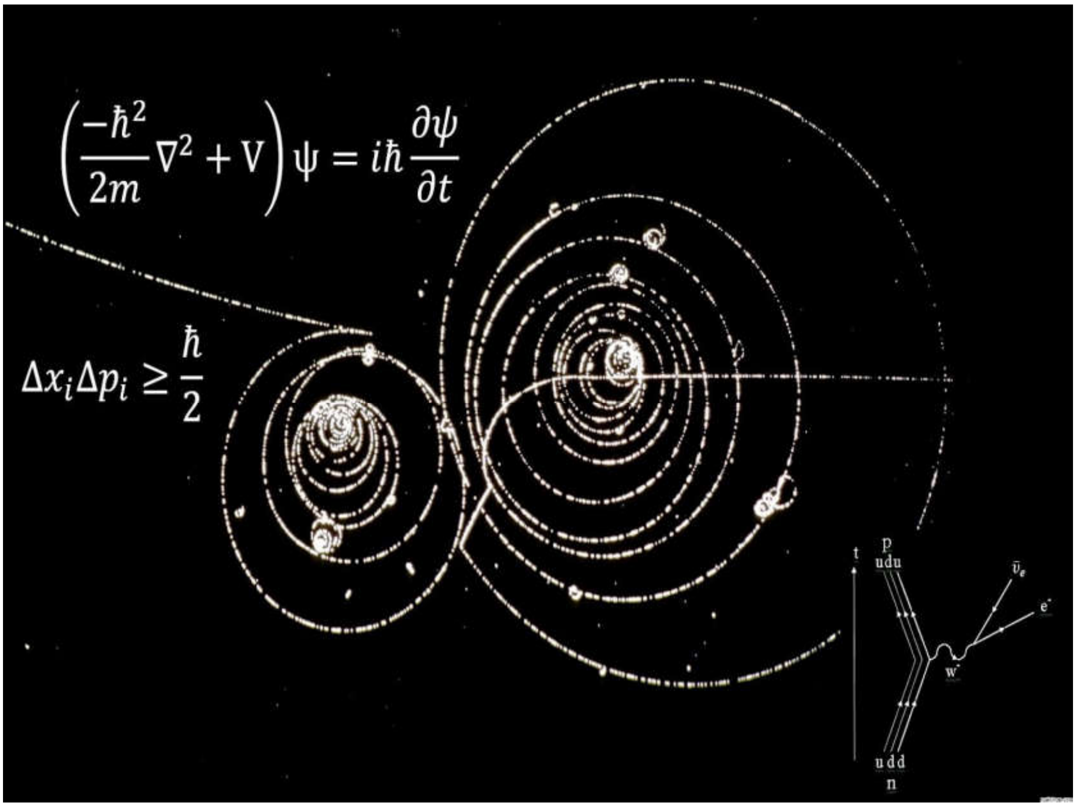
Buku Pegangan hanya untuk Kalangan Internal

Modul

Pengantar Fisika Kuantum



Penulis :

Nya Daniaty Malau, M.Si

Program Studi Pendidikan Fisika

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Kristen Indonesia

2018

KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur kehadirat Tuhan Yang Esa yang telah memberikan rahmat dan kasih-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan Modul Pengantar Fisika Kuantum. Ucapan terimakasih juga diberikan kepada Rektor Universitas Kristen Indoesia, Dekan dan Ketua program studi Pendidikan Fisika FKIP UKI. Serta berbagai pihak yang terlibat dalam penulisan dan penyusunan modul ini.

Modul Pengantar Fisika Kuantum ini merupakan buku pegangan wajib mahasiswa untuk matakuliah Fisika Modern Lanjutan Kurikulum Kerangka Kualifikasi Nasional Indonesia (KKNI) di program studi pendidikan Fisika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia (FKIP-UKI).

Modul Pengantar Fisika Kuantum ini berisi penjelasan mengenai materi-materi dalam mata kuliah Fisika Modern Lanjutan mulai dari pendalaman matematika, lahirnya teori kuantum, efek fotolistrik dan relativitas, momentum gelombang dan persamaan schrodinger. Selain itu, modul ini juga berisi tentang aplikasi Fisika Modern Lanjutan di dalam kehidupan sehari-hari, sehingga mempermudah mahasiswa memahami materi dan pengaplikasian ilmunya. Modul ini juga disertai dengan contoh soal dan evaluasi formatif yang dapat membantu mahasiswa untuk lebih memahami perumusan dan materi dari Fisika Kuantum

Tak ada gading yang tak retak, kami pun menyadari banyaknya kekurangan dari Modul Pengantar Fisika Kuantum ini maka kami mengharapkan masukan dan kritikan yang dapat membangun dan memperbaiki isi dari Modul Pengantar Fisika Kuantum ini.

Jakarta, 01 Desember 2018

Penyusun

DAFTAR ISI

PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Pendahuluan

Pada bagian pendahuluan berisikan pengantar dari materi yang akan dibahas dalam modul biasanya banyak dihubungkan dengan kehidupan sehari-hari.

Kegiatan Pembelajaran

Pada bagian ini berisikan tujuan mempelajari modul atau kemampuan yang diharapkan setelah menggunakan modul.

Uraian Materi

Pada bagian uraian materi, kita akan menemukan beberapa bagian yakni :

1. Konsep Materi

   Pada konsep materi akan dipaparkan materi yang harus dipahami yang dilengkapi dengan contoh soal.
2. Penugasan Kelas

   Pada bagian ini, mahasiswa diminta untuk berdiskusi dengan kelompok masing-masing tentang permasalahan yang ditemukan setelah mempelajari konsep materi, kemudian memaparkannya dalam bentuk presentasi.
3. Rangkuman

   Bagian ini berisi intisari dari keseluruhan konsep materi, sehingga mempermudah mahasiswa dalam memahami materi dalam satu kegiatan pembelajaran
4. Evaluasi Formatif

   Pada bagian ini berisikan tentang evaluasi yang digunakan untuk mengukur sejauh mana pemahaman mahasiswa secara personal terhadap materi yang diberikan
5. Lembar Kerja Praktek

   Bagian ini merupakan tempat mahasiswa mengerjakan evaluasi formatif yang diberikan.

Rangkuman Modul

Bagian ini berisi intisari dari keseluruhan konsep materi,dalam satu modul yang mana biasanya terdiri dari dua atau lebih kegiatan pembelajaran. Bagian ini bertujuan mempermudah mahasiswa dalam memahami keseluruhan materi dalam satu modul.

Praktikum/ Project

Bagian ini berisi bahan praktikum/project sesuai dengan materi dalam suatu modul yang bisa dikerjakan baik di kelas maupun dilaboratorium

Daftar Pustaka

Bagian ini berisikan referensi materi yang digunakan dalam penyusunan modul ini, dan bisa digunakan mahasiswa sebagai bahan ajar tambahan selain modul ini.

Modul 1:

Pendalaman Matematika

PENDAHULUAN

Matematika bukan hanya sekedar *tools*, tapi merupakan ruh bagi fisika, yang memberi jiwa dan pembuktian secara ilmiah dari berbagai fenomena alam yang sulit untuk diterima secara nalar. Matematika bahkan membuat kita mampu melihat sesuatu yang tidak dapat dilihat oleh mata. Di Modul ini, matematika mendapat kehormatan yang luar biasa sehingga disajikan lebih awal sebelum kita mempelajari materi-materi Mekanika Kuantum yang sebenarnya. Kebutuhan kita dalam menganalisis berbagai kasus dalam Mekanika Kuantum mengharuskan kita menguasai pemahaman matematika yang cukup dalam agar kita tidak kesulitan dengan simbol-simbol dan konsep-konsep yang cenderung lebih matematis.

Dan sekali lagi matematika telah berjasa dan memberi kita pemahaman, sesuatu yang bahkan kita tidak akan mungkin dapat melihat. Karena Mekanika Kuantum adalah ilmu yang mempelajari hal-hal yang tidak kasat oleh mata, tapi dengan matematika semua menjadi dapat dipercaya.

Kegiatan Pembelajaran 1: VEKTOR

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

a. Mahasiswa memiliki pengertian dan pemahaman mengenai vektor dan operasi vektor
b. Mahasiswa mampu menghitung panjang vektor dan vektor satuannya.

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Dalam ruang 3 Euclidean (R^3) atau ruang 3 dimensi, vektor u dapat ditulis dalam bentuk susunan linier sebagai berikut :

$$u = (u_1, u_2, u_3) \tag{1.1}$$

Dengan $u = (u_1, u_2, u_3)$ disebut **vektor** dan bilangan-bilangan u_1, u_2 dan u_3 disebut **koordinat** (atau juga bisa disebut komponen vektor). Komponen-komponen vektor merupakan **skalar**. Posisi **s** merupakan salah satu vektor yang memiliki komponen vektor x, y dan z. Dengan demikian posisi dapat ditulis dalam bentuk susunan linier sebagai berikut :

$$s = (x, y, z) \tag{1.2}$$

Selain susunan linier di atas, kita juga akan mengenal penulisan vektor dalam bentuk baris **atau** (bukan dan) kolom.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Vektor dalam bentuk baris disebut **vektor baris** dan vektor dalam bentuk kolom disebut **vektor kolom**. Untuk kali ini kita anggap penulisan keduanya sama saja, tapi setelah kita nanti mengenal matriks, maka kita harus mau menerima bahwa anggapan kita tersebut keliru. Mereka berdua berbeda.

Dua vektor s_1 dan s_2 dikatakan **sama** apabila masing-masing komponen yang bersesuaian juga **sama**.

Misalkan saja $s_1 = (x_1, y_1, z_1)$ dan $s_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Jika $s_1 = s_2$ maka $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ dan $z_1 = z_2$

Operasi Vektor

Dari pemahaman tersebut, maka untuk operasi jumlah (+) dan kurang (-) dari dua vektor tertentu, penjumlahan dan pengurangan hanya akan berlaku bagi komponen-komponen yang saling **bersesuaian** saja. Secara sederhana dapat dijelaskan oleh persamaan berikut ini :

$$s_1 \pm s_2 = (x_1 \pm x_{2,}\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2) \tag{1.3}$$

Sedangkan untuk perkalian antara vektor s dengan sebuah bilangan tertentu bukan vektor, misalkan k (bisa bilangan real atau kompleks) ditulis ks, maka k akan dikalikan secara merata pada tiap komponen vektor s. Secara sederhana dapat dijelaskan oleh persamaan berikut ini :

$$ks = (kx, ky, kz) \tag{1.4}$$

Perkalian seperti pada persamaan 91.40 di atas juga disebut sebagai **hasilkali skalar** atau hasilkali (saja).

Selanjutnya untuk perkalian antar dua vektor tertentu, misalnya kita ambil $s = (x, y, z)$ dan $F = (F_x, F_y, F_z)$, maka akan ada dua jenis perkalian, yaitu : **hasilkali titik** dan **hasilkali silang.**

Hasilkali titik yang ditulis $s.F$ adalah nilai skalar yang merupakan jumlah total dari hasil perkalian antar komponen yang saling bersesuaian.

Dari pemahaman hasil kali titik tersebut kita akan peroleh persamaan sebagai berikut :

$$s.F = xF_x + yF_y + zF_z \qquad (1.5)$$

Sedangkan **hasilkali silang** yang ditulis $s \; x \; F$ adalah vektor yang dibentuk dari perkalian silang antar komponen yang tidak saling bersesuaian.

Dari pemahaman hasilkali silang tersebut kita akan memperoleh persamaan sebagai berikut :

$$s \; x \; F = yF_z - zF_y, \, zF_x - xF_z, \, xF_y - yF_x \qquad (1.6)$$

Norma atau Panjang

Sebuah vektor s memiliki norma atau panjang yang dapat dinotasikan dengan $\|s\|$. Secara umum, norma $\|s\|$ didefenisikan sebagai akar kuadrat tak negatif dari hasilkali titik vektor s terhadap dirinya sendiri $s \, . \, s$.

$$\|s\| = \sqrt{s \, . \, s} \qquad (1.7)$$

Sedangkan secara khusus, jika $s = (x, y, z)$, maka norma $\|s\|$ dapat kita nyatakan sebagai berikut :

$$\|s\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.8)$$

Vektor Satuan

Apabila sebuah vektor s dibagi dengan $\|s\|$ (normanya sendiri0, maka akan menghasilkan sebuah vektor yang disebut juga **vektor satuan** $\hat{s}$.

$$\hat{s} = \frac{s}{\|s\|}$$

(1.9)

Vektor satuan $\hat{s}$ adalah vektor yang memiliki arah sejajar dengan vektor s, namun dengan nilai norma sama dengan 1 atau $\|s\| = 1$.

Proses pembentukan vektor satuan dari vektor asal disebut **normalisasi.** Proses normalisasi ini akan kita kenal nantinya saat kita membahas fungsi gelombang pada bab-bab selanjutnya.

"Dalam buku-buku yang pernah kita baca dulu waktu masih sekolah menengah atas, kita mengenal vektor satuan yang sejajar sumbu x biasanya ditulis sebagai $\hat{i}$, sedangkan vektor satuan yang sejajar sumbu y biasanya ditulis sebagai $\hat{j}$ dan vektor satuan yang sejajar sumbu z biasanya ditulis sebagai $\hat{k}$."

Maka vektor s dapat ditulis dengan notasi vektor satuan tiap sumbu sebagai berikut:

$$s = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} \tag{1.10}$$

Contoh Soal 1.1:

Gaya sebesar $F = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ N bekerja pada sebuah benda yang akhirnya membuat benda tersebut berpindah dari titik $r_0 = (-1, 0, 2)\ m$ menuju titik $r = (-1, 4, 8)\ m$. Usaha untuk menggerakkan benda tersebut sebesar .... joule.

Jawaban :

Usaha merupakan tenaga (atau kita lebih umum mengenalnya sebagai energi) yang dilakukan untuk memindahkan sebuah benda dari suatu tempat ke tempat lain, yang mana usaha didefenisikan secara matematis sebagai **hasilkali titik** antara gaya dan perpindahan, $(W = s.F)$. Maka dari soal diatas, kita akan memperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} W &= s.\,F \\ &= (r - r_0).\,F \\ &= (x - x_0)\,F_x + (y - y_0)\,F_y + (z - z_0)\,F_z \end{aligned}$$

Kemudian kita masukkan data-data yang ada didalam soal ke dalam persamaan diatas, sehingga kita peroleh :

$$\begin{aligned} W &= (x - x_0)\,F_x + (y - y_0)\,F_y + (z - z_0)\,F_z \\ &= (-1 - (-1)).2 + (4 - 0).\,(-2) + (8 - 2).\,(4) \\ &= 0 - 8 + 24 = 16\ Joule \end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas, kita peroleh besarnya usaha untuk memindahkan benda tersebut sebesar 16 Joule.

Contoh Soal 1.2:

Sebuah kunci inggris digunakan oleh seorang montir untuk membuka baut ban mobl. Jika posisis ujung kunci inggris terhadap baut adalah $r = (-30, 0, 40)\ cm$ dan gaya yang digunakan oleh montir mobil tersebut pada kunci inggris sebesar $F = 3\hat{i} + 4\hat{k}\ N$, maka besarnya torsi maksimal yang dapat mempengaruhi kunci inggris sebesar .... N.cm.

Jawaban :

Torsi (atau momen gaya), merupakan manifestasi dari gaya pada gerak angular), yang dapat didefenisikan secara matematis sebagai hasilkali silang antara vektor panjang lengan yang dikenai sebuah gaya dengan gaya tersebut, ($\tau = s\ x\ F$). Dari soal diatas, kita akan peroleh persamaan :

$$\begin{aligned} \tau &= s\ x\ F \\ &= (yF_z - zF_y, zF_x - xF_z, xF_y - yF_x \\ &= (yF_z - zF_y)\hat{i} - (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k} \end{aligned}$$

Kemudian kita masukkan data-data yang ada didalam soal ke dalam persamaan diatas, sehingga kita peroleh :

$$\begin{aligned} \tau &= (yF_z - zF_y)\hat{i} - (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k} \\ &= (0.4 - 40.0)\hat{i} - (40.3 - (-30).4)\hat{j} + ((-30).0 - 0.3)\hat{k} \\ &= -(120 + 120)\hat{j} = -240\ \hat{j}\ N.cm \end{aligned}$$

Kita peroleh besarnya torsi maksimal yang dapat mempengaruhi kunci inggris adalah $-240\ \hat{j}\ N.cm$, dengan arah ke bawah atau berlawanan arah sumbu y positif.

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah vektor, panjang vektor, vektor satuan dan operasi vektor !
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan vektor, panjang vektor, vektor satuan dan operasi vektor !

RANGKUMAN

1. $u = (u_1, u_2, u_3)$ disebut **vektor** dan bilangan-bilangan u_1, u_2 dan u_3 disebut **koordinat** (atau juga bisa disebut komponen vektor). Komponen-komponen vektor merupakan **skalar**.
2. Vektor dalam bentuk baris disebut **vektor baris** dan vektor dalam bentuk kolom disebut **vektor kolom**.
3. Ada dua jenis perkalian, yaitu : **hasilkali titik** dan **hasilkali silang. Hasilkali titik** yang ditulis $s.F$ adalah nilai skalar yang merupakan jumlah total dari hasil perkalian antar komponen yang saling bersesuaian. Sedangkan **hasilkali silang** yang ditulis $s\ x\ F$ adalah vektor yang dibentuk dari perkalian silang antar komponen yang tidak saling bersesuaian.
4. Norma $\|s\|$ didefenisikan sebagai akar kuadrat tak negatif dari hasilkali titik vektor s terhadap dirinya sendiri $s\ .\ s$.
5. Apabila sebuah vektor s dibagi dengan $\|s\|$ (normanya sendiri0, maka akan menghasilkan sebuah vektor yang disebut juga **vektor satuan** $\hat{s}$.
6. Proses pembentukan vektor satuan dari vektor asal disebut **normalisasi.**

EVALUASI FORMATIF 1

1. Jelaskan perbedaan vektor dan skalar !
2. Jelaskan dua perkalian pada vektor !
3. Apa yang dimaksud vektor satuan?
4. Apa yang dimaksud normalisasi ?
5. Gaya sebesar $F = -60\hat{i} - 3\hat{j} + 50\hat{k}$ N bekerja pada sebuah benda yang akhirnya membuat benda tersebut berpindah dari titik $r_0 = (-10, 0, 25)\ m$ menuju titik $r = (-10, 40, 28)\ m$. Usaha untuk menggerakkan benda tersebut sebesar .... joule.
6. Sebuah kunci inggris digunakan oleh seorang montir untuk membuka baut ban mobil. Jika posisis ujung kunci inggris terhadap baut adalah $r = (-40, 0, 30)\ cm$ dan gaya yang digunakan oleh montir mobil tersebut pada kunci inggris sebesar $F = 30\hat{i} + 40\hat{k}\ N$, maka besarnya torsi maksimal yang dapat mempengaruhi kunci inggris sebesar .... N.cm.

Kegiatan Pembelajaran 2: MATRIKS

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

a. Mahasiswa mampu menjelaskan dan memahami matriks, operasi matriks, matriks transpos, matriks invers, determinan dan matriks ortogonal.

b. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh dan latihan penerapan matriks, operasi matriks, matriks transpos, matriks invers, determinan dan matriks ortogonal.

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Vektor tersusun secara linier dalam bentuk satu baris saja atau satu kolom saja. Sedangkan matriks memiliki arti lebih luas, yaitu kumpulan dari vektor baris dan vaktor kolom. Matriks tersusun dari komponen – komponen yang terdiridari baris dan kolom. Secara umum matriks dapat ditulis seperti ini :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1k} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{b1} & m_{b2} & \cdots & m_{bk} \end{bmatrix}$$

Indeks b pada matriks M di atas menunjukkan baris, sedangkan indeks k pada matriks M di atas menunjukkan kolom. Matriks M juga dapat disebut sebagai matriks $b \ x \ k$, karena terdir dari b baris dan k kolom.

Secara khusus, suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris $(1 \ x \ k)$ saja disebut matriks baris atau **vektor baris**. Sedangkan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom $(b \ x \ 1)$ saja disebut matriks kolom atau **vektor kolom.**

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1k} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{b1} \end{bmatrix}$$

$$1 \ x \ k \qquad\qquad b \ x \ 1$$

Jika $i = 1, 2, 3, \cdots, b$ adalah indeks bebas yang dapat mewakili alamat baris pada suatu matriks dan $j = 1, 2, 3, \cdots, k$ adalah indeks bebas yang dapat mewakili alamat kolom pada suatu matriks, maka matrikas M di atas dapat ditulis secara sederhana sebagai :

$$M = \lfloor m_{ij} \rfloor \qquad (1.11)$$

Dengan m_{ij} adalah komponen – komponen dari matriks M dan ij menunjukkan alamat komponen pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Jika ada dua matriks, sebut saja $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$, maka yang disebut komponen yang saling bersesuaian antara matriks A dan matriks B adalah ketika komponen tersebut memiliki alamat ij yang sama.

Misalkan saja a_{11} saling bersesuaian dengan b_{11}, karena keduanya berada pada alamat $ij = 11$ yang sama (berada pada baris 1 dan kolom 1).

Operasi Matriks

Sama halnya dengan vektor, matriks juga dapat dijumlahkan, dikurangkan dan dikalikan.

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dapat dikurangkan jika dua matriks tersebut memlik bentuk baris dan kolom yang sama. Misalkan saja ada tiga matriks sebagai berikut :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

- ♣ Matriks R dapat dijumlahkan atau dikurangkan dengan matriks S, karena keduanya adalah matriks dengan baris dan kolom yang sama yaitu $m\ x\ n$.
- ♣ Sedangkan matriks R atau S tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan dengan matriks T karena baris dan kolom pada matriks tersebut berbeda yaitu $g\ x\ h$.

Penjumlahan dan pengurangan pada matriks hanya akan berlaku bagi komponen yang bersesuaian saja, seperti dibawah ini :

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1k} \pm b_{1k} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2k} \pm b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{b1} \pm b_{b1} & a_{b2} \pm b_{b2} & \cdots & a_{bk} \pm b_{bk} \end{bmatrix}$$

Atau secara sederhana dapat kita tulis dengan persamaan sebagai berikut :

$$A \pm B = \lfloor a_{ij} \pm b_{ij} \rfloor \qquad (1.12)$$

Sedangkan untuk perkalian antara matriks M dengan sebuah bilangan k tertentu (bisa bilangan real atau kompleks), ditulis kM , maka k akan dikalikan secara merata pada tiap komponen matriks M seperti dibawah ini :

$$T = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & \cdots & km_{1n} \\ km_{21} & km_{22} & \cdots & km_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ km_{b1} & km_{b2} & \cdots & km_{bn} \end{bmatrix}$$

Secara sederhana perkalian antara bilangan k dengan matriks M di atas dapat kita tulis dengan persamaan yang sama seperti persamaan (1.12) sebagai berikut :

$$kM = \lfloor km_{ij} \rfloor \qquad (1.13)$$

Selanjutnya untuk perkalian antar dua matriks kita sebut saja matriks $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan matriks $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$, maka harus ada persyaratan tertentu agar kedua matriks dapat dikalikan.

Sebelumnya perlu diketahui bahwa secara umum perkalian AB dan BA tidak sama, kecuali pada kondisi tertentu.

- ♣ Dua buah matriks dapat dikalikan sebanyak AB bila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B . Misalkan saja matriks A adalah matriks $s \ x \ n$ dan matriks B adalah matriks $n \ x \ t$, maka keduanya dapat dikalikan secara AB menghasilkan matriks $s \ x \ t$ *:*

$$\begin{array}{cccc} A & B & \rightarrow & AB \\ s\ x\ n & n\ x\ t & \rightarrow & s\ x\ t \end{array}$$

- ♣ Dua matriks tidak dapat dikalikan secara BA apabila banyak kolom matriks B tidak sama dengan banyak baris matriks A . Misalkan saja matriks B adalah matriks $n \ x \ t$

dan matriks A adalah matriks $s\ x\ n$, maka keduanya tidak dapat dikalikan secara BA karena tidak jelas matriks jenis apa yang akan dibentuk :

$$\begin{array}{cccc} B & A & \rightarrow & BA \\ n\,x\,t & s\,x\,n & \rightarrow & ? \end{array}$$

Sekarang kita siap untuk mendefenisikan perkalian AB di atas secara umum. Matriks $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dengan indeks $i = 1, 2, 3, ..., s$ dan indeks $j = 1, 2, 3, ..., n$, sedangkan matriks $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ dengan indeks $i = 1, 2, 3, ..., n$ dan indeks $j = 1, 2, 3, ..., t$. Perkalian AB dapat kita tulis pada analisis di bawah ini :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1t} \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & \vdots & \ddots & . \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{st} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + ... + a_{in}\, b_{nj} \;= \sum_{l}^{n} a_{il} b_{lj}$$

Dari analisis di atas kita ketahui bahwa hasilkali matriks di atas adalah $AB = \lfloor c_{ij} \rfloor$ dengan komponen c_{ij} dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$c_{ij} = \sum_{l}^{n} a_{il} b_{lj} \qquad (1.14)$$

c_{ij} merupakan jumlah total dari hasil kali satu-satu komponen pada baris ke-i matriks A dengan komponen pada kolom ke-j matriks B.

Pemahaman tentang perkalian matriks ini bisa digunakan untuk mendefenisikan ulang hasilkali titik pada vektor yang tentunya memiliki prinsip yang sama dengan perkalian matriks di atas. Tetapi sebelumnya kita perlu mengenaal istilah transpos matriks terlebih dahulu.

Matriks Transpos

Transpos dari suatu matriks M yang ditulis M^T adalah matriks yang didapatkan dengan menukar baris-baris pada matriks M menjadi kolom-kolom matriks transpos M^T
dan kolom-kolom pada matriks M menjadi baris-baris pada matriks transpos M^T.
Jadi intinya baris dan kolom pada matriks M saling bertukar posisi, maka akan menjadi matriks M^T yang secara umum dapat ditulis seperti ini :

$$M^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \cdots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \cdots m_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ m_{b1} & m_{b2} \cdots \ m_{bn} \end{bmatrix}$$

Jika $i = 1, 2, 3, ..., b$ adalah indeks bebas yang dapat mewakili alamat baris pada suatu matriks dan $j = 1, 2, 3, ..., k$ adalah indeks bebas yang dapat mewakilialamat kolom pada matriks $M = \lfloor m_{ij} \rfloor$, semua akan terbalik untuk transpos M^T.

Dengan demikian matriks transpos M^T dapat kita nyatakan dengan persamaan sebagai berikut :

$$M^T = [m_{ji}] \qquad (1.15)$$

Sekarang kita kaitkan dengan vektor. Apabila standar penulisan vektor adalah dengan vektor kolom, maka transpos dari vektor kolom merupakan vektor baris.

$$s = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad s^T = [x \ \ y \ \ z \ ]$$

Dengan pemahaman tersebut sebenarnya hasilkali titik dari dua vektor, misalnya saja s.s, merupakan hasil perkalian antara matriks transpos s^T degan matriks s yang ditulis $s^T \ s$.

$$s^T \ s = [x \ \ y \ \ z] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x^2 + y^2 \ z^2]$$

Dengan demikian secara khusus norma $\|s\|$ dapat juga didefenisikan sebagai akar kuadrat taknegatis dari hasil perkalian antara matriks transpos s^T terhadap matriks s.

$$\|s\| = \sqrt{s^T \ s} \qquad (1.16)$$

Matriks Invers

Selain transpos kita juga akan mengenal invers. Matriks invers yang ditulis M^{-1} adalah sebuah matriks tertentu yang apabila dikalikan dengan matriks (pasangan inversnya) dari arah mana pun akan menghasilkan **matriks identitas**, I.

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I \qquad (1.17)$$

Sedangkan matriks identitas adalah matriks yang diagonalnya berisi angka 1 dan yang lainnya 0.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang banyak baris sama dengan banyak kolom, $n\ x\ n$. Jika $i = 1, 2, 3, ..., n$ adalah indeks bebas yang dapat mewakili alamat baris pada suatu matriks dan $j = 1, 2, 3, ..., n$ adalah indeks bias yang dapat mewakili alamat kolom pada matriks identitas I, maka secara sederhana bisa dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$I = \lfloor \delta_{ij} \rfloor \qquad (1.18)$$

Dengan δ_{ij} adalah fungsi delta kronecker yang didefenisikan sebagai berikut :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & jika\ \ i \neq j \\ 1 & jika\ \ i = j \end{cases} \qquad (1.19)$$

Matriks M jika dikalikan dengan matriks identitas, maka akan menghasilkan dirinya sendiri.

$$IM = MI = M \qquad (1.20)$$

Setelah memahami matriks identitas, berarti kita sudah siap untuk mendefenisikan matriks invers M^{-1}. Matriks invers bisa kita peroleh dari matriks pasangan invers nya(yang tidak lain dan tidak bukan adalah M). Secara sederhana matriks invers dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$M^{-1} = \left| (-1)^{i+j} \ \frac{m_{(n+1-i)\,(n+1-j)}}{|m_{ij}|} \right| \qquad (1.21)$$

dengan $|m_{ij}|$ adalah determinan dari matriks M .

Determinan

Determinan adalah hasil perkalian silang antar komponen yang berada pada baris dan kolom yang tidak bersesuaian. Untuk menentukan determinan sebuah matriks perlu diperhatikan bentuk matriks tersebut.

- ♣ Untuk matriks $1\,x\,1$, maka determinannya adalah komponen tunggal matriks tersebut sendiri.

$$O = [o_{11}], \qquad \det O = [O] = o_{11}$$

- ♣ Untuk matriks $2\,x\,2$, maka determinannya adalah perkalian silang antar komponen yang baris dan kolomnya saling bersesuaiaan.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det P = \left| \ P \ \right| = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$$

- ♣ Untuk matriks $2\,x\,2$, maka determinannya adalah perkalian silang antar komponen yang baris dan kolomnya saling tak bersesuaiaan. Karena jumlah komponen yang dikalikan adalah 3 komponen, maka kita tidak mungkin bisa menyelesaikan dengan cara yang sama dengan matriks $2\,x\,2$. Karena itu kita gunakan cara sebagai berikut :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det Q = \left| \ Q \ \right|$$
$$= +\, q_{11}q_{22}q_{33} + q_{12}q_{23}q_{31} + q_{13}q_{21}q_{32} - q_{11}q_{23}q_{32} - q_{12}q_{21}q_{33} - q_{13}q_{22}q_{31}$$

- ♣ Untuk matriks $n\ x\ n$, maka kita bisa menggunakan cara yang sama dengan cara untuk matriks $3\,x\,3$.

Tapi tidak semua matriks memiliki matriks invers karena bisa jadi determinan matriks sama dengan 0, padahal dalam matematika sudah menjadi syarat umum bahwa pembagi tidak boleh 0.

Matriks yang tidak memiliki matriks invers disebut matriks **singular.** Sedangkan matriks yang memiliki matriks invers disebut matriks **non-singular**.

Matriks Ortogonal

Matriks ortogonal adalah matriks yang matriks inversnya sama dengan matriks transposnya, $M^{-1} = M^{T}$. Perkalian antar matriks ortogonal dengan matriks transposnya bersifat komutatif :

$$M^{-1}\,M = M\,M^{T} \qquad (1.22)$$

Vektor- vektor baris yang ada pada matriks M^T bisa kita tulis sebagai m_i, sedangkan vektor-vektor kolom pada matriks M bisa kita tulis sebagai m_j, maka hasilkali titik dari vektor baris dan vektor kolom tersebut akan memenuhi :

Contoh Soal 2.1:

Berikut ini terdapat matriks bujur sangkar, yaitu : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 10 \\ -3 & 0 & -8 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

Penjumlahan dari dua matriks bujur sangkar di atas adalah .....

Jawaban:

Setelah kita cek, ternyata dua matriks di atas memiliki banyak banyak baris dan banyak kolom yang sama (sama-sama 3 X 3), maka keduanya dapat dioperasikan jumlah atau kurang. Sehingga operasi penjumlahan dua matriks di atas adalah :

$$\begin{aligned} M+N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 10 \\ -3 & 0 & -8 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+(-1) & 0+4 & 4+10 \\ -3+(-3) & -2+0 & 0+(-8) \\ 2+2 & 6+(-6) & -7+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 14 \\ -6 & -2 & -8 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas, kita peroleh hasil penjumlahan dua matriks M dan N, yaitu :

$$M+N = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 14 \\ -6 & -2 & -8 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m_i . m_j = \begin{cases} 0 & jika\ i \neq j \\ 1 & jika\ i = j \end{cases} \tag{1.23}$$

Kemudian persamaan (1.23) di atas kita subtitusikan dengan fungsi **delta kronecker**, maka akan kita peroleh persamaan yang lebih sederhana sebagai berikut :

$$m_i . m_j = \delta_{ij} \tag{1.24}$$

Vektor-vektor yang memenuhi persamaan (1.24) di atas kita sebut sebagai **vektor ortogonal,** ada dua alasan kenapa disebut seperti itu, yaitu : karena mereka saling **ortogonal** satu sama lain dan karena mereka adalah vektor yang telah mengalami **normalisasi.**

Contoh Soal 2.2:

Dibawah ini terdapat sebuah matriks bujur sangkar :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks bujur sangkar di atas adalah ...

Jawaban :

Matriks V di atas adalah matriks bujur sangkar 2 X 2, yang mana inversnya dapat kita selesaikan dengan cukup cepat menggunakan persamaan :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Kemudian kita masukkan data-data yang ada di dalam soal pada persamaan diatas, sehingga kita peroleh :

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{1.4 - 2.3} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, kita akan memperoleh invers dari matriks V, yaitu :

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah matriks, operasi matriks, matriks transpos, matriks invers, determinan dan matriks ortogonal !

2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan matriks, operasi matriks, matriks transpos, matriks invers, determinan dan matriks ortogonal !

RANGKUMAN

1. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris $(1\ x\ k)$ saja disebut matriks baris atau **vektor baris**. Sedangkan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom $(b\ x\ 1)$ saja disebut matriks kolom atau **vektor kolom.**
2. Sama halnya dengan vektor, matriks juga dapat dijumlahkan, dikurangkan dan dikalikan.
3. Transpos dari suatu matriks M yang ditulis M^T adalah matriks yang didapatkan dengan menukar baris-baris pada matriks M menjadi kolom-kolom matriks transpos M^T dan kolom-kolom pada matriks M menjadi baris-baris pada matriks transpos M^T.
4. Matriks invers yang ditulis M^{-1} adalah sebuah matriks tertentu yang apabila dikalikan dengan matriks (pasangan inversnya) dari arah mana pun akan menghasilkan **matriks identitas**, I.
5. Determinan adalah hasil perkalian silang antar komponen yang berada pada baris dan kolom yang tidak bersesuaian.
6. Matriks ortogonal adalah matriks yang matriks inversnya sama dengan matriks transposnya, $M^{-1} = M^T$

EVALUASI FORMATIF 2

1. Jelaskan perbedaan vektor baris dan vektor kolom !
2. Jelaskan apa yang dimaksud matriks transpos ?
3. Jelaskan apa yang dimaksud matriks invers?
4. Jelaskan apa yang dimaksud determinan ?
5. Jelaskan apa yang dimaksud matriks ortogonal ?
6. Berikut ini terdapat dua matriks bujur sangkar, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \; dan \begin{bmatrix} -1 & 4 & 10 \\ -3 & 0 & -8 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Hasil dari operasi matriks $M^2 - N^T M$ adalah ...

7. Dibawah ini terdapat sebuah matriks bujur sangkar :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks bujur sangkar diatas adalah ...

Kegiatan Pembelajaran 3: NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

KEMAMPUAN YANG DIHARAPKAN

a. Mahasiswa mampu menjelaskan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks

b. Mahasiswa mampu mencari nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Polinomial Matriks

Sebuah matriks bujur sangkar *M,* apabila dipangkatkan dengan pangkat *n* (anggota bilangan bulat). Maka M^n dapat kita peroleh dari perkalian sebagai berikut :

$$M^n = M^{n-1}\,M \qquad (1.25)$$

Dan bukan dari $M\ M^{n-1}$ atau $M^n \neq M\ M^{n-1}$.

Jika matriks $M^n,\ M^{n-1},\dots,M^0$ kita susun sedemikian rupa secara linier dengan operasi penjumlahan dan koefisien tertentu, maka akan kita peroleh sebuah fungsi polinomial $f\,(M)$ dengan variabel bebasnya berupa matriks M. Fungsi **polinomial matriks** dapat kita tulis seperti dibawah ini :

$$f\,(M) = a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \ldots + a_1 M + a_0 I \qquad (1.26)$$

Dengan I adalah matriks identitas.

Matriks M disebut sebagai matriksakar penyelesaian dari fungsi $f\,(M)$, apabila $f\,(M) = [0]$ yaitu **matriks nol bujur sangkar**. Matriks nol bujur sangkar adalah matriks bujur sangkar yang semua komponen di dalamnya nol.

Ternyata matriks M dapat diganti dengan sebuah nilai skalar χ_l tertentu sehingga fungsi $f(\chi_l) = 0$, yang mana χ_l adalah akar-akar penyelesaian dari fungsi polinomial $f(\chi_l)$.

$$f(\chi_l) = a_n \chi_l^{\,n} + a_{n-1} \chi_l^{\,n-1} + \ldots + a_1 \chi_l + a_0 \qquad (1.27)$$

Nilai skalar χ_l yang dapat digunakan untuk mengganti matriks M inilah yang akan disebut sebagai **nilai eigen**.

Nilai Eigen

Kata "eigen" berasal dari bahasa Jerman yang artinya dalam bahasa indonesia "milik sendiri". Milik sendiri disini maksudnya adalah nilai skalar χ_l tertentu adalah milik matriks M yang bersifat khas dan hanya matriks M sendiri yang memiliki nilai – nilai ini.

Sebuah matriks M bujur sangkar akan memiliki nilai eigen lebih dari satu tergantung dari seberapa banyak **komponen diagonal** yang dia miliki. Komponen diagonal adalah komponen matriks M yang memiliki alamat $i = j$.

Untuk matriks M $2x2$ misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak dua, yaitu : m_{11} dan m_{22}. Maka banyaknya nilai eigen maksimal juga dua (bisa kurang dari dua), yaitu : χ_1 dan χ_2.

Sedangkan untuk matriks M nxn misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak n, yaitu : $m_{11}, m_{22}, ..., m_{nn}$. Maka banyaknya nilai eigen maksimal n, yaitu : $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n$.

Selisih antara matriks M dan matriks $\chi_l\ I$, yaitu : $M - \chi_l\ I = S_l$ merupakan matriks singular dengan determinan sama dengan nol $|S_l| = 0$. *Kenapa S_l harus singular?*

S_l singular agar apabila dikalikan dengan vektor kolom X_l tertentu akan menghasilkan matriks nol.

$$(M - \chi_l\ I)\ X_l = 0 \tag{1.28}$$

Nilai eigen dapat kita cari dari pemahaman bahwa determinan matriks singular S_l, sama dengan nol. Sehingga secara umum persamaan yang harus kita selesaikan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks M adalah sebagai berikut ;

$$|M - \chi_l\ I| = 0 \tag{1.29}$$

- ♣ Untuk matriks $1\ x\ 1$, maka nilai eigen dari matriks tersebut adalah komponen tunggal matriks tersebut sendiri.

$$O = [o_{11}]$$

$$|O - \chi_l\ I| = 0$$

$$o_{11} - \chi_l = 0 \quad \rightarrow \chi_1 = o_{11}$$

- ♣ Untuk matriks 2 x 2, maka nilai eigen dari matriks tersebut dapat kita cari dari analisis berikut ini :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$|P - \chi_l I| = \begin{bmatrix} p_{11} - \chi_l & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - \chi_l \end{bmatrix} = (p_{11} - \chi_l)\,(p_{22} - \chi_l) - p_{11} p_{22}$$

Atau secara sederhana nilai eigen dari matriks P kita peroleh dari penyelesaian fungsi kuadrat sebagai berikut :

$$\chi_l^{\;2} - tr(P)\chi_l + |P| = 0 \qquad (1.30)$$

Dengan $|P|$ adalah determinan dari matriks P dan tr (P) adalah trace atau total penjumlahan seluruh komponen diagonal dari matriks P. Atau secara sederhana trace dari suatu matriks P dapat kita nyatakan dengan persamaan sebagai berikut :

$$tr(P) = \sum_{i-j}^{n} p_{ij} \qquad (1.31)$$

♣ Untuk matriks 3 x 3, maka nilai eigen dari matriks tersebut dapat kita cari dari analisis berikut ini :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

$$|Q - \chi_l| = \begin{bmatrix} q_{11} - \chi_l & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} - \chi_l & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} - \chi_l \end{bmatrix}$$

$$= +\,(q_{11} - \chi_l)\,(q_{22} - \chi_l)\,(q_{33} - \chi_l) + q_{12} q_{23}\; q_{31} + q_{13} q_{21}\; q_{32}$$

$$-\,(q_{11} - \chi_l) q_{23}\; q_{32} - q_{12}\; q_{21} (q_{33} - \chi_l) - q_{13} (q_{22} - \chi_l) q_{31}$$

Atau secara sederhana nilai eigen dari matriks Q kita peroleh dari penyelesaian fungsi polinomial sebagai berikut :

$$\chi_l^{\;3} - tr(Q)\chi_l^{\;2} + (Q_{11} + Q_{22} + Q_{33})\chi_l + |Q| = 0 \qquad (1.32)$$

Dengan $Q_{11,}$ Q_{22} dan Q_{33} merupakan kofaktor dari komponen diagonal matriks Q. Kofaktor adalah determinan dari submatriks didapat dengan cara menghapus baris dan kolom suatu komponen tertentu yang dijadikan sebagai alamat pusat.

Kofaktor $Q_{11,}$ Q_{22} dan Q_{33} didapat dari komponen diagonal yang dijadikan sebagai alamat pusat.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} maka\ Q_{11} = \begin{vmatrix} q_{22} & q_{23} \\ q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}\ Q_{22} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{13} \\ q_{31} & q_{33} \end{vmatrix}\ Q_{33} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}$$

- ♣ Untuk matriks n x n, maka kita bisa menggunakan cara yang sama dengan cara-cara sebelumnya.

Vektor Eigen

Vektor eigen adalah vektor kolom X_l tertentu yang menjadi pengali bagi matriks singular S_l sehingga menghasilkan matriks nol, sesuai dengan persamaan (1.28), yang dapat kita susun ulang menjadi persamaan sebagai berikut:

$$MX_l = \lambda_l X_l \tag{1.33}$$

Persamaan (1.33) di atas adalah bentuk lain dari persamaan (1.28) yang telah kita ketahui sebelumnya. Sama halnya dengan nilai eigen, vektor eigen juga bersifat khas dan hanya matriks M sendiri yang memiliki vektor-vektor ini karena itu disebut vektor eigen (vektor miliknya sendiri).

Sebuah matriks M bujur sangkar akan memiliki vektor eigen lebih dari satu tergantung dari seberapa banyak komponen diagonal. Untuk matriks M 2 x 2 misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak dua, yaitu : m_{11} dan m_{22}. Maka banyaknya vektor eigen juga dua, yaitu : X_1 dan X_2.

Sedangkan untuk matriks M n x n misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak n, yaitu : m_{11} , m_{22} , ... , m_{nn} . Maka banyaknya vektor eigen juga n, yaitu : X_1, X_2, ... , X_n.

Vektor eigen dapat dicari dengan menggunakan persamaan (1.28) yang dapat kita uraikan menjadi persamaan linier berikut ini :

$$\sum_{i,j}^{n} (m_{ij} - \lambda_l \delta_{ij}) x_{lj} = 0 \tag{1.34}$$

Dengan l adalah indeks yang menunjukkan nilai eigen atau vektor eigen ke-l dari suatu matriks M tertentu, δ_{ij} adalah fungsi delta kronecker, dan x_{lj} adalah komponen dari vektor eigen (vektor kolom) ke-l dari suatu matriks M tertentu.

Dari persamaan (1.34) kita akan peroleh beberapa persamaan linier yang dapat kita selesaikan dengan metode eliminasi Gauss dan memasukkan nilai 1 pada salah satu komponen x_{lj} agar vektor eigen yang diperoleh cukup sederhana (biasanya $x_{l3} = 1$).

♣ Untuk matriks 2 x 2, maka vektor eigen dari matriks tersebut dapat kita cari dari analisis berikut ini :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{cases} 0 = (p_{11} - \lambda_1.1)x_{1,1} + (p_{12} - \lambda_1.0)\, x_{1,2} \\ 0 = (p_{21} - \lambda_1.1)x_{1,1} + (p_{22} - \lambda_1.0)\, x_{1,2} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 0 = (p_{11} - \lambda_2.1)x_{1,1} + (p_{12} - \lambda_2.0)\, x_{1,2} \\ 0 = (p_{21} - \lambda_2.1)x_{1,1} + (p_{22} - \lambda_2.0)\, x_{1,2} \end{cases}$$

Maka dua vektor eigen dari matriks P yang kita peroleh adalah sebagai berikut :

$$\lambda_1 \; maka \; X_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 \; maka \; X_2 = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix},$$

Sesuai dengan persamaan (1.33), maka untuk matriks P akan berlaku hubungan :

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix},$$

♣ Untuk matriks 3 x 3, maka vektor eigen dari matriks tersebut dapat kita cari dari analisis berikut ini :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

$$X_l \begin{cases} 0 \; = \; (q_{11} - \lambda_l.1)x_{l,1} + (q_{12} - \lambda_l.0)\, x_{l,2} + (q_{13} - \lambda_1.0)x_{l,3} \\ 0 \; = \; (q_{21} - \lambda_l.1)x_{l,1} + (q_{22} - \lambda_l.0)\, x_{l,2} + (q_{23} - \lambda_1.0)x_{l,3} \\ 0 \; = \; (q_{31} - \lambda_l.1)x_{l,1} + (q_{32} - \lambda_l.0)\, x_{l,2} + (q_{33} - \lambda_1.0)x_{l,3} \end{cases}$$

Untuk matriks Q indeks $l = 1, 2, 3,$ yang menunjukkan ada 3 himpunan persamaan linier (namun di atas kita tulis secara umum saja dengan indeks l), 3 nilai eigen dan 3 vaktor eigen. Maka tiga vaktor eigen dari matriks Q yang kita peroleh adalah sebagai berikut :

$$\lambda_1 \ maka \ X_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 \ maka \ X_2 = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 \ maka \ X_3 = \begin{bmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{bmatrix},$$

Sesuai dengan persamaan (1.33), maka untuk matriks Q akan berlaku hubungan :

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{bmatrix} = \lambda_3 \begin{bmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 3.1:

Berikut ini terdapat sebuah matriks bujur sangkar, yaitu : $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Maka dari matriks L di atas, carilah dua hal dibawah ini :

a. Nilai eigen dari matriks L!

b. Vektor eigen dari matriks L!

Jawaban :

a. Mencari Nilai eigen (λ) :

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks L di atas, kita harus membentuk polinomial karakteristiknya terlebih dahulu. Polinomial karakteristik dari matriks L (2 x 2), dapat kita peroleh dari persamaan (1.30), menjadi :

$$\lambda^2 - tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\lambda + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - tr(a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Kemudian kita masukkan data-data yang ada di dalam soal kedalam persamaan diatas, sehingga kita peroleh :

$$\lambda^2 - (1+1)\lambda + (1.1 - 2.2) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Persamaan diatas adalah persamaan kuadrat yang dapat kita cari penyelesaian dari λ (nilai eigen) menggunakan persamaan abc (atau rumus abc), yaitu sebagai berikut :

$$a\lambda^2 - b\lambda - c = 0 \quad maka \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Karena persamaan kuadrat menghasilkan dua penyelesaian, maka nilai eigen dari matriks L juga ada dua. Kemudian kita masukkan data-data yang ada didalam soal kedalam persamaan abc, maka kita peroleh :

$$\lambda_1 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{4+12}}{2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{16}}{2}$$

$$= 3$$

$$\lambda_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{4+12}}{2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{16}}{2}$$

$$= -1$$

Dari perhitungan di atas kita peroleh nilai eigen dari matriks L adalah $\lambda_1 = 3 \, dan \, \lambda_2 = -1$.

b. Mencari Vektor Eigen :

Karena nilai eigen yang kita peroleh ada dua, maka minimal akan ada dua vektor eigen yang akan kita peroleh. Untuk mendapatkan komponen-komponen vektor eigen, kita dapat mencarinya menggunakan persamaan (1.34). Sehinggga dari persamaan (1.34) tersebut kita akan mendapatkan dua persamaan untuk $\lambda_1 = 3$, antara lain :

$$\begin{aligned} (a - \lambda_1.1)x_{1,1} + (b - \lambda_1.0)x_{1,2} &= 0 \\ (1 - 3.1)x_{1,1} + (2 - 3.0)x_{1,2} &= 0 \\ -2x_{1,1} + 2x_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$

Dan juga persamaan :

$$\begin{aligned} (c - \lambda_1.0)x_{1,1} + (d - \lambda_1.1)x_{1,2} &= 0 \\ (2 - 3.0)x_{1,1} + (1 - 3.1)x_{1,2} &= 0 \\ 2x_{1,1} - 2x_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$

Dari dua persamaan diatas, kita akan peroleh $x_{1,1} = x_{1,2}$. Lalu kita misalkan $x_{1,1} = 1$, maka kita peroleh $x_{1,2} = 1$. Dengan demikian vektor eigen matriks L untuk $\lambda_1 = 3$ adalah :

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Permisalan $x_{1,1} = 1$, adalah permisalan paling sederhana untuk nilai tersebut. Boleh dimisalkan dengan nilai lain selain nol. Kemudian dari persamaan (1.34), kita juga akan memperoleh dua persamaan untuk $\lambda_2 = -1$, yaitu :

$$\begin{aligned} (a - \lambda_2.1)x_{2,1} + (b - \lambda_2.0)x_{2,2} &= 0 \\ (1 - (-1).1)x_{2,1} + (2 - (-1).0)x_{2,2} &= 0 \\ 2x_{2,1} + 2x_{2,2} &= 0 \end{aligned}$$

Dan juga persamaan :

$$(c-\lambda_2.1)x_{2,1}+(d-\lambda_2.0)x_{2,2} = 0$$
$$(2-(-1).1)x_{2,1}+(1-(-1).0)x_{2,2} = 0$$
$$2x_{2,1}+2x_{2,2}=0$$

Dari dua persamaan diatas, kita akan memperoleh $x_{2,1}=-x_{2,2}$. Lalu misalkan $x_{2,1}=1$, maka kita peroleh $x_{2,2}=-1$. Dengan demikian vektor eigen matriks L untuk $\lambda_2=-1$ adalah :

$$X_2=\begin{bmatrix}x_{2,1}\\x_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Permisalan $x_{2,1}=1$ adalah permisalan paling sederhana untuk nilai tersebut. Boleh dimisalkan dengan nilai lain selain nol. Dengan demikian vektor-vektor eigen untuk matriks L adalah sebagai berikut :

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\ dan\ \ X_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah nilai eigen dan vektor eigen !
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan nilai eigen dan vektor eigen !

RANGKUMAN

1. Kata "eigen" berasal dari bahasa Jerman yang artinya dalam bahasa indonesia "milik sendiri". Milik sendiri disini maksudnya adalah nilai skalar χ_l tertentu adalah milik matriks M yang bersifat khas dan hanya matriks M sendiri yang memiliki nilai – nilai ini.
2. Sebuah matriks M bujur sangkar akan memiliki nilai eigen lebih dari satu tergantung dari seberapa banyak **komponen diagonal** yang dia miliki. Komponen diagonal adalah komponen matriks M yang memiliki alamat $i = j$.

3. **Vektor eigen** adalah vektor kolom X_l tertentu yang menjadi pengali bagi matriks singular S_l sehingga menghasilkan matriks nol.
4. Sama halnya dengan nilai eigen, vektor eigen juga bersifat khas dan hanya matriks M sendiri yang memiliki vektor-vektor ini karena itu disebut vektor eigen (vektor miliknya sendiri).
5. Sebuah matriks M bujur sangkar akan memiliki vektor eigen lebih dari satu tergantung dari seberapa banyak komponen diagonal. Untuk matriks M 2 x 2 misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak dua, yaitu : m_{11} dan m_{22}. Maka banyaknya vektor eigen juga dua, yaitu : X_1 dan X_2.
6. Sedangkan untuk matriks M n x n misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak n, yaitu : m_{11}, m_{22}, ... , m_{nn}. Maka banyaknya vektor eigen juga n, yaitu : X_1, X_2, ... , X_n.

EVALUASI FORMATIF 3

1. Jelaskan apa arti kata "eigen" ?
2. Bagaimana menentukan jumlah nilai eigen suatu matriks?
3. Jelaskan apa yang dimaksud vector eigen !
4. Bagaimana menentukan jumlah vektor eigen suatu matriks?
5. Berikut ini terdapat sebuah matriks bujur sangkar : $L = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

   Maka dari matriks L di atas, carilah dua hal dibawah ini :

   a. Nilai eigen dari matriks L !

   b. Vektor Eigen dari matriks L !

Kegiatan Pembelajaran 4: RUANG HILBERT

KEMAMPUAN YANG DIHARAPKAN

a. Mahasiswa mampu menjelaskan ruang, ruang hasilkali dalam, ruang hilbert

b. Mahasiswa mampu memahami "Bra-Ket", Observabel dan Operator serta membuat contohnya.

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Kata "ruang" yang dimaksud di sini bukan ruang yang kita kenal dalam bahasa sehari-hari. Akan tetapi "ruang" dalam bahasa Matematika Modern. Di dalam matematika modern, "ruang" didefenisikan sebagai himpunan yang disertai dengan beberapa struktur tambahan seperti ukuran, grup, topografi, metrik, urutan, relasi ekuivalen, diferensial dan kategori.
Ruang ada banyak jenisnya, tergantung dari seberapa lengkap cakupan struktur tambahan yang dia miliki. Salah satu yang akan kita pelajari adalah ruang Hilbert. Tetapi sebelum kita mempelajari ruang hilbert, terlebih dahulu kita pelajari ruang hasilkali dalam.

Ruang HasilKali Dalam

Ruang dalam matematika modern membentuk sebuah hierarki yang mungkin bisa dianalogikan mirip dengan konsep kasta. Ruang paling dasar dalam jajaran kasta tersebut adalah ruang topologi, kemudian ruang metrik, lalu ruang norma dan yang terakhir adalah ruang hasilkali dalam.
Dua buah vektor, misalkan saja u dan v yang dapat kita operasikan keduanya dengan notasi $\langle u, v\rangle$. Maka notasi tersebut disebuthasilkali dalam.

Hasilkali dalam memiliki tiga sifat utama, antara lain:

❖ Sifat Simetrik :

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$$

- Sifat Linear :

  $\langle a\,u_1 + b\,u_2, v\rangle = a\,\langle u_1, v\rangle + b\,\langle u_2, v\rangle$

- Sifat Definitif :

  $\langle u, v\rangle \geq 0,\ dan\ \langle u, u\rangle = 0\ maka\ u = 0$

Jika kita kaitkan dengan materi vektor yang telah kita pelajari sebelumnya, maka hasilkali dalam sama dengan hasilkali titik, bisa kita tulis $\langle u, v\rangle = u.v$.

Dari pemahaman hasilkali dalam tersebut, maka norma juga dapat didefenisikan sebagai akar kuadrat tak negatif dari hasilkali dalam dari vektor s terhadap dirinya sendiri $\langle s, s\rangle$.

$$\|s\| = \sqrt{\langle s, s\rangle} \tag{1.35}$$

Persamaan (1.35) di atas berlaku apabila kita berbicara pada ruang n Euclidian. Namun, jika kita berbicara ruang fungsi, maka hasilkali dalam dari dua fungsi misalkan saja f dan g dapat dinyatakan oleh persamaan dibawah ini :

$$\langle f, g\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)\, dx \tag{1.36}$$

Dengan menggunakan persamaan (1.36) norma dari fungsi f atau $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ dapat dinyatakan secara sederhana dengan persamaan sebagai berikut :

$$\|f\| = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2\, dx} \tag{1.37}$$

Sedangkan apabila kita berbicara tentang ruang matriks, maka hasilkali dalam dari dua matriks misalkan saja matriks M dan matriks N (keduanya matriks m x n) dinyatakan oleh persamaan berikut ini :

$$\langle M, N\rangle = tr(N^T M) \tag{1.38}$$

Jika komponen matriks M adalah m_{ij} dan komponen matriks N adalah n_{ij}, maka hasilkali dalam dari matriks M dan matriks N dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut:

$$\langle M, N\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, n_{ij} \tag{1.39}$$

Dengan menggunakan persamaan (1.39) norma dari matriks M atau $\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle}$ dapat kita nyatakan secara sederhana dengan persamaan sebagai berikut:

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^{\ 2}} \qquad (1.40)$$

Apabila matriks M adalah matriks kolom atau vektor kolom, maka norma dari matriks kolom M (1 x n) dapat kita nyatakan secara sederhana dengan persamaan sebagai berikut :

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} m_{j}^{\ 2}} \qquad (1.41)$$

Setelah memahami ruang hasilkali dalamberarti kita sudah siap untuk memahami ruang hilbert. Ruang Hilbert adalah ruang vektor yang lengkap, yang normanya diinduksi dari ruang hasilkali dalam. Lengkap disini artinya barisan Cauchy x_n di x akan konvergen (berhingga) di X juga. Jika kita membaca buku-buku asli analisis real, maka kita akan diajak untuk mengenal kekonvergenan barisan Cauchy. Misalkan kita ambil T_N adalah barisan Cauchy yang didefenisikan sebagai $T_N : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\ 2}$, $maka\ T_N < \infty$.

Diberikan sebuah himpunan L^2 yang didefenisikan sebagai :

$$L^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\ 2} < \infty \right\}$$

Maka L^2 adalah ruang Hilbert dengan norma $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\ 2}$ sesuai dengan persamaan (1.41)yang diinduksi dari hasilkali dalam padanannya $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Secara matematis fungsi gelombang yang akan kita pelajari pada bab-bab selanjutnya di dalam buku ini, sebenarnya walaupun sudah diukur oleh pengamat di dunia nyata, fungsi gelombang tersebut masih berada di ruang abstrak yang kita sebut dengan ruang Hilbert dan terpisah jauh dari pengamat yang berada diruang nyata.

“Bra” dan “Ket”

Didalam Mekanika Kuantum, sebuah vektor kolom bisa disebut “ket” dan dinotasikan dengan simbol $|u\rangle$. Sedangkan untuk vektor baris bisa disebut “bra” dan dinotasikan dengan simbol $\langle u|$. Dan tentunya semua “ket” ada di dalam ruang hilbert.

Hasilkali dalam antara “bra” dan “ket” dapat kita tulis sebagai $\langle u|u\rangle$ yang apabila namanya kita gabungkan menjadi “bra(c)ket” kata dalam bahasa inggris yang artinya dalam bahasa indonesia "kurung siku". Penamaan "bra" dan "ket" ini diberikan oleh seorang fisikawan yang bernama Paul A. M. Dirac.

Sehinggga norma $\|u\|$ dapat didefenisikan sebagai :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle} \tag{1.42}$$

Observabel dan Operator

Bila terdapat sebuah A yang kita sebut observabel (akronim dari observasi variabel) yaitu variabel yang kita amati seperti energi, momentum, massa, dsb, di ruang nyata. Maka observabel tersebut akan memiliki "kembaran" (dalam tanda kutip) $\hat{A}$, di ruang Hilbert, yang kita sebut dengan operator.

Sebuah vektor $|u\rangle$ akan disebut vektor eigen dari operator $\hat{A}$ apabila terdapat a sebagai nilai eigen dari operator $\hat{A}$, sehingga akan terbentuk persamaan eigen sebagai berikut:

$$\hat{A}|u\rangle = a|u\rangle \tag{1.43}$$

Dimana nilai eigen a bisa berupa bilangan real atau bilangan kompleks. Namun, untuk operator (matriks) Hermitian, nilai eigen a selalu bilangan real. Matriks Hermitian adalah matriks bujursangkar yang mengandung komponen bilangan kompleks dengan sifat adjoinnya adalah dirinya sendiri, $\hat{A}^* = \hat{A}$. Adjoin pada matriks kompleks didefenisikan sebagai konjugat transpos $\hat{A}^* = \overline{\hat{A}}^T$ dari matriks $\hat{A}$. Misalkan saja matriks $\hat{A}$ adalah sebagai berikut,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{bmatrix}$$

Maka adjoin $\hat{A}^*$ dari matriks $\hat{A}$ adalah konjugat (konjugat dari $a_1 + ia_2$ adalah $a_1 - ia_2$ atau sebaliknya, dengan $i = \sqrt{-1}$ bilangan imajiner) dan sekaligus transpos dari matriks $\hat{A}$ sebagai berikut :

$$\hat{A}^* = \overline{\hat{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{bmatrix}$$

Dalam Mekanika Kuantum ada dua operator yang sangat penting yaitu : operator momentum dan operator energi. Operator momentum $\hat{p}$ adalah operator yang mewakili observabel momentum pada ruang Hilbert. Operator $\hat{p}$ dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \tag{1.44}$$

Dengan $\hbar = h/2\pi$ (h adalah konstanta plank) dan ∇ adalah operator del (dalam ruang posisi kartesian) yang dapat kita tulis :

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.45}$$

Operator momentum $\hat{p}$ memiliki nilai eigen p, yang merupakan penjumlahan dari nilai eigen tiap sumbu $p = p_x + p_y + p_z$. Maka persamaan eigennya adalah :

$$-i\hbar\nabla\left|\psi_{\hat{p}}\right\rangle = p\left|\psi_{\hat{p}}\right\rangle \tag{1.46}$$

Sebuah benda (partikel) yang melaju pada sumbu x, akan memiliki operator momentum $\hat{p}_z$ yang dapat dinyatakan oleh persamaan di bawah ini :

$$\hat{p}_x = i\hbar\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.47}$$

Operator momentum $\hat{p}_x$ memiliki nilai eigen p_x. Jika menurut de Broglie $p_x = h/\lambda$ dan $\Lambda = 2\pi/\lambda$ adalah konstanta gelombang, maka kita akan dapatkan $p_x = \Lambda\hbar$.

Persamaan eigen untuk operator momentum $\hat{p}_x$ adalah :

$$\frac{\partial\psi_{\hat{p}}}{\partial x} = -\frac{\Lambda}{i}\psi_{\hat{p}} = \Lambda\psi_{\hat{p}} \tag{1.48}$$

Persamaan (1.48) di atas adalah persamaan diferensial orde 1 yang penyelesaian vektor eigennya adalah:

$$\psi_{\hat{p}}(x) = Ce^{i\Lambda x} \tag{1.49}$$

Dengan C adalah sebuah koefisien skalar tertentu. Sedangkan operator energi $\hat{H}$ atau biasa dikenal juga dengan nama operator Hamiltonian adalah operator yang mewakili observabel energi pada ruang Hilbert, yang dinyatakan oleh:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x, y, z) \tag{1.50}$$

Kemudian kita subtitusikan persamaan (1.44) pada persamaan (1.50) di atas, akan kita dapatkan persamaan sebagai berikut :

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x, y, z) \tag{1.51}$$

Dengan $U(x, y, z)$ adalah energi potensial. Jika operator energi $\hat{H}$ memiliki nilai eigen E, maka persamaan eigennya adalah:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x,y,z)\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{1.52}$$

Apabila sebuah benda (partikel) bebas melaju pada sumbu x yang hanya memiliki energi kinetik saja tanpa energi potensial tertentu, maka operator energi $\hat{H}_x$ dinyatakan oleh:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{1.53}$$

Persamaan eigen untuk operator energi $\hat{H}_x$ adalah :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi_{\hat{H}}\rangle = E|\psi_{\hat{H}}\rangle \tag{1.54}$$

Kemudian persamaan (1.54) di atas, dapat kita sederhanakan lagi menjadi sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2\psi_{\hat{H}}}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\hat{H}} = 0 \tag{1.55}$$

Persamaan (1.55) di atas adalah persamaan diferensial orde 2 yang penyelesaian vektor eigennya adalah :

$$\psi_{\hat{H}}(x) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x} \tag{1.56}$$

Dengan C_1 dan C_2 adalah sebuah koefisien skalar tertentu. Apabila seharusnya $\psi_{\hat{p}}(x) = \psi_{\hat{H}}(x)$, maka $C_2 = 0$. Dengan demikian kita juga akan mendapatkan energi yaitu :

$$E = \frac{\hbar^2\Lambda^2}{2m} \tag{1.57}$$

Dan penyelesaian (vektor eigen) dari persamaan (1.54) di atas adalah sebagai berikut :

$$\psi(x) = Ce^{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x} \tag{1.58}$$

Dengan C adalah koefisien tertentu.

Contoh Soal 4.1:

Untuk setiap $x, y \in H$ (ruang Hilbert), kemudian buktikanlah ketidaksamaan Cauchy-Schwarz) berikut ini:

$$\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \geq |\langle x|y\rangle|$$

Jawaban :

Apabila kita perhatikan, maka ketidakpastian Cauchy-Schwarz diatas akan berlaku untuk $y = 0$. Namun, bagaimana jika kita punya $y \neq 0$? Dengan demikian kita dapat membuat dua asumsi sederhana, yaitu : $y \neq 0$ dan $\hat{y} = {}^{y}\!\big/_{\|y\|}$.

Kemudian kita lakukan :

$$\begin{aligned} x &= x \\ &= x + \langle x, \hat{y}\rangle\hat{y} - \langle x, \hat{y}\rangle\hat{y} \\ &= \langle x, \hat{y}\rangle\hat{y} + (x - \langle x, \hat{y}\rangle\hat{y}) \end{aligned}$$

Kita ketahui bahwa x dan y saling tegak lurus, maka $\hat{x} \perp \hat{y}$. Dengan demikian $\langle x, \hat{y}\rangle\hat{y}$ dan $(x - \langle x, \hat{y}\rangle\hat{y})$ juga saling tegak lurus, karena $\langle x, \hat{y}\rangle\hat{y}$ searah dengan $(x - \langle x, \hat{y}\rangle\hat{y})$ searah dengan $\hat{x}$. Jika demikian, maka teorema Pythagoras berlaku disini. Sehingga kita akan peroleh:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|\langle x, \hat{y}\rangle\hat{y}\|^2 + \|x - \langle\langle x, \hat{y}\rangle\hat{y}\rangle\|^2 \\ &= |\langle x, \hat{y}\rangle|^2 + \|x - \langle x, \hat{y}\rangle\hat{y}\|^2 \\ &\geq |\langle x, \hat{y}\rangle|^2 \end{aligned}$$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah kuanta energi planck dan munculnya konstanta planck !

2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan menghitung energi foton dan jumlah foton !

RANGKUMAN

1. Di dalam matematika modern, "ruang" didefenisikan sebagai himpunan yang disertai dengan beberapa struktur tambahan seperti ukuran, grup, topografi, metrik, urutan, relasi ekuivalen, diferensial dan kategori.
2. Ruang dalam matematika modern membentuk sebuah hierarki yang mungkin bisa dianalogikan mirip dengan konsep kasta. Ruang paling dasar dalam jajaran kasta tersebut adalah ruang topologi, kemudian ruang metrik, lalu ruang norma dan yang terakhir adalah ruang hasilkali dalam.
3. Ruang Hilbert adalah ruang vektor yang lengkap, yang normanya diinduksi dari ruang hasilkali dalam. Lengkap disini artinya barisan Cauchy x_n di x akan konvergen (berhingga) di X juga. Jika kita membaca buku-buku asli analisis real, maka kita akan diajak untuk mengenal kekonvergenan barisan Cauchy.
4. Didalam Mekanika Kuantum, sebuah vektor kolom bisa disebut "ket" dan dinotasikan dengan simbol $|u\rangle$. Sedangkan untuk vektor baris bisa disebut "bra" dan dinotasikan dengan simbol $\langle u|$. Dan tentunya semua "ket" ada di dalam ruang hilbert. Hasilkali dalam antara "bra" dan "ket" dapat kita tulis sebagai $\langle u|u\rangle$ yang apabila namanya kita gabungkan menjadi "bra(c)ket" kata dalam bahasa inggris yang artinya dalam bahasa indonesia "kurung siku".
5. Bila terdapat sebuah A yang kita sebut observabel (akronim dari observasi variabel) yaitu variabel yang kita amati seperti energi, momentum, massa, dsb, di ruang nyata. Maka observabel tersebut akan memiliki "kembaran" (dalam tanda kutip) $\hat{A}$, di ruang Hilbert, yang kita sebut dengan operator.

EVALUASI FORMATIF 4

1. Jelaskan ramalan Planck mengenai distribusi energi radiasi benda hitam
2. Intensitas cahaya matahari yang dapat ditangkap dan terdeteksi oleh suatu alat pendeteksi cahaya tampak yang berpanjang gelombang 700 nm dipermukaan bumi sebesar 1.500 W/m^2.

a. Energy tiap foton cahaya tampak yang dapat terdeteksi adalah…joule
b. Banyaknya foton cahaya yang terdeteksi oleh alat tiap detik apabila alat tersebut memiliki luas permukaan sebesar 3 m^2 adalah……foton

RANGKUMAN MODUL

1. $u = (u_1, u_2, u_3)$ disebut **vektor** dan bilangan-bilangan u_1, u_2 dan u_3 disebut **koordinat** (atau juga bisa disebut komponen vektor). Komponen-komponen vektor merupakan **skalar**.
2. Vektor dalam bentuk baris disebut **vektor baris** dan vektor dalam bentuk kolom disebut **vektor kolom**.
3. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris $(1\ x\ k)$ saja disebut matriks baris atau **vektor baris**. Sedangkan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom $(b\ x\ 1)$ saja disebut matriks kolom atau **vektor kolom.** Sama halnya dengan vektor, matriks juga dapat dijumlahkan, dikurangkan dan dikalikan.
4. Transpos dari suatu matriks M yang ditulis M^T adalah matriks yang didapatkan dengan menukar baris-baris pada matriks M menjadi kolom-kolom matriks transpos M^T dan kolom-kolom pada matriks M menjadi baris-baris pada matriks transpos M^T.
5. Matriks invers yang ditulis M^{-1} adalah sebuah matriks tertentu yang apabila dikalikan dengan matriks (pasangan inversnya) dari arah mana pun akan menghasilkan **matriks identitas**, I.
6. Determinan adalah hasil perkalian silang antar komponen yang berada pada baris dan kolom yang tidak bersesuaian.
7. Matriks ortogonal adalah matriks yang matriks inversnya sama dengan matriks transposnya, $M^{-1} = M^T$
8. Kata “eigen” berasal dari bahasa Jerman yang artinya dalam bahasa indonesia “milik sendiri”. Milik sendiri disini maksudnya adalah nilai skalar χ_l tertentu adalah milik matriks M yang bersifat khas dan hanya matriks M sendiri yang memiliki nilai – nilai ini.
9. Sebuah matriks M bujur sangkar akan memiliki nilai eigen lebih dari satu tergantung dari seberapa banyak **komponen diagonal** yang dia miliki. Komponen diagonal adalah komponen matriks M yang memiliki alamat $i = j$.

10. **Vektor eigen** adalah vektor kolom X_l tertentu yang menjadi pengali bagi matriks singular S_l sehingga menghasilkan matriks nol.
11. Sama halnya dengan nilai eigen, vektor eigen juga bersifat khas dan hanya matriks M sendiri yang memiliki vektor-vektor ini karena itu disebut vektor eigen (vektor miliknya sendiri).
12. Sebuah matriks M bujur sangkar akan memiliki vektor eigen lebih dari satu tergantung dari seberapa banyak komponen diagonal. Untuk matriks M 2 x 2 misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak dua, yaitu : m_{11} dan m_{22}. Maka banyaknya vektor eigen juga dua, yaitu : X_1 dan X_2.
13. Sedangkan untuk matriks M n x n misalnya, akan memiliki komponen diagonal sebanyak n, yaitu : m_{11}, m_{22}, ... , m_{nn}. Maka banyaknya vektor eigen juga n, yaitu : X_1, X_2, ... , X_n.
14. Di dalam matematika modern, "ruang" didefenisikan sebagai himpunan yang disertai dengan beberapa struktur tambahan seperti ukuran, grup, topografi, metrik, urutan, relasi ekuivalen, diferensial dan kategori.
15. Ruang dalam matematika modern membentuk sebuah hierarki yang mungkin bisa dianalogikan mirip dengan konsep kasta. Ruang paling dasar dalam jajaran kasta tersebut adalah ruang topologi, kemudian ruang metrik, lalu ruang norma dan yang terakhir adalah ruang hasilkali dalam.
16. Ruang Hilbert adalah ruang vektor yang lengkap, yang normanya diinduksi dari ruang hasilkali dalam. Lengkap disini artinya barisan Cauchy x_n di x akan konvergen (berhingga) di X juga. Jika kita membaca buku-buku asli analisis real, maka kita akan diajak untuk mengenal kekonvergenan barisan Cauchy.
17. Didalam Mekanika Kuantum, sebuah vektor kolom bisa disebut "ket" dan dinotasikan dengan simbol $|u\rangle$. Sedangkan untuk vektor baris bisa disebut "bra" dan dinotasikan dengan simbol $\langle u|$. Dan tentunya semua "ket" ada di dalam ruang hilbert. Hasilkali dalam antara "bra" dan "ket" dapat kita tulis sebagai $\langle u|u\rangle$ yang apabila namanya kita gabungkan menjadi "bra(c)ket" kata dalam bahasa inggris yang artinya dalam bahasa indonesia "kurung siku".Bila terdapat sebuah A yang kita sebut observabel (akronim dari observasi variabel) yaitu variabel yang kita amati seperti energi, momentum, massa,

dsb, di ruang nyata. Maka observabel tersebut akan memiliki "kembaran" (dalam tanda kutip) $\hat{A}$, di ruang Hilbert, yang kita sebut dengan operator.

DAFTAR PUSTAKA

1. Vani Sugiyono, S.T.2016. *Mekanika Kuantum.* Erlangga : Jakarta
2. David J Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Second Edition. Pearson Education International.
3. Mikrajuddin Abdullah. Fisika Statistik untuk Mahasiswa MIPA. *KK Fisika Material Elektronik - FMIPA, ITB.* Tidak Diterbitkan

Modul 2:

Lahirnya Teori Kuantum

PENDAHULUAN

Pada tahun 1792 seorang tukang porselen terkenal yang bernama Josiah Wedgwood, mengajarkan pada suksesornya bahwa porselen – porselen yang dipanaskan di dalam tungku. Jika porselen – porselen berwarna merah menyala, maka mereka akan memiliki suhu yang sama.

Pengetahuan mengenai porselen ini semakin berkembang dan ternyata tidak hanya porselen saja yang jika dipanaskan akan memiliki warna menyala yang sama pada suhu yang sama. Ternyata benda apapun jika dipanaskan di dalam tungku akan memiliki warna menyala yang sama, pada suhu yang sama pula.

Hal ini yang menarik para fisikawan di masa itu untuk mempelajarinya. Penelitian tentang warna dan suhu pun terus dilakukan dan berkembang dengan sangat pesat.

Kegiatan Pembelajaran 1: RADIASI BENDA HITAM

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa memiliki pengertian dan pemahaman mengenai radiasi benda hitam dan memahami kurva radiasi benda hitam.
2. Mahasiswa mampu menghitung besar energi yang dipancarkan radiasi benda hitam.

URAIAN MATERI

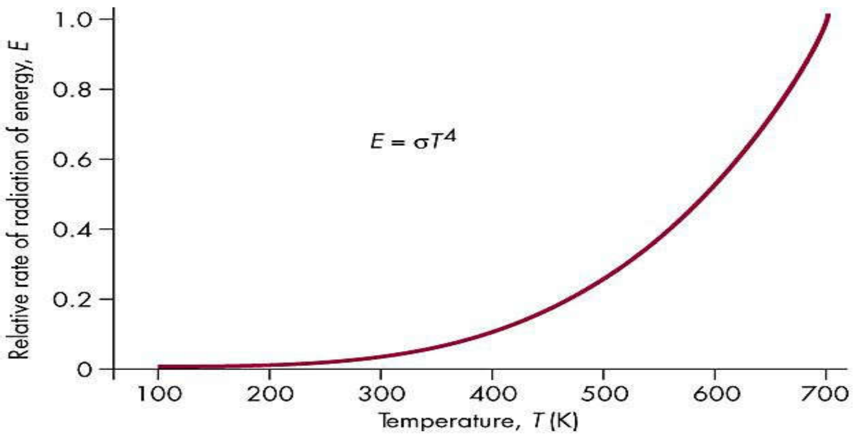
Konsep Dasar

Pada tahun 1879 seorang fisikawan Austria bernama Josef Stefan dengan dibantu oleh salah satu mahasiswanya (dari Austria) bernama Ludwig Boltzman melakukan eksperimen tentang "Benda Hitam".

Sebuah benda jika dipanaskan, maka benda tersebut akan memancarkan radiasi gelombang elektromagnetik. Pada saat benda tersebut mencapai suhu tertentu, benda tersebut akan terlihat menyala (berarti gelombang radiasi yang dipancarkan oleh benda hitam berada pada frekuensi cahaya tampak).

Pengetahuan tentang benda yang menyala jika dipanaskan adalah pengetahuan rahasia yang telah diketahui oleh para ahli porselen hampir satu abad lalu. Sedangkan "Benda Hitam" yang di maksud dalam eksperimen Stefan adalah benda yang menyerap gelombang elektromagnetik dengan baik, juga sekaligus memancarkan nya dengan baik. Salah satu benda hitam sempurna dalam kehidupan sehari-hari adalah **Matahari.**

Matahari adalah benda hitam yang sangat hitam atau hitam sempurna. Matahari terlihat terang karena dia sangat panas dan memancarkan radiasi gelombang elektromagnetik (cahaya) yang menyala. Dalam eksperimen yang dilakukan oleh Josef Stefan dan Ludwig Boltzman, mereka menghasilkan grafik daya persatuan luas P/A terhadap suhu sebagai berikut :



Gambar 1. Grafik daya persatuan luas terhadap suhu

(Sumber : https://www.pinterest.com/pin/129900770480591315/)

Dari grafik yang mereka dapatkan diatas, Stefan dan Boltzman berhasil membuat persamaan empiris daya persatuan luas :

$$\frac{P}{A} = e\sigma T^4 \qquad (2.1)$$

Dengan e adalah emisivitas atau derajat kehitaman benda yang menyatakan daya serap benda hitam terhadap gelombang elektromagnetik. Emisivitas berada pada rentang $0 \le e \le 1{,}0$ untuk benda putih mengkilat dan 1 untuk benda hitam mengkilat. Sedangkan σ adalah **konstanta Stefan-Boltzman** yang nilainya σ = 5,670373 x 10 $^{-8}$ Wm $^{-2}$ K^{-4}

Kemudian pada tahun 1896, seorang fisikawan Jerman yang bernama Wilhelm Wien melakukan eksperimen radiasi **rongga benda hitam** yang terbuat dari porselen dan platina. Secara matematis Wien merumuskan persamaan empiris densitas energi radiasi benda hitam persatuan frekuensi miliknya sebagai berikut :

$$\frac{du}{df} = \zeta_1 f^3 e^{-\zeta_2 f/T} \qquad (2.2)$$

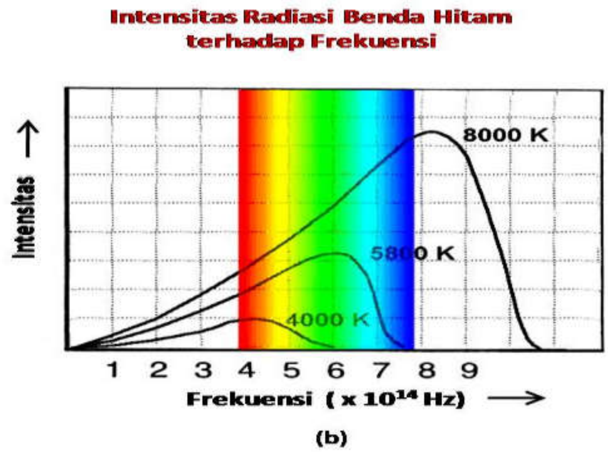
Dengan ζ_1 dan ζ_2 adalah parameter yang masih dalam ramalan. Secara fisis,Wien masih belum memahami apa sebenarnya ζ_1 dan ζ_2 yang jelas dua parameter itu masih menjadi misteri.

Akan tetapi walaupun masih menjadi misteri dan bahkan dia sendiri tidak memahami, namun persamaan Wien tersebut sangat sahih untuk menjelaskan radiasi benda hitam pada **frekuensi tinggi** (ultraviolet). Sedangkan untuk frekuensi rendah, dengan sangat menyesal Wien mengangkat kedua tangan nya.

Kurva Radiasi Benda Hitam

Jika Wilhelm Wien melakukan eksperimennya di Biro Standar Departemen Fisika Berlin, maka beda lagi dengan Heinrich Rubens, seorang fisikawan Jerman yang juga teman dari Wien. Rubens melakukan eksperimen yang sama di tempat yang berbeda namun masih dalam satu kota, Berlin. Dia juga menggunakan oven yang berbeda dan metode penelitian yang berbeda. Karena itu hasil eksperimen Rubens juga berbeda jauh dengan eksperimen Wien.

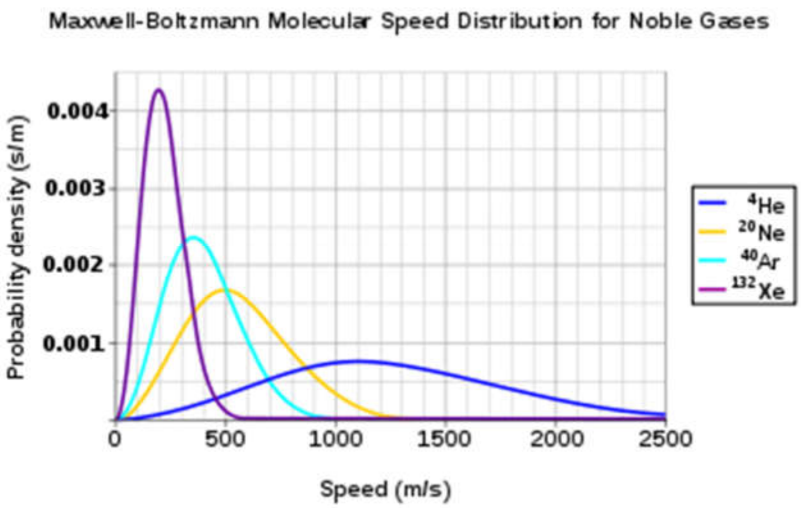
Rubens mendapatkan grafik intensitas radiasi benda hitam ***I*** terhadap frekuensi bentuk kurva yang sedikit mirip dengan kurva distribusi kecepatan molekul gas Maxwell yang dipanaskan dalam gas tertutup. Kurva intensitas radiasi benda hitam terhadap frekuensi yang dihasilkan dari eksperimen Rubens sebagai berikut :



Gambar 2. Kurva intensitas radiasi benda hitam terhadap frekuensi

(Sumber : http://andikablogaddres.blogspot.co.id/2015/06/fisika-astronomi_3.html)

Sedangkan kurva distribusi kecepatan molekul gas Maxwell yang dipanaskan dalam bejana tertutup adalah sebagai berikut :



Gambar 3. Distribusi kecepatan Maxwell

(*Sumber : https://id.wikipedia.org/wiki/Distribusi_Maxwell-Boltzmann*)

Apabila diperhatikan dengan seksama, dua grafik di atas tidak mirip. Namun, apabila dibandingkan dengan grafik-grafik sebelumnya, grafik distribusi Maxwell adalah yang paling mirip. Inilah yang membuat para fisikawan mulai berkiblat pada Maxwell untuk kasus radiasi benda hitam.

Contoh Soal 2.1:

Sebuah benda berwarna hitam (e=1) memiliki luas permukaan 100cm^2 dengan suhu 2.000 K. apabila konstanta Stefan-Boltzman sebesar 5,670 x 10 $^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4},maka energi radiasi benda hitam yang dipancarkan oleh benda tersebut tiap satuan waktu adalah sebesar……watt

Jawaban :

Diketahui :

$e = 1$

$\sigma = 5{,}67x10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$

$A = 1000cm^2$

$T = 2.000$

Ditanya
P = ... ?

Jawab

$$P = e\sigma A T^4$$

$$P = 1(5{,}67x10^{-8})\left(1000cm^2 x \frac{m^2}{10.000cm^2}\right)(2000^4)$$

$$P = 5{,}67x10^{-8} x \frac{1}{10} x1{,}6x10^{13}$$

$$p = 90.720watt$$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah pengertian radiasi benda hitam dan kurva radiasi benda hitam
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan menghitung besar energi yang dipancarkan radiasi benda hitam

RANGKUMAN

1. Pada tahun 1879 seorang fisikawan Austria bernama Josef Stefan dengan dibantu oleh salah satu mahasiswanya (dari Austria) bernama Ludwig Boltzman melakukan eksperimen tentang “Benda Hitam”.
2. Sebuah benda jika dipanaskan, maka benda tersebut akan memancarkan radiasi gelombang elektromagnetik. Pada saat benda tersebut mencapai suhu tertentu, benda tersebut akan terlihat menyala (berarti gelombang radiasi yang dipancarkan oleh benda hitam berada pada frekuensi cahaya tampak).
3. Stefan dan Boltzman berhasil membuat persamaan empiris daya persatuan luas :

   $$\frac{P}{A} = e\sigma T^4$$

4. Emisivitas berada pada rentang $0 \le e \le 1{,}0$ untuk benda putih mengkilat dan 1 untuk benda hitam mengkilat. Sedangkan σ adalah **konstanta Stefan-Boltzman** yang nilainya σ = 5,670373 x 10 $^{-8}$ Wm $^{-2}$ K^{-4}

5. Secara matematis Wien merumuskan persamaan empiris densitas energy radiasi benda hitam persatuan frekuensi miliknya sebagai berikut :

$$\frac{du}{df} = \zeta_1 f^3 e^{-\zeta_2 f / T}$$

6. Persamaan Wien tersebut sangat sahih untuk menjelaskan radiasi benda hitam pada **frekuensi tinggi** (ultraviolet).

EVALUASI FORMATIF 1

1. Jelaskan apa yang dimaksud benda hitam !
2. Jelaskan bagaimana persamaan Wien pada frekuensi rendah dan tinggi !
3. Jelaskan perbedaan hasil eksperimen Rubens dengan eksperimen Wien !
4. Jelaskan kenapa fisikawan mulai berkiblat pada Maxwell untuk kasus radiasi benda hitam !
5. Sebuah benda yang berwarna hitam (e=1) memiliki luas permukaan 20 cm^2 dengan suhu 5000 ^{0}K. apabila konstanta Stefan Boltzman sebesar 5,670x10^8 Wm^2 K^4, maka Berapa intensitas radiasi yang dipancarkan??

Kegiatan Pembelajaran 2: BENCANA ULTRAVIOLET

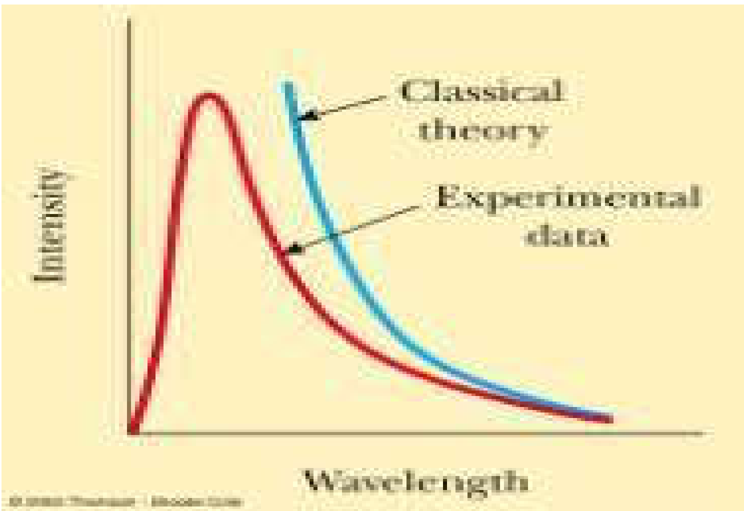
KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa mampu menjelaskan dan memahami bencana ultraviolet
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh dan latihan soal bencana ultraviolet

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Bencana ultraviolet (*ultraviolet catastrophe*), yang disebut juga “Bencana Rayleigh-Jeans”, adalah peramalan klasik, yang dibuat pada akhir abad ke-19, bahwa benda hitam ideal pada kesetimbangan termal akan memancarkan radiasi dengan daya tak hingga. Walaupun ramalan ini terbukti salah berdasarkan pengamatan, ramalan ini merupakan tanda-tanda awal adanya masalah pada fisika klasik. Pada tahun 1900, pemecahan Max Planck terhadap masalah ini bermuara pada bagian-bagian awal mekanika kuantum.



Gambar 4. UV Catastrophe

(*Sumber : http://electrons.wikidot.com/solving-ultraviolet-catastrophe*)

Kita dapat melihat berbagai benda karena cahaya yang mereka pantulkan. Pada suhu ruang, radiasi termal ini paling banyak terdapat dalam daerah spektrum inframerah pada daerah dimana mata kita tidak lagi peka. Bila benda tersebut kita panasi, mereka akan mulai memancarkan cahaya tampak.

Sebagai contoh, sepotong logam yang dipanaskan mula-mula tampak memijar dengan memancarkan warna merah tua dan jika terus dipanaskan warnanya berangsur berubah menjadi semakin kuning. Radiasi yang dipancarkan benda biasa tidak hanya bergantung pada suhu, tetapi juga sifat-sifat lainnya seperti permukaan dan materi penyusunnya. Radiasinya bergantung juga pada apakah ia memantulkan atau tidak memantulkan radiasi dari lingkungan sekitar yang jatuh padanya.

Tinjau suatu benda dengan seluruh permukaannya hitam. Jika benda seluruhnya hitam, maka benda tersebut tidak akan memantulkan radiasi yang mengenainya. Kita generalisasi lagi obyek tersebut sebagai benda hitam khusus (*cavity*) seperti sebuah kotak logam dengan lubang kecil di salah satu sisinya. Perhitungan klasik dari energi radian yang terpancar pada setiap panjang gelombang ini akan menghasilkan sebuah perumusan yang dikenal dengan rumus Rayleigh-Jeans.

Jika dibandingkan hasil perumusan ini (terlihat pada gambar dengan warna biru) terhadap data hasil percobaan (warna merah) akan terdapat perbedaan yang mendasar. Intensitas radian yang dihitung dengan menggunakan perumusan Rayleigh-Jeans tampak menghampiri data percobaan untuk daerah panjang gelombang yang panjang. Akan tetapi pada daerah panjang gelombang pendek, teori klasik ini sama sekali gagal. Kegagalan hukum Rayleigh-Jeans pada daerah panjang gelombang pendek ini disebut bencana ultraviolet.

Rayleigh-Jeans membuat sebuah persamaan mengenai densitas energy benda hitam dengan persatuan frekuensi yaitu

$$u_f = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT \qquad (3)$$

Dengan k pada persamaan (3) di atas merupakan ketetapan Boltzman yang bernilai k = 1,3807 x 10^{-23} J/K.

Akan tetapi betapa terkejutnya mereka setelah mengetahui fakta matematis yang mencengangkan pada persamaan yang berhasil mereka temukan. Mereka sebut fakta matematis ini **bencana ultraviolet.**

Persamaan yang berhasil dibuat oleh Rayleigh-Jeans mampu meramalkan distribusi benda hitam dengan sempurna untuk gelombang dengan **frekuensi rendah**, tidak untuk frekuensi tinggi. Pada frekuensi tinggi mereka menemukan fakta matematis bahwa radiasi benda hitam akan bernilai sangat besar sekali bahkan tak terhingga, inilah yang disebut teori **bencana ultraviolet.**

Jadi pada frekuensi dekat dengan frekuensi ultraviolet (sekitar 7,5 x 10^{14} Hz) distribusi energi radiasi benda hitam persatuan volume persatuan frekuensi akan bernilai sangat besar sekali (tak terhingga). Jika ini terjadi, maka radiasi benda hitam akan sangat berbahaya bagi tubuh kita. Saat duduk dibawah terik matahari atau duduk di dekat perapian atau bahkan saat duduk didekat secangkir kopi panas hitam, tubuh kita akan terbakar oleh radiasi yang dipancarkan olehnya.

Tapi pada kenyataan nya tidak.

Kenyataan nya saat duduk dibawah terik matahari atau duduk di dekat perapian atau saat duduk dekat kopi panas yang hitam, tubuh kita biasa saja, tidak terbakar oleh bencana ultraviolet yang sudah diramalkan oleh Rayleigh-Jeans. Itu artinya gagasan klasik harus diragukan kesahihannya.

Fisikawan yang memberikan interpretasi dengan benar mengenai radiasi termal adalah Max Planck (1858-1947). Planck mengemukakan bahwa osilasi atom hanya dapat menyerap atau memancarkan kembali energi dalam bentuk paket (kuanta). Dalam teori Planck, setiap osilator bisa memancarkan atau menyerap enrgi hanya dalam kuantitas perkalian integer dari energi ε. Ramalan ini disebut bencana ultraungu karena radiasi ultraungu memiliki frekuensi tertinggi dari semua radiasi yang dikenal pada saat itu (sinar-X dan sinar gamma belum ditemukan). Sejak munculnya istilah ini, istilah yang sama digunakan juga untuk sifat yang mirip, misalnya dalam elektrodinamika kuantum (yang disebut juga: divergensi ultraungu).

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah bencana ultraviolet
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan bencana ultraviolet

RANGKUMAN

1. Bencana ultraviolet (ultraviolet catastrophe), yang disebut juga “bencana Rayleigh-Jeans”, adalah peramalan klasik, yang dibuat pada akhir abad ke-19, bahwa benda hitam ideal pada kesetimbangan termal akan memancarkan radiasi dengan daya tak hingga.
2. Rayleigh-Jeans membuat sebuah persamaan mengenai densitas energy benda hitam dengan persatuan frekuensi yaitu :

$$u_f = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

3. Persamaan yang berhasil dibuat oleh Rayleigh-Jeans mampu meramalkan distribusi benda hitam dengan sempurna untuk gelombang dengan **frekuensi rendah**, tidak untuk frekuensi tinggi. Pada frekuensi tinggi mereka menemukan fakta matematis bahwa radiasi benda hitam akan bernilai sangat besar sekali bahkan tak terhingga, inilah yang disebut teori **bencana ultraviolet.**

EVALUASI FORMATIF 2

1. Jelaskan keberhasilan matematis yang dibuat oleh Reyleigh-Jeans dalam meramalkan distribusi radiasi benda hitam!
2. Jelaskan apa yang dimaksud bencana ultraviolet
3. Jelaskan hasil penemuan yang dilakukan oleh Rayleigh – Jeans !
4. Jelaskan hasil penemuan yang dilakukan Wien !
5. Jelaskan hasil penemuan yang dilakukan Plank !

Kegiatan Pembelajaran 3: KUANTA ENERGI PLANK

KEMAMPUAN YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa mampu menjelaskan Kuanta Energi Plank
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh soal dan latihan Kuanta Energi Plank

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Kelemahan dari persamaan Wien pada frekuensi rendah, sedangkan kelemahan persamaan Rayleigh-Jeans ada pada frekuensi tinggi. Itu artinya untuk frekuensi rendah persamaan Rayleigh-jeans shahih, sedangkan frekuensi tinggi persamaan Wien yang shahih.

Hal ini menarik seorang fisikawan senior asal Jerman bernama Max Planck. Planck percaya bahwa apa yang ditemukan oleh sahabatnya Wien shahih dan tidak dapat dipungkiri juga apa yang ditemukan oleh Rayleigh –Jeans juga shahih. Hanya saja keduanya shahih untuk rentang frekuensi tertentu. Karena itu Planck dengan berani meramalkan bahwa distribusi energy radiasi benda hitam akan memenuhi irisan keduanya.

Planck percaya bahwa irisan kedua persamaan tersebut akan memenuhi distribusi radiasi benda hitam yang mirip sekali dengan hasil kerja salah satu teman nya yang tidak lain adalah Henrich Rubens.

Secara matematis, ramalah Planck tentang densitas energi radiasi persatuan frekuensi dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$u_f = \zeta_1 f^3 \frac{1}{e^{-\zeta_2 f/T} - 1} \qquad (2.4)$$

Persamaan (4) merupakan perpaduan antara persamaan Rayleigh-Jeans dan persamaan Wien. Namun Planck merasa resah,karena persamaan nya hanyalah ramalan belaka. Sampai persamaan tersebut dipublikasikan,Planck masih belum mengerti makna yang terkandung didalamnya, termaksud konstanta-konstanta pada persamaannya (ζ_1=? Dan ζ_2=?).

Hingga akhirnya potongan roti saat sarapan pagi berhasil membuatnya memahami misteri alam semesta. Karena sepotong roti, Planck berhasil menemukan bahwa energi radiasi benda hitam bukan sebuah fungsi kontinyu (tak putus), akan tetapi fungsi diskrit (kuanta atau potongan).

Sebuah roti utuh apabila dipotong-potong dan disajikan pada susunan yang sama dengan susunan sebelum dia di potong-potong, maka roti tersebut akan terlihat utuh walaupun sebenarnya roti itu telah di potong-potong. Semakin tipis potongan roti, semakin tidak terlihat bahwa roti tersebut telah di potong-potong. Tapi, jangan sampai ketipisan potongan roti sama dengan nol (jika sama dengan nol, sama saja tidak dipotong). Begitu juga dengan radiasi benda hitam.

Menurut Planck energi bukan fungsi kontinyu, tetapi fungsi diskrit (kuanta atau potongan). Dengan potongan yang sangat kecil sekali, tapi tidak sampai dengan nol. Karena bingung, kenapa energi gelombang elektromagnetik berupa potongan, maka Planck mengeluarkan postulat.

Postulat Planck menyatakan bahwa energy radiasi gelombang elektromagnetik memiliki nilai :

$$E = n\Im = nhf \tag{2.5}$$

Dengan n adalah banyaknya potongan, sedangkan $\Im$ adalah potongan energi yang nilainya sama dengan $\Im = hf$ dan h adalah sebuahkonstanta yang pokoknya kecil sekali, tapi tidak sampai sama dengan nol. Jika seperti itu, maka energi rata-rata $\langle E \rangle$ bukan lagi didapat dari pembagian integral tetapi menggunakan notasi sigma.

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nhfe^{-nhf/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nhf/kT}} \tag{2.6}$$

Energi radiasi gelombang elektromagnetik berupa potongan hf dan pada daerah berfrekuensi tinggi energinya pun cukup besar. Energi yang cukup besar inilah yang mengakibatkan hanya sedikit getaran yang tereksitasi, sehingga persamaan Planck di atas aman dari bencana ultraviolet yang mengerikan tersebut.

Kemudian dengan mencocokkan antara persmaan Planck dengan hasil eksperimen Henrich Rubens - sahabatnya sendiri didapatkan harga h = 6,626 x 10^{-34} Js, adalah konstanta yang akhirnya ditemukan oleh Max Planck dan diberi nama sama dengan namanya sendiri yaitu **Konstanta Planck.**

Berkat gagasannya tentang kuanta (kuantum) energi, Planck meraih hadiah nobel dan namanya pun tercatat sebagai salah satu fisikawan yang membidani kelahiran gagasan baru yang kemudian kita kenal dengan nama **"Mekanika Kuantum".**

Jadi faktanya Planck lah yang kali pertama membidangi lahirnya Mekanika Kuantum berkat gagasan nya tentang kuanta energi.

Contoh Soal 2.2:

Intensitas cahaya matahari yang dapat ditangkap dan terdeteksi oleh suatu alat pendeteksi cahaya tampak yang berpanjang gelombang 600 nm dipermukaan bumi sebesar 1.300 W/m^2.

a. Energi tiap foton cahaya tampak yang dapat terdeteksi adalah…joule
b. Banyaknya foton cahaya yang terdeteksi oleh alat tiap detik apabila alat tersebut memiliki luas permukaan sebesar 1,5 m^2 adalah…….foton

Jawaban :

a. Energi tiap foton

$$\varepsilon = 6{,}626x10^{-34}\,Jsx\frac{3x10^{8}\,m/s}{600x10^{-9}\,m}$$

$$\varepsilon = 3{,}313x10^{-19}\,joule$$

b. Banyaknya foton

$$n = \frac{E}{\varepsilon}$$

$$n = \frac{(P/A)xAxt}{\varepsilon}$$

$$n = \frac{1300W/m^{2}x1{,}5m^{2}x1s}{3{,}313x10^{-19}\,joule}$$

$$n = 5{,}89x10^{21}\,foton$$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah kuanta energi plank dan munculnya konstanta plank.
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan menghitung energi foton dan jumlah foton.

RANGKUMAN

1. Planck meramalkan bahwa distribusi energy radiasi benda hitam akan memenuhi irisan persamaan Wien dan persamaan Rayleigh-jeans.
2. Secara matematis, ramalah Planck tentang densitas energy radiasi persatuan frekuensi dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$u_f = \zeta_1 f^3 \frac{1}{e^{-\zeta_2 f/T} - 1}$$

3. Planck berhasil menemukan bahwa energi radiasi benda hitam bukan sebuah fungsi kontinyu (tak putus), akan tetapi fungsi diskrit (kuanta atau potongan).
4. Postulat Planck menyatakan bahwa energy radiasi gelombang elektromagnetik memiliki nilai :

$$E = n\Im = nhf$$

Dengan n adalah banyaknya potongan, sedangkan $\Im$ adalah potongan energy yang nilainya sama dengan $\Im = hf$ dan h adalah sebuahkonstanta yang pokoknya kecil sekali, tapi tidak sampai sama dengan nol.

EVALUASI FORMATIF 3

1. Jelaskan distribusi energi radiasi benda hitam menurut plank !
2. Tuliskan persamaan matematis densitas energi rasiasi persatuan frekuensi menurut ramalan plank!
3. Jelaskan energi radiasi dengan fungsi diskrit !
4. Jelaskan postulat plank !
5. Intensitas cahaya matahari yang dapat ditangkap dan terdeteksi oleh suatu alat pendeteksi cahaya tampak yang berpanjang gelombang 700 nm dipermukaan bumi sebesar 1.500 W/m^2.
   a. Energy tiap foton cahaya tampak yang dapat terdeteksi adalah…joule
   b. Banyaknya foton cahaya yang terdeteksi oleh alat tiap detik apabila alat tersebut memiliki luas permukaan sebesar 3 m^2 adalah…….foton

Kegiatan Pembelajaran 4: HUKUM PERGESERAN WIEN

KEMAMPUAN YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa mampu menjelaskan hukum pergeseran wien
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh soal dan latihan hukum pergeseran wien

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Bak estafet yang bersambut, saat Planck berhasil memecahkan kebuntuan para fisikawan tentang radiasi benda hitam, saat itu pula Wien mengembangkan gagasan baru yang menyokong teori radiasi benda hitam. Gagasan baru itu akhirnya menghasilkan hukum yang bisa dikenal dengan nama **Hukum Pergeseran Wien.**

Jika suatu benda meradiasikan kalor pada temperatur tinggi (maksimum) puncak spektrum radiasi akan bergeser kearah panjang gelombang yang makin kecil. Bentuk grafik antara intensitas radiasi cahaya terhadap panjang gelombangnya, dinamakan grafik I dan lambda. Tampak bahwa untuk suhu yang lebih tinggi (T1 > T2 > T3), panjang gelombang untuk intensitas cahaya maksimum (atau energi cahaya maksimum) bergeser ke panjang gelombang yang lebih pendek.

Pada kondisi radiasi maksimum panjang gelombang dapat di rumuskan sebagai berikut :

$$l_m \, T = .C \tag{7}$$

Keterangan :

l_m = Panjang gelombang pada energi pancar maksimum (m)

T = Suhu mutlak benda (K)

C = Tetapan pergeseran wien ($2{,}898 \times 10^{-3}$ m.K)

Spektrum radiasi benda hitam pada awalnya dipelajari oleh Rayleigh dan Jeans menggunakan pendekatan fisika klasik.

Mereka meninjau radiasi dalam rongga bertemperatur *T* yang dindingnya merupakan pemantul sempurna sebagai sederetan gelombang elektromagnetik. Akan tetapi, pada suhu 2.000 K bentuk grafik hasil eksperimen berbeda dengan bentuk grafik yang dikemukakan Rayleigh dan Jeans.

Rayleigh dan Jeans meramalkan bahwa benda hitam ideal pada kesetimbangan termal akan memancarkan radiasi dengan daya tak terhingga. Akan tetapi, ramalan Rayleigh dan Jeans tidak terbukti secara eksperimental. Ramalan ini dikenal sebagai bencana ultraungu. Wien mempelajari hubungan antara suhu dan panjang gelombang pada intensitas maksimum. Puncak-puncak kurva pada grafik menunjukkan intensitas radiasi pada tiap-tiap suhu.

Contoh Soal 2.3:

Jika radiasi matahari pada intensitas maksimum adalah warna kuning dengan panjang gelombang 510 nm maka suhu permukaan matahari adalah…..

(Tetapan pergeseran Wien adalah 2,9 . 10 3 mK)

Jawaban :

Diketahui

$\lambda_m = 510nm = 510x10^{-9}\,m$

Ditanyakan :

$T \;=\; ...?$

Jawaban :

$\lambda_m.T = 2{,}9x10^{-3}$

$510.10^{-9}.T = 2{,}9x10^{-3}$

$T = \dfrac{2{,}9x10^{-3}}{510.10^{-9}}$

$T = \dfrac{2{,}9}{510}x10^{6}$

$T = 5{,}686x10^{3} = 5{,}69x10^{3}\,K$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah hukum pergeseran wien
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan pergeseran wien

RANGKUMAN

1. Hukum Pergeseran Wien menyatakan bahwa Jika suatu benda meradiasikan kalor pada temperatur tinggi (maksimum) puncak spektrum radiasi akan bergeser kearah panjang gelombang yang makin kecil.

2. Pada kondisi radiasi maksimum panjang gelombang dapat di rumuskan sebagai berikut :

$$l_m\ T = .C$$

3. Rayleigh dan Jeans meramalkan bahwa benda hitam ideal pada kesetimbangan termal akan memancarkan radiasi dengan daya tak terhingga. Akan tetapi, ramalan Rayleigh dan Jeans tidak terbukti secara eksperimental. Ramalan ini dikenal sebagai bencana ultraungu.

EVALUASI FORMATIF 4

1. Jelaskan Hukum Pergeseran Wien !
2. Tuliskan rumus kondisi radiasi maksimum panjang gelombang l_m T =.C !
3. Jelaskan ramalan Rayleigh dan Jeans yang dikenal sebagai bencana ultaungu !
4. Satuan permukaan benda hitam pada suhu 37 ^{0}C meradiasikan sejumlah gelombang elektromagnetik dengan panjang gelombang tertentu. Apabila konstanta Wien sebesar 2,898 x 10 $^{-3}$ m.k, maka panjang gelombang saat densitas energy radiasi benda hitam per satuan panjang gelombang U_λ bernilai maksimal sebesar….cm

RANGKUMAN MODUL

7. Pada tahun 1879 seorang fisikawan Austria bernama Josef Stefan dengan dibantu oleh salah satu mahasiswanya (dari Austria) bernama Ludwig Boltzman melakukan eksperimen tentang "Benda Hitam".
8. Sebuah benda jika dipanaskan, maka benda tersebut akan memancarkan radiasi gelombang elektromagnetik. Pada saat benda tersebut mencapai suhu tertentu, benda tersebut akan terlihat menyala (berarti gelombang radiasi yang dipancarkan oleh benda hitam berada pada frekuensi cahaya tampak).
9. Stefan dan Boltzman berhasil membuat persamaan empiris daya persatuan luas :

$$\frac{P}{A} = e\sigma T^4$$

10. Emisivitas berada pada rentang $0 \le e \le 1,0$ untuk benda putih mengkilat dan 1 untuk benda hitam mengkilat. Sedangkan σ adalah **konstanta Stefan-Boltzman** yang nilainya $\sigma = 5,670373 \times 10^{-8}$ Wm $^{-2}$ K^{-4}
11. Secara matematis Wien merumuskan persamaan empiris densitas energy radiasi benda hitam persatuan frekuensi miliknya sebagai berikut :

$$\frac{du}{df} = \zeta_1 f^3 e^{-\zeta_2 f/T}$$

12. Persamaan Wien tersebut sangat sahih untuk menjelaskan radiasi benda hitam pada **frekuensi tinggi** (ultraviolet).
13. Bencana ultraviolet (ultraviolet catastrophe), yang disebut juga "bencana Rayleigh-Jeans", adalah peramalan klasik, yang dibuat pada akhir abad ke-19, bahwa benda hitam ideal pada kesetimbangan termal akan memancarkan radiasi dengan daya tak hingga.
14. Rayleigh-Jeans membuat sebuah persamaan mengenai densitas energy benda hitam dengan persatuan frekuensi yaitu :

$$u_f = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

15. Persamaan yang berhasil dibuat oleh Rayleigh-Jeans mampu meramalkan distribusi benda hitam dengan sempurna untuk gelombang dengan **frekuensi rendah**, tidak untuk frekuensi tinggi. Pada frekuensi tinggi mereka menemukan fakta matematis bahwa radiasi benda hitam akan bernilai sangat besar sekali bahkan tak terhingga, inilah yang disebut teori **bencana ultraviolet.**

16. Planck meramalkan bahwa distribusi energy radiasi benda hitam akan memenuhi irisan persamaan Wien dan persamaan Rayleigh-jeans.
17. Secara matematis, ramalah Planck tentang densitas energy radiasi persatuan frekuensi dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$u_f = \zeta_1 f^3 \frac{1}{e^{-\zeta_2 f/T} - 1}$$

18. Planck berhasil menemukan bahwa energi radiasi benda hitam bukan sebuah fungsi kontinyu (tak putus), akan tetapi fungsi diskrit (kuanta atau potongan).
19. Postulat Planck menyatakan bahwa energy radiasi gelombang elektromagnetik memiliki nilai :

$$E = n\Im = nhf$$

    Dengan n adalah banyaknya potongan, sedangkan $\Im$ adalah potongan energy yang nilainya sama dengan $\Im = hf$ dan h adalah sebuahkonstanta yang pokoknya kecil sekali, tapi tidak sampai sama dengan nol.
20. Hukum Pergeseran Wien menyatakan bahwa Jika suatu benda meradiasikan kalor pada temperatur tinggi (maksimum) puncak spektrum radiasi akan bergeser kearah panjang gelombang yang makin kecil.
21. Pada kondisi radiasi maksimum panjang gelombang dapat di rumuskan sebagai berikut :

$$l_m\ T =.C$$

    Rayleigh dan Jeans meramalkan bahwa benda hitam ideal pada kesetimbangan termal akan memancarkan radiasi dengan daya tak terhingga. Akan tetapi, ramalan Rayleigh dan Jeans tidak terbukti secara eksperimental. Ramalan ini dikenal sebagai bencana ultraungu.

DAFTAR PUSTAKA

1. Vani Sugiyono, S.T.2016. *Mekanika Kuantum.* Erlangga : Jakarta
2. David J Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Second Edition. Pearson Education International.

3. Mikrajuddin Abdullah. Fisika Statistik untuk Mahasiswa MIPA. *KK Fisika Material Elektronik - FMIPA, ITB*. Tidak Diterbitkan

Modul 3:

Efek Fotolistrik dan Relativitas

PENDAHULUAN

Setelah berkutat dengan radiasi benda hitam, kali ini kita akan mempelajari materi yang cukup menarik untuk diperbincangkan, yaitu : **efek fotolistrik.** Seperti namanya, terdapat keterkaitan antara foto (cahaya) dan listrik.

Jika pada bulan November 2014 kemarin, beberapa di antara kita yang duduk bergelap-gelapan di dalam bioskop, mungkin di buat bingung oleh cerita yang sangat rumit dan juga seru dari film interstellar. Maka itu artinya kita telah masu dalam skenario yang Christopher Nolan inginkan. Ya, saya akui film itu memang sangat bagus dan dibuat dengan memperhatikan konsep-konsep dasar fisika. Hebatnya lagi film tersebut memadukan beberapa konsep fisika, seperti astrofisika, relativitas, dan juga mekanika kuantum.

Tapi, tidak bisa dimungkiri, kualitas sebuah film juga turut ditentukan oleh kualitas audio yang mendukungnya. Suara-suara dentuman besar, suara ledakan, suara mereka berbicara, suara musik pengiring yang menghipnotis kita. Semua itu mendukung keseruan sebuah film. Itulah sebabnya film-film zaman sekarang jauh lebih seru daripada film-film bisu zaman dahulu kala.

Pertanyaan sekarang adalah : teknologi apa yang dipakai pada audio sebuah film? Suara audio yang direkam, lalu disimpan dalam bentuk sinyal-sinyal optik disepanjang piringan film dan kemudian dibaca. Tapi, dengan teknologi apa?

Jawabannya ada adalah efek fotolistrik.

Tidak hanya untuk audio saja, efek fotolistrik juga dapat kita temui dalam kehidupan sehari-hari, saat bertukar pin BB lewat QR-code, kasir mengecek barcode, atau saat selfie menggunakan kamera hingga 13 megafixel. Semua itu adalah efekfotolistrik.

Di bab 3 ini kita akan merunut bagaimana konsep fotolistrik kali pertama ditemukan, bahkan hal itu telah menjadi sejarah yang terlupakan. Sejarah kadang dengan kejamnya melupaka jasa para fisikawan yang turut membuahi embrio pengetahuan, salah satunya, ya, efek fotolistrik yang akan dipelajari pada bab ini. Karena itu kita akan merunutnya dari awal, bagaimana konsep fotolistrik ini mulai membingungkan sampai efek fotolistrik ini dapat dijelaskan.

Baiklah, kita mulai perjalanan kita ke masa lalu dengan mesin waktu. Dan kita mulai dari : sinar katoda.

Kegiatan Pembelajaran 1: SINAR KATODA

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa memiliki pengertian dan pemahaman mengenai sinar katoda dan sinar rontgen
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh soal dan latihan mengenai sinar katoda dan sinar rontgen

URAIAN MATERI

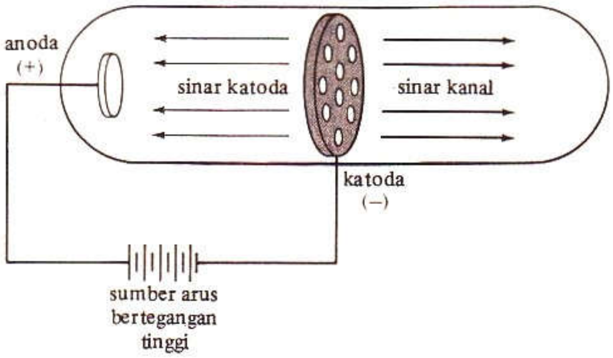
Konsep Dasar

Pada tahun 1650, Otto van Guerich mampu membuat tabung hampa udara dengan cara memompa keluar seluruh udara yang ada di dalam tabung. Namun, tabung vakum Guerich ini belum sepenuhnya vakum sempurna.

Baru pada tahun 1855, seorang fisikawan Jerman yang bernama Heinrich Geissler menyempurnakan tabung Guerich dengan membuat 99, 99% udara benar-benar terpompa ke luar. Sehingga tekanan udara dalam tabung menjadi 0,01% dari tekanan udara normal. Tabung vakum inilah yang akan menjadi salah satu bahan dalam pembuatan tabung sinar katoda.

Sinar Katoda

Sinar katoda adalah sinar yang tercipta dalam tabung vakum yang dialiri oleh arus listrik bertegangan tinggi. Cikal bakal sinar katoda, kali pertama ditemukan oleh Michael Faraday pada tahun 1838, yang kemudian disempurnakan oleh fisikawan inggris yang bernama Sir William Crookes dan teman-temannya di tahun 1975.



Gambar 3.1 Bagan terbentuknya sinar katoda

(Sumber : www.penaaksi.com/2010/11/pembentukan-sinar-katoda.html)

Lucutan Elektron

Pada tahun 1988, seorang ilmuean Inggris bernama Joseph John Thomson, melakukan penelitian tentang sinar ultraviolet yang tercipta dalam tabung sinar katoda.

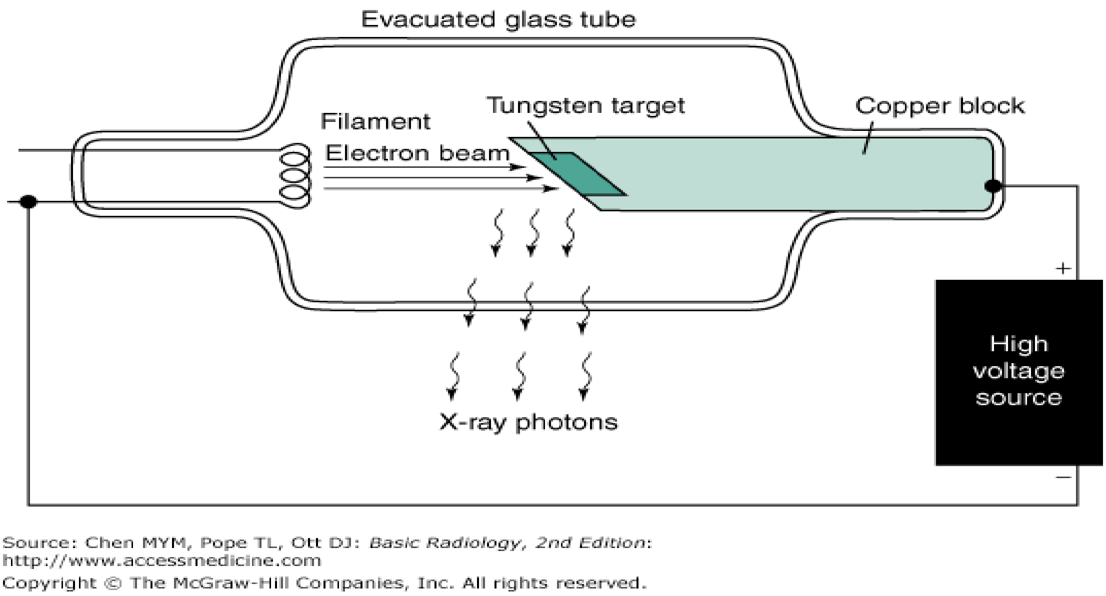
Di dalam tabung tersebut muatan negatif (pada masa itu belum diketahui namanya) mengalir dari elektroda negatif/ katoda ke elektroda positif/ anoda. Atas penelitiannya tersebut J.J Thomson berhasil menemukan elektron (yaitu muatan negatif yang belum memiliki nama pada masa itu). Karena itulah sinar katoda kadang juga disebut sebagai sinar **lucutan elektron** *atau electron beam (e-beam).*

Sinar Rongtgen (Sinar X)

Hadiah Nobel bidang fisika (1901), kali pertama diberikan kepada seorang fisikawan Jerman yang bernama Wilhemlm Conrad Rongtgen atas penelitiannya terhadap sinar yang akhirnya disebut **Sinar Rontgen** (atau sinar X)

Sinar Rontgen adalah sinar yang tercipta karena sinar katoda (lucutan elektron) dihalang-halangi oleh logam berat (yang disebut *antianoda*), sehinggga elektron yang terlucut melakukan pengereman mendadak untuk menghalangi tumbukan antara elektron dengan *antinanoda.* Karena melakukan pengereman yang mendadak, energi kinetik elektron turun dan berubah menjadi energi yang kemudian diepaskan dalam bentuk radiasi atau pancaran sinar. Sinar itulah yang disebut dengan sinar Rontgen atau sinar X.

Sinar Rontgen atau sinar X yang tercipta karena proses pengereman ini disebut sinar X *Bremstahlung* (pengereman). Jika masih bingung dengan proses pengereman, maka kita membuat analogi sederhana “si Deden naik motor sama Si Minah pacarnya yang akan menabrak kontainer”.



Gambar 3.2 Bagan terbentuknya Sinar X

(Sumber : Chem MyM, Pope TL, Ott DJ : Basic Radiologi, 2nd Edition)

Kita anggap “ si Deden dan si Minah beserta motornya” adalah elektron. Saat mereka melaju dengan kecepatan tinggi itu berarti mereka menjadi lucutan elektron. Jika ternyata di depan mereka ada sebuah kontainer (analogi dari *antianoda)* yang sedang diam dan masif, maka si Minah yang takut langsung memberitahukan si Deden pacarnya untuk melakukan pengereman mendadak. Saat melakukan pengereman mendadak energi kinetik mereka turun menjadi energi gesekan. Energi gesekan inilah, bila dalam keadaan mikroskopik akan dipancarkan menjadi gelombang elektromagnetik atau pancaran sinar.

Sinar Rontgen mampu menembus benda-benda padat tertentu. Sedangkan dia juga dapat menghitamkan filamen film. Dengan dua sifatnya tersebut Rontgen memanfaatkannya sebagai alat pencitra untuk memotret tulang istrinya.

Ternyata idenya berhasil. Penemuannya mampu diterapkan dalam dunia kedokteran untuk memotret tulang manusia. Berkat penemuan tersebut, Rontgen meraih hadiah nobel pertama bidang fisika.

Sinar Rontgen yang dipancarkan dengan energi tertentu akan memiliki panjang gelombang minimal tertentu. Hal ini sesuai dengan kuanta energi menurut Plank sebagai berikut $E = hf = hc/\lambda$.

Dengan demikian panjang gelombang **minimal** sinar Rontgen dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E} \tag{3.1}$$

Energi setara dengan beda potensial yang melucutkan elektron dengan satuan eV. nm. Maka panjang gelombang minimal sinar Rontgen dalam satuan nm (nanometer) dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\lambda_{\min} = \frac{1240\ eV.\,nm}{\Delta V} \tag{3.2}$$

Konon katanya, sebelum efek fotolistrik ditemukan, Rontgen sudah menemukan dan menelitinya lebih dulu. Namun, mungkin karena terlalu berkonsentrasi pada sinar Rontgen-nya, hingga efek fotolistrik tidak mendapat perhatian istimewa.

Tapi tidak bagi seorang fisikawan Hungaria yang bernama Philipp Lenard. Dia sangat tertarik pada sinar katoda dan juga pada fenomena aneh elektron yang kemudian dikenal dengan nama efek fotolistrik.

Contoh Soal 3.1:

Sinar Rontgen yang dipancarkan dengan energi tertentu akan memiliki panjang gelombang minimal tertentu. Sebuah alat dengan sumber tegangan tertentu mampu menghasilkan sinar X dengan panjang gelombang dalam rentang 0.31 nm – 1.24 nm, maka tegangan yang dipakai untuk melucutkan elektron adalah sebesar ... volt.

Jawaban :

Untuk menyelesaikan soal di atas kita bisa menggunakan persamaan (3.2), yang kita ubah menjadi :

$$\Delta V = \frac{1240\ eV.\,nm}{\lambda_{\min}}$$

Pada persamaan diatas kita hanya akan memakai panjang gelombang sinar x minimal. Jadi yang dipakai $\lambda_{\min} = 0.31\,nm$ sedangkan 1.24 nm tidak perlu kita hiraukan. Sehingga akan diperoleh :

$$\Delta V = \frac{1240\ eV.nm}{\lambda_{\min}}$$
$$= \frac{1240\ eV.nm}{0.31\ nm}$$
$$= 4000\ Volt$$

Dari perhitungan diatas, tegangan yang dipakai untuk melucutkan elektron adalah sebesar **4000 volt.**

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah sejarah munculnya sinar katoda
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil penjelasan tentang sifat-sifat sinar katoda dan cara kerja sinar katoda.

RANGKUMAN

1. **Sinar katoda** adalah sinar yang tercipta dalam tabung vakum yang dialiri oleh arus listrik bertegangan tinggi.
2. Pada tahun 1988, seorang ilmuean Inggris bernama Joseph John Thomson, melakukan penelitian tentang sinar ultraviolet yang tercipta dalam tabung sinar katoda. J.J Thomson berhasil menemukan elektron (yaitu muatan negatif yang belum memiliki nama pada masa itu). Karena itulah sinar katoda kadang juga disebut sebagai sinar **lucutan elektron** *atau electron beam (e-beam).*
3. Sinar Rontgen adalah sinar yang tercipta karena sinar katoda (lucutan elektron) dihalang-halangi oleh logam berat (yang disebut *antianoda*), sehinggga elektron yang terlucut melakukan pengereman mendadak untuk menghalangi tumbukan antara elektron dengan *antinanoda.*
4. Sinar Rontgen mampu menembus benda-benda padat tertentu. Sedangkan dia juga dapat menghitamkan filamen film. Dengan dua sifatnya tersebut Rontgen memanfaatkannya sebagai alat pencitra untuk memotret tulang

5. Sinar Rontgen yang dipancarkan dengan energi tertentu akan memiliki panjang gelombang minimal tertentu. Hal ini sesuai dengan kuanta energi menurut Plank sebagai berikut $E = hf = hc/\lambda$
6. Panjang gelombang **minimal** sinar Rontgen dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E}$$

7. Panjang gelombang minimal sinar Rontgen dalam satuan nm (nanometer) dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\lambda_{\min} = \frac{1240\ eV.\,nm}{\Delta V}$$

EVALUASI FORMATIF 1

1. Jelaskan apa yang dimaksud sinar katoda !
2. Jelaskan bagaimana proses munculnya lucutan elektron !
3. Jelaskan apa yang dimaksud dengan sinar rontgen !
4. Jelaskan kenapa fisikawan mulai berkiblat pada Maxwell untuk kasus radiasi benda hitam !
5. Jelaskan aplikasi sinar rontgen pada bidang kedokteran !
6. Sebuah alat dengan sumber tegangan tertentu dapat mengeluarkan sinar X dengan panjang gelombang minimal tertentu. Jika tegangan yang dipakai untuk melucutkan elektron pada alat tersebut sebesar 5000 volt, maka :
   a. Panjang gelombang minimal sinar X yang dapat dikeluarkan oleh alat tersebut adalah ... nm
   b. Apakah sembarang tegangan listrik dapat menghasilkan sinar X? Jika tidak, maka alasannya kenapa?

Kegiatan Pembelajaran 2: EFEK FOTOLISTRIK

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa mampu menjelaskan dan memahami efek fotolistrik
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh dan latihan soal efek fotolistrik

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Sementara fisikawan lainnya bergelut dengan benda hitam, Philipp Lenard lebih suka bergelut dengan sinar katoda yang akhirnya berhasil menghantarkannya meraih hadiah nobel dalam bidang fisika pada tahun 1905.

Dalam salah satu penelitiannya Lenard menemukan prilaku aneh yang dilakukan oleh cahaya dan elektron. Suatu ketika berkas cahaya dipancarkan di atas logam tertentu, dan ternyata cahaya tersebut dapat melontarkan elektron dari dalam logam tersebut Lenard terkejut dan bingung dengan fenomena aneh ini. Fenomena ini kemudian lebih umum dikenal dengan nama **efek fotolistrik.**

Selain itu Lenard juga berhasil menemukan bahwa elektron yang dilontarkan, akan memiliki energi kinetik yang besarnya tak bergantung pada intensitas cahaya yang dipancarkan di atas logam dan dia juga membuktikan adanya **frekuensi ambang.** Frekuensi ambang adalah frekuensi minimal yang dimiliki oleh cahaya agar dapat melontarkan elektron di dalam logam tersebut.

$$f_{cahaya} > f_{ambang} \; maka \quad terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$
$$f_{cahaya} < f_{ambang} \; maka \;\; tidak \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Namun, apa yang telah ditemukan oleh Pilipp Lenard hanya berupa gagasan dan data-data empiris dari hasil eksperimen saja, tanpa adanya persamaan secara matematis sama sekali. Hingga akhirnya pada tahun 1905, seorang pegawai kantor paten keturunan Yahudi yang bernama Albert Einstein, berhasil menerbitkan sebuah makalah ilmiah, yang diberi judul (jika diterjemahkan dalam bahasa Inggris) *"On an Heuristic Viewpoint Concerning the Nature of*

Light", yang mampu menjelaskan efek fotolistrik secara matematis dengan pendekatan fenomenologi.

Efek Fotolistrik Einstein

Pada waktu itu Einstein baru saja berusia 25 tahun, sekaligus baru saja menjadi seorang ayah bagi bayi laki-laki. Istrinya Mileva adalah teman kuliahnya dulu di Swiss. Di kampus prestasi Einstein tidak secemerlang Mileva istrinya yang acap kali menjadi mahasiswi teladan. Tapi, setidaknya Einstein merupakan salah satu diantara tiga mahasiswa teladan di s ana.

Penemuan yang luarbiasa itu terjadi saat Einstein yang baru saja menjadi seorang ayah, memulai sebuah diskusi ringan dengan Mileva, sambil menjemur pakaian mereka di loteng rumahnya yang kecil di jalan Kramergasse no. 49, Bern. Einstein ternyata secara diam-dia mengembangkan sendiri sebuah metode fluktuasi yang digunakan untuk menghitung perubahan entropi termampatkan.

Saat itu, Einstein menggunakan persamaan entropi Boltzmann yang sangat terkenal, yang berkaitan dengan **perubahan entropi** Δs pada **hukum II termodinamika** sebagai berikut :

$$\Delta s = k \ln W \tag{3.3}$$

Dengan W merupakan representasi dari probabilitas antara kondisi (ζV^N) pada saat entropi s dan kondisi asal (ζV_0^N) pada saat entropi s_0 (saat isotermal). Maka probabilitas tersebut dapat kita tulis sebagai $W = \zeta V^N / \zeta V_0^N = V^N / V_0^N$.

Dengan demikian perubahan entropi Boltzmann akan menjadi sebagai berikut :

$$\Delta s = k \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)^N \tag{3.4}$$

Pada hipotesisnya tersebut, Einstein menggunakan persamaan yang shahih untuk frekuensi tinggi radiasi benda hitam persatuan frekuensi menurut Wien adalah $u_f = \varsigma_1 f^3 e^{-\varsigma_2 f / T}$. Dari persamaan itu akan kita peroleh hubungan logaritma natural atau ln sebagai berikut :

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\varsigma_2 f} \ln \left(\frac{u_f}{\varsigma_1 f^3} \right) \tag{3.5}$$

Setelah itu, kita gunakan persamaan entropi pada hukum II termodinamika sebagai berikut :

$$ds = \frac{\delta Q}{T} \tag{3.6}$$

Dengan Q adalah kalor, yang dapat didefenisikan sesuai dengan hukum termodinamika I sebagai penjumlahan antara perubahan energi dalam dan usaha.

$$\delta Q = dU + PdV \tag{3.7}$$

Dengan U adalah **energi dalam**, P adalah **tekanan**, dan V adalah Volume. Pada kasus isokhorik (Volume tetap), dV = 0, maka δQ = dU. Dengan demikian persamaan (3.6) di atas akan menjadi sebagai berikut :

$$ds = \frac{\delta U}{T} \tag{3.8}$$

Energi dalam dapat didefenisikan sebagai $U = u_f \; Vdf$.

Kemudian kita masukkan persamaan (3.5) di atas ke dalam persamaan (3.8), maka akan kita peroleh :

$$ds = -\frac{du_f Vdf}{\varsigma_2 f} \ln\left(\frac{u_f}{\varsigma_1 f^3}\right) \tag{3.9}$$

Jika kita nyatakan dalam bentuk integral persamaan (3.9) di atas, maka akan menjadi sebagai berikut :

$$s = -\frac{Vdf}{\varsigma_2 f} \ln\left(\frac{u_f}{\varsigma_1 f^3}\right) du_f \tag{3.10}$$

Ingatlah bahwa $\int \ln \alpha \; x \; dx = x[x \log \alpha x - 1]$, sehingga persamaan (3.10) di atas akan menjadi:

$$\begin{aligned} s &= -\frac{u_f Vdf}{\varsigma_2 f}\left[\ln\left(\frac{u_f}{\varsigma_1 f^3}\right) - 1\right] + C \\ &= -\frac{Uf}{\varsigma_2 f}\left[\ln\left(\frac{u_f}{V\varsigma_1 f^3 df}\right) - 1\right] + C \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dari persamaan (3.11) kita akan memperoleh perubahan entalpi $\Delta s = s - s_0$, sebagai berikut :

$$\Delta s = \frac{U}{\varsigma_2 f} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \tag{3.12}$$

Kemudian langkah terakhir, kita hubungkan persamaan (3.4) di atas dengan persamaan (3.12), menjadi :

$$\Delta s = k \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^N = \frac{U}{\varsigma_2 f} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \tag{3.13}$$

Dari persamaan (3.13) di atas, kita peroleh hubungan eksponen sebagai berikut :

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{Nk} = \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{U}{\varsigma_2 f}} \tag{3.14}$$

Dan akhirnya kita dapatkan hubungan antarpangkat dari persamaan (3.14) di atas, sebagai berikut :

$$Nk = \frac{U}{\varsigma_2 f} \quad maka \quad U = N\ k\ \varsigma_2 f \tag{3.15}$$

Karena U adalah energi total, untuk energi tiap radiasi tunggal E = U/ N. Dari sinilah Einstein mendapatkan energi tiap radiasi tunggal adalah sebagai berikut:

$$E = k\ \varsigma_2\ f \tag{3.16}$$

Permasalahannya sekarang parameter ς_2 itu apa? Sedangkan Einstein sendiri bena-benar tidak mau melihat pekerjaan Plank tentang kuanta energi.

Tapi, beruntunglah Einstein memiliki seorang istri yang tidak kalah jenius seperti halnya Mileva. Mileva memaksa Einstein untuk mempertimbangkan parameter $\varsigma_2 = h/k$ yang telah diselesaikan oleh Plank. Dengan sedikit ragu, Einstein menggunakannya dan akhirnya persamaan energi tiap radiasi tunggal atau **foton** yang dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$E = hf \tag{3.17}$$

Einstein kaget, karena persamaan energi foton cahayanya berubah menjadi kuanta energi Plank, yang pada saat itu memang masih dalam status **postulat** belaka tanpa ada penjelasan secara matematis. Walaupun sudah ditemukan oleh Plank (dalam bentuk postulat), setidaknya Einstein membuktikan bahwa postulat Plank tentang kuanta energi shahih.

Syukurlah, Einstein tidak berhenti sampai disini. Dia masih ingin membuktikan efek fotolistrik yang pernah diteliti oleh Philipp Lenard yang akhirnya mendapatkan hadiah nobel pada tahun 1905 atas penelitiannya terhadap sinar katoda pada tahun yang sama saat Einstein menurunkan persamaan (3.17) diatas.

Berdasarkan pada gagasan Einstein, elektron dapat bergerak karena dia memiliki energi kinetik. Energi kinetik elektron besarnya sama dengan selisih dari energi foton cahaya dan fungsi kerja logam yang dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$K = \frac{1}{2} m_e v_e^{\ 2} = hf - hf_0 \tag{3.18}$$

Yang mana persamaan (3.18) diatas, mampu menjelaskan **frekuensi ambang** yang pernah dikerjakan oleh Philipp Lenard sebelumnya (tapi Lenard belum mampu menjelaskan bagaimana ini terjadi). Jika energi foton cahaya lebih besar daripada fungsi logam, maka akan terjadi efek fotolistrik.

$$hf > hf_0 \quad maka \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Karena h adalah nilai konstan, maka pernyataan tersebut akan **ekuivalen** dengan : Jika frekuensi foton cahaya lebih besar daripada frekuensi kerja logam, maka akan terjadi efek fotolistrik.

$$f > f_0 \quad maka \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Dan sebaliknya, jika frekuensi foton cahaya lebih kecil daripada frekuensi kerja logam, maka tidak akan terjadi efek fotolistrik.

$$f < f_0 \quad maka \;\; tidak \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Contoh Soal 3.2:

Sebuah lempengan yang terbuat dari potasium disinari oleh cahaya ultraviolet. Jika panjang gelombang ambang potasium adalah 558 nm. Maka :

a. Fungsi kerja potasium sebesar ... eV
b. Energi radiasi foton cahaya ultraviolet berdasarkan kuanta energi Plank adalah sebesar ... eV.
c. Pada peristiwa ini terjadi efek fotolistrik apa tidak? Jika terjadi efek fotolistrik, maka energi kinetik elektron yang terlontar adalah sebesar .... eV.
d. Jika massa elektron adalah $9{,}1 \; x \; 10^{-31} \; kg$, maka elektron akan terlontar dengan kecepatan .. m/s.

Jawaban :

a. Fungsi Kerja Potasium :

Berdasarkan pada kuanta energi Plank, maka fungsi kerja suatu unsur tertentu adalah hf_0. Lalu kita ingat bahwa $f = c / \lambda$, maka fungsi kerja dapat kita nyatakan sebagai : $\phi = \dfrac{hc}{\lambda_0} \approx \dfrac{1240 \; nm.\, eV}{\lambda_0}$

Sehingga kita akan peroleh :

$$\phi = \frac{1240\ nm.\ eV}{\lambda_0} = \frac{1240\ nm.\ eV}{558\ nm} \approx 2.22\ eV$$

Dari perhitungan di atas, maka fungsi kerja potasium sebesar 2.22 eV.

b. Energi radiasi foton cahaya ultraviolet :

Berdasarkan pada kuanta energi Plank, maka energi rasiasi satu foton cahaya adalah hf . Lalu kita ingat bahwa $f = c/\lambda$, maka energi radiasi foton cahaya dapat kita nyatakan :

$$\xi = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{1240\ nm.\ eV}{\lambda}$$

Kita gunakan cahaya ultraviolet untuk menyinari lempeng potasium. Padahal pada soal-soal di bab sebelumnya, kita ketahui bahwa panjang gelombang cahaya ultraviolet sekitar 400 nm. Sehingga kita akan peroleh :

$$\xi = \frac{1240\ nm.\ eV}{\lambda} = \frac{1240\ nm.\ eV}{400 nm} \approx 3.1\ eV$$

Dari perhitungan di atas, maka radiasi satu foton cahaya ultraviolet berdasarkan kuanta energi Plank sebesar 3.1 eV.

c. Energi kinetik efek fotolistrik :

Terjadi, karena $\xi > \phi$, berdasarkan pada persamaan efek fotolistrik yang telah ditemukan oleh Einstein. Maka energi kinetik elektron :

$$K = \xi - \phi = 3.1\ eV - 2.22\ eV = 0.88\ eV$$

Dari perhitungan diatas, maka energi kinetik fotolistrik pada peristiwa diatas sebesar 0.88 eV.

d. Kecepatan elektron yang terlontar :

Jika kita gunakan mekanika klasik, maka energi kinetik adalah $K = \xi - \phi = 1/2\ mv^2$, maka kecepatan elektron pada efek fotolistrik bisa di nyatakan oleh persamaan :

$$v = \sqrt{\frac{2\ (\ \xi - \phi)}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ x\ 0.88\ eV\ \ x\ 1.6\ x 10^{-19}\ \frac{J}{eV}}{9.1\ x\ 10^{-31}\ kg}} \approx 5.56\ x\ 10^5\ m/s$$

Dari perhitungan diatas, maka elektronakan terlontar dengan kecepatan $5.56\ x\ 10^5\ m/s$.

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah efek fotolistrik
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan efek fotolistrik

RANGKUMAN

1. Suatu ketika berkas cahaya dipancarkan di atas logam tertentu, dan ternyata cahaya tersebut dapat melontarkan elektron dari dalam logam dikenal dengan nama **efek fotolistrik.**
2. Elektron yang dilontarkan, akan memiliki energi kinetik yang besarnya tak bergantung pada intensitas cahaya yang dipancarkan di atas logam dan dia juga membuktikan adanya **frekuensi ambang.** Frekuensi ambang adalah frekuensi minimal yang dimiliki oleh cahaya agar dapat melontarkan elektron di dalam logam tersebut.

$$f_{cahaya} > f_{ambang} \text{ maka terjadi efek fotolistrik}$$
$$f_{cahaya} < f_{ambang} \text{ maka tidak terjadi efek fotolistrik}$$

3. Pada tahun 1905, seorang pegawai kantor paten keturunan Yahudi yang bernama Albert Einstein, berhasil menerbitkan sebuah makalah ilmiah, yang diberi judul (jika diterjemahkan dalam bahasa Inggris) *"On an Heuristic Viewpoint Concerning the Nature of Light",* yang mampu menjelaskan efek fotolistrik secara matematis dengan pendekatan fenomenologi.
4. Einstein menggunakan parameter $\varsigma_2 = h/k$ yang telah diselesaikan oleh Plank dan akhirnya persamaan energi tiap radiasi tunggal atau **foton** yang dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$E = hf$$

Persamaan energi foton cahaya Einstein mampu membuktikan bahwa postulat Plank tentang kuanta energi shahih.

5. Berdasarkan pada gagasan Einstein, elektron dapat bergerak karena dia memiliki energi kinetik. Energi kinetik elektron besarnya sama dengan selisih dari energi foton cahaya dan fungsi kerja logam yang dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$K = \frac{1}{2} m_e v_e^{\,2} = hf - hf_0$$

Yang mana persamaan diatas, mampu menjelaskan **frekuensi ambang** yang pernah dikerjakan oleh Philipp Lenard sebelumnya. Jika energi foton cahaya lebih besar daripada fungsi logam, maka akan terjadi efek fotolistrik.

$$hf > hf_0 \quad maka \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Karena h adalah nilai konstan, maka pernyataan tersebut akan **ekuivalen** dengan : Jika frekuensi foton cahaya lebih besar daripada frekuensi kerja logam, maka akan terjadi efek fotolistrik.

$$f > f_0 \quad maka \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Dan sebaliknya, jika frekuensi foton cahaya lebih kecil daripada frekuensi kerja logam, maka tidak akan terjadi efek fotolistrik.

$$f < f_0 \quad maka \;\; tidak \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

EVALUASI FORMATIF 2

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan efek fotolistrik !
2. Jelaskan apa yang dimaksud frekuensi ambang yang ditemukan Philipp Lenard dan apa perbedaannya dengan frekuensi ambang yang ditemukan Einstein!
3. Jelaskan bagaimana Einstein mampu menjelaskan postulat yang dibuat oleh plank !
4. Jika lempeng potasium disinari oleh cahaya inframerah dan panjang gelombang ambang potasium adalah 558 nm. Maka :
   a. Fungsi kerja potasium sebesar .... eV.
   b. Energi radiasi foton cahaya inframerah berdasarkan kuanta energi Plank adalah sebesar ... eV.
   c. Pada peristiwa ini terjadi efek fotolistrik apa tidak? Jika terjadi efek fotolistrik, maka energi kinetik elektron yang terlontar adalah sebesar ... eV.
5. Fungsi kerja perak adalah sebesar 4.26 eV, fungsi kerja emas adalah 5.1 eV, fungsi kerja natrium adalah 2.36 eV, fungsi kerja kalium adalah 2.29 eV, dan fungsi kerja rubidium adalah 2.261 eV. Maka :
   a. Diantara 5 unsur di atas, yang paling mudah terjadi efek fotolistrik adalah .... dan yang paling sulit adalah ...
   b. Diantara 5 unsur di atas, yang dapat terjadi efek fotolistrik jika disinari oleh cahaya ultraviolet adalah ...
   c. Diantara 5 unsur di atas, apabila terjadi efek fotolistrik setelah disinari dengan cahaya ultraviolet, siapakah yang memiliki energi kinetik terbesar dan energi kinetik terkecil?

Kegiatan Pembelajaran 3: RELATIVITAS EINSTEIN

KEMAMPUAN YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa mampu menjelaskan relativitas khusus einstein, dilatasi waktu, kontraksi panjang, massa relativistik, energi relativistik, momentum relativistik dan gaya relatifistik.
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh soal dan latihan relativitas khusus einstein, dilatasi waktu, kontraksi panjang, massa relativistik, energi relativistik, momentum relativistik dan gaya relatifistik

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Relativitas Khusus Einstein

Ternyata sumbangsih Eisntein pada dunia, tidak hanya sebatas pada efek fotolistrik saja, ditahun yang sama yaitu 1905, Einstein juga menerbitkan makalah ilmiahnya tentang relativitas berbarengan dengan makalah efek fotolistriknya.

Jika mekanika kuantum adalah hasil pemikiran secara berjamaah antara fisikawan-fisikawan top dunia, maka relativitas adalah hasil pemikiran satu orang saja, yaitu si jenius Albert Einstein, yang saat itu hanya sebagai seorang pegawai paten biasa dan sekaligus baru saja magang menjadi seorang ayah.

Apabila kita telusuri sejarahnya, kita akan dibuat terkejut setelah mengetahui bahwa relativitas tidak hanya milik Einstein. Gagasan tentang relativitas ternyata sempat disinggung oleh seorang fisikawan Italia yang bernama Galileo Galilei. Tapi, teori relativitas Galileo adalah sesuatu yang benar-benar baru dimasa itu. Bayangkan, di masa semodern ini saja teori relativitas Einstein adalah teori yang sangat rumit untuk dimengerti, apalagi di masa Galileo yang bisa dikatakan ilmu pengetahuan masih belum lengkap.

Kita perlu berterimakasih, karena jasa para fisikawan dan para matematikawan dunia, sehingga ilmu pengetahuan terus tumbuh dan menjadi sesuatu yang solid. Berkat kesolidan itulah, kita dapat mempelajari banyak hal yang cukup mudah.

Termasuk relativitas khusus Einstein.

Baiklah, kita kembali pada gagasan relativitas khusus Einstein. Einstein memulai gagasannya dengan dua postulat :

1. Hukum-hukum fisika mungkin sama untuk semua kerangka acuan inersia.
2. Pada ruang hampa kecepatan cahaya selalu tetap untuk semua kerangka acuan inersia.

Saat menyusun gagasannya, Einstein tidak mengetahui bahwa Michelson dan Molrey telah melakukan percobaan pencarian *ether*. Berdasarkan percobaan tersebut ternyata postulat **kedua** Einstein tak sengaja **telah terbukti.**

Pada intinya pokok-pokok gagasan relativitas khusus Einstein adalah sebagai berikut :

- Dua kejadian yang **simultan** dalam satu kerangka acuan tertentu, tak lagi simultan apabila kejadian kedua bergerak relatif terhadap kejadian pertama. Ini artinya waktu bagi seseorang yang sedang berjalan di atas pesawat luar angkasa, berbeda dengan waktu yang dirasakan oleh orang yang hanya duduk di atas perahu.
- Kemudian sebuah objek yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya, bagi pengamat yang diam, **waktu, panjang objek** (teramati), dan **besaran-besaran** lain (massa, momentum, energi) tidak lagi mutlak. Artinya hukum-hukum fisika klasik tak mampu lagi menjelaskan gerak-gerak benda yang melaju dengan kecepatan yang sangat cepat sekali yang mendekati kecepatan cahaya.

Dilatasi Waktu

Dilatasi waktu adalah fenomena yang mana waktu teramati oleh pengamat diam, seakan-akan mengalami **pemuluran** terhadap waktu yang teramati oleh objek yang melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya.

Sebuah objek (yang berada di dalam kendaraan super cepat) menembakkan sinar (pulsa) ke atas, kemudian sinar tersebut memantul dan kembali ke bawah.

Bagi objek tersebut waktu yang dibutuhkan oleh sinar hingga kembali lagi ke bawah adalah :

$$\begin{aligned}\Delta t_{ob} &= \Delta \vec{t}_{ob} + \Delta \overleftarrow{t}_{ob} \\ &= \frac{d}{c} + \frac{d}{c} = \frac{2d}{c}\end{aligned}$$

Sehingga kita akan memperoleh Δt_{ob} sebagai berikut :

$$\Delta t_{ob} = \frac{2d}{c} \tag{3.19}$$

Sedangkan bagi pengamat diam (yang berada diluar kendaraan super cepat dengan kecepatan v), waktu yang dibutuhkan oleh sinar ke atas kemudian dipantulkan dan kembali lagi kebawah adalah :

$$\left(\frac{c\ \Delta t_{Pe}}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\ \Delta t_{Pe}}{2}\right)^2 + d^2$$

$$\left(\frac{c\ \Delta t_{Pe}}{2}\right)^2 - \left(\frac{v\ \Delta t_{Pe}}{2}\right)^2 = d^2$$

$$\Delta t^2{}_{Pe}\ (c^2 - v^2) = 2^2 d^2$$

$$\Delta t_{Pe} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Sehingga kita akan peroleh Δt_{Pe} sebagai berikut :

$$\Delta t_{Pe} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.20)$$

Bagi pengamat yang diam, waktu yang terukur baginya adalah Δt_{Pe} . Sedangkan bagi objek yang bergerak, waktu yang terukur adalah Δt_{Ob} . Kemudian kita subtitusian persamaan (3.19) dan persamaaan (3.20), maka kita akan dapatkan bahwa waktu yang teramati oleh pengamat diam dan waktu yang dirasakan oleh objek dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\Delta t_{Pe} = \Delta t_{Ob} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.21)$$

Kontraksi Panjang

Kontraksi panjang adalah fenomena relativistik yang mana **panjang objek** (yang melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya) seakan-akan lebih pendek dari panjang yang sebenarnya (atau panjang diamnya) menurut **pengamatan diam**.

Namun, perlu dicermati bahwa panjang diam objek harus berada sejajar dengan sumbu geraknya.

Panjang objek yang sebenarnya atau panjang yang teramati oleh objek pada keadaan diam dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$l_{Ob} = v\ \Delta t_{Pe} \tag{3.22}$$

Bagi pengamat yang diam, panjang objek yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$l_{Pe} = v\ \Delta t_{Ob} \tag{3.23}$$

Dengan menggabungkan persamaan (3.22) dan persamaan (3.23) diatas, maka panjang objek yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya yang teramati oleh pengamat yang diam adalah :

$$\begin{aligned} l_{Pe} &= v\ \Delta t_{Ob} \\ &= v\left(\Delta t_{Pe}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \\ &= \left(v\ \Delta t_{Pe}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad = \ l_{Ob}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Dengan demikian kontraksi panjang objek yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$l_{Pe} = l_{Ob}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.24}$$

Bagi pengamat yang diam, panjang objek yang teramati olehnya adalah l_{Pe}. Sedangkan panjang sebenarnya objek atau bisa juga disebut sebagai panjang diam adalah l_{Ob}. Dari persamaan (3.24) di atas terlihat jelas bahwa bagi **pengamat diam**, panjang mengalami kontraksi (pemendekan), $l_{Pe} < l_{Ob}$.

Massa Relativistik

Massa relativistik adalah massa sebuah benda yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Semakin besar kecepatan gerak benda, maka semakin besar massa relativistiknya. Massa relativistik lebih besar dari pada massa diamnya (massa yang teramati benda itu sendiri), $m > m_0$.

Secara matematis, massa relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.25}$$

Energi Relativistik

Energi relativistik adalah energi yang dimiliki oleh benda yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Untuk memperoleh energi relativistik, kita harus melakukan analisis sebagai berikut :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m^2 = \frac{m^2{}_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$m^2 - m^2 \frac{v^2}{c^2} = m^2{}_0$$

$$d\left(m^2 - m^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = d\left(m^2{}_0\right)$$

$$2mdm - \left(2m \frac{v^2}{c^2} dm + 2v \frac{m^2}{c^2} dv \right) = 0$$

$$c^2 dm - \left(v^2\ dm + mvdv\right) = 0$$

$$c^2 dm = v^2\ dm + mvdv$$

Dari analisis diatas, kita akan peroleh hubungan seperti di bawah ini :

$$c^2 dm = v^2\ dm + mvdv \tag{3.26}$$

Energi dari sebuah benda yang sedang bergerak dapat didefenisikan sebagai hasilkali titik antara gaya F dengan perpindahan s atau $E = F.ds$. Maka dari defenisi tersebut, kita dapat melakukan analisis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E &= F.ds \\ &= \frac{d\ (mv)}{dt}.ds \\ &= \left(v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt} \right).ds \\ &= v\frac{ds}{dt}\,dm + m\frac{ds}{dt}\,dv = v^2\ dm + mvdv \end{aligned}$$

Dari analisis di atas, kita akan peroleh :

$$E = v^2\ dm + mvdv \qquad (3.27)$$

Kemudian, masukkan persamaan (3.26) ke dalam persamaan (3.27) di atas, sehingga akan kita dapatkan :

$$E = \int v^2\ dm + mvdv = \int c^2\ dm = mc^2$$

Dari analisis di atas, kita peroleh bahwa energi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$E = mc^2 \qquad (3.28)$$

Konsep tentang energi relativistik, kali pertama diperkenalkan oleh Albert Einstein. Karena itulah sosok Einstein lebih kita kenal dengan $E = mc^2$, yang merupakan rumus **energi relativistik.**

Jika kita subsitusikan persamaan massa relativistik yaitu persamaan (3.25) pada persamaan (3.28) di atas, maka energi relativistik dapat juga dinyatakan oleh persamaan :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.29)$$

Sedangkan saat sebuah benda diam $v = 0$, maka energi yang dimiliki oleh benda yang diam tersebut disebut energi diam. Dari persamaan (3.29), energi diam dapat kita tulis sebagai :

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad (3.30)$$

Momentum Relativistik

Momentum relativistik adalah momentum benda yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Semakin besar kecepatan benda tersebut, maka semakin besar momentum relativistiknya.

Jika pada gagasan klasik momentum didefenisikan sebagai hasil kali antara massa dan kecepatan, maka pada kasus relativistik juga sama. Momentum relativistik juga hasilkali antara massa relativistik dengan kecepatan.

Secara matematis, momentum relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.31}$$

Momentum diam $m_0 v$ sebenarnya adalah momentum yang selama ini kita kenal dalam gagasan klasik, yang mana momentum relativistik selalu akan lebih besar nilainya dari pada momentum diamnya, $p = mv > p_0 = m_0 v$.

Gaya Relativistik

Gaya pada gagasan klasik (**Mekanika Newton**) didefenisikan sebagai turunan pertama momentum terhadap waktu, yang dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{3.32}$$

Gaya pada konsep relativitas khusus Einstein dapat kita cari dari analisis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \\ &= m_0 \frac{dv}{dt}\frac{d}{dv}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \\ &= m_0\, a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dari persamaan diatas, gaya pada kondisi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$F = E_0 \frac{a}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \tag{3.34}$$

Contoh Soal 3.3 :

Pada saat kita duduk dengan wanita yang sangat kita cintai di suatu dinner romantis dengan hanya sebatang lilin yang menemani, waktu 3.5 jam **seakan-akan** hanya terasa 5 menit saja. Maka Kejadian tersebut setara dengan kita sedang melakukan perjalanan relativistik satu arah dengan kecepatan ...

Jawaban :

Kecepatan Perjalanan relativistik :

Waktu 3.5 jam seakan-akan hanya 5 menit adalah peristiwa **dilatasi waktu**, yang akan terasa apabila kita melakukan perjalanan secara relativistik dan atau saat duduk dengan wanita yang amat sangat kita cintai untuk menikmati hidangan di suatu dinne yang romantis. Dengan menggunakan persamaan (3.21) yang kita modifikasi, maka kita dapatkan :

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\, t_{Ob}}{\Delta\, t_{Pe}}\right)^2}\; c$$

Sehingga kita akan peroleh perhitungan :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\, t_{Ob}}{\Delta\, t_{Pe}}\right)^2}\; c \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5\ menit}{3.5\ jam}\right)^2}\; c \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5\ menit}{3.5\ jam\ x\ 60\ \dfrac{menit}{jam}}\right)^2}\; c \\ &= 0.99972\ c \end{aligned}$$

Contoh Soal 3.4 :

Kejadian relativistik yang sempat membuat bulu kuduk para fisikawan berdiri adalah kejadian partikel muon yang dapat terdeteksi di permukaan bumi. Padahal kita ketahui bahwa partikel muon hanya memiliki waktu hidup hanya $2\ \mu$ detik (sebelum dia meluruh dan hilang), sedangkan jarak antara permukaan atmosfer (yang menjadi tempat lahirnya muon) dan permukaan bumi sekitar 9000 m dan partikel muon bergerak dengan kecepatan 0.998 c. Maka :

a. Hitunglah waktu hidup partikel muon setelah mengalami kejadian relativistik !
b. Partikel muon yang sampai di permukaan bumi hanya dapat terdeteksi selama ... , sebelum akhirnya dia menghilang.

Jawaban :

a. Waktu hidup relativitas muon :

Karena muon mengalami kejadian relativistik, maka waktu hidup muon akan menjadi lebih panjang akibat dilatasi waktu. Dengan menggunakan persamaan (3.21), kita akan peroleh :

$$\begin{aligned} \Delta t_{Pe} &= \Delta t_{Ob} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= 2\ \mu \det ik \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.998)^2}{c^2}}} \\ &= 2\ \mu \det ik\ x\ \frac{1}{0.0632} \approx 31.64\ \mu \det ik \end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas, maka waktu hidup relativistik muon adalah $31.64\ \mu \det ik$.

b. Waktu terdeteksi muon :

Dengan menggunakan perhitungan relativistik, waktu yang dibutuhkan muon untuk sampai ke permukaan bumi adalah $t = \left(l_{Pe} / v\right) / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, dengan l_{Pe} adalah jarak relativistik yang harus ditempuh muon. Lalu dengan menyubtitusikan persamaan (3.24)

Kedalam persamaan tersebut, maka kita peroleh perhitungan sebagai berikut :

$$t = \left(\frac{l_{Ob} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{l_{Ob}}{v}$$

$$= \frac{9000\ m}{0.998\ c}$$

$$= \frac{9000\ m}{0.998\ x\ 3\ x\ 10^8\ m/s}$$

$$= 30.06\ x\ 10^{-6}\ \det ik = 30.06\ \mu \det ik$$

Sebelumnya diatas kita telah mendapatkan bahwa waktu hidup relativistik muon adalah $31.64\ \mu \det ik$ sedangkan waktu yang dibutuhkan muon sampai ke bumi (dari saat dia dilahirkan di atmosfer) adalah $30.06\ \mu \det ik$. Maka alat pendeteksi yang ditempatkan di permukaan bumi hanya dapat mendeteksi keberadaan muon selama sisa waktu hidup muon yaitu waktu hidup relativistik muon setelah dikurangi dengan waktu perjalanan muon. Itu artinya, waktu untuk mendeteksi muon adalah selisih dari $31.64 - 30.06 = 1.58\ \mu \det ik$ (dan ini sangat singkat sekali, bayangkan $1.58\ x\ 10^{-6}$ detik).

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah relativitas khusus einstein, dilatasi waktu, kontraksi panjang, massa relativistik, energi relativistik, momentum relativistik dan gaya relatifistik
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan menghitung relativitas khusus einstein, dilatasi waktu, kontraksi panjang, massa relativistik, energi relativistik, momentum relativistik dan gaya relatifistik.

RANGKUMAN

1. Einstein memulai gagasannya dengan dua postulat :
   a. Hukum-hukum fisika mungkin sama untuk semua kerangka acuan inersia.
   b. Pada ruang hampa kecepatan cahaya selalu tetap untuk semua kerangka acuan inersia.
2. Berdasarkan percobaan Michelson dan Molrey yang telah melakukan percobaan pencarian *ether* maka postulat **kedua** Einstein tak sengaja **telah terbukti.**
3. Pada intinya pokok-pokok gagasan relativitas khusus Einstein adalah sebagai berikut :

- Dua kejadian yang **simultan** dalam satu kerangka acuan tertentu, tak lagi simultan apabila kejadian kedua bergerak relatif terhadap kejadian pertama. Ini artinya waktu bagi seseorang yang sedang berjalan di atas pesawat luar angkasa, berbeda dengan waktu yang dirasakan oleh orang yang hanya duduk di atas perahu.
- Kemudian sebuah objek yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya, bagi pengamat yang diam, **waktu, panjang objek** (teramati), dan **besaran-besaran** lain (massa, momentum, energi) tidak lagi mutlak. Artinya hukum-hukum fisika klasik tak mampu lagi menjelaskan gerak-gerak benda yang melaju dengan kecepatan yang sangat cepat sekali yang mendekati kecepatan cahaya.

4. Dilatasi waktu adalah fenomena yang mana waktu teramati oleh pengamat diam, seakan-akan mengalami **pemuluran** terhadap waktu yang teramati oleh objek yang melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya.

   Waktu yang teramati oleh pengamat diam dan waktu yang dirasakan oleh objek dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\Delta t_{Pe} = \Delta t_{Ob} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

5. Kontraksi panjang adalah fenomena relativistik yang mana **panjang objek** (yang melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya) seakan-akan lebih pendek dari panjang yang sebenarnya (atau panjang diamnya) menurut **pengamatan diam**.

   Dengan demikian kontraksi panjang objek yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$l_{Pe} = l_{Ob} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

6. Massa relativistik adalah massa sebuah benda yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Semakin besar kecepatan gerak benda, maka semakin besar massa relativistiknya.

   Secara matematis, massa relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

7. Energi relativistik adalah energi yang dimiliki oleh benda yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Energi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$E = mc^2$$

8. **Gaya** pada gagasan klasik (**Mekanika Newton**) didefenisikan sebagai turunan pertama momentum terhadap waktu, gaya pada kondisi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$F = E_0 \frac{a}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

EVALUASI FORMATIF 3

1. Jelaskan dua postulat gagasan Einstein !
2. Jelaskan bagaimana proses terbuktinya postulat gagasan Einstein !
3. Tuliskan inti pokok-pokok gagasan relativitas khusus Einstein !
4. Jelaskan apa yang dimaksud dengan dilatasi waktu dan tuliskan persamaannya !
5. Jelaskan apa yang dimaksud dengan kontraksi panjang dan tuliskan persamaannya !
6. Jelaskan apa yang dimaksud dengan massa relativistik dan tuliskan persamaannya !
7. Jelaskan apa yang dimaksud dengan energi relativistik Einstein dan turunkan persamaan $E = mc^2$!
8. Jika ada dua buah pesawat penjelajah alam semesta yang saling mendekat satu sama lain, yang mana kecepatan mereka masing-masing 0.926 c dan 0.872 c. Maka :
   a. Apakah kecepatan relatif pesawat terhadap pesawat yang lain lebih besar dari c? Kenapa demikian?
   b. Kecepatan relatif pesawat yang satu terhadap yang lain adalah ...

c. Jika dua pesawat tersebut saling menjauh satu sama lain, maka kecepatan relatif pesawat yang satu terhadap yang lain adalah ...

d. Jika pesawat yang lebih lambat ternyata berada di depan pesawat yang lebih cepat dan mereka berjarak sejauh jarak matahari dan bumi, maka butuh waktu berapa lama sehingga kedua pesawat penjelajah alam semesta tersebut tepat berpapasan?

9. Pada masa depan, bumi tak lagi mampu menopang kebutuhan umat manusia. Karena itu Cooper (tokoh dalam film Interstellar) melakukan perjalanan untuk mencari planet lain yang mirip dengan bumi untuk ditinggali. Waktu 3 jam bagi Cooper sama dengan 23 tahun waktu di bumi. Saat kembali ternyata Cooper telah berusia 124 tahun waktu bumi, sedangkan putrinya yang dlu dia tinggalkan berusia 10 tahun telah menjadi wanita tua renta berusia 70-an tahun. Pertanyaannya :

   a. Berapa lama Cooper pergi meninggalkan Murphy (putri Cooper), menurut Cooper dan menurut Murphy?
   b. Berapa kecepatan Cooper menjelajahi alam semesta ?
   c. Suatu ketika Cooper berjanji pada Murphy akan kembali saat usia mereka sama, kira-kira usia berapakah itu?
   d. Berapa usia Cooper saat pergi meninggalkan Murphy?

RANGKUMAN MODUL

1. **Sinar katoda** adalah sinar yang tercipta dalam tabung vakum yang dialiri oleh arus listrik bertegangan tinggi.
2. Pada tahun 1988, seorang ilmuean Inggris bernama Joseph John Thomson, melakukan penelitian tentang sinar ultraviolet yang tercipta dalam tabung sinar katoda. J.J Thomson berhasil menemukan elektron (yaitu muatan negatif yang belum memiliki nama pada masa itu). Karena itulah sinar katoda kadang juga disebut sebagai sinar **lucutan elektron** *atau electron beam (e-beam).*
3. Sinar Rontgen adalah sinar yang tercipta karena sinar katoda (lucutan elektron) dihalang-halangi oleh logam berat (yang disebut *antianoda*), sehinggga elektron yang terlucut melakukan pengereman mendadak untuk menghalangi tumbukan antara elektron dengan *antinanoda.*
4. Sinar Rontgen mampu menembus benda-benda padat tertentu. Sedangkan dia juga dapat menghitamkan filamen film. Dengan dua sifatnya tersebut Rontgen memanfaatkannya sebagai alat pencitra untuk memotret tulang
5. Sinar Rontgen yang dipancarkan dengan energi tertentu akan memiliki panjang gelombang minimal tertentu. Hal ini sesuai dengan kuanta energi menurut Plank sebagai berikut $E = hf = hc/\lambda$
6. Panjang gelombang **minimal** sinar Rontgen dapat dinyatakan oleh persamaan :
$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E}$$
7. Panjang gelombang minimal sinar Rontgen dalam satuan nm (nanometer) dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :
$$\lambda_{\min} = \frac{1240\ eV.\ nm}{\Delta V}$$
8. Suatu ketika berkas cahaya dipancarkan di atas logam tertentu, dan ternyata cahaya tersebut dapat melontarkan elektron dari dalam logam dikenal dengan nama **efek fotolistrik.**
9. Elektron yang dilontarkan, akan memiliki energi kinetik yang besarnya tak bergantung pada intensitas cahaya yang dipancarkan di atas logam dan dia juga membuktikan adanya **frekuensi ambang.** Frekuensi ambang adalah frekuensi minimal yang dimiliki oleh cahaya agar dapat melontarkan elektron di dalam logam tersebut.

$$f_{cahaya} > f_{ambang} \; maka \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$
$$f_{cahaya} < f_{ambang} \; maka \;\; tidak \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

10. Pada tahun 1905, seorang pegawai kantor paten keturunan Yahudi yang bernama Albert Einstein, berhasil menerbitkan sebuah makalah ilmiah, yang diberi judul (jika diterjemahkan dalam bahasa Inggris) *"On an Heuristic Viewpoint Concerning the Nature of Light",* yang mampu menjelaskan efek fotolistrik secara matematis dengan pendekatan fenomenologi.
11. Einstein menggunakan parameter $\varsigma_2 = h/k$ yang telah diselesaikan oleh Plank dan akhirnya persamaan energi tiap radiasi tunggal atau **foton** yang dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$E = hf$$

Persamaan energi foton cahaya Einstein mampu membuktikan bahwa postulat Plank tentang kuanta energi shahih.

12. Berdasarkan pada gagasan Einstein, elektron dapat bergerak karena dia memiliki energi kinetik. Energi kinetik elektron besarnya sama dengan selisih dari energi foton cahaya dan fungsi kerja logam yang dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$K = \frac{1}{2} m_e v_e^{\,2} = hf - hf_0$$

Yang mana persamaan diatas, mampu menjelaskan **frekuensi ambang** yang pernah dikerjakan oleh Philipp Lenard sebelumnya. Jika energi foton cahaya lebih besar daripada fungsi logam, maka akan terjadi efek fotolistrik.

$$hf > hf_0 \quad maka \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Karena h adalah nilai konstan, maka pernyataan tersebut akan **ekuivalen** dengan : Jika frekuensi foton cahaya lebih besar daripada frekuensi kerja logam, maka akan terjadi efek fotolistrik.

$$f > f_0 \quad maka \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

Dan sebaliknya, jika frekuensi foton cahaya lebih kecil daripada frekuensi kerja logam, maka tidak akan terjadi efek fotolistrik.

$$f < f_0 \quad maka \;\; tidak \;\; terjadi \;\; efek \;\; fotolistrik$$

13. Einstein memulai gagasannya dengan dua postulat :
    a. Hukum-hukum fisika mungkin sama untuk semua kerangka acuan inersia.
    b. Pada ruang hampa kecepatan cahaya selalu tetap untuk semua kerangka acuan inersia.

14. Berdasarkan percobaan Michelson dan Molrey yang telah melakukan percobaan pencarian *ether* maka postulat **kedua** Einstein tak sengaja **telah terbukti.**
15. Pada intinya pokok-pokok gagasan relativitas khusus Einstein adalah sebagai berikut :
   - Dua kejadian yang **simultan** dalam satu kerangka acuan tertentu, tak lagi simultan apabila kejadian kedua bergerak relatif terhadap kejadian pertama. Ini artinya waktu bagi seseorang yang sedang berjalan di atas pesawat luar angkasa, berbeda dengan waktu yang dirasakan oleh orang yang hanya duduk di atas perahu.
   - Kemudian sebuah objek yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya, bagi pengamat yang diam, **waktu, panjang objek** (teramati), dan **besaran-besaran** lain (massa, momentum, energi) tidak lagi mutlak. Artinya hukum-hukum fisika klasik tak mampu lagi menjelaskan gerak-gerak benda yang melaju dengan kecepatan yang sangat cepat sekali yang mendekati kecepatan cahaya.

     Dilatasi waktu adalah fenomena yang mana waktu teramati oleh pengamat diam, seakan-akan mengalami **pemuluran** terhadap waktu yang teramati oleh objek yang melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya.

   Waktu yang teramati oleh pengamat diam dan waktu yang dirasakan oleh objek dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\Delta t_{Pe} = \Delta t_{Ob} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

16. Kontraksi panjang adalah fenomena relativistik yang mana **panjang objek** (yang melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya) seakan-akan lebih pendek dari panjang yang sebenarnya (atau panjang diamnya) menurut **pengamatan diam**.

    Dengan demikian kontraksi panjang objek yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$l_{Pe} = l_{Ob} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

17. Massa relativistik adalah massa sebuah benda yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Semakin besar kecepatan gerak benda, maka semakin besar massa relativistiknya.

    Secara matematis, massa relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

18. Energi relativistik adalah energi yang dimiliki oleh benda yang sedang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Energi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$E = mc^2$$

19. **Gaya** pada gagasan klasik (**Mekanika Newton**) didefenisikan sebagai turunan pertama momentum terhadap waktu, gaya pada kondisi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$F = E_0 \frac{a}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Vani Sugiyono, S.T.2016. *Mekanika Kuantum.* Erlangga : Jakarta
2. David J Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Second Edition. Pearson Education International.
3. Mikrajuddin Abdullah. Fisika Statistik untuk Mahasiswa MIPA. *KK Fisika Material Elektronik - FMIPA, ITB.* Tidak Diterbitkan

Modul 4:

Momentum Gelombang

PENDAHULUAN

Melihat permainan sepakbola anak-anak muda Indonesia di ajang internasional adalah sebuah kebanggaan tersendiri bagi saya yang memang dilahirkan di tanah air tercinta ini. Namun, saat melihat ada pemain yang mendapatkan umpan akurat dari temannya, tapi dia tidak dapat mengontrol umpan itu dengan baik, rasanya sangat kecewa. Sampai kadang terfikirkan, apakah pemuda itu tidak paham konsep momentum?

Dari buku-buku yang kita pelajari dulu waktu sekolah menengah atas, momentum hanya didefenisikan secara matematis sebagai perkalian antara massa dan kecepatan. Padahal momentum tidak melulu dapat didefenisikan seperti itu.

Memang benar bahwa fisika itu dapat dipandang dari sudut pandang matematis, namun kebanyakan dari kita lebih menyukai pemahaman fenomena fisis daripada matematis.

Lalu, sebenarnya apa itu momentum?

Pada gagasan klasik, **momentum** adalah besaran yang menunjukkan tingkat kesulitan dalam menghentikan sebuah benda yang melaju dengan kecepatan tertentu. Semakin besar massa sebuah benda, semakin sulit juga untuk dihentikan. Karena itu momentum menurut gagasan klasik didefenisikan secara matematis sebagai hasil perkalian antara massa sebuah benda dan kecepatan benda tersebut.

Jika pemain sepakbola memahami momentum, maka dia akan mengumpan dengan kecepatan yang cukup sehingga temannya dapat mengontrol umpan itu dengan baik. Atau jika dia menjadi pemain yang menerima umpan, akan berusaha sebaik mungkin sehingga dapat meredam momentum dari bola yang diumpankan oleh temannya sendiri.

Itu adalah gagasan klasik.

Bagaimana dengan gagasan modern?

Kegiatan Pembelajaran 1: EFEK COMPTON

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa memiliki pengertian dan pemahaman mengenai efek compton
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh soal dan latihan mengenai efek compton

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Pada tahun 1922, fisikawan Amerika Serikat bernama Arthur Holly Complon menemukan sebuah fenomena yang tidak kalah menarik dengan fenomena fotolistrik. Kali ini, sebuah elektron sengaja disinari dengan gelombang cahaya sehingga terjadi fenomena aneh, yang mana elektron akan terpental dengan sudut tertentu θ dan cahaya juga tersimpangkan membentuk sudut tertentu α . Frekuensi cahaya dalam eksperimen itu, berubah setelah kejadian penyinaran tersebut.

Fenomena aneh ini kemudian lebih dikenal dengan nama **efek compton**. Berdasarkan keanehan pada efek Compton ini, akhirnya Compton berasumsi bahwa terjadi tumbukan antara gelombang cahaya dengan elektron. Padahal kita ketahui bahwa gelombang dan partikel itu jelas berbeda dan gagasan klasik percaya bahwa gelombang cahaya tidak memiliki momentum. Akan tetapi secara eksperimen hal tersebut terbukti, bahwa gelombang cahaya ternyata memiliki momentum. Terjadinya tumbukan membuktikan adanya momentum gelombang cahaya yang membuat elektron terpental.

Apabila momentum gelombang cahaya sebelum tumbukan adalah p_e, momentum gelombang setelah tumbukan adalah $p_e^{'}$, dan momentum elektron setelah tumbukan adalah p_e . Maka dengan **hukum kekekalan momentum** kita akan mendapatkan persamaan memontem pada sumbu datar sebagai berikut :

$$p_e = p_e^{'} \cos\alpha + p_e \cos\theta \qquad (4.1)$$

Sedangkan persamaan momentum pada sumbu vertikal adalah sebagai berikut :

$$0 = p_e^{'} \sin\alpha + p_e \sin\theta \qquad (4.2)$$

Jika kita jumlahkan kuadrat dari $p_e \cos\theta$ dan kuadrat dari $p_e \sin\theta$, maka akan kita peroleh :

$$
\begin{array}{l}
p_e^{\;2} \cos^2\theta = (p_e - p_e^{'} \cos\alpha\,)^2 \\
\quad p_e^{\;2} \sin^2\theta = (p_e^{'})^2 \sin^2\alpha \\
\hline
p_e^{\;2} = (p_e^{\;2}) - 2\,p_e\,p_e^{'}\cos\alpha \;+ (p_e^{'})^2
\end{array} + \qquad (4.3)
$$

Dengan p_e dan p_e' pada masa itu masih belum memiliki definisi secara matematis, sedangkan Compton belum mempertimbangkan kekekalan energi di sana.

Kemudian kita pertimbangkan kekekalan energi pada peristiwa tumbukan tersebut. Namun, karena elektron yang ditumbuk oleh gelombang cahaya melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya, maka analisis kita harus dalam keadaan relativistik.

Energi total elektron (setelah tumbukan) dapat dinyatakan oleh persamaan $E = K + m_0c^2$, dapat kita tulis ulang khusus untuk elektron pada efek compton sebagai berikut :

$$E^2 = p_e^{\;2}c^2 + (\,m_ec^2)^2 \qquad (4.4)$$

Dengan E adalah energi total elektron, m_e adalah massa diam elektron, dan c adalah kecepatan cahaya pada ruang hampa. Energi total relativistik juga dapat dinyatakan oleh persamaan $K = mc^2 - m_0c^2$, yang dapat ditulis ulang untuk elektron pada efek Compton sebagai berikut :

$$E = K + m_ec^2 \qquad (4.5)$$

Dengan K pada persamaan (4.5) di atas adalah energi kinetik setelah tumbukan. Apabila kita subtitusikan persamaan (4.5) ke persamaan (4.4) maka akan kita peroleh persamaan :

$$
\begin{aligned}
&(K + m_ec^2)^2 = p_e^{\;2}c^2 + (m_ec^2)^2 \\
&K^2 + 2Km_ec^2 + (m_ec^2)^2 = p_e^{\;2}c_0^{\;2} + (m_ec^2)^2 \qquad (4.6) \\
&p_e^{\;2}c^2 = K^2 + 2Km_ec^2
\end{aligned}
$$

Kemudian kita kaitkan dengan efek fotolistrik Einstein, yang menyatakan bahwa energi kinetik elektron merupakan selisih dari hf dan hf_0. Maka yang dimaksud dengan hf pada perisiwa efek Compton (tumbukan antar gelombang cahaya dengan elektron) adalah energi gelombang cahaya **sebelum tumbukan**, sedangkan yang dimaksud dengan hf_0 adalah energi gelombang cahaya setelah tumbukan $hf^{'}$. Secara matematis dapat kita tulis :

$$K = hf - hf^{'} \tag{4.7}$$

Lalu kita subtitusikan persamaan (4.7) di atas pada persamaan (4.6), sehingga kita akan peroleh persamaan :

$$\begin{aligned} p_e^{\,2}c^2 &= K^2 + 2Km_e^{\,2} \\ p_e^{\,2}c^2 &= (hf - hf^{'})^2 + 2(hf - hf^{'})m_ec^2 \\ p_e^{\,2} &= \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf^{'}}{c}\right) + \left(\frac{hf^{'}}{c}\right)^2 + 2\,(hf - hf)m_e \end{aligned} \tag{4.8}$$

Persamaan (4.8) diatas, adalah persamaan kuadrat momentum elektron pada efek Compton. Dari persamaan tersebut dapat kita lihat bahwa $hf\ /c$ adalah sebuah momentum. Sehingga pada saat itu, Compton berasumsi bahwa itu adalah momentum dari gelombang cahaya sebelum menumbuk elektron, sedangkan $hf^{'}\ /c$ adalah momentum gelombang cahaya setelah menumbuk elektron.

Dari asumsi tersebut, kini p_e dan p_e' telah memiliki defenisi secara matematis. Sehingga persamaan (4.3) akan berubah menjadi sebagai berikut :

$$p_e^{\,2} = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf^{'}}{c}\right)\cos\alpha + \left(\frac{hf^{'}}{c}\right)^2 \tag{4.9}$$

Kemudian apabila kita kurangkan persamaan (4.8) dengan persamaan (4.9) diatas, maka akan kita peroleh :

$$\begin{aligned} p_e^{\,2} &= \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf^{'}}{c}\right)\cos\alpha + \left(\frac{hf^{'}}{c}\right)^2 \\ p_e^{\,2} &= \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf^{'}}{c}\right) + \left(\frac{hf^{'}}{c}\right)^2 + 2\,(hf - hf)m_e \quad - \\ \hline 0 &= 2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf^{'}}{c}\right)(1 - \cos\alpha) - 2\,(hf - hf)m_e \end{aligned} \tag{4.10}$$

Kemudian kita ingat bahwa $f\ /c_0 = 1/\ \lambda$. Dengan demikian persamaan (4.10) di atas dapat kita sederhanakan lagi menjadi :

$$2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf^{'}}{c}\right)m_e c^2 = 2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf^{'}}{c}\right)\ (1-\cos\alpha)$$

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)\left(\frac{h}{\lambda^{'}}\right)m_e c^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)\left(\frac{h}{\lambda^{'}}\right)\ (1-\cos\alpha)$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\lambda^{'}}\right)\lambda\lambda^{'} = \frac{h^2}{hm_e c}\ (1-\cos\alpha)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\ (1-\cos\alpha)$$

Dari analisis diatas, kita peroleh selisih panjang gelombang cahaya yang menumbuk elektron adalah sebagai berikut :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\ (1-\cos\alpha) \qquad (4.11)$$

Berkat penemuan efek Compton tersebut, Arthur H. Compton akhirnya mendapatkan hadiah nobel pada tahun 1927.

Dengan adanya efek Compton, khasanah pengetahuan kita mengenai momentum pun bertambah. Momentum tak hanya dapat didefenisikan sebagai hasil kali antara massa dan kecepatan, tetapi untuk kasus gelombang cahaya, momentum (berdasarkan asumsi Compton) adalah hasil pembagian antara kuanta energi gelombang cahaya terhadap kecepatan cahaya.

$$p_e = \frac{hf}{c} \qquad (4.12)$$

Namun, perlu diingat bahwa ini baru asumsi Compton. Pada masa itu belum ada yang mendukung asumsinya.

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah mengenai efek compton
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan mengenai efek compton

RANGKUMAN

1. Sebuah elektron sengaja disinari dengan gelombang cahaya sehingga terjadi fenomena aneh, yang mana elektron akan terpental dengan sudut tertentu θ dan cahaya juga tersimpangkan membentuk sudut tertentu α. Frekuensi cahaya dalam eksperimen itu, berubah setelah kejadian penyinaran tersebut. Fenomena aneh ini kemudian lebih dikenal dengan nama **efek compton**.
2. Berdasarkan keanehan pada efek Compton ini, akhirnya Compton berasumsi bahwa terjadi tumbukan antara gelombang cahaya dengan elektron. Padahal gelombang dan partikel itu jelas berbeda dan gagasan klasik percaya bahwa gelombang cahaya tidak memiliki momentum. Akan tetapi secara eksperimen hal tersebut terbukti, bahwa gelombang cahaya ternyata memiliki momentum. Terjadinya tumbukan membuktikan adanya momentum gelombang cahaya yang membuat elektron terpental.
3. Jika dikaitkan dengan efek fotolistrik Einstein, yang menyatakan bahwa energi kinetik elektron merupakan selisih dari hf dan hf_0. Maka yang dimaksud dengan hf pada perisiwa efek Compton (tumbukan antar gelombang cahaya dengan elektron) adalah energi gelombang cahaya **sebelum tumbukan**, sedangkan yang dimaksud dengan hf_0 adalah energi gelombang cahaya setelah tumbukan $hf^{'}$. Secara matematis dapat kita tulis :

$$K = hf - hf^{'}$$

4. Selisih panjang gelombang cahaya yang menumbuk elektron adalah sebagai berikut :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} \ (1 - \cos\alpha)$$

5. Momentum tak hanya dapat didefenisikan sebagai hasil kali antara massa dan kecepatan, tetapi untuk kasus gelombang cahaya, momentum (berdasarkan asumsi Compton) adalah hasil pembagian antara kuanta energi gelombang cahaya terhadap kecepatan cahaya.

$$p_e = \frac{hf}{c}$$

EVALUASI FORMATIF 1

1. Jelaskan apa yang dimaksud efek Compton !
2. Jelaskan mengapa Compton berasumsi bahwa terjadi tumbukan antara gelombang cahaya dengan elektron !

3. Jelaskan penurunan rumus selisih panjang gelombang cahaya yang menumbuk elektron pada efek Compton !
4. Jelaskan efek fotolistrik Einstein, dan hubungannya dengan perisiwa efek Compton !

Kegiatan Pembelajaran 2: PANJANG GELOMBANG DE BROGLIE

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

a. Mahasiswa mampu menjelaskan dan memahami tentang gelombang de broglie
b. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh dan latihan soal panjang gelombang de broglie

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Pada tahun 1924 Louis de Broglie, seorang ahli fisika dari Perancis mengemukakan hipotesis tentang gelombang materi. Gagasan ini adalah timbal balik dari pada gagasan partikel cahaya yang dikemukakan oleh Max Planck. Berdasarkan gagasan tersebut, Louis de Broglie meneliti keberadaan gelombang melalui eksperimen difraksi berkas elektron.

Dari hasil penelitiannya inilah diusulkan **materi mempunyai sifat gelombang disamping mempunyai sifat partikel**, yang dikenal dengan sifat dualisme partikel. Sifat partikel dan gelombang suatu materi tidak tampak sekaligus, sifat yang tampak jelas tergantung pada perbandingan panjang gelombang de Broglie dengan dimensinya serta dimensi sesuatu yang berinteraksi dengannya.

Partikel yang bergerak memiliki sifat gelombang. Fakta yang mendukung teori ini adalah petir dan kilat. Kilat akan lebih dulu terjadi daripada petir. Kilat menunjukan sifat gelombang berbentuk cahaya, sedangkan petir menunjukan sifat partikel berbentuk suara.

Menurut Louis de Broglie suatu partikel yang memiliki momentum *P* jika dipandang sebagai gelombang mempunyai panjang gelombang :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m.v} \qquad (4.13)$$

Dimana :

λ = panjang gelombang de Broglie

h = konstanta Planck $\left(6{,}6x10^{-34}\,J.s\right)$

m = massa partikel

v = kecepatan partikel

Contoh Soal 4.1

Jika sebuah elektron (massanya $9{,}1x10^{-31}$ kg) bergerak dengan kecepatan $6x10^{6}$ m/s, maka tentukan panjang gelombang de Broglie elektron tersebut !

Penyelesaian :

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}62x10^{-34} Js}{(9{,}1x10^{-31})(6x10^{6} m/s)} = 1{,}2x10^{-10} m$$

Selain de Broglie, penelitian tentang sifat gelombang dari partikel pertama kali dibuktikan oleh Davisson dan Germer pada tahun 1927 dengan eksperimen difraksi elektron. Eksperimen ini dilakukan dengan menembakkan elektron yang dipercepat oleh suatu tegangan V ke permukaan kristal tunggal.

Selanjutnya eksperimen lain yang mendukung hipotesa tersebut adalah percobaan celah ganda oleh Thomas Young. Hasil interferensi celah ganda Young sama dengan hasil interferensi gelombang yang diakibatkan oleh elektron. Selain elektron, terdapat partikel lain yang berperilaku seperti gelombang, contohnya adalah neutron.

Neutron merupakan partikel tak bermuatan yang biasa digunakan untuk mempelajari difraksi struktur kristal. Meskipun semua partikel yang bergerak memiliki panjang gelombang de Broglie, tetapi efek panjang gelombangnya hanya dapat diamati untuk partikel yang massanya sangat kecil, seperti elektron atau neutron. Kecepatan elektron jauh lebih kecil dibandingkan kecepatan cahaya, sehingga kita bisa abaikan efek relativitas dengan menyatakan nilai momentum sebagai hasil perkalian massa dan kecepatan (seperti pada persamaan 4.25) Panjang gelombang elektron yang telah dipercepat dengan tegangan V menurut hipotesis De Broglie adalah :

$$\lambda_e = \frac{h}{(2meV)^{1/2}} \tag{4.14}$$

Dengan :

λ_e = Panjang gelombang de Broglie (m)

m = massa electron ($9{,}1x10^{-31}$ kg)

e = muatan elementer $\left(1{,}6x10^{-19}C\right)$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah penurunan rumus gelombang de broglie
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan panjang gelombang de broglie

RANGKUMAN

1. Pada tahun 1924 Louis de Broglie, seorang ahli fisika dari Perancis mengemukakan hipotesis tentang gelombang materi.
2. Materi mempunyai sifat gelombang disamping mempunyai sifat partikel, yang dikenal dengan sifat dualisme partikel. Sifat partikel dan gelombang suatu materi tidak tampak sekaligus, sifat yang tampak jelas tergantung pada perbandingan panjang gelombang de Broglie dengan dimensinya serta dimensi sesuatu yang berinteraksi dengannya.
3. Partikel yang bergerak memiliki sifat gelombang.
4. Kilat akan lebih dulu terjadi daripada petir. Kilat menunjukan sifat gelombang berbentuk cahaya, sedangkan petir menunjukan sifat partikel berbentuk suara.
5. Menurut Louis de Broglie suatu partikel yang memiliki momentum *P* jika dipandang sebagai gelombang mempunyai panjang gelombang :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m.v}$$

EVALUASI FORMATIF 2

1. Jika h = $6{,}6\times10^{-34}$J.s dan c = $3{,}0\times10^{8}$m/s dan m = $9{,}0\times10^{-31}$ kg, tentukan perubahan panjang gelombang Compton !
2. Sebuah *foton* dengan panjang gelombang 0,4 nm menabrak sebuah elektron yang diam dan memantul kembali dengan sudut 150^0 ke arah asalnya. Tentukan kecepatan dan panjang gelombang dari *foton* setelah tumbukan !
3. Gambar dan jelaskan percobaan hamburan compton !
4. Hitung peruhahan panjang gelombang *foton* yang dihamburkan dengan sudut hambur 53^0, jika diketahui massa elektron $9{,}1\text{x}10^{-31}$Kg !

5. *Foton* dengan panjang gelombang 0,06 nm mengalami hamburan Compton dengan sudut hamburan 60^0. Tentukan panjang gelombang *foton* yang dihamburkan !
6. Berdasarkan soal nomor 5, tentukan Energi *foton* yang terhambur dan Energi yang diberikan pada elektron yang terpantul !
7. Sebuah partikel bermassa $8x10^{-31}$kg bergerak sehingga mempunyai panjang gelombang 0,5Å. Bila tetapan plank $6,6x10^{-34}$J.s maka momentum dari partikel tersebut adalah …
8. Agar perubahan panjang gelombang bernilai maksimum, maka besar sudut hamburan *foton* yang digunakan adalah ....
9. Momentum dari sinar X yang memiliki panjang gelombang 35 pm adalah ....
10. *Foton* mengalami perubahan panjang gelombang sebesar $\frac{h}{2mc}$ $h2mc$ ketika menabrak elektron yang diam. Sudut hamburan *foton* tersebut adalah ....
11. Sebuah electron mempunyai kelajuan 10^6 m/s. Electron ini akan mempunyai panjang gelombang de Broglie sebesar …
12. Sebuah electron melaju di dalam tabung pesawat TV yang bertegangan 500V, besarnya momentum electron tersebut saat membentur kaca TV adalah …
13. Sebuah partikel electron bermassa $9x10^{-31}$kg bergerak dengan laju $3,3x10^6$m/s. Jika konstanta planck h = $6,6x10^{-34}$J.s maka panjang gelombang de Broglie dari electron adalah …
14. Jika kelajuan perambatan cahaya di udara $3x10^8$m/s dan konstanta planck $6,6x10^{-34}$J.s maka *foton* cahaya yang panjang gelombangnya 100Å mempunyai momentum sebesar …
15. Sebuah proton bergerak dengan kelajuan a) 1000 m/s, b) sejuta m/s, tentukanlah panjang gelombang de Broglie proton tersebut dalam keadaan yang bersesuaian dengan kelajuannya !

RANGKUMAN MODUL

1. Sebuah elektron sengaja disinari dengan gelombang cahaya sehingga terjadi fenomena aneh, yang mana elektron akan terpental dengan sudut tertentu θ dan cahaya juga tersimpangkan membentuk sudut tertentu α . Frekuensi cahaya dalam eksperimen itu, berubah setelah kejadian penyinaran tersebut. Fenomena aneh ini kemudian lebih dikenal dengan nama **efek compton**.
2. Berdasarkan keanehan pada efek Compton ini, akhirnya Compton berasumsi bahwa terjadi tumbukan antara gelombang cahaya dengan elektron. Padahal gelombang dan partikel itu jelas berbeda dan gagasan klasik percaya bahwa gelombang cahaya tidak memiliki momentum. Akan tetapi secara eksperimen hal tersebut terbukti, bahwa gelombang cahaya ternyata memiliki momentum. Terjadinya tumbukan membuktikan adanya momentum gelombang cahaya yang membuat elektron terpental.
3. Jika dikaitkan dengan efek fotolistrik Einstein, yang menyatakan bahwa energi kinetik elektron merupakan selisih dari hf dan hf_0 . Maka yang dimaksud dengan hf pada perisiwa efek Compton (tumbukan antar gelombang cahaya dengan elektron) adalah energi gelombang cahaya **sebelum tumbukan**, sedangkan yang dimaksud dengan hf_0 adalah energi gelombang cahaya setelah tumbukan $hf^{'}$. Secara matematis dapat kita tulis :

$$K = hf - hf^{'}$$

4. Selisih panjang gelombang cahaya yang menumbuk elektron adalah sebagai berikut :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} \ (1 - \cos \alpha)$$

5. Momentum tak hanya dapat didefenisikan sebagai hasil kali antara massa dan kecepatan, tetapi untuk kasus gelombang cahaya, momentum (berdasarkan asumsi Compton) adalah hasil pembagian antara kuanta energi gelombang cahaya terhadap kecepatan cahaya.

$$p_e = \frac{hf}{c}$$

6. Pada tahun 1924 Louis de Broglie, seorang ahli fisika dari Perancis mengemukakan hipotesis tentang gelombang materi.
7. Materi mempunyai sifat gelombang disamping mempunyai sifat partikel, yang dikenal dengan sifat dualisme partikel. Sifat partikel dan gelombang suatu materi tidak tampak

sekaligus, sifat yang tampak jelas tergantung pada perbandingan panjang gelombang de Broglie dengan dimensinya serta dimensi sesuatu yang berinteraksi dengannya.

8. Partikel yang bergerak memiliki sifat gelombang.
9. Kilat akan lebih dulu terjadi daripada petir. Kilat menunjukan sifat gelombang berbentuk cahaya, sedangkan petir menunjukan sifat partikel berbentuk suara.
10. Menurut Louis de Broglie suatu partikel yang memiliki momentum *P* jika dipandang sebagai gelombang mempunyai panjang gelombang :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m.v}$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Vani Sugiyono, S.T.2016. *Mekanika Kuantum.* Erlangga : Jakarta
2. David J Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Second Edition. Pearson Education International.
3. Mikrajuddin Abdullah. Fisika Statistik untuk Mahasiswa MIPA. *KK Fisika Material Elektronik - FMIPA, ITB.* Tidak Diterbitkan

Modul 5:

Persamaan Schrodinger

PENDAHULUAN

Setelah de Broglie menemukan gagasan dualisme gelombang partikel dan model atom yang baru dengan gagasannya tersebut, banyak para fisikawan muda terinspirasi dan melakukan penelitian mendalam tentang atom. Salah satu di antara mereka adalah Neils Bohr, seorang fisikawan Denmark yang melakukan penelitian mendalam tentang atom di salah satu Universitas di Inggris.

Sudah sejak lama Bohr mempelajari atom, bahkan sejak 10 tahun sebelum de Broglie menemukan gagasannya. Begitu gagasan de Broglie terpublikasi, Bohr sedikit bernafas lega, karena pekerjaannya sedikit demi sedikit mulai terpecahkan. Namun, tidak semua pekerjaan Borh benar-benar terpecahkan. Dia masih memiliki PR yang sangat berat, yaitu : elektron pada atom hidrogen.

Pada tahun 1922, Bohr mengisi sebuah kelas dengan bahasan model atom yang sedang dia kembangkan. Tidak disangka, salah satu dari mahasiswanya ada yang bertanya tentang sesuatu yang tidak dapat dijawab oleh Bohr. Bohr gelagapan dan menutup kelas dengan wajah penuh malu.

Mahasiswa sok tahu yang sempat membuat Bohr gelagapan adalah seorang mahasiswa Jerman bernama Werner Heisenberg. Bohr sangat terkesan dengan Heisenberg. Dia bahkan mengajak Heisenberg jalan-jalan sore di sekitar gunung Heinberg dan memulai pembicaraan serius tentang apa yang selama ini mengganggu pikirannya. Namun, sayang sekali Heisenberg beranggapan bahwa gagasan Bohr terlalu kuno dan kurang kreatif. Sehingga dia lebih memilih untuk mengembangkan gagasannya sendiri.

Setelah sakit-sakitan karena terlalu serius dalam memikirkan atom, Heisenberg akhirnya berhasil membuat rumusan matematis yang dapat menghubungkan besaran-besaran fisis pada sebuah atom. Walaupun dia harus sedikit memaksakan diri dengan mengeluarkan postulat tentang perkalian yang tak komutatif.

Gagasan Heisenberg memang berhasil, tetapi apa yang dia temukan itu hanya sebuah gagasan matematis yang tidak dapat digambarkan secara visual. Akibatnya, banyak fisikawan yang hanya menganggap gagasan Heisenberg sebagai angin lalu yang tidak terlalu penting. Termasuk seorang fisikawan jenius dari Jerman yang bernama Erwin Schodinger.

Kegiatan Pembelajaran 1: PERSAMAAN SCHRODINGER NON-RELATIVISTIK

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa memiliki pengertian dan pemahaman mengenai persamaan schrodinger non relativistik
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh soal dan latihan mengenai persamaan schrodinger non relativistik

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Schrodinger menganggap gagasan Heisenberg masih terlalu mentah dan rumit, apalagi tidak dapat digambarkan secara visual, ini merupakan kekalahan telak bagi sebuah gagasan yang mungkin bisa dianggap terlalu premature olehnya.

Karena itu, Schrodinger lebih memilih untuk mengembangkan gagasan nya sendiri. Schrodinger mengembangkan sebuah gagasan dengan berkiblat pada gagasan sang pangeran Perancis Luis De Broglie. Schrodinger percaya bahwa gagasan klasiknya tentang gelombang kekontinuan akan dapat membawa kembali kejayaan gagasan klasik.

Pada saat liburan natal di tahun 1925, di kaki pegunungan Tyrol, Austria bersama dengan pasangan nya, Schrodinger tiba-tiba mendapatkan ilham yang membuatnya mampu menyusun sebuah persamaan gelombang yang berhasil menjelaskan semua kasus fisika.

Fungsi gelombang Schrodinger dilambangkan dengan symbol Ψ yang mengandung fungsi υ adalah fungsi terhadap ruang tiga dimensi (x,y,z) dan juga fungsi φ adalah fungsi terhadap waktu s. Dengan demikian fungsi gelombang Schrodinger dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\Psi(x,y,z) = \upsilon\ (x,y,z)\varphi(t) \tag{5.1}$$

Jika fungsi υ dapat ditulis sebagai fungsi eksponensial yang dapat ditulis sebagai berikut

$$\psi = Ae^{i(\Lambda_1 x+\Lambda_2 y+\Lambda_3 z)} + Be -^{-i(\Lambda_1 x+\Lambda_2 y+\Lambda_3 z)} \quad (5.2)$$

Dan fungsi φ dapat ditulis sebagai fungsi eksponensial yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\varphi(t) = De^{-i\omega t} \quad (5.3)$$

Dari persamaan (5.2) dan (5.3) maka persamaan (5.1) dapat kita tulis secara sempurna menjadi :

$$\psi = Ae^{i(\Lambda_1 x+\Lambda_2 y+\Lambda_3 z)-i\omega t} + Be -^{-i(\Lambda_1 x+\Lambda_2 y+\Lambda_3 z)-i\omega t} \quad (5.4)$$

Dengan A dan B adalah koefisien dari fungsi υ, D adalah koefisien dari fungsi , sedangkan Λ adalah konstanta gelombang yang sama dengan 2π/λ, ω adalah kecepatan sudut gelombang yang sama dengan 2πf, lalu e adalah bilangan natural Euler yang nilainya e≈2,718282 dan I adalah bilangan imajiner $i = \sqrt{-1}$.

Persamaan (5.4) di atas dapat disederhanakan lagi menjadi sebagai berikut :

$$\psi = C_1 e^{i(\Lambda_1 x+\Lambda_2 y+\Lambda_3 z)-i\omega t} + C_2 e -^{-i(\Lambda_1 x+\Lambda_2 y+\Lambda_3 z)-i\omega t} \quad (5.5)$$

Dengan C_1= AD dan C_2= BD.

Kemudian kita ketahui bahwa turunan pertama $\alpha e^{i\beta x - i\gamma t}$ terhadap waktu (turunan parsial) dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha e^{i\beta x - i\gamma t} = -i\gamma\alpha e^{i\beta x - i\gamma t} \quad (5.6)$$

Maka turunan parsial pertama dari fungsi gelombang Ψ terhadap waktu,dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\omega\Psi = -i2\pi f\Psi \quad (5.7)$$

Di ketahui bahwa kuanta energy menurut Planck adalah E = hf dan konstanta Planck persatuan 2π adalah $\hbar = h/2\pi$, maka Persamaan (5.7) dapat ditulis seperti :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\Psi \quad (5.8)$$

Kemudian kita ketahui bahwa turunan kedua $\alpha e^{i\beta x - i\gamma t}$ terhadap posisi (x) dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha e^{i\beta x - i\gamma t} = (i\beta)^2\alpha e^{i\beta x - i\gamma t} \qquad (5.9)$$

Karena posisi pada tiga dimensi ada tiga yaitu (x,y,z), maka dibutuhkan **operator Laplacian** (dalam ruang posisi kartesian) yang dapat kita nyatakan oleh persamaan :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (5.10)$$

Berdasarkan dari persamaan (5.9), apabila fungsi gelombang Ψ diturunkan (secara parsial) terhadap ruang tiga dimensi sebanyak dua kali,maka akan kita peroleh :

$$\nabla^2\Psi = (i^2\Lambda_1^2 + i^2\Lambda_2^2 + i^2\Lambda_3^2)\Psi = -\Lambda^2\Psi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Psi \qquad (5.11)$$

Panjang gelombang menurut gagasan de Broglie dapat dinyatakan sebagai $\lambda = h/p$ dan konstanta Planck persatuan 2π adalah $\hbar = h/2\pi$, maka persamaan (5.11) akan menjadi :

$$\nabla^2\Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi \qquad (5.12)$$

Kemudian kita ambil energy mekanik total yang dapat dinyatakan oleh persamaan

$$E = K + V \qquad (5.13)$$

Dengan K adalah **energi kinetik** yang didefinisikan sebagai K= p^2/2m dan U adalah **energi potensial**.

Dari persamaan energi mekanik total tersebut, kita akan menyusun persamaan gelombang secara umum yang akan memadukan antara gagasan kuantum dan gagasan klasik pada kondisi non-relativistik.

Kemudian dikalikan persamaan energi mekanik total dengan fungsi gelombang Ψ di atas. Maka akan diperoleh :

$$E\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi + V\Psi \qquad (5.14)$$

Kemudian, subtitusikan persamaan (5.8) dan persamaan (5.12) yang telah ditemukan pada persamaan (5.14) sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$E\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi + V\Psi$$

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi}\nabla^2\Psi\Psi + \Psi$$
$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \qquad (5.15)$$

Apabila $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$,maka -1/i=-i/i^2=1 . Sehingga persamaan (5.15) dapat disederhanakan menjadi :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \qquad (5.16)$$

Persamaan (5.16) diatas-lah yang disebut dengan persamaan Schrodinger (pada kondisi non-relativistik). Persamaan yang lahir dari buah pemikiran jenius Erwin Schrodinger.

Contoh Soal 5.1:

Operator energi H atau biasa kita kenal juga dengan nama operator Hamiltonian adalah operator vabel energi pada ruang Hillbert. Maka bentuk operator Hamiltonian untuk:

a. Sistem non-relativistik satu dimensi dengan energi potensial yang memenuhi persamaan

$$V_{(x)} = ax - V_0$$

b. Sistem non-relativistik dua dimensi dengan energi potensial yang memenuhi persamaan

$$V_{(x,y)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - V_0$$

Jawaban :

a) Diketahui persamaan operator Hamiltonian adalah $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$ maka,

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + (ax - V_0)$$
$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ax - V_0$$

b) Diketahui persamaan operator Hamiltonian adalah $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$ maka,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - V_0$$
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a}{x} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{b}{y} - V_0$$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah persamaan schrodinger non relativistik
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan menghitung persamaan schrodinger non relativistik

RANGKUMAN

1. Schrodinger mengembangkan sebuah gagasan dengan berkiblat pada gagasan sang pangeran Perancis Luis De Broglie. Schrodinger percaya bahwa gagasan klasiknya tentang gelombang kekontinuan akan dapat membawa kembali kejayaan gagasan klasik.
2. Fungsi gelombang Schrodinger dilambangkan dengan symbol Ψ yang mengandung fungsi υ adalah fungsi terhadap ruang tiga dimensi (x,y,z) dan juga fungsi φ adalah fungsi terhadap waktu s. Dengan demikian fungsi gelombang Schrodinger dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\Psi(x,y,z) = \upsilon\ (x,y,z)\varphi(t)$$

3. Persamaan dibawah adalah persamaan yang disebut dengan persamaan Schrodinger (pada kondisi non-relativistik). Persamaan yang lahir dari buah pemikiran jenius Erwin Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi$$

EVALUASI FORMATIF 1

1. Jelaskan latar belakang munculnya persamaan gelombang Schrodinger!
2. Apa saja kejadian atau fenomena fisika yang dapat dijelaskan oleh Persamaan Gelombang Schrodinger?
3. Sebutkan tiga (3) gagasan yang diberikan Lorentz mengenai persamaan gelombang Schrodinger!
4. Mengapa persamaan gelombang Schrodinger hancur? Kaitkan dengan Heisenberg.
5. Tuliskan persamaan operator Laplacian (dalam ruang posisi kartesian).

Kegiatan Pembelajaran 2: PERSAMAAN SCHRODINGER RELATIVISTIK

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

1. Mahasiswa mampu menjelaskan dan memahami persamaan schrodinger relativistik
2. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh dan latihan soal tentang persamaan schrodinger relativistik

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Walaupun schrodinger hanya bermain-main pada kondisi non-relativistik saja pada masa itu. Namun, didalam disisi lain persamaan scrodinger juga berbicara tentang relativistik. Sama dengan fungsi gelombang pada kondisi non-relativistik, fungsi gelombang schrodinger pada kondisi relativistik juga dilambangkan dengan simbol Ψ_R, yang mengandung fungsi Ψ_R adalah fungsi terhadap ruang tiga dimensi (x, y, z) dan juga fungsi φ_R adalah fungsi terhadap waktu t. Dengan demikian fungsi gelombang schrodinger pada kondisi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\Psi_R(x,y,z,t) = \Psi_R(x,y,z)\varphi_R(t) \tag{5.17}$$

Jika fungsi Ψ_R dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponensial yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\Psi_R(x,y,z) = Ae^{i(A_i x + A_Z + A_i z)} + Be^{-i(A_i x + A_z y + A_i z)} \tag{5.18}$$

Dari fungsi φ_R dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponensial yang juga dapat ditulis sebagai berikut :

$$\varphi_R(t) = De^{-i\omega t} \tag{5.19}$$

Dari persamaan (5.18) dan persamaan (5.19) di atas, maka persamaan (5.17) dapat kita tulis sempurna menjadi :

$$\Psi_R = ADe^{i(A_i x + A_z Y + A_i z)}e^{-i\omega t} + BDe^{-i(A_i x + A_z Y + A_i z)}e^{-i\omega t} \tag{5.20}$$

Persamaan (5.20) dapat disederhanakan lagi menjadi sebagai berikut :

$$\Psi_R = C_1 e^{i(A_i x + A_z Y + A_i z) - i\omega t} + C_2 e^{-i(A_i x + A_z Y + A_i z)} e^{-i\omega t} \quad (5.21)$$

Kemudian kita ketahui bahwa turunan kedua $\alpha e^{i\beta x - i\gamma t}$ terhadap waktu, dapat kita nyatakan oleh persamaan :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha e^{i\beta x - i\gamma t} = (-i\gamma)^2 \alpha e^{i\beta x - i\gamma t} \quad (5.22)$$

Maka kedua dari fungsi gelombang Ψ_R terhadap waktu, dapat kita nyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 \Psi_R}{\partial t^2} = (-iw)^2 \Psi_R = -4\pi^2 f^2 \Psi_R \quad (5.23)$$

Kita ketahui bahwa kuanta energi menurut Planck adalah E = hf dan konstanta Planck persatuan 2π adalah $\hbar = h/2\pi$, maka persamaan 5.23 dapat juga ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 \Psi_R}{\partial t^2} = \frac{E^2}{\hbar^2} \Psi_R \quad (5.24)$$

Jika fungsi gelombang Ψ_R diturunkan (secara parsial) terhadap ruang tiga dimensi sebanyak dua kali, maka akan kita peroleh :

$$\nabla^2 \Psi_R = (i^2 A i^2 + i^2 A_2^2 + i^2 A^2 + i^2 A_3^2) \Psi_R$$
$$\nabla^2 \Psi_R = -A^2 \Psi_R = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Psi_R$$
$$(5.25)$$

Ingatlah, panjang gelombang menurut gagasan de Broglie dapat dinyatakan sebagai $\lambda = h/p$ dan konstanta Planck persatuan 2π adalah $\hbar = h/2\pi$. Maka persamaan 5.25 menjadi :

$$\nabla^2 \Psi_R = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi_R \quad (5.26)$$

Kemudian kita ambil energi total relativistik menurut Einstein yang dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^2 \quad (5.27)$$

Dari persamaan energi total relativistik tersebut, kita akan menyusun persamaan gelombang secara umum yang akan memadukan antara gagasan kuantum dan gagasan klasik pada kondisi yang relativistik.

Kemudian kita kalikan persamaan energi total relativistik diatas dengan fungsi gelombang Ψ_R diatas. Maka akan kita peroleh persamaan :

$$E^2 = \Psi_R = p^2 C^2 \Psi_R + m_0^1 c^4 \Psi_R \quad (5.28)$$

Lalu substitusikan persamaan (5.24) dan persamaan (5.26) yang kita temukan diatas pada persamaan (5.28), sehingga kita akan peroleh persamaan sebagai berikut :

$$E^2\Psi_R = p^2c^2\Psi_R + m_0^2c^4\Psi_R$$

$$-\hbar^2\frac{1}{\Psi_R}\frac{\partial^2\Psi_R}{\partial t^2}\Psi_R = -\hbar^2c^2\frac{1}{\Psi_R}\nabla^2\Psi_R\Psi_R + m_0^2c^4\Psi_R$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi_R}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\Psi_R + m_0^2c^4\Psi_R \tag{5.29}$$

Kemudian persamaan (5.29) kita bagi dengan kuadrat kecepatan cahaya c^2, maka kita peroleh sebuah persamaan sebagai berikut :

$$0 = \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_R}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\Psi_R + m_0^2c^4\Psi_R \tag{5.30}$$

Kita uraikan ∇^2 menjadi $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, maka peroleh :

$$0 = \hbar^2\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Psi_R + m_0^2c^4\Psi_R \tag{5.31}$$

Kemudian persamaan (5.31) yang telah kita temukan di atas dengan menggunakan operator D'Alembert yang dapat dinyatakan oleh :

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.32}$$

Dengan demikian, secara umum persamaan Schrodinger kondisi relativistik dapat kita nyatakan oleh persamaan :

$$0 = \hbar^2\Box\,\Psi_R + m_0^2c^2\Psi_R \tag{5.33}$$

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah tentang persamaan schrodinger relativistik
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh dan latihan tentang persamaan schrodinger relativistik

RANGKUMAN

1. Sama dengan fungsi gelombang pada kondisi non-relativistik, fungsi gelombang schrodinger pada kondisi relativistik juga dilambangkan dengan simbol Ψ_R, yang mengandung fungsi Ψ_R adalah fungsi terhadap ruang tiga dimensi (x, y, z) dan juga fungsi φ_R adalah fungsi terhadap waktu t. Dengan demikian fungsi gelombang schrodinger pada kondisi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\Psi_R(x, y, z, t) = \Psi_R(x, y, z)\varphi_R(t)$$

2. Dari persamaan energi total relativistik tersebut, kita akan menyusun persamaan gelombang secara umum yang akan memadukan antara gagasan kuantum dan gagasan klasik pada kondisi yang relativistik. Kemudian kita kalikan persamaan energi total relativistik diatas dengan fungsi gelombang Ψ_R diatas. Maka akan kita peroleh persamaan : $E^2 = \Psi_R = p^2 C^2 \Psi_R + m_0^1 c^4 \Psi_R$

3. Kemudian persamaan (5.31) yang telah kita temukan di atas dengan menggunakan operator D'Alembert yang dapat dinyatakan oleh :

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dengan demikian, secara umum persamaan Schrodinger kondisi relativistik dapat kita nyatakan oleh persamaan :

$$0 = \hbar^2 \Box \Psi_R + m_0^2 c^2 \Psi_R$$

EVALUASI FORMATIF 2

1. Apa perbedaan persamaan Schrodinger relativistik dan non-relativistik?
2. Apa perbedaan persamaan Schrodinger tak gayut waktu dan bergantung waktu?
3. Tuliskan persamaan operator D'Alembert.
4. Tuliskan persamaan gelombang Schrodinger pada kondisi non-relativistik!
5. Tuliskan persamaan gelombang Schrodinger pada kondisi relativistik!

Kegiatan Pembelajaran 3: PERSAMAAN SCHRODINGER TAK GAYUT WAKTU

KEMAMPUAN YANG DIHARAPKAN

a. Mahasiswa mampu menjelaskan Persamaan Schrodinger tak gayut waktu

b. Mahasiswa mampu mengerjakan contoh soal dan latihan Persamaan Schrodinger tak gayut waktu

URAIAN MATERI

Konsep Dasar

Potensial V pada persamaan schrödinger dapat berupa fungsi dalam x dan t.dapat di asumsikan bahwa potensial V tidak bergantung waktu, dengan begitu persamaan schrödinger dapat dipecahkan dengan menggunakan metode separasi variabel. Fungsi gelombang $\Psi(x,t)$ tapat disusun dari fungsi yang hanya bergantung x dan fungsi yang hanya bergantung t

$$\Psi(x,t) = \varphi(x) f(t) \tag{5.34}$$

Persamaan Schrödinger untuk satu dimensi adalah

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) \tag{5.35}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5.34) ke persamaan Schrödinger maka didapatkan:

$$i\hbar \frac{d(\varphi(x) f(t))}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2(\varphi(x) f(t))}{dx^2} + V(x)\varphi(x) f(t)$$

$$i\hbar \varphi(x) \frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} f(t) \frac{d^2(\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) f(t) \tag{5.36}$$

Selanjutnya persamaan (5.35) dibagi dengan $\varphi(x) f(t)$ diperoleh

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x) \tag{5.37}$$

Persamaan (5.37) merupakan persamaan dalam dua variabel yang terpisah, variabel t untuk ruas kiri dan variabel x untuk ruas kanan. Oleh karena kedua ruas berbeda variabel maka persamaan (5.37) dapat dipenuhi, jika dan hanya jika sama dengan suatu konstanta. Kita misalkan konstanta tersebut adalah *E*. Alasan pemilihan konstanta *E* akan menjadi jelas pada pembahasan berikutnya.ruas kiri dari persamaan 5.37 menjadi :

$$\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}=E$$
$$\frac{df(t)}{f(t)}=-\frac{iE}{\hbar}dt$$
$$\int\frac{df(t)}{f(t)}=-\int\frac{iE}{\hbar}dt$$
$$\ln f(t)=-\frac{iEt}{\hbar}$$
$$f(t)=Ce^{-iEt/\hbar} \qquad (5.38)$$

Oleh karena fungsi gelombang $\Psi(x,t)$ yang kita cari merupakan hasil kali dari solusi bergantung *x*, yaitu $\varphi(x)$ dan solusi bergantung *t*, yaitu $f(t)$ maka konstanta C dapat biarkan diserap oleh $\varphi(x)$ sehingga persamaan 5.38 menjadi:

$$f(t)=e^{-iEt/h} \qquad (5.39)$$

Ruas kanan dari persamaan (5.37) menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V(x)=E$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V(x)\varphi(x)=E\varphi(x) \qquad (5.40)$$

Persamaan (5.40) adalah bentuk *persamaan Schrödinger tak bergantung waktu*. Sebelum bentuk potensial $V(x)$ diketahui, maka persamaan ini tidak dapat dipecahkan untuk memperoleh solusi $\varphi(x)$.

Dengan demikian, fungsi gelombang yang kita cari dapat dituliskan menjadi:

$$\Psi(x,t)=\varphi(x)=e^{-iEt/h} \qquad (5.41)$$

Ada tiga hal yang diperoleh dari metode separasi variabel dalam menyelesaikan persamaan Schrodinger, yaitu:

1. Solusinya, yaitu $\Psi(x,t)$ merupakan keadaan stasioner. Hal ini karena rapat probabilitas dan nilai ekspetasi dari variabel dinamisnya tidak bergantung waktu. Rapat probabilitasnya adalah :

$$\left|\Psi(x,t)^2 = \Psi*(x,t)\Psi(x,t)\right|$$
$$= \Psi*(x)e^{iEt/\hbar}\varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$$
$$= |\varphi(x)|^2 \tag{5.42}$$

Nilai ekspektasi dari suatu variabel dinamis dengan operator $Q(x,p)$ adalah:

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi*(x,t)Q(x,p)\Psi(x,t)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi*(x)e^{+iEt/\hbar}Q(x,p)\varphi(x)e^{-iEt/\hbar}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi*(x)Q(x,p)\varphi(x)dx \tag{5.43}$$

Tampak bahwa rapat probabilitas pada persamaan (5.42) tidak bergantung waktu. Persamaan (5.43) juga menunjukkan bahwa setiap nilai ekspektasi konstan terhadap waktu, dengan kata lain tidak ada sesuatu yang terjadi pada keadaan stasioner.

2. Hasil pengukuran energi total setiap saat adalah sama. Dalam mekanika klasik, energi total yang dimiliki partikel disebut dengan Hamiltonian, yaitu jumlah dari energi kinetik dan energi potensial.

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{5.44}$$

Operator Hamiltonian adalah operator untuk energi total yang diperoleh dengan mensubstitusikan operator momentum, $p_{po} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ke persamaan (5.44) sehingga didapatkan :

$$H_{op} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{5.45}$$

Dengan menggunakan operator Hamiltonian, persamaan (5.40) menjadi

$$H_{op}\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{5.46}$$

Persamaan (5.46) ini disebut sebagai *persamaan karakteristik* atau persamaan nilai eigen, dengan H_{op} adalah operator, $\varphi(x)$ adalah fungsi eigen, dan E adalah nilai eigennya. Oleh karena H_{op} adalah operator Hamiltonian maka nilai eigennya adalah energi total sehingga pemilihan konstanta E dalam separasi variabel sebelumnya menjadi jelas di sini. Nilai ekspektasi energi total, H yaitu:

$$\langle H \rangle = \int \varphi * (x) H_{op} \varphi(x) dx$$

(5.47)

Dengan mensubstitusikan persamaan (5.47) maka diperoleh :

$$\langle H \rangle = \int \varphi * (x) E \varphi(x) dx$$
$$\langle H \rangle = E \int \varphi * (x) \varphi(x) dx$$
$$untuk \quad \varphi(x) \quad ternormalisasi\ maka$$
$$\langle H \rangle = E$$

(5.48)

Selanjutnya kita hitung nilai ekspektasi dari H^2 yaitu:

$$\langle H^2 \rangle = \int \varphi * (x) H_{op}{}^2 \varphi(x) dx \qquad \langle H^2 \rangle = E \int \varphi * (x)(E\varphi(x)) dx$$
$$\langle H^2 \rangle = \int \varphi * (x) H_{op} (H_{op} \varphi(x)) dx \qquad \langle H^2 \rangle = E^2 \int \varphi * (x)(\varphi(x)) dx$$
$$\langle H^2 \rangle = \int \varphi * (x) H_{op} (E\varphi(x)) dx \qquad \langle H^2 \rangle = E^2$$
$$\langle H^2 \rangle = E \int \varphi * (x) H_{op} (\varphi(x)) dx$$

(5.49)

Dengan demikian, deviasi standar ΔH adalah:

$$\Delta H = (\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2)^{1/2}$$
$$\Delta H = (E^2 - E^2)^{1/2}$$
$$\Delta H = 0$$

(5.50)

Artinya adalah distribusi energi total pada berbagai keadaan memiliki sebaran nol. Dengan demikian, pengukuran energi total setiap saat adalah sama, yaitu *E*.

3. Solusi umumnya adalah kombinasi linear dari solusi separasinya. Pada bagian berikutnya akan kita lihat bahwa persamaan Schrödinger tak bergantung waktu memiliki banyak solusi $(\varphi_1(x), (\varphi_2(x), (\varphi_3(x)....)$ dan tiap-tiap solusi tersebut bersesuaian dengan konstanta separasi masing-masing $(E_1, E_2, E_3,...)$ Dengan

demikian, terdapat perbedaan fungsi gelombang untuk tiap-tiap level energi yang diijinkan $(\Psi_1(x,t),(\Psi_2(x,t),\Psi_3(x,t),....)$

$$(\Psi_1(x,t) = \varphi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$$
$$(\Psi_2(x,t) = \varphi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$
$$(\Psi_3(x,t) = \varphi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar}$$

(5.51)

Adapun solusi umumnya adalah kombinasi linier dari semua $(\Psi_n(x,t)$ yaitu

$$(\Psi_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$$

(5.52)

Persamaan tak gayut waktu maksudnya tidak tergantung waktu adalah persamaan ini bersifat kekal. Persamaan ini pada keadaan non-relativistik, jadi Ψ diubahkan menjadi komponen fungsi posisi pada setiap waktu, yaitu :

$$\Psi = \psi_x\psi_y\psi_z\varphi_t$$

(5.53)

Persamaan SchrÖdinger tak gayut waktu jika salah satu ruasnya konstan (tetap). Energi potensial V memiliki nilai yang konstan. Jadi, akan diperoleh persamaan SchrÖdinger tak gayut waktu untuk keadaan non-relativistik sebagai berikut:

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right] + V\psi$$

(5.54)

Lalu dapat disederhanakan lagi menjai persamaan berikut :

$$\boxed{E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi}$$

(5.55)

Pada persamaan SchrÖdinger ada juga operator yang bernama **operator Hamiltonian (H)**. Operator ini mewakili observabel energi pada ruang Hilbert. Operator energi H dapat dinyatakan oleh persamaan beikut :

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

(5.56)

Lalu dapat disederhanakan lagi menjadi sebagai berikut :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\right)\psi = E\psi$$

(5.57)

Persamaan (5.56) disubstitusikan dengan persamaan (5.57) didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\boxed{H\varphi = E\psi}$$

(5.58)

Keberhasilan Persmaaan Schrodinger

Persamaan-persamaan SchrÖdinger ini berhasil menentukan tingkat energi pada atom, spektrum Hidrogen dan lainnya. Sampai akhirnya Henrik Lorentz membantah dengan tiga alasan yang perlu diperhatikan, diantaranya :

- Gelombang akan menyebar dalam waktu
- Frekuensi layangan tidak akan menghasilkan garis spektrum
- Persamaan SchrÖdinger tidak cocok dengan kerangka klasik

Lalu persamaan SchrÖdinger ini pun tidak bisa menjelaskan fenomena efek fotolistrik Einstein dan radiasi benda hitam Planck seperti yang ditanyakan Heisenberg.

Hingga beberapa saat setelah itu permasalahan SchrÖdinger terjawab oleh seorang fisikawan bernama Max Born, SchrÖdinger sangat berjasa pada dunia fisika modern. Dan berkat sumbangsihnya tersebut, SchrÖdinger berhasil mendapatkan hadiah nobel bidang fisika pada tahun 1933.

PENUGASAN KELAS

1. Bentuklah kelompok kecil dan diskusikanlah Persamaan Schrodinger tak gayut waktu
2. Diskusikanlah dalam kelompok kecil tentang contoh Persamaan Schrodinger tak gayut waktu

RANGKUMAN

1. Ada tiga hal yang diperoleh dari metode separasi variabel dalam menyelesaikan persamaan Schrodinger, yaitu: Solusinya, yaitu $\Psi(x,t)$ merupakan keadaan stasioner, Hasil pengukuran energi total setiap saat adalah sama dan Solusi umumnya adalah kombinasi linear dari solusi separasinya.
2. Rapat probabilitas dan nilai ekspetasi dari variabel dinamisnya tidak bergantung waktu. Rapat probabilitasnya adalah :

$$\left|\Psi(x,t)^2 = \Psi*(x,t)\Psi(x,t)\right|$$
$$= \Psi*(x)e^{iEt/\hbar}\varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$$
$$= |\varphi(x)|^2$$

Nilai ekspektasi dari suatu variabel dinamis dengan operator $Q(x,p)$ adalah:

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi*(x,t)Q(x,p)\Psi(x,t)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi*(x)e^{+iEt/\hbar}Q(x,p)\varphi(x)e^{-iEt/\hbar}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi*(x)Q(x,p)\varphi(x)dx$$

3. Operator Hamiltonian adalah operator untuk energi total yang diperoleh dengan mensubstitusikan operator momentum,

$$H_{op} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

4. *Persamaan karakteristik* atau persamaan nilai eigen, dengan H_{op} adalah operator, $\varphi(x)$ adalah fungsi eigen, dan E adalah nilai eigennya. Oleh karena H_{op} adalah operator Hamiltonian maka nilai eigennya adalah energi total sehingga pemilihan konstanta E dalam separasi variabel sebelumnya menjadi jelas di sini. Nilai ekspektasi energi total, H yaitu:

$$\langle H \rangle = \int \varphi * (x) H_{op} \varphi(x) dx$$

5. Persamaan tak gayut waktu maksudnya tidak tergantung waktu adalah persamaan ini bersifat kekal. Persamaan ini pada keadaan non-relativistik,

$$\boxed{E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi}$$

6. Pada persamaan SchrÖdinger ada juga operator yang bernama **operator Hamiltonian (H)**. Operator ini mewakili observabel energi pada ruang Hilbert. Operator energi H dapat dinyatakan oleh persamaan beikut :

$$\boxed{H\varphi = E\psi}$$

7. Keberhasilan Persmaaan Schrodinger

- Gelombang akan menyebar dalam waktu
- Frekuensi layangan tidak akan menghasilkan garis spektrum
- Persamaan SchrÖdinger tidak cocok dengan kerangka klasik

EVALUASI FORMATIF 3

1. Tuliskan operator Hamiltonian!
2. Sebuah sistem nonrelativistik satu dimensi memiliki energi potensial yang memenuhi persamaan :

$$V(x) = ax - V_0$$

   dengan a dan b merupakan bilangan bulat positif. Maka persamaan schrodinger tak gayut waktu untuk sistem tersebut adalah …
3. Carilah bentuk operator hamiltonian untuk sistem nonrelativistik dua dimensi dengan energi potensial yang memenuhi persamaan :

$$V(x) = ax - V_0 \,!$$

4. Carilah bentuk operator hamiltonian untuk sistem nonrelativistik dua tiga dengan energi potensial yang memenuhi persamaan :

$$V(x, y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - V_0 \,!$$

5. Sebuah sistem nonrelativistik memiliki kurva energi potensial berbentuk kotak menyerupai bentuk sumur yang kemudian kita kenal dengan istilah sumur potensial. Jika sumur potensial tersebut memiliki energi potensial yang memenuhi persamaan berikut ini:

$$V(x) = V_0 \quad x \leq 0 \vee a \leq x$$

$$0 \quad 0 \leq x \leq a$$

Maka persamaan schrodinger tak gayut waktu untuk sistem tersebut adalah…

RANGKUMAN MODUL

4. - Schrodinger mengembangkan sebuah gagasan dengan berkiblat pada gagasan sang pangeran Perancis Luis De Broglie. Schrodinger percaya bahwa gagasan klasiknya tentang gelombang kekontinuan akan dapat membawa kembali kejayaan gagasan klasik.
5. Fungsi gelombang Schrodinger dilambangkan dengan symbol Ψ yang mengandung fungsi υ adalah fungsi terhadap ruang tiga dimensi (x,y,z) dan juga fungsi φ adalah fungsi terhadap waktu s. Dengan demikian fungsi gelombang Schrodinger dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\Psi(x,y,z) = \upsilon\ (x,y,z)\varphi(t)$$

6. Persamaan dibawah adalah persamaan yang disebut dengan persamaan Schrodinger (pada kondisi non-relativistik). Persamaan yang lahir dari buah pemikiran jenius Erwin Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi$$

7. Sama dengan fungsi gelombang pada kondisi non-relativistik, fungsi gelombang schrodinger pada kondisi relativistik juga dilambangkan dengan simbol Ψ_R, yang mengandung fungsi Ψ_R adalah fungsi terhadap ruang tiga dimensi (x, y, z) dan juga fungsi φ_R adalah fungsi terhadap waktu t. Dengan demikian fungsi gelombang schrodinger pada kondisi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\Psi_R(x,y,z,t) = \Psi_R(x,y,z)\varphi_R(t)$$

8. Dari persamaan energi total relativistik tersebut, kita akan menyusun persamaan gelombang secara umum yang akan memadukan antara gagasan kuantum dan gagasan klasik pada kondisi yang relativistik. Kemudian kita kalikan persamaan energi total

relativistik diatas dengan fungsi gelombang Ψ_R diatas. Maka akan kita peroleh persamaan :

$E^2 = \Psi_R = p^2 C^2 \Psi_R + m_0^1 c^4 \Psi_R$

6. Kemudian persamaan (5.31) yang telah kita temukan di atas dengan menggunakan operator D'Alembert yang dapat dinyatakan oleh :

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

7. Dengan demikian, secara umum persamaan Schrodinger kondisi relativistik dapat kita nyatakan oleh persamaan :

$0 = \hbar^2 \Box \Psi_R + m_0^2 c^2 \Psi_R$

8. Ada tiga hal yang diperoleh dari metode separasi variabel dalam menyelesaikan persamaan Schrodinger, yaitu: Solusinya, yaitu $\Psi(x,t)$ merupakan keadaan stasioner, Hasil pengukuran energi total setiap saat adalah sama dan Solusi umumnya adalah kombinasi linear dari solusi separasinya.

9. Rapat probabilitas dan nilai ekspetasi dari variabel dinamisnya tidak bergantung waktu. Rapat probabilitasnya adalah :

$$\begin{aligned} \left|\Psi(x,t)^2 = \Psi*(x,t)\Psi(x,t)\right| \\ = \Psi*(x)e^{iEt/\hbar}\varphi(x)e^{-iEt/\hbar} \\ = |\varphi(x)|^2 \end{aligned}$$

Nilai ekspektasi dari suatu variabel dinamis dengan operator $Q(x,p)$ adalah:

$$\begin{aligned} \langle Q(x,p)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi*(x,t)Q(x,p)\Psi(x,t)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi*(x)e^{+iEt/\hbar}Q(x,p)\varphi(x)e^{-iEt/\hbar}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi*(x)Q(x,p)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

10. Operator Hamiltonian adalah operator untuk energi total yang diperoleh dengan mensubstitusikan operator momentum,

$$H_{op} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

11. Persamaan karakteristik atau persamaan nilai eigen, dengan H_{op} adalah operator, $\varphi(x)$ adalah fungsi eigen, dan E adalah nilai eigennya. Oleh karena H_{op} adalah operator Hamiltonian

maka nilai eigennya adalah energi total sehingga pemilihan konstanta E dalam separasi variabel sebelumnya menjadi jelas di sini. Nilai ekspektasi energi total, H yaitu:

$$\langle H \rangle = \int \varphi * (x) H_{op} \varphi(x) dx$$

12. Persamaan tak gayut waktu maksudnya tidak tergantung waktu adalah persamaan ini bersifat kekal. Persamaan ini pada keadaan non-relativistik, $\boxed{E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi}$

13. Pada persamaan SchrÖdinger ada juga operator yang bernama **operator Hamiltonian (H)**. Operator ini mewakili observabel energi pada ruang Hilbert. Operator energi H dapat dinyatakan oleh persamaan beikut :

$$\boxed{H\varphi = E\psi}$$

14. Keberhasilan Persmaaan Schrodinger
    - Gelombang akan menyebar dalam waktu
    - Frekuensi layangan tidak akan menghasilkan garis spektrum
    - Persamaan SchrÖdinger tidak cocok dengan kerangka klasik

DAFTAR PUSTAKA

1. Vani Sugiyono, S.T.2016. *Mekanika Kuantum.* Erlangga : Jakarta
2. David J Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Second Edition. Pearson Education International.
3. Mikrajuddin Abdullah. Fisika Statistik untuk Mahasiswa MIPA. *KK Fisika Material Elektronik - FMIPA, ITB.* Tidak Diterbitkan