti

$|x + yj + j| < 2$ atau $|x + (y + 1)j| < 2$

Atau,

$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} < 2$ atau $x^2 + (y+1)^2 < 4$, Pada gambar di atas menyatakan daerah di dalam lingkaran yang berpusat di titik $(0, -1)$ berjari-jari 2.(Dasar n.d.)

Sifat-sifat dari modulus atau nilai mutlak dari bilangan kompleks.(Pembelajaran n.d.)

Teorema:

A. Jika s bilangan kompleks, maka:
   1. $|s|^2 = \left(Re(z)\right)^2 + \left(Im(z)\right)^2$
   2. $|s| = |\bar{z}|$
   3. $|s|^2 = z\bar{z}$
   4. $|s| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$
   5. $|s| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

B. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks, maka
   1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
   2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|, z_2 \neq 0$
   3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
   4. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
   5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
   6. $|z_1 - z_2| \geq \left||z_1| - |z_2|\right|$

Bukti:

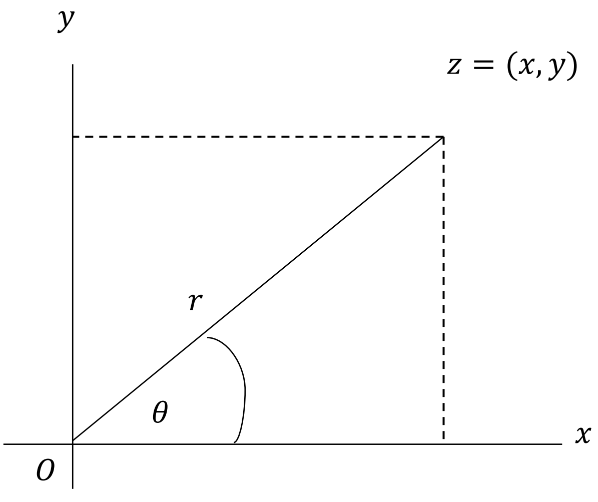
Misalkan $z = x + yi$, maka:

1. $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = x^2 + y^2 = (Re(e))^2 + (Im(z))^2$

2. $\bar{z} = x - yi$, sehingga $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
3. $|z| = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z\bar{z}$
4. $|z|\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |Re(z)| \geq Re(z)$
5. $|z|\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |y| = |Im(z)| \geq Im(z)$

C. Bentuk Polar *(Kutub)* dan Eksponen

Kita tahu bawa koordinat polar merupakan $z = (x, y)$ yang merupakan bilangan kompleks dan dinyatakan dalam bentuk r dan θ yaitu $z = (r, \theta)$. Maka coba perhatikan gambar dibawah ini:(Singgung n.d.)



Gambar diagram 2.7

$x = r\ \cos\theta\ \ ; y = r\ \sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

$\theta =$ sudut antara sumbu

x positif dengan Oz.

Pada $z \neq 0$, membentuk sudut θ dihitung dari $\tan\theta = \frac{x}{y}$ jika $z = 0$ sehingga $r = 0$ dan θ dapat dipilih semabarang. Maka bilangan kompleks dari $z = (x, y) = x + yi$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Definisi

> Bilangan kompleks $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, sudut θ disebut z, dan ditulis $\theta = \arg z$. Kemudian θ dan $0 \leq \theta < 2\pi$ atau bisa dengan $-\pi < \theta \leq \pi$ dikatakan argument utama dari z, sehingga $\theta = Arg\, z$.
>
> Penjelasan untuk θ bisa dipilih salah satu saja.

Definisi

> Dua bilangan kompleks $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ dikatakan sama, yaitu $z_1 = z_2$, jika $r_1 = r_2$, dan $\theta_1 = \theta_2$

Dengan memakai rumus Euler,

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Sehingga bentuk polar bilangan kompleks z dapat diubah menjadi

$z = r\ (\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

Sehingga pada penulisan $z = re^{i\theta}$ merupakan bentuk eksponen dari bilangan kompleks z.

Berikutnya kompleks sekawan dari z adalah:

$\bar{z} = r\ (\cos\theta - i\sin\theta)$

$\quad = r\ (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$\quad = r^{-i\theta}$

Perlu diketahui bahwa rumus Euler dapat dibuktikan dengan deret Maclaurin pada $\cos\theta, \sin\theta$ dan $e^{i\theta}$. (Yuninda 2007)

Contoh:(Anon 2019)

Nyatakanlah $z = \sqrt{3+i}$ dalam bentuk polar dan bentuk eksponen

Penyelesaian:

Diketahui dari masalah di atas $z = \sqrt{3+i}$, $r = \sqrt{3+1} = 2$ dan $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Karena z dikuadratkan pertama, maka dipilih $\theta = \frac{\pi}{6}$, maka didapati bentuk polar $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ dan bentuk eksponen $z = 2e^{\pi i/6}$.

Latihan Soal Bab 1

1. Ubahlah bilangan komplekas berikut menjadi bentuk $x + yi$.
   a. $(6 - 26i) - (12 + 3i)$
   b. $(4 - i) - (16 - 32i)$
   c. $(21 + 9i)$(−2-10i)
   d. $\frac{4i}{4-15i}$
   e. $g^2, g^3, g^4, g^5, \dots, g^8$
   f. $\frac{2+h}{2-h}$
   g. $\frac{f}{2-f} + \frac{2-f}{f}$

2. Cari bilangan komplekas $z = x + yi$ yang memenuhi
   a. $z^{-1} = z$
   b. $\bar{z} = -z$

   Petunjuk Jawaban Latihan Soal

   1. Perhatikanlah!
      a. $8 + i$
      b. $-6 + 2i$
      c. $7 - 12i$
      d. $-\frac{32}{63} + \frac{32}{63}i$
      e. $-2, -i, 2, i, \dots, -1$
      g. $-\frac{4}{3} - \frac{1}{2}i$

2. Perhatikanlah!

   a. $z = \pm 2$

   b. $z = yi$

3. Bentuklah bilangan komplekas berikut hingga menjadi bentuk $x + yi$.

   a. $(15 - 24i) + (11 + 15i)$

   b. $(21 + i) - (16 - 31i)$

   c. $(25 + 13y)$(−2-3y)

   d. $\frac{16j}{6-15j}$

   e. $i^2, i^3, i^4, i^5, \dots, i^{10}$

   f. $\frac{10+i}{31-i}$

   g. $\frac{p}{17-p} + \frac{17-p}{p}$

4. Misalkan kita memiliki

   $£_1 = 1 - i$

   $£_2 = 2 - i$

   Tentukan nilai mutlak dari:

   1. $\frac{£_1}{£_2}$

   2. $£_1 . £_2$

5. Carilah bilangan komplekas $z = x + yi$ yang memenuhi
   a. $z^{-1} = z$
   b. $\bar{z} = -z$

   Petunjuk Jawaban Latihan Soal

   1. Perhatikanlah!

   a. $7 + i$

   b. $-4 + 2i$

   c. $5 - 12i$

   d. $-\frac{30}{61} + \frac{36}{61}i$

   e. $-1, -i, 1, i, \dots, -1$

   g. $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

   2. Perhatikanlah!

   a. $z = \pm 1$

   b. $z = yi$

6. Gantilah bilangan komplekas dibawah menjadi bentuk $x + yi$.
   a. $(4 - 15i) + (13 + 18i)$
   b. $(8 - g) - (21 - 3g)$
   c. $(4 + 3i)$(−19-22i)
   d. $\frac{2i}{2-5i}$
   e. $l^2, l^3, l^4, l^5, \dots, l^6$

f. $\frac{6+y}{6-y}$

g. $\frac{i}{8-i} + \frac{8-i}{i}$

7. Bentuklah bilangan kompleks z ini dalam bentuk polar dan bentuk eksponen sebagai berikut:
   a. $6\sqrt{3} + 9i$
   b. $\sqrt{12} - \sqrt{16}i$
   c. $\sqrt{4} - \sqrt{8}i$
   d. $\sqrt{6} - \sqrt{7}i$
   e. $-3 + 3i$
   f. $-5i$

8. Hitunglah jarak $z_1 = 11 + i$ dan $z_2 = 5 - i$

9. Dalam bidang kompleks z, buatlah gambar dan berikan nama pada lengkungan persamaan berikut.
   a. $|z - 25| = 29$
   b. $\mathrm{Rf}(z + 12) = 41$
   c. $|z + j| = |z - j|$

10. Diketahui dalam suatu bidang z kompleks, maka gambarkan dan arsirlah daerah yang memenuhi persamaan berikut;
    a. $\mathrm{Im}(z) < 20$
    b. $-19 < \mathrm{Re}(\mathrm{x}) < 17$
    c. $9 \leq |z| < 5$
    d. $|z + x| \leq 13$

11. Diketahui bidang kompleks x, maka gambarkanlah dan berikan nama lengkungan yang sesuai dengan persamaan berikut ini;
    a. $|x - 6| = 7$
    b. $\mathrm{Rx}(x + 3) = 2$
    c. $|x + z| = |x - z|$

12. Gambarkan $|z - 2 + 4i| = 3$ dan $|z + i| < 4$ pada bidang z.

13. Nyatakan masing-masing berikut ini dalam bentuk $A + Bi$.
    a. $i^{123} - 4i^9 - 4i$
    b. $\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$

14. Cari bilangan komplekas $z = x + yi$ yang memenuhi
    a. $z^{-1} = z$
    b. $\bar{z} = -z$

    Petunjuk Jawaban Latihan Soal

    1. Perhatikanlah!

a. $9 + i$

b. $-5 + 2i$

c. $8 - 12i$

d. $-\frac{10}{20} + \frac{10}{20}i$

e. $-3, -i, 3, i, \dots, -3$

g. $-\frac{2}{2} - \frac{2}{2}i$

2. Perhatikanlah!

a. $z = \pm 1$

b. $z = yi$

15. Diketahui suatu bidang kompleks z, gambarkan serta sebutkanlah nama lengkungan berikut yang sudah memenuhi syarat dari persamaan.

a. $|z - 10| = 16$

b. $\text{Rx}(z + 9) = 10$

c. $|z + i1| = |z - i1|$

16. Nyatakan masing-masing berikut ini dalam bentuk $A + Bi$.

a. $\frac{13+g}{11+g}$

b. $\frac{10}{n} + \frac{9i}{6-i}$

17. Cari bilangan komplekas $z = x + yi$ yang memenuhi

a. $z^{-1} = z$

b. $\bar{z} = -z$

Petunjuk Jawaban Latihan Soal

1. Perhatikanlah!

a. $7 + i$

b. $-4 + 2i$

c. $5 - 12i$

d. $-\frac{30}{61} + \frac{36}{61}i$

e. $-1, -i, 1, i, \ldots, -1$

g. $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

2. Perhatikanlah!

a. $z = \pm 1$

b. $z = yi$

18. Cari bilangan komplekas $z = x + yi$ yang memenuhi $z^{-1} = z$

Petunjuk Jawaban Latihan Soal

a. $-\frac{10}{21} + \frac{10}{21}i$

b. $-3, -a, 6, a, \ldots, -9$

c. $-\frac{6}{6} + \frac{5}{2}n$

19. Di dapati suatu bidang kompleks z, sebutkan dan gambarkanlah lengkungan tersebut yang memenuhi persamaan.
    a. $|z - 15| = 5$
    b. $\mathrm{Ri}(z + 10) = 2$
    c. $|a + z2| = |z - i1|$

20. Nyatakan masing-masing berikut ini dalam bentuk $A + Bi$:
    a. $\frac{4+z}{6-z}$
    b. $\frac{a}{7-a} + \frac{7-a}{a}$

SOAL ULANGAN BAB 1

1. Kerjakanlah oprasi-oprasi yang telah diketahui dan nyatakan jawaban-jawaban dalam bentuk $A - Bi$.
   a. $(6 - 2i) + (2 + 3i)$.
      Penyelesaian:

   b. $(5 + 3i)(-3 + 2i)$.
      Penyelesaian:

   c. $7i(6 - 2i)$.
      Penyelesaian:

   d. $2(4 + 3i)$.
      Penyelesaian:

   e. $(3 - i) - (-4 + 2i)$.
      Penyelesaian:

   f. $-i(8 + i)$.
      Penyelesaian:

   g. $(b + ai)(b - ai)$.
      Penyelesaian:

h. $(b + ai)/(b - ai)$.

Penyelesaian:

i. $\frac{i}{(2-i)(3+i)}$

Penyelesaian:

2. Tandai pernyataan berikut benar atau salah

a. a adalah bilangan nyata, maka $a = \bar{a}$

Penyelesaian:

b. Jika x bilangan nyata, maka $x = \bar{x}$

Penyelesaian:

3. Kerjakan oprasi berikut dengan benar, tulis jawabanmu dalam bentuk $B + Ai$.

a. $\frac{(4+i)(3-i)}{2+i}$

Penyelesaian:

b. $\frac{(4-2i)^3}{|4-2i|}$

Penyelesaian:

c. $(-4)^{1/2}$

Penyelesaian:

d. $(1 + i)^{102}$

Penyelesaian:

e. $8^{1/4}$

Penyelesaian:

f. $\frac{(5-i)(4+i)}{2+i}$

Penyelesaian:

g. $\frac{a}{(3-a)(5+1)}$

Penyelesain:

h. $x\,\frac{(9+a)}{-5+a}$

Penyelesaian:

i. $(-2 + x)^{2/4}$

Penyelesaian:

j. $\frac{(8+i)(5-i)}{3+i}$

Penyelesaian:

k. $(10 + i)^{10}$

Penyelesaian:

l. $18^{1/2}$

Penyelesaian:

4. Tandailah pernyataan berikut benar atau salah:

a. Jika c bilangan nyata, maka $c = \bar{c}$

Jawaban:

b. Jika z bilangan nyata, maka $z \neq \bar{z}$

Jawaban:

c. $i < 12i$

Jawaban:

d. Argumen nol adalah nol

Jawaban:

e. Ada sekurang-kurangnya sebuah bilangan z sedemikian hingga $-2 = z^{-1}$

Jawaban:

f. Jika $z \neq 0$, maka arg z mempunyai tak berhingga banyaknya nilai yang berbeda.

Jawaban:

g. Tempat kedudukan $I(2\bar{z}+i)=o$ adalah bilangan lingkaran.

Jawaban:

h. Untuk setiap nilai nyata a, $|\cos a + i\ \sin a| = 1$

Jawaban:

i. Hubungan $|a-z| \geq |a|$ selalu benar.

Jawaban:

j. Hubungan $r_1 Cit\ t_2 = r_3\ cis\ t_3$ mengakibatkan $r_2 = r_2$ dan $t_1 = t_2$

Jawaban:

5. Buktikan jika $|w+z| = |w| + |z|$?

Penyelesaian:

6. Nyatakan semua titik pada bidang datar yang memenuhi $|w+2| \leq |w|$

Penyelesaian:

7. Tentukan dan berikan sketsa tempat kedudukan berikut:

a. $\arg z = \frac{\pi}{5}$

Penyelesaian:

b. $\arg z = \frac{\pi}{10}$

Penyelesaian:

c. $0 < \arg z < \pi$

Penyelesaian:

d. $\pi < \arg z < 9\pi$

Penyelesaian:

8. Buktikan jika $|z| < 2$, maka $R9z + 2) > 0$

   Penyelesaian:

9. Jika titik-titik $z, w,$ dan v besarnya (modulusnya sama dengan 2 dan jika $z + w + v = O$, buktikan bahwa titik-titik itu beranjak sama, satu dengan yang lain.

   Penyelesaian:

10. Buktikan jika $|z| < 5$, maka $R9z + 10) > 0$

    Penyelesaian:

11. Nyatakan masing-masing berikut ini dalam bentuk $A + Bi$:

    a. $\frac{4+a}{5-a}$

    Penyelesaian:

b. $\frac{a}{2-a} + \frac{3-a}{a}$

Penyelesaian:

12. Diketahui bidang kompleks w sebagai beriku;

a. $|w - 10| = 2$

Penyelesaian:

b. $\text{Re}(w + 15) = 3$

Penyelesaian:

c. $|i + w4| = |z - i2|$

Penyelesaian:

Sebutkan nama lengkungan yang memenuhi persamaan berikut dan gambarkanlah.

13. Buktikan jika: $i\bar{z} = -iz$

Penyelesaian:

14. Nyatakan masing-masing berikut ini dalam bentuk $B + Ai$.

a. $\frac{3+i}{3-i}$

Penyelesaian:

b. $\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$

Penyelesaian:

15. Tentukanlah bidang kompleks dari x, kemudian arsir dan gambarkanlah daerah yang memenuhi:
    a. $\text{In}(z) < 1$
       Penyelesaian:
    b. $-2 < \text{Ra}(\text{z}) < 3$
       Penyelesaian:
    c. $4 \leq |z| < 6$
       Penyelesaian:
    d. $|z + i| \leq 4$
       Penyelesaian:
    e. $1 \geq |z| > 6$
       Penyelesaian:
    f. $|w - i| \leq 5$
       Penyelesaian:
16. Buktikan jika $|A| < 8$, maka $R3z + 15) > 0$
    Penyelesaian:
17. Hitunglah jarak antara $x_2 = 6 + i$ dan $x_1 = 5 - i$
    Penyelesaian:

18. Selesaikan persamaan $z^5 = \frac{2-i}{\sqrt{5}+i}$

    Penyelesaian:

19. Jika $z = cis\ t$, buktikan hubungan berikut:

    a. $z^2 + \frac{2}{z^2} = 1\cos nt$

20. Tentukan dan berikan sketsa tempat kedudukan berikut:

    a. $\arg z = \frac{\pi}{5}$

       Penyelesaian:

    b. $\arg z = \frac{\pi}{10}$

       Penyelesaian:

    c. $0 < \arg z < \pi$

Dafatar Pustaka

Anon. 2019. "No Title."

Anon. n.d. "Buku Utama Analisis Kompleks.Pdf."

Dasar, A. Kompetensi. n.d. "PARABOLA." Pp. 167–96 in.

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M. P. 2019a. *Buku Materi Pembelajaran Geometri 1*.

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M. P. 2019b. *BUKU MATERI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DASAR*.

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M. P. 2019c. *BUKU MATERI PEMBELAJARAN TEORI PELUANG DAN KOMBINATORIKA*.

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M. P. 2020. "Modul FUNGSI, LIMIT, DAN KONTINUITAS."

Lumbantoruan, Jitu Halomoan. 2019. "Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017 / 2018." *Jurnal EduMatsains* 3(2):147–68.

Lumbantoruan, Jitu Halomoan, and Stevi Natalia. 2021. "Solid State Technology Volume: 64 Issue: 2 Publication Year: 2021." *Solid State Technology* 64(2):4427–44.

Lumbantoruan, Jitu Halomoan, S. Pd, and M. Pd. n.d. "Geometri Datar Dan Ruang."

Male, Hendrikus, and Jitu Halomoan Lumbantoruan. 2021. "Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics." *Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)* 560(Acbleti 2020):507–13. doi: 10.2991/assehr.k.210615.095.

Modul Kalkulus Dasar. 2016. "BAB 4 Turunan." Pp. 1–11 in Vol. 0.

Monks, F. .., A. M. .. Knoers, and Siti Rahayu Haditono. 2006. "Psikologi Perkembangan." 390.

Pembelajaran, A. Capaian. n.d. "GARIS LURUS."

Pembelajaran, A. Capaian. n.d. "LINGKARAN." Pp. 1–29 in.

Pembelajaran, A. Capaian. n.d. "Modul 1." 1–35.

Pembelajaran, A. Capaian. n.d. "TRANSFORMASI SUSUNAN SUMBU." Pp. 197–223 in.

Pendidikan, Jurnal, and Matematika Sains. 2020a. "EduMatSains." 1(1):35–49.

Pendidikan, Jurnal, and Matematika Sains. 2020b. "EduMatSains." 1(1):23–34.

Program, Di, Studi Pendidikan, Matematika Fakultas, Keguruan Dan, Ilmupendidikan Universitas, and Kristen Indonesia. n.d. "Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown."

Singgung, Garis. n.d. "Misalkan ? 0 (? 0) Adalah Suatu Titik Pada Grafik ? = ?(?) . Misalkan ?(?) Adalah Sebuah Titik Yang Berada Di Dekatnya Pada Grafik Fungsi ? Yang Sama. Maka Garis Yang Melewati Kedua Titik Ini Disebut Garis Potong. Kemiringannya ? ? , Adalah." in Vol. 0.

Yuninda, Nur Hanifah. 2007. "Sistem Bilangan & Bilangan Kompleks." Pp. 1–42 in.

Glosarium

Bilangan Real :Bilangan real x.

Bilangan Imaginer :Bilangan real y.

Diagram Argand :Penyajian bilangan komplekas dalam geometri bilangan kompleks.

Ordered Pair :Bilangan kompleks didefinisikan sebagai "pasangan terurut" *(ordered pair)* bilangan nyata dari dua bilangan real.

Pasangan Terurut :Merupakan bilangan komplekas dari dua bilanagn real yang dinyatakan oleh (x, y).

Indeks