MODUL PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan Diferensial Eksak dan Non-Eksak

Diajukan untuk tugas mata kuliah

Persamaan Diferensial

Disusun oleh :

Bintang Pratama NIM. 1913150009

Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Keguruan dan Pendidikan Matematika

Universitas Kristen Indonesia

2021-2022

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa karena telah melimpahkan karunia dan pertolongan-Nya hingga penulis berhasil menyelesaikan bahan ajar modul "Persamaan Diferensial Eksak dan Non-Eksak".

Pembuatan modul ini adalah syarat perlu bagi mahasiswa program studi pendidikan matematika UKI upaya mengikuti Ujian Akhir Semester. Modul ini juga dapat ditambahkan sebagai referensi tambahan dalam kegiatan belajar yang digunakan oleh dosen maupun peserta didik upaya meningkatkan pengetahuan.

Penulis mengucapkan terima kasih atas dukungan dari penyelenggara pendidikan dalam penyusunan modul ini supaya dapat diterapkan sesuai sasaran pembelajarannya. Penulis menyadari bahwa penyusunan modul ini masih banyak kekurangan. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kepada pembaca untuk memberikan kritik dan saran supaya ada ada perbaikan dan layak digunakan.

Jakarta, 15 Desember 2021

Penulis

DAFTAR ISI

MODUL 5

PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK DAN NONEKSAK

Capaian Kompetensi	Uraian Materi
1. Kemampuan mahasiswa dalam memahami konsep, definisi, dan menganalisa persamaan diferensial linear dapat dilakukan dengan baik dan benar. 2. Kemampuan mahasiswa dalam mengeksplorasi persamaan diferensial linear eksak maupun non-eksak dapat dilakukan dengan baik dan benar. 3. Kemampuan mahasiswa dalam menuntaskan solusi persamaan eksak dan non eksak dilakukan dengan baik dan benar.	1. Menentukan penyelesaian general pada persamaan diferensial (P.D) eksak. 2. Menentukan faktor integrasi untuk P.D yang tidak eksak. 3. Menentukan solusi general dari P. D yang tak eksak dengan menggunakan faktor integrasi.

Kegiatan Pembelajaran 1

5.1. Ide Persamaan Diferensial Eksak

Pada modul-modul sebelumnya, Anda sudah menelaah fundamental mengenai persamaan diferensial. Secara sederhana, dapat diartikan persamaan yang memiliki ekspresi derivatif dengan minimal berderajat satu. Kemudian, Anda telah mempelajari menentukan solusi general dari persamaan diferensial linear dengan menggunakan faktor integrasi. Penulis memberitahukan bahwa hal-hal tersebut adalah prasyarat dalam modul ini karena memiliki kaitan yang erat (J. H. Lumbantoruan, 2019e).

Mari kita tinjau kembali pada cabang kalkulus dasar, yaitu menentukan derivatif dari suatu fungsi, misalnya terdapat fungsi $y = 4x^2$. Dengan menggunakan properti berpangkat, maka hasil derivatif fungsi y terhadap variabel x adalah $\frac{dy}{dx} = 8x$. Ekspresi tersebut menunjukkan persamaan diferensial dan tentunya sangat mudah, namun bagaimana cara menentukan derivatif untuk kasus y tidak sendiri? Umpamanya, ekspresi $x^2y^4 + \cos(y) = 1$ akan kita tentukan $\frac{dy}{dx}$ nya (J. H. Lumbantoruan, 2017).

Cara pertama : Menggunakan derivatif implisit (J. H. Lumbantoruan, 2016b)**.**

$$\frac{d}{dx}\left([x^2y^4 + \cos(y)] = (1)\right)$$

$$x^2.4y^3.y' + y^4.2x - \sin(y)\,y' = 0$$

$$[4y^3x^2 - \sin(y)]y' + 2xy^4 = 0 \quad \text{(kurangkan } y^4 2x \text{ di kedua ruas)}$$

$$[4x^2y^3 - \sin(y)]\frac{dy}{dx} = -2xy^4 \quad \text{(bagi } [4y^3x^2 - \sin(y)] \text{ di kedua ruas)}$$

$$y' = \frac{-2xy^4}{4x^2y^3 - \sin(y)}$$

Cara kedua : Menggunakan derivatif total.

Persamaan yang diketahui menunjukkan fungsi multivariable karena memiliki lebih dari satu varibel sehingga $F(x, y) = C$.

Metode derivative total dapat dilakukan dengan **melibatkan derivatif parsial (sebagian)** yang memiliki bentuk umum sebagai berikut.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Terkadang, derivatif parsial A untuk x dinotasikan A_x dan derivatif parsial B terhadap y dinotasikan B_y.

$$F(x, y) = x^2y^4 + \cos y = 1$$

$$dF = 2xy^4dx + [4x^2y^3 - \sin y]dy = 0$$

$$[4x^2y^3 - \sin y]dy = -2xy^4dx$$

$$y' = -\frac{2xy^4}{4x^2y^3 - \sin y}$$

Langkah kedua ini merupakan ide awal dalam menentukan solusi general persamaan eksak. Sebuah pertanyaan muncul dengan mengasumsikan tidak diketahui $F(x, y)$, bagaimana cara mengembalikan sebuah solusi general $\frac{dy}{dx}$ ke bentuk $F(x, y)$? Pastinya sangat sulit apabila Anda menggunakan aljabar pada kalkulus dasar (J. H. Lumbantoruan, 2019b). Dengan ide awal persamaan eksak, Anda dapat lebih mudah untuk menentukan fungsinya. Berikut di bawah ini adalah proses cara melakukannya.

Contoh 1

(J. H. Lumbantoruan, 2019d), tentukan solusi persamaan $2xy^4 dx + (4x^2y^3 - \sin(y))\, dy = 0$ dengan kondisi awal $y\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\right) = \pi$.

Pembahasan alternatif

Kita mengetahui bahwa asal $2xy^4 dx + (4x^2y^3 - \sin(y))dy = 0$ dari derivatif total, yang mana $\frac{\partial F}{dx} = 2xy^4$ dan $\frac{\partial F}{dy} = 4x^2y^3 - \sin(y)$. Untuk parsial fungsi F terhadap x dapat kita integralkan terhadap x.

$$\int \frac{dF}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int 2xy^4\, dx$$

$$F = x^2y^4 + h(y) \qquad \text{(Kedua ruas diderivatif parsial terhadap } y\text{)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[F] = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y^4 + f(y)]$$

$$= 4x^2y^3 + h'(y)$$

Perhatikan kembali pada persamaan di atas bagian $\frac{\partial F}{dy}$. Ternyata, ekuivalen pada bagian hasil derivatif parsial $\frac{\partial F}{dy}$, yakni $4x^2y^3 + h'(x) \equiv 4x^2y^3 - \sin(y)$. Dari kesamaan tersebut diketahui fungsi $h'(y) = -\sin y$ sehingga

$$\int h'(y)\, dy = -\left(\int \sin(y)\, dy\right)$$

$$= -(-\cos y) + C_1$$

Karena sudah diderivatifkan secara parsial pada masing-masing bagian, kita menemukan fungsi berikut (Perlu dihimbau konstanta C diletakkan di ruas kanan).

$$F = x^2 y^4 + \cos(y) = C$$

Diketahui bahwa persamaan pada soal mempunyai kondisi awal $y\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\right) = \pi,$ yang menunjukkan $x = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}$ dan $y = \pi.$ Substitusikan kedua nilai tersebut ke F.

$$F = \left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\pi^2}}\right)^2 \cancel{(\pi)}^4 + \cos(\pi) = C$$

$$2 - 1 = C$$

$$1 = C$$

Dengan perhitungan hasil substitusi kondisi awal, diketahui bahwa fungsi $F = x^2 y^4 + \cos(y) = 1$

Jadi, solusi persamaan yang diberikan identik $x^2 y^4 + \cos(y) = 1$.

$\blacksquare$

Solusi persamaan tersebut sesuai dengan contoh pertama pada modul ini, dengan kata lain $2xy^4 dx + (4x^2 y^3 - \sin(y))\, dy = 0$ termasuk kategori persamaan eksak. Bilamana tidak, maka prosedur yang tertulis di atas tidak akan pernah berhasil (Desi & Lumbantoruan, 2020). Anda sudah mengidenfikasi ide awal dari persamaan eksak dengan tambahan terdapat kondisi awalnya.

Sekarang, Anda akan diperkenalkan dengan terminology yang telah disediakan dari persamaan diferensial eksak.

Definisi 1.
Sebuah persamaan diferensial yang memiliki ekspresi $A(x,y)+B(x,y)\frac{dy}{dx}=0$ dapat dikatakan eksak pada setiap titik $F(x,y)\in\mathbb{R}$ di sebuah bidang kuadrilateral K bilamana terdapat

$$\frac{\partial F}{\partial x}=A(x,y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y}=B(x,y)$$

Artinya, derivative total dari pada fungsi multivariable $F(x,y)$ memenuhi sebagai berikut :

$$dF(x,y)=A(x,y)dx+B(x,y)dy.$$

Kemudian, bilamana ekspresi di atas termasuk kategori eksak, maka persamaan diferensial

$$A(x,y)+B(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

juga eksak.

Pada contoh 1, awalnya kita mengetahui bahwa persamaan tersebut memiliki solusi dengan berbagai proses. Meskipun persamaan tersebut tak linear (derajat *y* lebih dari satu) dan juga tak terpisah, persamaan tersebut dapat Anda tentukan solusinya. Permasalahannya adalah tidak semua persamaan yang eksak, melainkan non-eksak. Akibatnya, muncul pertanyaan *bagaimana* *cara mencari tahu sebuah persamaan diferensial tertentu eksak secara sistematis agar dapat menggunakan prosedur contoh soal 1?*" (J. Lumbantoruan, 2018). Sekarang, Anda akan ditunjukkan kepada inti pada kegiatan pembelajaran 2.

Kegiatan Pembelajaran 2

5.2. Bentuk Umum Persamaan Diferensial Eksak Beserta Metode Penyelesaiannya

Pada kegiatan pembelajaran 1, terdapat sebuah masalah tentang *bagaimana cara menentukan persamaan diferensial eksak maupun non eksak secara sistematis?* (J. Lumbantoruan, 2019). Bilamana terdapat sebuah persamaan non esak, prosedur yang sudah tertulis di subbab sebelumnya tidak dapat digunakan (Holzner, 2008). Anda akan diperkenalkan teorema yang menyatakan *test for exactness*.

Teorema 1. *Test for exactness*

Apabila terdapat fungsi multivariabel A dan B beserta derivatif parsialnya $\frac{\partial A}{\partial y}$ dan $\frac{\partial B}{\partial x}$ merupakan fungsi kontinu pada interval I di bidang kuadrilateral K, maka ekspresi persamaan diferensial berikut :

$$A(x,y) + B(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

dapat dikatakan **eksak** apabila dan hanya apabila

$$\frac{\partial}{\partial y}A(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}B(x,y)$$

Teorema di atas juga dapat dikatakan apabila Anda mempunyai sebuah persamaan diferensial seperti di bawah ini.

$$A(x, y) + B(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Beserta ada sebuah fungsi $F(x, y)$ pada bidang kuadrilateral K, yaitu terdiri dari $\frac{\partial}{\partial y}A(x, y)$ dan $\frac{\partial}{\partial x}B(x, y)$ bila dan hanya bila :

$$\frac{\partial}{\partial y}A(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}B(x, y)$$

Sebaliknya, bilamana $\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}$ tidak sama dengan $\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}$, syarat cukup agar F tidak eksak (J. H. Lumbantoruan, 2019c).

Contoh soal 1

Pada contoh soal 1 bagian kegiatan pembelajaran 1, diberikan sebuah persamaan yang berbentuk $2xy^4dx + (4x^2y^3 - \sin(y))\, dy = 0$. Diketahui persamaan tersebut dikatakan eksak, tunjukkanlah dengan teorema 1 (J. H. Lumbantoruan & Male, 2020)!

Pembahasan alternatif

Dengan menggunakan teorema 1 (*Test of exactness*), persamaan dapat dikatakan eksak bila dan hanya bila $\frac{\partial}{\partial y}A(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}B(x, y)$. Diketahui $A(x, y) = 2xy^4dx$ dan $B(x, y) = (4x^2y^3 - \sin(y))$ sehingga

$$\frac{\partial}{\partial y}[A] = \frac{\partial}{\partial y}[2xy^4] = 2x(4)y^3 = 8xy^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[B] = \frac{\partial}{\partial x}[4x^2y^3 - \sin(y)] = 4(2)xy^3 - 0 = 8xy^3$$

Terlihat bahwa $\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}$ sehingga persamaan ini dapat dikatakan eksak.

■

Contoh soal 2

Identifikasilah persamaan diferensial yang berekspresi berikut.

$$(4x^3 - 6xy^2)dx + (4y^3 - 6xy)dy = 0$$

Apakah ekspresi di atas dapat Anda katakan eksak?

Pembahasan alternatif

Uji kepastian eksak pada ekspresi di atas dengan menerapkan teorema 1. Diketahui $\frac{\partial A}{\partial x} = A(x, y) = 4x^3 - 6xy^2$ dan $\frac{\partial B}{\partial y} = B(x, y) = 4y^3 - 6xy$.

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3 - 6xy^2) = \frac{\partial}{\partial y}[4x^3] - \frac{\partial}{\partial y}[6xy^2]$$

$$= 0 - 12xy = -12xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(4y^3 - 6xy) = \frac{\partial}{\partial x}[4y^3] - \frac{\partial}{\partial x}[6xy]$$

$$= 0 - 6y = -6y$$

Kalkulasi di atas menunjukkan $\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$ yang mengakibatkan ekspresi persamaan $(4x^3 - 6xy^2)dx + (4y^3 - 6xy)dy = 0$ tidak dapat dikatakan eksak.

■

Contoh soal 3

(Manalu, 2019), cobalah Anda tentukan apakah persamaan yang berekspresi $(\cos s \cos \theta + 2s)ds - (\sin s \sin \theta + 2\theta)d\theta = 0$ dapat dikatakan eksak? Sertakan alasan Anda!

Pembahasan alternatif

Terapkan teorema 1 dalam menguji persamaan di atas eksak atau bukan. Diketahui $A(s, \theta) = \cos s \cos \theta + 2s$ dan $B(s, \theta) = -(\sin s \sin \theta + 2\theta)$. Maka, tentukan derivatif parsial *A* terhadap θ dan derivative parsial *B* terhadap *s*.

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\cos s \cos \theta + 2r\ ) = -\cos s \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} - (\sin s \sin \theta + 2\theta) = -(\cos s \sin \theta) = -\cos s \sin \theta$$

Persamaan pada contoh soal nomor 3 eksak karena sudah sesuai dengan teorema 1 (kondisi kompatibilitas), yaitu $\frac{\partial}{\partial \theta} A[s, \theta] = \frac{\partial}{\partial s} B[s, \theta]$.

■

Contoh soal 4

Identifikasilah persamaan yang berekspresi berikut.

$$\left(3t + \cos\left(\frac{1}{2}y\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}t \sin y\right)\frac{dy}{dt} = 0$$

Apakah ekspresi di atas dapat dikatakan eksak? Berikan alasan Anda!

Pembahasan alternatif

Pada kasus ini, variabel bebasnya adalah t, sedangkan variabel terikatnya yaitu y. Tetap gunakan teorema 1 untuk menguji kepastiannya. Diketahui $A(t,y) = \left(3t + \cos\left(\frac{1}{2}y\right)\right)$ dan $B(t,y) = \left(-\frac{1}{2}t\sin(y)\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3t + \cos\left(\frac{1}{2}y\right)\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}y\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{1}{2}t\sin y\right) = \left(\frac{1}{2}\sin y\right)$$

Terlihat bahwa parsial A tidak ekuivalen dengan parsial B terhadap variabel t. Artinya, ekspresi persamaan nomor 4 tidak dapat dikatakan eksak (non eksak) (Male & Lumbantoruan, 2021).

■

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, sebuah persamaan diferensial eksak memiliki solusi $F(x,y) = C$, C merupakan sembarang konstanta. Sebenarnya, pada contoh 1 di kegiatan pembelajaran 1 sudah diberikan gambaran untuk menentukan solusi general persamaan diferensial bilamana termasuk eksak. Akan tetapi, belum dijelaskan secara rinci berdasarkan metodenya. Oleh karena itu, penulis akan melengkapi bahan tersebut dalam kegiatan pembelajaran 2 secara tertulis (J. H. Lumbantoruan, 2016a).

Metode untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Eksak

Hal yang perlu diperhatikan adalah pastikan persamaan diferensial ekspresi $A(x,y)dx + B(x,y)dy = C$ adalah eksak. Bilamana iya, lakukan

Tahap pertama : Perhatikan $\frac{\partial F}{\partial x} = A(x,y)$

Untuk parsial F terhadap terhadap x, intergralkan terhadap x.

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial x}} \cancel{dx} = \int A(x,y)\, dx$$

$$F(x,y) = \left[\int A(x,y)\, dx\right] + g(y) \ldots (i)$$

$g(y)$ merupakan sembarang fungsi untuk y.

Tahap kedua : Diferensialkan parsial F terhadap y pada persamaan terakhir (i).

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int A(x,y)\, dx\right] + g'(y)$$

Tahap ketiga : Hasil dari Tahap kedua akan ekuivalen dengan $B(x,y)$. Maka, substitusi $B(x,y)$ ke $\frac{\partial F}{\partial y}$ upaya memperoleh $g'(y)$.

Tahap keempat : Integralkan $g'(y)$ terhadap variabel y upaya memperoleh $g(y)$ yang berperan sembarang kontan. Dengan kata lain, karena $\frac{\partial f}{\partial y} = P(x,y)$, hanya jika

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int A(x,y)\, dx\right] + \int g'(y)\, dy$$

$g(y)$ dapat diperoleh.

Tahap kelima : Substitusikan pada tahap pertama demikian sehingga $F(x, y) = C$.

Metode Penyelesaian Alternatif

Tahap pertama : Metode sebelumnya pada tahap pertama, Anda juga dapat memperhatikan $\frac{\partial F}{\partial y} = B(x, y)$. Kemudian, untuk parsial F terhadap y, intergralkan terhadap y.

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial y}} \cancel{dy} = \int B(x, y)\, dy$$

$$F(x, y) = \left[\int B(x, y)\, dy\right] + g(x) \ldots (i)$$

$g(x)$ merupakan sembarang fungsi untuk variabel x.

Tahap kedua : Diferensiasikan parsial F terhadap x pada persamaan terakhir (i).

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int B(x, y)\, dy\right] + g'(x)$$

Tahap ketiga : Hasil dari tahap kedua akan ekuivalen dengan $A(x, y)$. Maka, substitusi $A(x, y)$ ke $\frac{\partial F}{\partial X}$ upaya memperoleh $g'(x)$.

Tahap keempat : Integralkan $g'(x)$ terhadap x upaya memperoleh $g(x)$ yang berperan sembarang kontan. Dengan kata lain, karena $\frac{\partial f}{\partial x} = B(x, y)$, hanya jika

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int B(x,y)\,dx\right] + \int g'(x)\,dx$$

$g(x)$ dapat diperoleh (J. H. Lumbantoruan, 2015).

Tahap kelima : Substitusikan pada tahap pertama demikian sehingga $F(x,y) = C$.

Kedua metode alternatif penyelesaian bersifat fleksibilitas, artinya Anda dapat menyesuaikan bentuk persamaan yang menurut Anda mudah. Tinjau kembali bahwa alternatif penyelesaian di atas dapat dilakukan apabila dan hanya apabila persamaan termasuk eksak. Sebaliknya, bilamana tidak eksak, metode di atas tidak akan pernah bisa untuk digunakan . Untuk memaksimalkan pengetahuan Anda, amatilah beberapa contoh yang telah disediakan.

(J. H. Lumbantoruan & Natalia, 2021)

Contoh soal 5

Tunjukkan ekspresi persamaan di bawah ini adalah eksak.

$$(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$$

Bilamana sudah, maka tentukan solusi general dari persamaan di atas!

Pembahasan alternatif

Gunakan teorema 1 untuk menguji kepastian eksak. Ruas kiri pada persamaan di atas merupakan total derivatif terhadap dua variabel x serta y, yang mengindikasikan $\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = (2xy + 3)$ dan $\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = (x^2 - 1)$.

Gunakan teorema 1 untuk menguji kepastian eksak.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2xy + 3] = 2x$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2 - 1] = 2x$$

Persamaan pada contoh soal nomor 5 eksak karena sudah sesuai dengan teorema 1 yaitu $\frac{\partial}{\partial y}A(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}B(x,y)$. Akibatnya, kita dapat menentukan solusi general dari persamaan $(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$.

Tahap pertama : Perhatikan $\frac{\partial F}{\partial x} = A(x,y)$

Untuk parsial F terhadap x atau $A(x)$, intergralkan terhadap x.

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial x}} \cancel{dx} = \left[\int (2xy + 3)\, dx\right]$$

$$F = \int (2xy)dx + \int 3\, dx$$

$$= \frac{2}{2}x^2 y + 3x + \varphi(y)$$

$$F = x^2 y + 3x + \varphi(y) \ldots (i)$$

Tahap kedua : Diferensialkan parsial F terhadap y pada persamaan terakhir (i).

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2 y + 3x + \varphi(y)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[x^2 y] + \frac{\partial}{\partial y}[3x] + \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(y)]$$

$$= x^2 + \varphi'(y)$$

Tahap ketiga : Periksa kembali bentuk mula persamaan diferensialnya. Diketahui bahwa hasil derivativ parsial di atas ekuivalent dengan $B(x, y)$ sehingga $x^2 + \varphi'(y) \equiv (x^2 - 1)$.

Tahap keempat : Integralkan $\varphi'(y)$ terhadap y upaya memperoleh $\varphi(y)$.

$$\int \varphi'(y)\, dy = \int -1 dy$$

$$= -\int dy = -y + C$$

Tahap kelima : Substitusikan pada tahap pertama demikian sehingga

$$x^2 y + 3x - y = C$$

$$y(x^2 - 1) + 3x = C$$

$$y(x^2 - 1) = C - 3x$$

$$y = \frac{C}{x^2 - 1} - \frac{3x}{x^2 - 1}$$

■

Contoh soal 6

Tunjukkan bentuk persamaan di bawah ini adalah eksak.

$$\cos\theta\, dr - (r \sin\theta - e^{\theta}) d\theta = 0$$

Bilamana sudah, maka tentukan solusi general dari ekspresi di atas!

Pembahasan alternatif

Persamaan di atas memiliki variabel bebas r dan variabel terikatnya θ. Gunakan teorema 1 untuk menguji kepastian eksak. Ruas kiri pada persamaan di atas merupakan total derivatif terhadap dua variabel $F(x, y)$ sehingga $\frac{\partial A}{\partial r} = \cos\theta$ dan $\frac{\partial B}{\partial \theta} = -\left(r \sin\theta - e^{\theta}\right)$.

Gunakan teorema 1 untuk menguji kepastian eksak.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}[A]\right] = \frac{\partial}{\partial\theta}[\cos\theta] = -\sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}[B]\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[-\left(r\sin\theta - e^{\theta}\right)\right] = -\sin\theta$$

Ekspresi yang diberikan pada contoh soal nomor 6 adalah eksak karena sudah sesuai dengan teorema 1 yaitu $\frac{\partial}{\partial\theta}A(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}B(r,\theta)$. Solusi dari persamaan $\cos\theta\, dr - \left(r\sin\theta - e^{\theta}\right)d\theta = 0$ dapat ditentukan menggunakan langkah-langkah berikut.

Tahap pertama : Perhatikan $\frac{\partial F}{\partial r} = A(r,\theta)$

Untuk parsial F terhadap terhadap r, intergralkan terhadap r.

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial r}} \cancel{dr} = \left[\int \cos\theta\, dr\right]$$

$$F = r\cos\theta + g(\theta) \ldots (1)$$

Tahap kedua : Diferensialkan parsial F terhadap θ pada persamaan terakhir (i).

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}[r\cos\theta + g(\theta)]$$

$$= \frac{\partial}{d\theta}[r\cos\theta] + \frac{\partial}{d\theta}[g(\theta)]$$

$$= -r\sin\theta + g'(\theta)$$

Tahap ketiga : Tinjau kembali bentuk mula persamaan diferensialnya. Diketahui bahwa hasil derivativ parsial di atas ekuivalent dengan $B(x, y)$ sehingga $-r\sin\theta + g'(\theta) \equiv -(r\sin\theta - e^{\theta}) = -r\sin\theta + e^{\theta}$.

Jadi, $g'(\theta) = e^{\theta}$

Tahap keempat : Integralkan $g'(\theta)$ terhadap variabel θ upaya memperoleh $g(\theta)$.

$$\int g'(\theta)\, d\theta = \int e^{\theta} d\theta$$

$$g(\theta) = e^{\theta} + C$$

Tahap kelima : Setelah ekspresi $g(y)$ ditentukan, substitusikan pada tahap pertama demikian sehingga

$$r\cos\theta + e^{\theta} = C$$

$$r\cos\theta = C - e^{\theta}$$

$$r = \frac{C}{\cos\theta} - \frac{e^{\theta}}{\cos\theta}$$

$$r = C\sec\theta - e^{\theta}\sec\theta$$

$$r = \sec\theta\,(C - e^{\theta})$$

■

Contoh soal 7

Tunjukkan bahwa persamaan di bawah ini termasuk eksak.

$$e^{x}(y - x) + (1 + e^{x})\frac{dy}{dx} = 0$$

Bilamana sudah, maka tentukan solusi dari general persamaannya yang memiliki kondisi awal $y(0) = 1$

Pembahasan alternatif

Uji kepastian eksak pada ekspresi di atas dengan menerapkan teorema 1. Ruas kiri bentuk di atas merupakan total derivatif terhadap dua variabel $F(x, y)$ sehingga $\frac{\partial A}{\partial x} = e^{x}(-x + y)$ dan $\frac{\partial B}{\partial y} = (1 + e^{x})$.

$$\frac{\partial}{\partial y}[A] = \frac{\partial}{\partial y}[e^{x}(-x + y)] = \frac{\partial}{\partial y}[-e^{x}x + e^{x}y] = e^{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[B] = \frac{\partial}{\partial x}[1 + e^{x}] = e^{x}$$

Ekspresi yang diberikan pada contoh soal nomor 7 adalah eksak karena sudah sesuai dengan teorema 1, yakni $\frac{\partial}{\partial y}[A] = \frac{\partial}{\partial x}[B]$.

Artinya, Anda dapat menentukan solusi dari persamaan contoh soal nomor 7 dengan menerapkan tahap-tahap berikut.

Tahap pertama : Perhatikan $\frac{\partial}{\partial y}[B]$

Untuk parsial F terhadap terhadap y, intergralkan terhadap r.

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial y}} \cancel{dy} = \left[\int (1 + e^x)\, dy\right]$$

$$F = \int 1\, dy + \int e^x\, dy$$

$$F = y + e^x y + \phi(x) \ldots (a)$$

Tahap kedua : Diferensialkan parsial F terhadap x pada persamaan terakhir *(a)*.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y + e^x y + \phi(x)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[y] + \frac{\partial}{\partial x}[e^x y] + \frac{\partial}{\partial x}[g(x)]$$

$$= e^x y + \phi'(x) \ldots (b)$$

Tahap ketiga : Tinjau kembali bentuk mula persamaan diferensialnya. Diketahui bahwa hasil derivativ parsial (b) ekuivalent dengan *A(x,y)* sehingga $e^x(y - x) = e^x y - e^x x \equiv e^x y + \phi'(x)$

Jadi, $\phi'(x) = -e^x x$

Tahap keempat : Integralkan $\phi'(x)$ terhadap x upaya memperoleh $g(x)$.

$$\int g'(x)\,dx = \int -xe^x\,dx$$

$u = -x$ $\int dv = \int e^x dx$

$du = -dx$ $v = e^x$

$$g(x) = -xe^x - \int -e^x dx$$

$$g(x) = -xe^x + e^x + C$$

Tahap kelima : Setelah ekspresi $g(y)$ ditentukan, substitusikan ke persamaan (a) di tahap pertama demikian sehingga

$$y + e^x y - xe^x + e^x = C$$

Kemudian, Anda perlu meletakkan kondisi awal $y(0) = 1$ yang berarti $x = 0$ dan $y = 1$

$$(1) + e^{(0)}(1) - (0)e^{(0)} + e^{(0)} = C$$

$$3 = C$$

Substitusi $C = 3$ sehingga

$$y + e^x y - xe^x + e^x = 3$$

$$-(-1 + x)e^x + y(1 + e^x) = 3$$

$$(1 + e^x)y = 3 + (-1 + x)e^x$$

$$y = \frac{3}{(1 + e^x)} + \frac{e^x(-1 + x)}{(1 + e^x)}$$

$$y = \frac{3 + (-1 + x)e^x}{(1 + e^x)}$$

Contoh soal 8

Perhatikan ekspresi persamaan berikut.

$$(ye^t + ye^t t)dt + (te^t + 2)dy = 0$$

(a) Tunjukkan ekspresi di atas termasuk persamaan eksak.

(b) Tentukan solusi persamaan di atas bilamana diketahui kondisi awal $y(0) = -1$.

Pembahasan alternatif

(a) Perhatikan bahwa $\frac{\partial A}{\partial t} = ye^t + ye^t t$ dan $\frac{\partial B}{\partial y} = te^t + 2$.

Terapkan teorema 1 upaya dapat ditunjukkan bahwa ekspresi persamaan di atas adalah eksak.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial A}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial B}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[ye^t + ye^t t] = e^t + e^t t = e^t(1 + t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[te^t + 2] = e^t + e^t t = (1 + t)e^t$$

Sehingga $\frac{\partial}{\partial y}[A(x, y)] = \frac{\partial}{\partial t}[B(x, y)] = (1 + t)e^t$, artinya ekspresi persamaan nomor 8 termasuk eksak.

(b) Dengan mengetahui persamaan di atas adalah eksak, maka Anda dapat melakukan 5 tahap sebagai berikut untuk menentukan solusinya.

Tahap pertama : Perhatikan $\frac{\partial}{\partial y} B(t, y) = te^t + 2$.

Untuk parsial F terhadap terhadap y, intergralkan terhadap y.

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial y}} \cancel{dy} = \int (te^t + 2)\, dy$$

$$F = \int te^t\, dy + \int 2\, dy$$

$$F = ye^t + 2y + g(t) \ldots (1)$$

Tahap kedua : Diferensialkan parsial F terhadap t pada persamaan terakhir (1).

$$F = ye^t + 2y + g(t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[ye^t + 2y + g(t)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[ye^t] + \frac{\partial}{\partial t}[2y] + \frac{\partial}{\partial t}[g(t)]$$

$$= ye^t + g'(t) \qquad \ldots. (2)$$

Tahap ketiga : Perhatikan kembali bentuk mula persamaan diferensial yang ditanyakan. Diketahui bahwa hasil derivativ parsial (2) ekuivalent dengan $A(t, y)$ sedemikian sehingga $ye^t + ye^t t \equiv ye^t + g'(t)$. Jadi, $g'(t) = ye^t t$.

Tahap keempat : Integralkan $g'(t)$ terhadap variabel t upaya memperoleh $g(t)$.

$$\int g'(t)\, dt = \int ye^t\, t\, dt = y \int (e^t t)\, dt$$

$u = t$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $dv = e^t dt$

$du = dt$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $v = e^t$

$$g(t) = y\left[\left(e^t t - \int e^t \, dt\right)\right]$$

$$= y[e^t t - e^t + C]$$

Tahap kelima : Substitusi persamaan $g(t)$ ke persamaan (1) agar menemukan solusi umum yang diminta.

$ye^t + 2y + y[e^t t - e^t] = C$

Bilamana sudah, Anda letakkan kondisi awal ketika $y(0) = -1$ yang menunjukkan $t = 0$ dan $y = -1$ ke solusi umum di atas.

$(-1)e^0 + 2(-1) + (-1)[e^0 . 0 - e^0] = C$

$$-1 - 2 + (-1)[-1] = C$$

$$C = -2$$

Setelah menemukan nilai C, maka substitusi ke persamaan solusi umumnya.

$ye^t + 2y + y[e^t t - e^t] = -2$

$(e^t + 2 + e^t t - e^t)y = -2$

$$y = -\frac{2}{2 + e^t t}$$

■

Contoh soal 9

Apakah ekspresi persamaan di bawah ini eksak?

$$(\theta + y)d\theta + \tan\theta \, ds = 0$$

Bilamana iya, maka tentukan solusi umumnya dengan metode solusi persamaan eksak!

Uji kepastian ekspresi di atas berdasarkan teorema 1 yang diketahui $\frac{\partial A}{\partial \theta} = \theta + s$ dan $\frac{\partial B}{\partial s} = \tan \theta$.

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}[\theta + s] = 1$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}[\tan s] = \sec^2 \theta$$

Kalkulasi di atas menunjukkan $\frac{\partial A}{\partial s} \neq \frac{\partial B}{\partial \theta}$ yang mengakibatkan persamaan tidak eksak sehingga kita tidak dapat menggunakan metode solusi persamaan eksak.

■

Contoh soal 10

Apakah ekspresi persamaan di bawah ini eksak?

$$(y^2 + 2xy)dx - (x^2)dy = 0$$

Bilamana iya, maka tentukan solusi generalnya dengan metode solusi persamaan eksak!

Uji kepastian ekspresi di atas berdasarkan teorema 1 yang diketahui $\frac{\partial A}{\partial x} = y^2 + 2xy$ dan $\frac{\partial B}{\partial y} = -x^2$.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2y + 2x$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -2x$$

Kalkulasi di atas menunjukkan $\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$ yang menyebabkan persamaan tidak eksak sehingga kita tidak dapat menggunakan metode solusi persamaan eksak.

■

Kegiatan Pembelajaran 3
5.3. Faktor Integrasi Spesial

Kegiatan pembelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari tentang pemeriksaan uji eksak beserta menentukan solusi umumnya. Pada contoh soal nomor 5 di subbab sebelumnya, diketahui ekspresi persamaan $(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$ termasuk eksak setelah diuji dengan pemeriksaan keeksakan. Seandainya ekspresi tersebut dikalikan dengan faktor $\frac{1}{x^2}$, *apakah ekspresi persamaan tersebut tetap menjadi eksak?* Perhatikan kalkulasi di bawah ini.

$$\frac{1}{x^2}[(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0]$$

$$\left(\frac{2y}{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dy = 0$$

Diketahui $A(x,y) = \frac{2y}{x} + \frac{3}{x^2}$ dan $B(x,y) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Terapkan uji keeksakan berdasarkan teorema 1 pada persamaan yang sudah dikonversi.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{2}{x^3}$$

Berdasarkan pemeriksaan di atas, ternyata ketika ekpresi persamaan dikalikan dengan $\frac{1}{x^2}$ akan berubah menjadi tak eksak. Dari percobaan ini, muncul sebuah kasus seperti, apakah semua persamaan tidak eksak dapat dikonversi menjadi eksak? Bilamana bisa, bagaimana cara menentukan faktor yang tepat agar ekspresi persamaannya dapat dikonversi menjadi eksak?

Pada kasus permasalahan yang ditanyakan, jawabannya adalah bisa, yakni menggunakan faktor integrasi atau faktor pengali. Pada modul 1, Anda sudah mengidentifikasi faktor integrasi upaya menentukan solusi umum pada persamaan diferensial linear. Ketika faktor integrasinya sudah ditentukan, maka kalikan pada faktor tersebut ke ekspresi persamaan yang diketahui. Langkah tersebut dilakukan untuk memudahkan Anda dalam menentukan solusi umum pada persamaan yang ditanyakan. Perhatikan asal mula terbentuknya faktor integrasi untuk persamaan diferensial eksak.

Asumsikan ada ekspresi umum persamaan sebagai berikut :

$$G(x,y)dx + H(x,y)dy = 0$$

Kemudian, kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi $\mu(x)$ (Yang mana hanya tergantung dengan variabel x).

$$\mu(x).G(x,y)dx + \mu(x)H(x,y)dy = 0 \qquad (i)$$

Dengan menerapkan teorema 1, sebuah persamaan dapat dikatakan eksak bila dan hanya bila :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x).G(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)H(x,y)\right)$$

$$\mu(x).\frac{\partial G}{\partial y} = \mu(x).\frac{\partial H}{\partial x} + H(x,y).\mu'(x)$$

$$\mu(x).\frac{\partial G}{\partial y} - \mu(x).\frac{\partial H}{\partial x} = H(x,y).\mu'(x)$$

$$\mu(x)\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\right] = H(x,y).\mu'(x)$$

$$\frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = \frac{\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\right]}{B} = \frac{G_y - H_x}{B}$$

Integralkan kedua ruas terhadap x upaya memperoleh $\mu(x)$.

$$\int \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}dx = \int \frac{G_y - H_x}{B}dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int \frac{G_y - H_x}{B}dx$$

Terakhir, eksponensialkan kedua ruas upaya menyelesaikan $\mu(x)$.

$$e^{\ln|\mu(x)|} = e^{\int \frac{G_y - H_x}{B}dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{G_y - H_x}{B}}dx$$

Prosedur di atas adalah ide bagaimana cara menentukan faktor integrasi *μ(x)*, yang mana fungsi tersebut hanya bergantung pada variabel *x*. Di satu sisi, dalam menentukan faktor integrasi yang hanya bergantung pada variabel y berbeda dengan prosedur di atas. Perhatikan asal mula terbentuknya faktor integrasi *μ(y)* dengan mengubah variabel *y* pada persamaan *(i)*.

$$\mu(y).G(x,y)dx + \mu(y)H(x,y)dy = 0 \qquad (ii)$$

Dengan menerapkan teorema 1, sebuah persamaan dapat dikatakan eksak apabila dan hanya apabila :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y).G(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)H(x,y)\right)$$

$$\mu(y).\frac{\partial G}{\partial y} + \mu'(y)G = \mu(y).\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\mu'(y)G = \mu(y)\frac{\partial H}{\partial x} - \mu(y).\frac{\partial G}{\partial y}$$

$$\mu'(y)G = \mu(y)\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\mu(y)}{\mu'(y)} = \frac{\left[\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}\right]}{G} = \frac{H_x - G_y}{G}$$

Integralkan kedua ruas terhadap variabel y upaya memperoleh $\mu(y)$.

$$\ln|\mu(y)| = \int \frac{H_x - G_y}{G} dy$$

Terakhir, eksponensialkan kedua ruas upaya menyelesaikan $\mu(y)$.

$$\mu(y) = \int \frac{H_x - G_y}{A} dy$$

Teorema 2. Faktor Integrasi Spesial

Asumsikan ekspresi umum persamaan diferensial $G(x, y) + H(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$. Terdapat dua klasifikasi faktor integrasi yang dapat digunakan, yaitu :

1. Andai

$$\frac{[G_y(x, y) - H_x(x, y)]}{H(x, y)} = \mu(x)$$

Identik fungsi yang bergantung pada x, syarat cukup agar $e^{\int \mu(x)dx}$ termasuk faktor integrasi.

2. Andai

$$\frac{[H_x(x, y) - G_y(x, y)]}{G(x, y)} = \mu(y)$$

identik fungsi yang bergantung pada y, syarat cukup agar $e^{\int \mu(y)dy}$ termasuk faktor integrasi.

Tidak semua persamaan kategori non-eksak mampu dikonversi ke eksak, bahkan sangat banyak yang tidak bisa. Namun demikian, apabila menentukan faktor pengali atau integrase masih bisa. Alasan utamanya adalah terdapat banyak metode dan karakteristik berbeda setiap ekspresi persamaan diferensial. Untuk memaksimalkan pemahaman Anda mengenai materi yang sudah disampaikan melalui termaktub, maka cermati beberapa contoh soal berikut.

Contoh soal 1

Diberikan ekspresi persamaan berikut.

$$(-2y^3 + 1)dx + (3xy^2 + x^3)dy = 0$$

(a) Cobalah tentukan faktor integrasi yang bergantung pada fungsi *x* atau *y* saja!

(b) Setelah itu, tunjukkan bahwa persamaan tersebut identik eksak!

Pembahasan alternatif

Pertama (a), tentukan terlebih dahulu $A_y(x, y)$ dan $B_x(x, y)$ pada persamaan di atas. Diketahui $A = (-2y^3 + 1)$ dan $B = (3xy^2 + x^3)$ sehingga

$$A_y = \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3 + 1) = -6y^2$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 + x^3) = 3y^2 + 3x^2$$

$$\mu(x) = \frac{A_y - B_x}{B} = \frac{-9y^2 - 3x^2}{3xy^2 + x^3}$$

$$= \frac{-3(3y^2 + x^2)}{x(3y^2 + x^2)} = -\frac{3}{x}$$

$$e^{\int \mu(x)dx} = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$$

Terakhir pada (b), uji kepastian eksak :

$$x^{-3}[(-2y^3 + 1)dx + (3xy^2 + x^3)dy = 0]$$

$$\left(-\frac{2y^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)dx + \left(\frac{3y^2}{x^2} + 1\right)dy = 0$$

Uji kepastikan eksak

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2y^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right] = -\frac{6y^2}{x^3}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3y^2}{x^2} + 1\right] = -\frac{6y^2}{x^3} \quad \text{Eksak}$$

Jadi, faktor integrasi pada ekspresi persamaan contoh soal 1 adalah $\mu(x) = x^{-3}$.

■

Contoh soal 2

Diberikan ekspresi persamaan berikut.

$$(2x + \cos y) + (x^2 \tan y + \cos^2 y)\frac{dy}{dx} = 0$$

(a) Cobalah tentukan faktor integrasi yang bergantung pada fungsi x atau y!

(b) Setelah itu, tunjukkan bahwa persamaan tersebut identik eksak!

Pembahasan alternatif

Pertama (a), tentukan terlebih dahulu A_y dan B_x pada persamaan di atas. Diketahui $A(x, y) = 2x + \cos(y)$ dan $B(x, y) = x^2 \tan y + \cos^2 y$ sehingga

$$A_y = \frac{\partial}{\partial y}(2x + \cos(y)) = -\sin y$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \tan y + \cos^2 y) = 2x \tan y$$

$$\mu(y) = \frac{B_x - A_y}{A} = \frac{2x\tan y - (-\sin y)}{2x + \cos y}$$

$$= \frac{2x.\frac{\sin(y)}{\cancel{\cos(y)}} + \sin(y)}{2x + \cos(y)} \times \frac{\cancel{\cos(y)}}{\cos(y)}$$

$$= \frac{\sin(y)\cancel{[2x + \cos(y)]}}{\cos(y)\cancel{[2x + \cos(y)]}}$$

$$= \tan(\mathrm{y})\,, \text{sehingga}$$

$$e^{\int \mu(y)dy} = e^{\int \tan(y)\,dy} = e^{\ln|\sec(y)|} = \sec y$$

Terakhir pada (b), uji kepastian eksak :

$$\sec y\,[(2x + \cos(y))dx + (x^2\tan y + \cos^2 y) = 0]$$

$$(2x\sec y + 1)dx + (x^2\sec y\tan y + \cos y)dy = 0$$

Uji kepastikan eksak :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2x\sec y + 1\,] = 2x.\sec y\tan y$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2\sec(y)\ \tan(y) + \cos y] = 2x\sec y\tan y \quad \text{Eksak}$$

Jadi, faktor integrasi pada ekspresi persamaan contoh soal 2 adalah $v(x) = \sec y$.

■

Contoh soal 3

Diberikan ekspresi persamaan $2ydx + \left(x - \sin\sqrt{y}\right)dy = 0$. Tentukan dua bagian berikut :

(a) Faktor pengali atau integrasi yang bergantung pada fungsi *x* atau *y* sendiri!

(b) Perlihatkan persamaan tersebut identik eksak setelah dikalikan oleh faktor pengalinya!

Pembahasan alternatif

Untuk bagian (a), carilah A_y dan B_x menurut ekspresi persamaan di atas. Diketahui $A(x,y) = 2y$ dan $B(x,y) = -\sin\sqrt{y} + x$ sehingga

$$A_y = \frac{\partial}{\partial y}(2y\ ) = 2$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin\sqrt{y} + x\ \right) = 1$$

$$\frac{B_x - A_y}{A} = \frac{1-2}{2y} = \frac{-1}{2y}, \text{sehingga}$$

$$e^{\int \mu(y)dy} = e^{\int -\frac{1}{2y}dy} = e^{-\frac{1}{2}\ln|y|} = y^{-\frac{1}{2}}$$

Didapatkan $\mu(y) = y^{-\frac{1}{2}}$ sehingga kalikan faktor tersebut pada ekspresi persamaan yang ditanyakan.

$$y^{-\frac{1}{2}}\left[2ydx + \left(x - \sin\sqrt{y}\right)dy = 0\right]$$

$$\left[2y^{\frac{1}{2}}dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right) = 0\right]$$

Sehingg untuk bagian (b), yaitu memeriksa kepastikan eksak :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2y^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right] = \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ Eksak}$$

Jadi, faktor pengali atau integrase untuk ekspresi persamaan contoh soal 3 yaitu $v(y) = y^{-\frac{1}{2}}$.

Contoh soal 4

Diketahui persamaan $(3y^2 + 5x^2y)dx + (3xy + 2x^3)dy = 0$, tentukan faktor integrasi $x^p y^q$ yang tepat agar dapat dikonversi menjadi eksak!

Pembahasan alternatif

Konsep dasar faktor integrasi yaitu mengalikan ke ekspresi persamaan yang diketahui bilamana sudah ditentukan.

$x^p y^q[(3y^2 + 5x^2y)dx + (3xy + 2x^3)dy = 0]$

$(3x^p y^{q+2} + 5x^{p+2}y^{q+1})dx + (3x^{p+1}y^{q+1} + 2x^{p+3}y^q)dy = 0$ ...(i)

Kemudian, kalkulasikanlah A_y dan B_{x}.

$A_y = (q + 2)3x^p y^{q+1} + (q + 1)5x^{p+2}y^q$

$B_x = (p + 1)3x^p y^{q+1} + (p + 3)2x^{p+2}y^q$

Untuk memastikan persamaan (i), syarat perlunya adalah Anda memastikan bahwa $A_y = B_x$. Hal tersebut menunjukkan bahwa $3(q + 2) = 3(p + 1)$ dan $5(q + 1) = 2(p + 3)$.

$$\begin{cases} 3q + 6 = 3p + 3 \\ 5q + 5 = 2p + 6 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3q - 3p = -3 \ldots (1) \\ 5q - 2p = 1 \ldots (2) \end{cases}$ (*persamaan (1) dibagi dengan 3, kemudian dikalikan 2*)

$\begin{cases} 2q - 2p = -2 \ldots (1) \\ 5q - 2p = 1 \ldots (2) \end{cases}$ (*Sliminasi variabel y)*

$-3q = -3 \rightarrow q = 1$ *(Substitusi q = 1 ke persamaan (1))*

$2(1) - 2p = -2 \rightarrow p = 2$

Berdasarkan kalkulasi di atas, didapatkan p = 2 dan q = 1. Dengan demikian faktor integrasi yang tepat yaitu x^2y.

■

Contoh soal 5

Tentukan general solusi ekspresi persamaan berikut

$$(3x^2 + y)\, dx + (x^2y - x)\, dy = 0$$

dengan faktor integrasi $v(x) = x^{-2}$!

Pembahasan alternatif

Tahap pertama yaitu kita mengalikan $v(x) = x^{-2}$ terhadap ekspresi persamaan diatas sehingga membentuk persamaan baru.

$$\left(3 + \frac{y}{x^2}\right)\, dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)\, dy$$

Untuk memeriksa persamaan tersebut eksak atau tidak eksak, persamaaan diferensial diatas akan kita turunkan parsial sehingga

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \text{ dan } \frac{\partial B}{\partial x} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Diketahui $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ yang mengindikasikan bahwa persamaan tersebut eksak. Perhatikan $\frac{\partial F}{\partial y} = \left(y - \frac{1}{x}\right)$, selanjutnya akan diferensialkan parsial F terhadap y.

$$\int \frac{dF}{\cancel{dy}} \cancel{dy} = \int \left(y - \frac{1}{x}\right) dy$$

$$F = \frac{1}{2}y^2 - \frac{y}{x} + \varphi(x) \ldots (i)$$

Diferensiasikan parsial F terhadap x yang mengakibatkan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + \varphi(x)\right]$$

$$= \frac{y}{x^2} + \varphi'(x) \ldots (ii)$$

Diketahui bahwa hasil derivativ parsial (ii) ekuivalent dengan $A(x, y)$ sedemikian sehingga $3 + \frac{y}{x^2} \equiv \frac{y}{x^2} + \varphi'(x)$. Jadi, $\varphi'(x) = 3$.

$$\int \varphi'(x)\, dx = \int 3\, dx$$

$$\varphi(x) = 3x + C$$

Substitusi fungsi $\varphi(x)$ ke persamaaan *(i)*.

Jadi, solusi generalnya terhadap $F = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3x = 0$

■

Contoh soal 6

Carilah solusi dari persamaan $(3y^2 + 5x^2y)\, dx + (3xy + 2x^3)\, dy = 0$ dengan faktor integrasi $v = x^2y$!

Pembahasan alternatif

Untuk mengetahui persemaaan diatas eksak atau tidak, kita akan mengalikan persamaan nya terhadap faktor integrasi $v = x^2y$ sedemikian sehingga

$$(3x^2y^3 + 5x^4y^2)\, dx + (3x^3y^2 + 2x^5y)\, dy$$

Tes uji keeksakan :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 9x^2y^2 + 10x^4y$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 9x^2y^2 + 10x^4y$$

Diketahui $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ yang mengindikasikan bahwa persamaan tersebut eksak. Perhatikan $\frac{\partial F}{\partial x} = (3x^2y^3 + 5x^4y^2)$, berikutnya kita akan integralkan faktor F terhadap *x*.

$$\int \frac{dF}{dx} dx = \int (3x^2y^3 + 5x^4y^2) dx$$

$$F = y^3x^3 + y^2x^5 + \varphi(y) \ldots (i)$$

Kemudian, kita akan mencari nilai $\varphi(y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[y^3x^3 + y^2x^5 + \varphi(y)]$$

$$= 3x^3y^2 + 2x^5y + \varphi'(y)$$

$\frac{dF}{dy}\ (y^3x^3 + y^25^2) = \ 3y^2x^2 + 2yx^5 + \varphi'(x) \dots (ii)$

Diketahui bahwa hasil derivativ parsial (ii) ekuivalent dengan $B(x, y)$ sedemikian sehingga $3x^3y^2 + 2x^5y \equiv 3y^2x^2 + 2yx^5 + \varphi'(y)$. Jadi, $\varphi'(y) = 0$.

$$\int \varphi'(y)\, dx = \int 0\, dy$$

$$\varphi(y) = C$$

Substitusi fungsi $\varphi(y)$ ke persamaaan *(i)*.

Jadi. Solusi generalnya terhadap $F = y^3x^3 + y^2x^5 = C$.

■

Kegiatan Pembelajaran 4

5.4. Rangkuman

Secara sederhana, dapat diartikan persamaan yang memiliki ekspresi derivatif dengan minimal berderajat satu. Namun, bila ditinjau secara terminologi, yaitu bilamana dalam sembarang persamaan terdapat ekspresi derivative tingkat satu atau lebih, maka dapat dikatakan persamaan diferensial. Bilamana terdapat persamaan diferensial terkategori eksak, maka Anda dapat mengonversi ke non-eksak dengan membagi dengan suatu ekspresi tertentu. Begitupun sebaliknya. Fungsi untuk mengubah PDNE (Persamaan Diferensial Non-Eksak) ke bentuk persamaan eksak adalah faktor integrasi (Faktor pengkali/Gabung). Biasanya faktor integrasi didapatkan dari variabel yang bergantung sesuai metode yang berlaku.

Kegiatan Pembelajaran 5

5.5. Soal Diskusi Kelompok Mahasiswa

1. Cermati ekspresi persamaan di bawah ini!

$$y^2dx + (2xy + \cos(y))dy = 0$$

Apakah ekspresi di atas dapat Anda katakan eksak? Berikan dasar bukti Anda!

Pembahasan alternatif

Terapkan teorema 1 mengenai percobaan keeksakan suatu fungsi.

Misal $A(\dots,\dots) =$ .... dan $(\dots,\dots) =$ ...., maka proses menentukannya dengan cara :

$$\frac{\partial A}{\partial \dots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \dots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \dots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \dots}$.

2. Cobalah Anda identifikasi apakah ekspresi persamaan $[r^2 - \cos(\theta + r) + 2\theta]d\theta + [-e^r - \cos(\theta + r) + 2\theta r]dr = 0$ termasuk eksak? Berikan dasar bukti Anda!

Pembahasan alternatif

Terapkan teorema 1.

Misal $A(\dots,\dots) =$ .... dan $B(\dots,\dots) =$ ...., maka proses menentukannya dengan cara :

$$\frac{\partial A}{\partial \dots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \dots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \dots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \dots}$.

3. Cobalah Anda periksa apakah ekpresi persamaan di bawah ini eksak atau tidak.

$$\left(ye^{xy} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(xe^{xy} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

Berikan dasar bukti Anda!

Pembahasan alternatif

Terapkan teorema 1.

Asumsikan $A(\dots,\dots) =$ .... dan $B(\dots,\dots) =$ ...., maka

$$\frac{\partial A}{\partial \dots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \dots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \dots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \dots}$.

4. Cermatilah ekspresi persamaan sebagai berikut.

$$(xt^3s^3 - 2ts) + (3t^4s^2 - t^2)\frac{ds}{dt} = 0$$

Berapa nilai x yang mungkin terdefinisi agar persamaan di atas dapat dikategorikan eksak?

Pembahasan

Terapkan teorema 1, yang mana $A(\ldots,\ldots) =$ .... dan $B(\ldots,\ldots) =$ .... sehingga

$$\frac{\partial}{\partial \ldots} A = \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \ldots} B = \cdots$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan, maka

$$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \frac{\partial B}{\partial \ldots}$$

.... = ...

Sehingga nilai x yang terdefinisi supaya dapat menjadi syarat cukup adalah ....

Untuk soal diskusi nomor 5 sampai 9, Anda perlu menentukan apakah persamaan di bawah ini eksak? Bilamana iya, carilah solusi general yang terbentuk! (Saputro & Lumbantoruan, 2020).

5. $[\sin(xy) + xy\cos(xy)]dx + [1 + x^2\cos(xy)]dy = 0$

Pembahasan alternatif

Terapkan uji keesakan pada ekspresi persamaan nomor 6. Misal $A(\ldots,\ldots) =$ .... dan $B(\ldots,\ldots) =$ ...., maka

$$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \ldots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \ldots}$.

6. $\left(\frac{1}{y}\right) dt - \left(3y - \frac{t}{y^2}\right) dy = 0$

   Pembahasan altenatif

   Terapkan uji keesakan pada ekspresi persamaan nomor 7. Misal $A(\ldots, \ldots) =$ .... dan $B(\ldots, \ldots) =$ ...., maka

   $$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$$

   $$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$$

   Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \ldots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \ldots}$.

7. $(2\theta e^{2x})dx + (1 + e^{2x})d\theta = 0$

   Pembahasan alternatif

   Terapkan uji keesakan pada ekspresi persamaan nomor 7. Misal $A(\ldots, \ldots) =$ .... dan $B(\ldots, \ldots) =$ ...., maka

   $$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$$

   $$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$$

   Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \ldots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \ldots}$.

Integralkan ekspresi persamaan nomor 8.

$$\int (2\theta e^{2x})dx + \int (1 + e^{2x})d\theta = \int 0$$

$$\text{.........} + \text{.........} + \text{.........} = \text{.........}$$

$$\text{.........} + \text{.........} = \text{.........}$$

$$\text{.........}\ (\text{.........} + \text{.........}) = \text{.........}$$

$$\theta = \frac{\text{.........}}{\text{.........}}$$

8. $(e^r \sin\theta - 3r^2)dr + \left(e^r \cos\theta + \frac{\theta^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)d\theta = 0$

Pembahasan alternatif

Terapkan uji keesakan pada ekspresi persamaan nomor 9. Misal $A(\dots,\dots) =$ .... dan $B(\dots,\dots) =$ ...., maka

$$\frac{\partial A}{\partial \dots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \dots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \dots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \dots}$.

Integralkan ekspresi persamaan nomor 9.

$$\int (e^r \sin\theta - 3r^2)dr + \int \left(e^r \cos\theta + \frac{\theta^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)d\theta = \int 0$$

$$\text{.........} - \text{.........} + \text{.........} + \text{.........} = C$$

$$\text{.........} - \text{.........} + \text{.........} = C$$

9. $e^{3t}\sin 3\theta + e^{3t}\cos 3\theta\ \frac{d\theta}{dt} = 0$

Pembahasan alternatif

Terapkan uji keesakan pada ekspresi persamaan nomor 9. Misal $A(\ldots,\ldots) =$ .... dan $B(\ldots,\ldots) =$ ...., maka

$$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \ldots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \ldots}$.

Integralkan ekspresi persamaan nomor 9.

$$\int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, dr + \int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, d\theta = \int \ldots\ldots$$

.... + ... = ...

.... = ...

Untuk soal diskusi nomor 10 sampai 13, Anda perlu mencari solusi khusus sesuai dengan kondisi awal (*initial condition*) yang ditetapkan!

10. $[2\cos(2x+y) - x^2]dx + [\cos(2x+y) - e^y]dy = 0$ yang terdefinisi pada$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Pembahasan alternatif

Terapkan uji keesakan untuk meyakinkan pengerjaan nomor 10 dengan metode eksak. Misal $A(\ldots,\ldots) =$ .... dan $B(\ldots,\ldots) =$ ...., maka

$$\frac{\partial}{\partial \ldots} A = \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \ldots} B = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disampulkan adalah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \ldots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \ldots}$.

Oleh karena itu, kita dapat menggunakan solusi persamaannnya, yaitu

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\cos(2x + y) - x^2$$

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial x}} \cancel{dx} = \int \ldots dx$$

$$F = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \phi(y) \qquad \ldots.\ (i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\ \ldots\ldots - \ldots\ldots + \phi(y)]$$

$$= \ldots\ldots - \phi'(y)$$

Ekspresi $[\cos(2x + y) - e^y] \equiv$ ..... $- \ \phi'(y)$ sedemikian sehingga nilai $\phi'(y) =$ .....

$$\int \phi'\,(y)dy = \int \ldots dy$$

$$= \ldots\ldots + C$$

Substitusi nilai $\phi(y)$ ke persamaan (i).

$$\ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots.$$

Diketahui nilai kondisi awal $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, yang artinya $x =$ ...... dan $y =$ ......

$\sin(\,2(.....) + ...\,) - \frac{1}{3}(.....)^{\cdots} - e^{\cdots} = C$

$$...... - ...... - ..... = C \rightarrow C = ...$$

Setelah mendapat nilai $C =$ ..... , langkah terakhir yang perlu Anda lakukan yaitu mensubstitusikan ke solusi khususnya.

$$...... - ...... - .... = ...$$

11. $(e^t x + 1)dt + (e^t - 1)dx = 0$ yang terdefinisi pada $x(1) = 1$.

    Pembahasan alternatif

    Terapkan uji keesakan untuk meyakinkan pengerjaan nomor 11. Misal $A(\dots, \dots) =$ .... dan $B(\dots, \dots) =$ ...., maka

    $$\frac{\partial A}{\partial \dots} = \cdots$$

    $$\frac{\partial B}{\partial \dots} = \cdots$$

    Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disimpulkan ialah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \dots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \dots}$.

    Oleh karena itu, kita dapat menggunakan solusi persamaan dengan memperhatikan $\frac{\partial F}{\partial t}$.

    $$\frac{\partial F}{\partial \dots} = \cdots$$

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial t}} \cancel{dt} = \int \dots dt$$

$$F = \dots\dots + \dots\dots + \phi(x) \qquad \text{(i)}$$

Dari hasil persamaan (i), derivatif parisalkan terhadap x.

$$\frac{\partial F}{\partial \dots} = \frac{\partial}{\partial \dots}[\ \dots\dots + \dots\dots + \phi'(\dots)]$$

$$= \dots\dots + \phi'(\dots)$$

Ekspresi $[e^t - 1] \equiv \dots\dots + \phi'(\dots)$ sedemikian sehingga nilai $\phi'(\dots) = \dots\dots$

$$\int \phi'(x) dx = \int \dots dx$$

$$= \dots\dots + C$$

Substitusi nilai $\phi(\dots)$ ke persamaan (i) yang mengakibatkan

$\dots\dots + \dots\dots - \dots\dots = C$

Diketahui nilai kondisi awal $x(1) = 1$, yang artinya $x = \dots\dots$ dan $y = \dots\dots$

$e^{\cdots}(\dots) + \dots\dots - \dots\dots = C$

$\dots\dots - \dots\dots - \dots\dots = C \to C = \dots\dots$

Setelah mendapat nilai $C = \dots\dots$, langkah terakhir yang perlu Anda lakukan yaitu mensubstitusikan ke solusi khususnya.

$$\dots\dots - \dots\dots - \dots\dots = \dots\dots$$

$$x = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots}$$

12. Ekspresi persamaan $\frac{y}{x-1}dx + [\ln(x-1) + 2y]dy = 0$ terdefinisi pada $y(2) = 4$ (J. H. Lumbantoruan, 2019a).

Pembahasan alternatif

Terapkan uji keesakan untuk meyakinkan pengerjaan nomor 12. Misal $A(\dots,\dots) =$ .... dan $B(\dots,\dots) =$ ...., maka

$$\frac{\partial A}{\partial \dots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \dots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disimpulkan ialah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \dots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \dots}$.

Oleh karena itu, kita dapat menggunakan solusi persamaan dengan memperhatikan $\frac{\partial}{\partial x}[F]$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cdots$$

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial x}} \cancel{dx} = \int \dots dt$$

$$F = \dots.. + \phi(y) \quad \text{(i)}$$

Dari hasil persamaan (i), derivatif parisalkan terhadap y.

$$\frac{\partial F}{\partial \dots} = \frac{\partial}{\partial \dots}[\ \dots.. + \phi'(\dots)]$$

$$= \dots.. + \phi'(\dots)$$

Ekspresi $[\ln(x-1)+2y] \equiv$ ..... $+$ $\phi'(\ldots)$ sedemikian sehingga nilai $\phi'(y)$ = ...

$$\int [\phi'\,(y)]dy = \int \ldots dy$$

$$= \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

Substitusi nilai $\phi'(y)$ ke persamaan *(i)* yang mengakibatkan

$$\ldots\ldots - \ldots\ldots = C$$

Diketahui nilai kondisi awal $y(0) = 1$, yang artinya $x =$ ..... dan $y =$ .....

.....ln$|\ldots - \ldots|$ + ... $= C$

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = C \rightarrow C = \ldots\ldots$$

Setelah mendapat nilai $C =$ ..... , langkah terakhir yang perlu Anda lakukan, yaitu mensubstitusikan ke solusi khususnya.

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

13. Ekspresi persamaan $[2r\sec(y)+1]dr + [r^2 \sec y \tan y + \cos y]dy = 0$ terdefinisi pada $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Pembahasan alternatif

Terapkan uji keesakan pada soal nomor 13. Misal $A(\ldots,\ldots) =$ .... dan $B(\ldots,\ldots) =$ ...., maka

$$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$$

$$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$$

Dari pemeriksaan di atas, hal yang dapat disimpulkan ialah .... karena $\frac{\partial A}{\partial \ldots}$ ... $\frac{\partial B}{\partial \ldots}$

Pilih $\frac{\partial F}{\partial r}$, yang kemudian integrasikan terhadap variabel r.

$$\frac{\partial F}{\partial \ldots} = \cdots$$

$$\int \frac{\partial F}{\cancel{\partial r}} \cancel{dr} = \int \ldots dr$$

$$F = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \phi(y) \quad \ldots\ldots (i)$$

Dari hasil persamaan (i), derivatif parisalkan terhadap y.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \ldots}[\ \ldots\ldots + \ldots\ldots + \phi(y)]$$

$$= \ldots\ldots + \phi'(y)$$

Ekspresi $[r^2 \sec(y) \tan(y) + \cos(y)] \equiv \ldots\ldots + \phi'(y)$ sedemikian sehingga nilai $\phi'(y)$ = ...

$$\int \phi'(y) dy = \int \ldots dy$$

$$= \ldots\ldots$$

Substitusi nilai $\phi(y)$ *ke* persamaan (i) yang mengakibatkan

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Diketahui nilai kondisi awal $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, yang artinya $r =$ ..... dan $y =$ .....

$$(\ldots)^{\cdots} \sec(\ldots) + \ldots + \sin(\ldots) = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots \rightarrow C = \ldots\ldots$$

Setelah menemukan nilai $C =$ ..... , langkah terakhir yang perlu Anda lakukan, yaitu mensubstitusikan ke solusi khususnya.

...... + ... + ... = ...

Untuk soal diskusi nomor 14 sampai 19, Anda perlu Cobalah tentukan faktor integrasi yang bergantung pada fungsi x atau y! Setelah itu, tentukan solusi umumnya!

14. Tentukan faktor integrasi kemudian carilah solusi umumnya pada persamaan di bawah ini!

$$3x^2y^2dx + (4x^3y - 12)dy = 0$$

Pembahasan alternatif

Diket $A = 3x^2y^2$ dan $B = 4x^3y - 12$

$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$

$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$

Karena $\frac{\partial A}{\partial y}$ .... $\frac{\partial B}{\partial x}$, maka ekspresi persamaan diferensial dikatakan ......

$\frac{\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}}{-A} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$

Faktor integrasi = $e^{\int \cdots} = e^{\cdots} =$ .....

Faktor integrasi $f(x)$

... $[3x^2y^2\ dx + (4x^3y - 12)\ dy] = 0$

(.........................) $dx +$ (.......................) $dy = 0$

$\frac{\partial A}{\partial} = \cdots$

$\frac{\partial B}{\partial} = \cdots$

Karena $\frac{\partial A}{\partial y}$ .... $\frac{\partial B}{\partial x}$, maka ekspresi persamaan diferensial dikatakan ......

Setelah itu, Anda perlu menentukan solusi generalnya.

$$\int \frac{dF}{\partial x}\, dx = \int 3x^2y^2\, dx$$

$$= \int \ldots dx$$

$$F = \ldots\ldots\ldots + g(y)$$

Menentuka $g(y)$ dengan mendiferensialkan parsial F terhadap y

$$\frac{dF}{dx} = (\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots + g'(y)$$

$$= \cdots = \cdots$$

$$g(y) = \ldots.$$

Jadi, solusi generalnya yaitu ....

15. Tentukan faktor integrasi dan carilah solusi generalnya dari persamaan $(2y - x^3)\, dx + x\, dy = 0$!

    Pembahasan alternatif

    Diketahui $H = 2y - x^3$ dan $G = x$

$$\frac{\partial H}{\partial \ldots} = \cdots$$

$$\frac{\partial H}{\partial \ldots} = \cdots$$

Karena $\frac{\partial H}{\partial y}$ .... $\frac{\partial G}{\partial x}$, maka ekspresi persamaan diferensial dikatakan ......

$$\frac{\frac{\partial \ldots}{\partial ,,,} - \frac{\partial \ldots}{\partial ,,,}}{G} = \frac{\cdots - \cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

$$\ldots\ldots\ldots[(\ldots\ldots\ldots)d \ldots + \ldots\ldots\ldots d \ldots] = 0$$

$$(\ldots\ldots.. - \ldots\ldots..) + \ldots\ldots.. = 0$$

$\frac{\partial H}{\partial \dots} = \dots\dots..$

$\frac{\partial G}{\partial \dots} = \dots\dots..$

Karena $\frac{\partial H}{\partial y}$ ... $\frac{\partial G}{\partial x}$ maka ekspresi persamaan diferensial dikatakan ....

$$\int \frac{dF}{\cancel{\partial y}} \cancel{dy} = \int \dots\dots\dots\, dy$$

$$\int dF = \int (\dots\dots\dots) dy$$

$$F = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \phi(x)$$

Mencari $\phi(x)$ dengan mendiferensialkan parsial F terhadap x

$$\frac{dF}{dy}\ (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots + \phi'(x)$$

$$= \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \phi'(x)$$

$$\phi'(x) = \dots\dots..$$

Jadi, solusi general terhadap $F = \cdots \dots\dots - \cdots \dots\dots = \dots\dots..$

16. $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0$

Pembahasan alternatif

Diketahui $H = 4xy + 3y^2 - x$ dan $G = x(x + 2y)$

$\frac{\partial H}{\partial \dots} = \cdots$

$\frac{\partial G}{\partial \dots} = \cdots$

Karena $\frac{\partial H}{\partial y}$ .... $\frac{\partial G}{\partial x}$ maka ekspresi persamaan diferensial dikatakan........

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

Sehingga fungsi integrasi adalah $\int \dots\dots\dots dx = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Selanjutnya, diperoleh persamaan eksak berikut :

$x^2(\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)\,dx + x^3(\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)\,dy = 0$

Karena persamaan diferensial tersebut sudah terkategori eksak, maka dapat digunakan penyelesaian persamaan eksak.

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2\,(\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots$

$F = \int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi(y)$

$\quad = \ldots\ldots\ldots + \varphi(y)$

$\frac{\partial \ldots}{\partial \ldots} = \cdots$ hingga

$x^4 + \cdots + \varphi'(y) = x^3(\cdots + \cdots)$

$x^4 + \cdots + \varphi(y) = x^4 + \cdots$

$\varphi'(y) = \ldots\ldots\ldots \rightarrow \varphi(y) = \ldots\ldots$

Jadi, solusi generalnya adalah ....

17. $\frac{y}{x}(x + y + 1)dx + (x + 3y + 2)dy = 0$

Pembahasan alternatif

Diketahui $G = xy + y^2 + y$ dan $H = x^2 + 3xy + 2x$

$\frac{\partial G}{\partial \ldots} = \cdots$

$\frac{\partial H}{\partial \ldots} = \cdots$

Berdasarkan derivatif parsial di atas dapat diindikasikan :

$$\frac{\partial G}{\partial y} \ldots\ldots \frac{\partial H}{\partial x}$$

$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

Jadi, solusi generalnya adalah $\int \ldots\ldots\ldots\, dy = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Selanjutnya, diperoleh persamaan eksak berikut :

$y^2(\ldots\ldots+\ldots\ldots+\ldots\ldots)dx + xy(\ldots\ldots+\ldots\ldots+\ldots\ldots)dy =$
0

Karena persamaan diferensial tersebut sudah terkategori eksak, maka dapat digunakan penyelesaian persamaan eksak.

$\frac{\partial F}{\partial y} = y^2(\ldots\ldots+\ldots\ldots+\ldots\ldots)$

$=\ldots\ldots+\ldots\ldots+\ldots\ldots$

$F(x,y) = \int (xy^2 + y^3 + y^2)dx$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \phi'(y)$ hingga;

$x^2y + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \phi'(y) = xy(\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$x^2y + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \phi'(y) = x^2y(\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$\phi'(\ldots) = \ldots. \rightarrow \ldots\ldots = C$

Jadi, solusi generalnya adalah $\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + C$.

18. $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$

Pembahasan alternatif

Diketahui : $G = 2x^3y^2 - y$ dan $H = 2x^2y^3 - x$

$\frac{\partial \ldots}{\partial \ldots} = \cdots$

$\frac{\partial \ldots}{\partial \ldots} = \cdots$

Berdasarkan derivatif parsial di atas dapat diindikasikan :

$$\frac{\partial G}{\partial y} \ldots\ldots \frac{\partial H}{\partial x}$$

$\frac{\partial G}{\partial \ldots} - \frac{\partial H}{\partial \ldots} = \cdots - \cdots$

$$= 4xy(\cdots - \cdots)$$

Jika $v = xy \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = y$ dan $\frac{\partial v}{\partial y} = x$

$$G\frac{\partial v}{\partial y} = x(\cdots)$$

$$H\frac{\partial v}{\partial x} = y(\ldots)$$

Hingga, $G\frac{\partial v}{\partial y} - H\frac{\partial v}{\partial x} = (\cdots - \cdots) - (\cdots - \cdots) = 2x^2y^2(\cdots - \cdots)$

$$\frac{du}{u} = \frac{-\left(\frac{\partial \ldots}{\partial \ldots} - \frac{\partial \ldots}{\partial \ldots}\right)dv}{G\frac{\partial v}{\partial y} - H\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$= -\frac{\ldots.}{\ldots.}$$

$$= -\frac{\ldots.}{\ldots.}dv$$

Maka fungsi integral adalah $u(x,y) = e^{\int \ldots . dxy = \cdots = \frac{\cdots}{\cdots}}$

Ekspresi persamaan nomor 18 kalikan dengan faktor integrasinya.

$$\ldots.(\ldots.-\ldots.)dx + \ldots.(\ldots.-\ldots.)dy = 0$$

Karena persamaan diferensial diatas sudah berbentuk persamaan eksak, sehingga untuk mencari solusinya menggunakan persamaan eksak (J. Lumbantoruan, 2020).

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ldots.(\ldots.-\ldots.) = \ldots. - \frac{\ldots.}{\ldots.}$$

$$F = \int \left(2x - \frac{1}{x^2y}\right)dx + g(y) = \cdots + \frac{\cdots}{\cdots} + g(y)$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\cdots}{\cdots} + f'(y)$ sehingga;

$-\frac{1}{xy^2} + f'(y) = \frac{\cdots}{\cdots}(\cdots - \cdots)$

$-\frac{1}{xy^2} + f'(y) = \cdots - \frac{\cdots}{\cdots}$

$f'(y) = \ldots . \rightarrow f(y) = \ldots .$

Jadi, solusi generalnya adalah $\ldots . + \frac{\cdots .}{\cdots .} + \ldots . = \ldots ..$

19. Tentukan penyelesaian dari ekspresi persamaan dibawah ini.

$$(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0$$

Pembahasan alternatif

Diketahui $A = (1 - xy)$ dan $B = (xy - x^2)$

$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$

$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$

Berdasarkan derivatif parsial di atas dapat diindikasikan :

$$\frac{\partial A}{\partial y} \ldots\ldots \frac{\partial B}{\partial x}$$

Substitusikan ke rumus faktor integrasi fungsi x saja.

$$\mu(x) = \frac{\cdots}{B(x,y)}$$

$$= \frac{\cdots}{\cdots}$$

$$= \frac{\cdots}{\cdots}$$

$$= \frac{\ldots(\ldots)}{\ldots(\ldots)}$$

$\mu(x) = -\frac{\dots}{\dots}$

Sehingga fungsi integrasi adalah $\int \mu(x)dy = \dots = \dots = \dots$

Selesaikan dengan persamaan diferensial eksaknya.

$\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + (y - x)dy = 0.$

$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \dots$ dan $= \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \dots$

Karena persamaan diferensial tersebut sudah berbentu persamaan eksak, maka dapat digunakan penyelesaian persamaan eksak.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int (\dots - \dots)dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\dots}{\dots} - \dots + C$$

$$F_x(x, y) = -y + C(x)$$

$$\left(\frac{\dots}{\dots} - \dots\right) = \dots + C(x)$$

$$\int \frac{\dots}{\dots} = \int C(x) \rightarrow C =$$

$$\dots\dots - \dots\dots + \dots\dots$$

Jadi, solusi generalnya adalah : $\frac{\dots}{\dots} - \dots + \dots = \dots$

20. Tentukan apakah persamaan dibawah ini eksak atau non-eksak.

$$xy' + y + 4 = 0$$

Pembahasan alternatif

$x \dots = - \dots$

$x \dots = - \dots$

$x \ldots + (\ldots) \ldots = 0 \ \rightarrow \cdots dx + \cdots \ dy = 0$

Sehingga, $A = \cdots$ dan $B = \cdots$

$\frac{\partial A}{\partial \ldots} = \cdots$

$\frac{\partial B}{\partial \ldots} = \cdots$

Berdasarkan derivatif parsial di atas dapat diindikasikan :

$$\frac{\partial A}{\partial y} \ldots\ldots \frac{\partial B}{\partial x}$$

Jadi, ekspresi persamaan nomor 2 dikatakan ....

Kegiatan Pembelajaran 6

5.6. Soal Latihan Mandiri Mahasiswa

Untuk soal nomor 1 sampai dengan 7, tentukanlah apakah persamaan diferensial tersebut eksak atau tidak. Bilamana Eksak, Anda perlu menentukan solusi umumnya (Larson & Edwards, 2014).

1. $(10xy^2 + 3y^2)dx + (-2 + 10x^2y + 6xy)dy = 0$
2. $2y^2e^{ty^2}dt + 2tye^{ty^2}dy = 0$
3. $2\cos(2\theta - x) - \cos(2\theta - x)\,\frac{dx}{d\theta} = 0$
4. $(e^x \sin y - 3x^2)dx + \left(e^x \cos y + \frac{y^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)dy = 0$
5. $\left(2x + \frac{y}{1+x^2y^2}\right) + \left(-2y + \frac{x}{1+x^2y^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$
6. $e^{3x}(\sin 3y + \cos 3y)y' = 0$
7. $\sin x + x\cos y + x + [\sin x + x\cos y + x]y' = 0$

Untuk soal nomor 8 sampai dengan 12, tunjukkanlah bahwa persamaan diferensial berikut eksak dan carilah solusi khusus jika kondisi awalnya diketahui (Nagle et al., 2017).

8. $(2xy - 9x^2)dx + (2y + x^2 + 1)dy = 0$, untuk $x = 0$ dan $y = -3$.
9. $(2xy^2 + 4)dx + (2x^2y - 6)dy = 0$, untuk $x = -1$ dan $y = 8$.
10. $(y^2 \sin\theta)d\theta + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)dy = 0$, untuk $\theta = \pi$ dan $y = 1$.

11. $(\tan y - 2)dt + \left(t\sec^2 y + \frac{1}{y}\right)dy = 0$, dengan kondisi $t = 1$ dan $y = \frac{\pi}{3}$.
12. $\left(\frac{3y^2 - t^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{2y^4}$, untuk $y = 1$ dan $x = 1$.
13. $\frac{x}{y}y' = -(x^3 + \ln y)$, dengan kondisi $y = 1$ dan $x = 1$.

Untuk soal nomor 14 sampai dengan 15, carilah nilai p yang memenuhi supaya persamaan diferensial berikut dapat dikatakan eksak.

14. $px\sin y + (2x^2\cos y)y' = 0$
15. $(ye^{2xy} + 2x)dx + (pxe^{2xy} - 2y)dy = 0$

Pada soal nomor 16 dan 17, tentukanlah solusi umum fungsi $B(x, y)$ upaya persamaan di bawah ini dapat dikatakan eksak.

16. $y\cos(xy) + e^x + B(x, y)y' = 0$
17. $[ye^{xy} - 4x^3y + 2]dx + B(x, y)dy = 0$

Pada soal nomor 18 sampai dengan 23, carilah faktor integrasi upaya memperoleh persamaan diferensial eksak. Setelah itu, tentukan solusi umumnya (R. Bronson & Costa, 2014).

18. $(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$
19. $(2y^2 + 2y + 4x^2)dx + (2xy + x)dy = 0$
20. $(2xy^3 + 1)dx + (3x^2y^2 - y^{-1})dy = 0$
21. $2r\,dt + \left(t - \sin\sqrt{r}\right)dr = 0$
22. $\left(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}}\right)dx + x^2ydy = 0$
23. $(-\log y + x)y' = -y(\log y)$

24. Diketahui persamaan diferensial yang non-eskak berikut.

$$(y^2 + 2x^2y)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$$

Tentukanlah faktor integral $x^p y^q$ dan carilah solusi umumnya.

25. Analisislah bagian-bagian berikut.

(i) Tunjukkanlah $\frac{B_x - A_y}{xA - yB}$ hanya tergantung pada pengali xy, yang mana

$$\frac{B_x - A_y}{xA - yB} = H(xy).$$

Setelah itu, berikan formula faktor integrasi $h(x, y)$ pada bentuk general persamaan diferensial.

(ii) Terapkanlah jawaban Anda bagian *(i)* untuk memperoleh solusi khusus persamaan $(3y + 2xy^2)dx + (x + 2x^2y)dy = 0$ yang mempunyai kondisi awal $y = 1$ dan $x = 1$.

INDEKS

GLORASIUM

Derivatif Parsial : Sebuah fungsi matematika peubah banyak adalah turunannya terhadap salah satu peubah dengan peubah lainnya dipertahankan.

Eksak : Memiliki arti pasti atau sudah tentu dan tidadapat diubah ubah.

Ekuivalen : Nilai (ukuran, arti atau efek) yang sama, seharga, sebanding, sepadan. (Kamus KBBI).

Integral : Merupakan bentuk penjumlahan kontinu yang terdiri dari anti turunan atau kebalikan dari turunan.

Implisit : Sebuah persamaan yang mana variabel terikat dan variabel bebasnya tidak dapat dipisahkan.

Konstanta : Suatu nilai tetap, berlawanan dengan variabel yang berubah-ubah.

Non-Eksak : Merupakan ilmu tidak pasti dan bisa saja berubah jawaban seiring dengan waktu.

Persamaan Diferensial: Persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

Substitusi: Sesuatu yang mudah diganti dengan sesuatu yang lain.

Variabel : Nilai yang dapat berubah dalam suatu cakupan soal atau himpunan operasi yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

Desi, D., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Buku Cerita Matematika Pada Kelas VII SMP Dalam Materi Perbandingan. *EduMatSains : Jurnal Pendidikan, Matematika, Dan Sains*, *1*(1), 23–34.

Holzner, S. (2008). *Differential Equations For Dummies*. Wiley.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2014). *Multivariable Calculus* (10th ed.). Cengage Learning.

Lumbantoruan, J. (2018). *Modul Geometri II (Geometri Analitik dan Transformasi)*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1634/1/Modul Geometri II%28Geometri Analitik dan Transformasi%29.docx.pdf

Lumbantoruan, J. (2019). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN GEOMETRI 1*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1655/1/BMP Geometri 1.pdf

Lumbantoruan, J. (2020). *BUKU MATERI PEMBELAJARAN PEMOGRAMAN LINEAR*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia. http://repository.uki.ac.id/1813/1/BUKU MATERI PEMBELAJARAN.pdf

Lumbantoruan, J. H. (2015). *Modul Kalkulus Lanjut 2015*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2016a). *Modul Kalkukus Lanjut 2016*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2016b). *Modul Kalkulus Dasar (Modul 4)*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2017). Pengembangan bahan ajar integral tak tentu berbasis model small group discussion di program studi pendidikan matematika FKIP UKI tahun 2016/2017. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, *10*(2), 99–118.

Lumbantoruan, J. H. (2019a). *Buku Integral Tentu* (1st ed.). Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2019b). *Buku Materi Pembelajaran Matematika Dasar*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2019c). Buku Materi Pembelajaran Persamaan Diferensial. In *Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia*. Prodi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia.

Lumbantoruan, J. H. (2019d). Pengembangan Bahan Ajar Persamaan Diferensial Berbasis Model Brown Di Program

Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan IlmuPendidikan Universitas Kristen Indonesia Tahun 2017 / 2018. *Jurnal EduMatsains*, *3*(2), 147–168.

Lumbantoruan, J. H. (2019e). *RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS) Mata Kuliah: Persamaan Diferensial*. 11–18.

Lumbantoruan, J. H., & Male, H. (2020). Analisis Miskonsepsi Pada Soal Cerita Teori Peluang Di Program Studi Pendidikan Matematika. *EduMatSains : Jurnal Pendidikan, Matematika, Dan Sains*, *4*(2), 153–168.

Lumbantoruan, J. H., & Natalia, S. (2021). Development of a Constructivism-Based Statistics Module for Class VIII Junior High School Students. *Solid State Technology*, *64*(2), 4427–4444.

Male, H., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Students' Perceptions and Attitudes Towards Statistics. *Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020)*, *560*, 507–513. https://doi.org/10.2991/assehr.k.210615.095

Manalu, R. U. (2019). *Probalitas* (J. H. Lumbantoruan (ed.)). UKI Press.

Nagle, K., Saff, E., & Snider, A. (2017). Fundamentals of Differential Equations. In *Pearson Education* (9th ed.).

https://doi.org/https://www.google.co.id/books/edition/Fundamentals_of_Differential_Equations/YPz0DQAAQBAJ?hl=id

R. Bronson, & Costa, G. (2014). Schaum's Outlines Differential Equations, 4th Edition. In *McGraw-Hill Education* (4th ed.).

Saputro, P. ., & Lumbantoruan, J. H. (2020). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Articulate Storyline Pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar Kelas VIII. *EduMatSains: Jurnal Pendidikan, Matematika Dan Sains*, *1*(1), 35–49. http://repository.uki.ac.id/3480/