

Stepanus, ST, MT



BUKU AJAR KALKULUS II



BUKU AJAR KALKULUS II

Penulis:

Stepanus, S.T., M.T.



UKI PRESS

Pusat Penerbitan dan Pencetakan
Buku Perguruan Tinggi
Universitas Kristen Indonesia
Jakarta
2024

BUKU AJAR KALKULUS II

Penulis:

Stepanus, S.T., M.T.

Editor:

Stepanus, S.T., M.T.

Antonius Doddy Tyas Prasetyo, S.T., M.Sc.

ISBN: 978-623-8737-27-7

Penerbit: UKI Press

Anggota APPTI

Anggota IKAPI

Redaksi: Jl. Mayjen Sutoyo No.2 Cawang Jakarta - 13630

Telp. (021) 8092425

Cetakan I Jakarta: UKI Press, 2024

Hak cipta dilindungi undang-undang.

Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur hanya bagi Tuhan Yesus Kristus, oleh karena anugerah-Nya yang melimpah, kemurahan dan kasih setia yang besar akhirnya penulis dapat menyelesaikan **Buku Ajar “KALKULUS II”**.

Buku Ajar ini disusun sebagai panduan matakuliah Kalkulus II di Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia, Jakarta. Buku Ajar ini terdiri dari dua belas Bab yang secara keseluruhan memiliki bobot 4 sks, dimana masing-masing Bab akan memperlihatkan pokok-pokok penting yang harus dipahami mahasiswa. Dalam membantu pembaca untuk memahami semua materi tersebut, Buku Ajar ini dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaiannya, serta latihan soal.

Penyusunan Buku Ajar ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penyusun menyadari bahwa Buku Ajar ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penyusun membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan Buku Ajar ini. Semoga Buku Ajar ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya mahasiswa.

Akhir kata penyusun mengucapkan terimakasih dan salam untuk kita semua.

Jakarta, 07 Agustus 2024

Penyusun,

Stepanus, ST., MT.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
DAFTAR GAMBAR.....	v

BAB I	TURUNAN PARSIAL FUNGSI DUA	
	VARIABEL / TIGA VARIABEL	1
I.	Pendahuluan	1
II.	Turunan Parsial Pertama Fungsi Dua Variabel	1
III.	Turunan Parsial Kedua Fungsi Dua Variabel.	9
IV.	Increment Total Dan Diferensial Total	22
V.	Umpan Balik	31

BAB II	NILAI EKSTRIM	
	(MAKSIMUM / MINIMUM)	
	FUNGSI DUA VARIABEL	35
I.	Pendahuluan	35
II.	Mencari Nilai Ekstrim (Maksimum / Minimum) Dari Fungsi 2 Variabel $Z = F$ (X,Y)	35
III.	Mencari Titik Ekstrim dan Jenisnya.....	50
IV.	Umpan Balik	54

BAB III	INTEGRAL LIPAT DUA	
	(BAGIAN PERTAMA)	55
I.	Pendahuluan	55
II.	Double Integral	55
III.	Mencari Luas Dengan Menggunakan Integral Lipat Dua	77
IV.	Umpan Balik	87
BAB IV	INTEGRAL LIPAT DUA (BAGIAN DUA)	89
I.	Pendahuluan	89
II.	Menghitung Integral Lipat Dua Dalam Koordinat Kartesius	89
III.	Menghitung Integral Lipat Dua Dalam Koordinat Kutub / Polar	107
VI.	Umpan Balik	121
BAB V	INTEGRAL LIPAT TIGA	123
I.	Pendahuluan	123
II.	Double Integral	123
III.	Triple Integral	145
IV.	Umpan Balik	157

BAB VI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA	
(PERSAMAAN DIFERENSIAL	
ORDINER).....	159
I. Pendahuluan	159
II. Persamaan Diferensial (<i>Differential</i>	
<i>Equations</i>)	160
III. Kegiatan Pembelajaran 2.....	163
IV. Pangkat (Degree) dari Persamaan	
Diferensial	179
V. Penyelesaian Suatu Persamaan Diferensial	180
IV. Umpan Balik	185
REFERENSI.....	187
BIOGRAFI PENULIS	188

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1. Grafik Kurva 3 Dimensi (3D)	36
Gambar 3. 1. Luasan L dengan Integral Fungsi 2 Variabel	56
Gambar 3. 2. Grafik Luasan L	68
Gambar 3. 3. Grafik Luasan L dengan $y = g_1x \text{ dan } g_2x$	69
Gambar 3. 4. Grafik Luasan L dengan $x = g_1x \text{ dan } g_2x$	71
Gambar 3. 5. Grafik Luasan L berbentuk Segitiga	72
Gambar 3. 6. Grafik $y=x, y=-x+2$	74
Gambar 3. 7. Grafik $x=y$ dan $x=-y+2$	76
Gambar 3. 8. Grafik Luas Daerah yang dibatasi oleh $x+y=2$ dan $2y=x+4$	85
Gambar 4. 1. Suatu Luasan L dalam Koordinat Cartesius	90
Gambar 4. 2. Grafik Luasan L dengan $y = g_1x \text{ dan } g_2x$	91
Gambar 4. 4. Grafik $y=x$ dan $y=-x+2$	93
Gambar 4. 5. Grafik melalui 2 titik (a, o) dan (o, b)	94
Gambar 4. 6. Grafik $y=x$ dan $y=-x+2$	95
Gambar 4. 7. Grafik $x=-y+2$ dan $x=y$	96
Gambar 4. 8. Grafik $y=x$ dan $y=-x+2$	100

Gambar 4. 9. Grafik $x=y$, $x=-y+2$	101
Gambar 4. 10. Kurva $y = x$	102
Gambar 4. 11. Kurva $y = x^2$	103
Gambar 4. 12. Penggabungan Grafik kurva $y = x^2$ dan $y = x$	103
Gambar 4. 13. Grafik Kurva Gabungan $y = x$ dan	104
Gambar 4. 14. Grafik Kurva Gabungan $x=y$ dan $x=\sqrt{y}$	105
Gambar 4. 15. Koordinat Cartesius titik P (x,y)	107
Gambar 4. 16. Sudut $\varphi < 90^\circ$	107
Gambar 4. 17. Hubungan Koordinat Cartesius dengan Koordinat Polar	108
Gambar 4. 18. Grafik Lingkaran dengan Pusat di θ dengan Jari-jari α	109
Gambar 4. 19. Grafik Lingkaran dengan Pusat di $(\alpha,0)$ dengan Jari-jari α	110
Gambar 4. 20. Grafik Lingkaran dengan Pusat di $(0,\alpha)$ dengan Jari-jari α	111
Gambar 4. 21. Grafik Luasan L dengan $y = g_1x$ dan g_2x	112
Gambar 4. 22. Luasan L dengan Sudut φ dan α	113
Gambar 4. 23. Luasan Arsir L dalam Grafik Lingkaran	115
Gambar 5. 1. Grafik Luasan L dengan $y = g_1x$ dan g_2x	124

Gambar 5. 2. Grafik Luasan L dengan $x = g_1x \text{ dan } g_2x$	125
Gambar 5. 3. Luasan L dengan Sudut ϕ dan α	126
Gambar 5. 4. Grafik yang terbentuk berdasarkan dari hubungan variabel Koordinat Cartesius dengan Koordinat Polar	127
Gambar 5. 5. Grafik 2 Lingkaran (Lingkaran I & Lingkaran II) yang saling berpotongan	130
Gambar 5. 6. Luasan L yang terbentuk dari persamaan $\rho=2 \sin\phi$ dan $\rho=2 \cos\phi$	132
Gambar 5. 7. Grafik 2 Lingkaran (Lingkaran I & Lingkaran II) yang saling bersinggungan di dalam	135
Gambar 5. 8. $\frac{1}{4}$ bagian dari Grafik 2 Lingkaran (Lingkaran I & Lingkaran II) yang saling bersinggungan di dalam	136
Gambar 5. 9. Koordinat Polar P (ρ, ϕ)	138
Gambar 5. 10. Grafik Lingkaran $x^2 + y^2 = 1$	140
Gambar 5. 11. Suatu Luasan L yang terbentuk dari $\rho=2\cos\phi$ dengan $\alpha=0$ dan $\beta=\pi/4$	141
Gambar 5. 12. Grafik Luasan L	145
Gambar 5. 13. Bentuk Umum Triple Integral dalam Koordinat Cartesius	146

Gambar 5. 14. Grafik 3 Dimensi suatu Integral Lipat Tiga.....	154
Gambar 5. 15. Proyeksi suatu Integral Lipat Tiga pada Himpunan Bidang Sxz	156

BAB I

TURUNAN PARSIAL FUNGSI DUA VARIABEL / TIGA VARIABEL

I. Pendahuluan

Definisi turunan parsial, misalkan f fungsi dua variabel x dan y . Jika y dijaga agar tetap konstan, katakanlah $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi satu variabel x . Turunannya di $x = x_0$ disebut Turunan Parsial f terhadap x di (x_0, y_0) dan dinyatakan oleh $f_x(x_0, y_0)$, dengan notasi:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Dengan cara yang sama, turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan oleh $f_y(x_0, y_0)$, dengan notasi:

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

II. Turunan Parsial Pertama Fungsi Dua Variabel

*) Dalam Kalkulus 1

Fungsi satu variabel

$$y = f(x)$$

Turunannya: $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$z = f(x)$$

Turunannya: $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$z = f(y)$$

Turunannya: $\frac{\partial z}{\partial y}$

Rumus-rumus turunan pada Kalkulus 1 & 2:

1. $y = c$ (c konstan)

$$y' = 0$$

2. $y = x^n$

$$y' = n x^{n-1}$$

3. $y = \sin x$

$$y' = \cos x$$

4. $y = \cos x$

$$y' = -\sin x$$

5. $y = \tan x$

$$y' = \sec^2 x$$

6. $y = \sin (ax + b)$

$$y' = a \cos (ax + b)$$

7. $y = \cos (ax + b)$

$$y' = -a \sin (ax + b)$$

$$8. \quad y = \tan(ax + b)$$

$$y' = a \sec^2(ax + b)$$

$$9. \quad y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$10. \quad y = e^{-x}$$

$$y' = -e^{-x}$$

$$11. \quad y = e^{ax}$$

$$y' = a e^{ax}$$

$$12. \quad y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

Beberapa aturan / sifat Turunan antara lain:

$$1. \quad y = U(x) \pm V(x) \text{ atau } y = U \pm V$$

$$y' = U' \pm V'$$

$$2. \quad y = c u \text{ (} c \text{ konstan)}$$

$$y' = c u'$$

$$3. \quad y = U \cdot V$$

$$y' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$4. \quad y = \frac{U}{V}$$

$$y' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$$

Contoh (1)

a) $y = 2x^2 + 3x + 5$

Turunannya:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x + 3 + 0$$

b) $z = \sin y$

Turunannya:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y$$

c) Carilah turunan dari:

$$y = \sin x + e^x$$

Jawab:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x + e^x$$

*) Dalam Kalkulus 2

Kalkulus fungsi dua variabel:

$z = f(x, y) \Rightarrow$ Bentuk eksplisit

Contoh fungsi 2 variabel:

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 7y + 9$$

$$z = \sin(x^2 + y^2)$$

Mencari turunan dari $z = f(x, y)$

=> turunan bentuknya ada 2 macam:

$$\text{L> Turunan ke } x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{L> Turunan ke } y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Cara mencarinya sebagai berikut:

(i) $\frac{\partial z}{\partial x}$ dari $z = f(x, y)$

dicari dengan menganggap y sebagai konstan

(yang bukan x dianggap konstan)

(ii) $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = f(x, y)$

dicari dengan menganggap x sebagai konstan

(yang bukan y dianggap konstan)

Contoh (2)

$$z = x^2 + y^3 + 5x - 7y + 8$$

Carilah:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

Jawab:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 + 5 - 0 + 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 5$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3y^2 + 0 - 7 + 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 7$$

Contoh (3)

$$z = \ln x + \sin y + 3x - 5y + 1$$

Carilah:

$$\text{a)} \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Jawab:

$$\text{a)} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} + 0 + 3 - 0 + 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} + 3$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + \cos y + 0 - 5 + 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y - 5$$

Contoh (4)

$$z = x^2 y^3$$

Carilah:

$$\text{a)} \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Jawab:

$$\text{a) } \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 3y^2 \\ &= 3x^2 y^2\end{aligned}$$

Contoh (5)

$$z = \frac{x^2}{y^3}$$

Carilah:

$$\text{a) } \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{b) } \frac{\partial z}{\partial y}$$

Jawab:

$$\text{a) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } z &= x^2 y^{-3} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 (-3 y^{-4}) \\ &= -3 x^2 y^{-4} \\ &= -\frac{3x^2}{y^4}\end{aligned}$$

Contoh (6)

Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$

Carilah:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

Jawab:

a) misal $u = x^2$

$$u' = 2x$$

dan $v = \sin(xy^2)$

$$v' = y^2 \cdot \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$= 2x \cdot \sin(xy^2) + x^2 \cdot y^2 \cdot \cos(xy^2)$$

$$= 2x \sin(xy^2) + x^2 y^2 \cos(xy^2)$$

b) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos(xy^2) \cdot 2xy$

$$= 2 x^3 y \cos(xy^2)$$

III. Turunan Parsial Kedua Fungsi Dua Variabel

*) Turunan parsial ke-2 dari $z = f(x, y)$

Ingat pada Kalkulus 1: $z = f(x)$

Turunan ke-1: $\frac{dz}{dx}$

Turunan ke-2: $\frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{d^2z}{dx^2}$

Turunan ke-3: $\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) = \frac{d^3z}{dx^3} \dots$ dst

*) Kalkulus 2

$z = f(x, y)$

=> turunan parsialnya

$$\text{ke } x \rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} \quad \text{ke } x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$$

$$\text{ke } y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

$$\text{ke } y \rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}} \quad \text{ke } x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}$$

$$\text{ke } y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$$

↓

Turunan Parsial ke 1
ke 2

↓

Turunan Parsial

Kesimpulan terlihat $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Contoh (7)

Diketahui $z = x^3 + y^4 + 5x^2 - 6y^3 + 7x + 8y - 1$

Carilah turunan parsial ke 2 nya!

i) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

ii) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

iii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

iv) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Jawab:

Dicari dahulu turunan parsial ke 1 = $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 10x + 7$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 18y^2 + 8$$

Turunan parsial ke 2 nya:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 10x + 7) \\ &= 6x + 10 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 10x + 7)$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (4y^3 - 18y^2 + 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (4y^3 - 18y^2 + 8) \\ &= 12y^2 - 36y \end{aligned}$$

$$\text{Terbukti } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Contoh (8)

Carilah turunan parsial ke-2 dari $z = x^4 y^6$

Jawab:

Dicari dahulu turunan parsial ke-1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 y^6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4 y^5$$

Turunan parsial ke-2:

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 y^6) \\ &= 12x^2 y^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 y^6) = 24x^3 y^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (6x^4 y^5) \\ &= 24x^3 y^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iv)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (6x^4 y^5) \\ &= 30x^4 y^4\end{aligned}$$

$$\text{Terbukti } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

- *) Secara serupa dapat dicari turunan parsial dari fungsi 3 variabel

$$\omega = f(x, y, z)$$

Turunan parsial (ke 1):

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

Turunan parsial (ke 2):

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial y}$$

- *) Turunan / Turunan parsial dari fungsi ... (Fungsi dari fungsi)

- (I) Jika $Z = f(x, y)$ sedangkan $x = g(t)$; $y = h(t) \rightarrow$ 1 variabel t

$$Z = f(g(t), h(t)) \rightarrow Z \text{ fungsi 1 variabel } t$$

$$\text{Turunannya turunan biasa: } \frac{dZ}{d\ldots}$$

(bukan turunan parsial)

- (II) Jika $Z = f(x, y)$ sedangkan $x = g(u, v)$; $y = h(u, v) \rightarrow$ 2 variabel

$$Z = f(g(u, v), h(u, v)) \rightarrow Z \text{ fungsi dua variabel}$$

u

dan v

Turunannya turunan parsial: $\frac{\partial Z}{\partial u}; \frac{\partial Z}{\partial v}$

Dari (I) Cara mencari

$$\boxed{\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Dari (II) Cara mencari

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} &= \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$

Contoh (9)

$$Z = x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1$$

Ditanya: $\frac{dZ}{d\theta}$ (turunan biasa)

Jawab:

$$\frac{dZ}{d\theta} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\text{Dari } Z = x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1$$

$$\text{didapat } \rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = 2x + 2$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial Z}{\partial y} = 2y + 3$$

$$\text{Dari } x = \sin \theta \quad \text{didapat } \frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

$$\text{Dari } x = \cos \theta \quad \text{didapat } \frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (2x + 2) \cos \theta + (2y + 3)(-\sin \theta)$$

$$= (2 \sin \theta + 2) \cos \theta + (2 \cos \theta + 3)(-\sin \theta)$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos \theta \sin \theta - 3 \sin \theta$$

$$= 2 \cos \theta - 3 \sin \theta$$

Contoh (10)

$$Z = 2x + 3y + 5, \quad x = uv, \quad y = 2u + 3v$$

$$\text{Ditanya: } \frac{\partial Z}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial v}$$

$$\text{Jawab: Dari (i) } \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\text{(ii) } \frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\text{Dari } Z = 2x + 3y + 5 \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 3$$

$$\text{Dari } x = uv \quad \frac{\partial x}{\partial u} = v$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u$$

$$\text{Dari } y = 2u + 3v \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 3$$

$$(1) \frac{\partial Z}{\partial u} = (2)(v) + (3)(2)$$

$$= 2v + 6$$

$$(2) \frac{\partial Z}{\partial v} = (2)(u) + (3)(3) \\ = 2v + 9$$

*) Turunan parsial fungsi implisit $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial Z}} \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial Z}} \quad \boxed{\frac{\partial Z}{\partial t} \neq 0}$$

Contoh (11)

Cari $\frac{\partial Z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial Z}{\partial y}$

dari: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Jawab:

$$F(x, y, z) = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\therefore \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{2x}{2Z} = -\frac{x}{z}$$

$$\therefore \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{2y}{2Z} = -\frac{y}{z}$$

Contoh (12)

$$\omega = x^2 + y^3 + z^4 + x^3y^2z$$

Carilah turunan parsialnya (ke 1 dan ke 2)!

Jawab:

$$(1) \frac{\partial \omega}{\partial x} \text{ (yang bukan } x \text{ dianggap konstan)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial x} &= 2x + 0 + 0 + 3x^2y^2z \\ &= 2x + 3x^2y^2z\end{aligned}$$

$$(2) \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{ (yang bukan } y \text{ dianggap konstan)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial y} &= 0 + 3y^2 + 0 + 2x^3yz \\ &= 3y^2 + 2x^3yz\end{aligned}$$

$$(3) \frac{\partial \omega}{\partial z} \text{ (yang bukan } z \text{ dianggap konstan)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial z} &= 0 + 0 + 4z^3 + x^3y^2 \\ &= 4z^3 + x^3y^2\end{aligned}$$

Cara mencari turunan parsial ke 2 nya:

$$\begin{aligned}*) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2x + 3x^2y^2z) \\ &= 2 + 6xy^2z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (2x + 3x^2 y^2 z) \\
&= 6x^2 y z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} (2x + 3x^2 y^2 z) \\
&= 3x^2 y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (3y^2 + 2x^3 y z) \\
&= 6y + 2x^3 z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} (3y^2 + 2x^3 y z) \\
&= 2x^3 y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} (4z^3 + x^3 y^2) \\
&= 12z^2
\end{aligned}$$

*) Turunan parsial dari fungsi 3 variabel $U = f(x, y, z)$

$$\boxed{U = f(x, y, z)} \rightarrow \text{turunan parsial}$$

↳ ke x

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \text{ (selain } x \text{ dianggap konstan)}$$

$$\text{↳ ke } y \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} \text{ (selain } y \text{ dianggap konstan)}$$

$$\text{↳ ke } z \rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} \text{ (selain } z \text{ dianggap konstan)}$$

Contoh (13)

$$U = x^2 y^3 z^4 + 3x - 5y + 6z^2 + 8$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^3z^4 + 3$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y^2z^4 - 5$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 + 12z$$

Mencari turunan parsial ke 2 pada dasarnya seperti pada 2 dari fungsi 2 variabel

(i) Dari $\frac{\partial U}{\partial x}$ didapat

$$\text{↳ ke } x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\hookrightarrow ke\ y \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

$$\hookrightarrow ke\ z \rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}$$

(ii) Dari $\frac{\partial U}{\partial y}$

$$\hookrightarrow ke\ x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\hookrightarrow ke\ y \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\hookrightarrow ke\ z \rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$$

(iii) Dari $\frac{\partial U}{\partial z}$

$$\hookrightarrow ke\ x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$$

$$\hookrightarrow ke\ y \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$

$$\hookrightarrow ke\ z \rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\dots: \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} ;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} ;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$$

Contoh (14)

Cari $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}$; $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$ dari Contoh (13)

Jawab:

$$\text{Dari Contoh (1)} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^3z^4 + 3$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (i) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3z^4 + 3) \\ &= 2y^3z^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (ii) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial U}{\partial y} (2xy^3z^4 + 3) \\ &= 6xy^2z^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (iii) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial U}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial U}{\partial z} (2xy^3z^4 + 3) \\ &= 8xy^3z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (iv) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial U}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial U}{\partial z} (3x^2y^2z^4 - 5) = 12x^2y^2z^3 \end{aligned}$$

IV. Increment Total Dan Diferensial Total

*) Increment / perubahan total & Diferensial total

Misal ada $z = f(x, y)$

Jika variabel x mengalami perubahan sebesar Δx

dan variabel y mengalami perubahan sebesar Δy

maka z akan mengalami perubahan total sebesar Δz

Dari $z = f(x, y)$

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

Perubahan total:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

atau dapat ditulis:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x$$

$$+ \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y$$

Diferensial total $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y}$

Catatan:

Untuk nilai Δx dan Δy yang cukup kecil maka $dz \approx \Delta z$ (nilai dz mendekati nilai Δz).

Hal tersebut diatas dapat digunakan untuk menghitung Δz dengan pendekatan dz .

Contoh (15)

Carilah nilai pendekatan dari $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$

Jawab:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} \\ &= \sqrt{(4 + 0,05)^2 + (3 - 0,07)^2} \end{aligned}$$

Bentuk: $\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2}$

dengan $x = 4$; $\Delta x = 0,05$

$$y = 3; \Delta y = -0,07$$

$$\begin{aligned} \text{Dimisalkan } z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + \Delta z &= \sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} &\approx z + dz \\ &\approx 5 + dz\end{aligned}$$

Dihitung dz dengan Rumus:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y}$$

Dari $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

atau $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned}\text{didapat} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x}{5} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (2y) \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{y}{5} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{4}{5}\right)(0,05) + \left(\frac{3}{5}\right)(-0,07) \\ &= 0,04 - 0,042 \\ &= -0,002 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} &= z + \Delta z \\ &\approx z + dz \\ &= 5 - 0,002 \\ &= 4,998 \end{aligned}$$

*) Dengan Cara Serupa untuk fungsi 3 Variabel

$$U = f(x, y, z)$$

$$U + du = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

$$du = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

$$\boxed{du = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z}$$

untuk $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ cukup kecil maka $du \approx \Delta u$

Contoh (16)

$$U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 + (z + \Delta z)^2} - \\ &\quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Sedangkan $\boxed{du = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z}$

$$U = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Dengan cara serupa:

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\therefore du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} [x \cdot \Delta x + y \cdot \Delta y + z \cdot \Delta z]$$

*) Mencari turunan parsial fungsi implisit

$z = f(x, y) \Rightarrow$ fungsi eksplisit

Bentuk implisitnya: $F(x, y, z) = 0$

*) Mencari turunan parsial dari fungsi implisit

$$\boxed{F(x, y, z) = 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ? ; \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

Caranya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \end{aligned}} \right\} \text{ dengan } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

Contoh (17)

Diketahui Fungsi implisit:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 5 = 0$$

Carilah:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

c) $\frac{\partial y}{\partial x}$

Jawab:

$$F(x, y, z) = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 6z$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \\ &= -\frac{2x}{6z} \\ &= -\frac{x}{3z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \\ &= -\frac{4y}{6z} \\ &= -\frac{2y}{3z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \\ &= -\frac{2x}{4y} = -\frac{x}{2y} \end{aligned}$$

Contoh (18)

Diketahui Fungsi implisit:

$$x^2y^3z^4 = 1$$

Carilah:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

c) $\frac{\partial x}{\partial y}$

Jawab:

$$F(x, y, z) = 0$$

$$x^2y^3z^4 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3z^4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2z^4$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4x^2y^3z^3$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \\ &= -\frac{2xy^3z^4}{4x^2y^3z^3} \\ &= -\frac{z}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \\
 &= -\frac{3x^2 y^2 z^4}{4x^2 y^3 z^3} \\
 &= -\frac{3z}{4y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{\partial x}{\partial y} &= -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial x} \\
 &= -\frac{3x^2 y^2 z^4}{2xy^3 z^4} \\
 &= -\frac{3x}{2y}
 \end{aligned}$$

V. Umpan Balik

- 1) Diketahui $u = x^3 y^2 z - 2 x^2 y^3 + 3 y^2 z^3 - 4 x^4 z^2$

Carilah:

a) $\frac{\partial u}{\partial x}$

b) $\frac{\partial u}{\partial y}$

c) $\frac{\partial u}{\partial z}$

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

e) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

f) $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

g) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

h) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

j) $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$

k) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$

l) $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$

m) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

n) $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$

$$\text{o) } \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$$

$$\text{p) } \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\text{q) } \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$$

$$\text{r) } \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$$

$$\text{s) } \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z}$$

$$\text{t) } \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$$

$$\text{u) } \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y}$$

$$\text{v) } \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$$

2) Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$

Carilah:

$$\text{a) } \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{b) } \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{c) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\text{d) } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\text{e) } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\text{f) } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

3) Diketahui $f(x, y) = x e^y - \sin \frac{x}{y} + x^3 y^2$

Carilah:

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

c) $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$

d) $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$

e) $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

f) $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$

4) Jika diberikan fungsi:

$$T(w, x, y, z) = z e^{w^2 + x^2 + y^2}$$

Carilah:

a) $\frac{\partial T}{\partial x}$

b) $\frac{\partial T}{\partial y}$

c) $\frac{\partial T}{\partial z}$

d) $\frac{\partial T}{\partial w}$

e) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$$\text{f)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\text{g)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\text{h)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial w^2}$$

$$\text{i)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$$

$$\text{j)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}$$

$$\text{k)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial w}$$

$$\text{l)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}$$

$$\text{m)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}$$

BAB II

NILAI EKSTRIM

(MAKSIMUM / MINIMUM)

FUNGSI DUA VARIABEL

I. Pendahuluan

Pengantar Konsep Ekstrim dan relative (Maksimum-Minimum) fungsi dua peubah real dirancang dengan cara yang sama seperti ekstrim satu peubah real. Peranan selang buka pada fungsi satu peubah diganti dengan daerah bidang yang dibatasi oleh suatu lengkungan tertutup yang bentuk sederhananya adalah cakram terbuka di bidang.

Seperti halnya dengan fungsi satu peubah yang sederhana, proses menentukan ekstrim relative untuk fungsi dua peubah dimulai dengan mencari titik kritis. Uji titik kritis tersebut dapat diperiksa dengan cara membandingkan nilai fungsinya terhadap nilai disekitarnya atau dengan uji turunan parsial ke dua.

II. Mencari Nilai Ekstrim (Maksimum / Minimum)

Dari Fungsi 2 Variabel $Z = F(X, Y)$

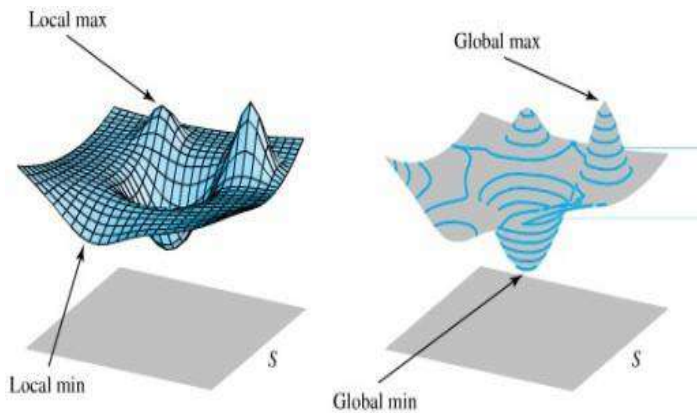
(Pada Kalkulus I sudah diajarkan mencari nilai Diferensial dari fungsi 1 variabel $y = f(x)$)

*) Cara mencari nilai ekstrim dari $Z = f(x, y)$

Langkah 1:

Mencari titik-titik kritisnya dengan turunan parsial ke-1

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{diperoleh satu atau lebih dari satu titik kritis}$$



Gambar 2. 1. Grafik Kurva 3 Dimensi (3D)

Langkah 2:

Mencari turunan parsial ke-2

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \text{ menggunakan A}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} \text{ atau } \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \text{ menggunakan B} \rightarrow \text{dicari } \boxed{AC - B^2}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \text{ menggunakan C}$$

Langkah 3:

Diselidiki untuk setiap titik-titik kritisnya.

Kemungkinannya:

1. Jika $AC - B^2 > 0$ & $A < 0 \rightarrow$ terjadi maksimum
2. Jika $AC - B^2 > 0$ & $A > 0 \rightarrow$ terjadi minimum
3. Jika $AC - B^2 < 0 \rightarrow$ tidak terjadi ekstrim
4. Jika $AC - B^2 = 0 \rightarrow$ dapat terjadi maksimum atau minimum

Contoh (1)

Selidiki apakah

$$Z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

mempunyai titik maksimum atau minimum, berapa nilainya!

Jawab:

Langkah 1:

Mencari titik-titik kritisnya:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{array}}$$

Dari

$$Z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

didapat

$$\hookrightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = 2x - y + 3$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial Z}{\partial y} = -x + 2y - 2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B}_{1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_{21(1)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_{2\left(\frac{2}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_{12\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Titik kritisnya:

$$(x, y) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Langkah 2:

Mencari Turunan Parsial kedua:

$$A = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

$$B = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

$$C = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

Dari

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2x - y + 3$$

didapat:

$$A = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

$$A = 2$$

$$B = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

$$B = -1$$

Dari

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -x + 2y - 2$$

didapat:

$$C = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2$$

Mencari $AC - B^2$

$$= (2)(2) - (-1)^2$$

$$= 4 - 1 = 3 > 0$$

Langkah 3:

$$AC - B^2 = 3 > 0$$

↳ Terjadi Minimum di titik kritis $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$\text{Karena } A = 2 > 0$$

Nilai Minimum:

$$Z_{min} = x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 + 3x_1 - 2y_1 + 1$$

$$Z_{min} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 4 - \frac{2}{3} + 1$$

$$= \frac{16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 9}{9}$$

$$= -\frac{12}{9}$$

$$= \boxed{-\frac{4}{3}}$$

Contoh (2)

Carilah nilai ekstrim dari

$$\boxed{Z = x^3 + y^3 - 3xy}$$

Jawab:

Langkah 1:

Mencari titik-titik kritis

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{array}}$$

$$(I) \quad 3x^2 - 3y = 0$$

$$(II) \quad 3y^2 - 3x = 0$$

$$(I) \quad 3y = 3x^2$$

$$(II) \quad 3x = 3y^2$$

$$(I) \quad y = x^2$$

$$(II) \quad y^2 = x$$

$$(x^2)^2 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$y_1 = x_1^2 \rightarrow y_1 = 0$$

$$\boxed{(x_1, y_1) = (0, 0)}$$

$$x = 1 \rightarrow x_1 = 1$$

$$y_1 = x_1^2 \rightarrow y_1 = 1$$

$$\boxed{(x_1, y_1) = (1, 1)}$$

Langkah 2:

$$\text{Dari } \frac{\partial Z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$

didapat

$$A = \frac{\partial^2 Z}{\partial x}$$

$$A = 6x$$

$$B = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

$$B = -3$$

$$\text{Dari } \frac{\partial Z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

didapat

$$C = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

$$C = 6y$$

Mencari $AC - B^2$

$$= (6x)(6y) - (-3)^2$$

$$\boxed{AC - B^2 = 36xy - 9}$$

Langkah 3:

Untuk setiap titik-titik kritis $(0,0)$ dan $(1,1)$ dicari $AC - B^2$

(I) Untuk titik kritis $(x_1, y_1) = (0,0)$

$$\rightarrow AC - B^2 = 36x_1y_1 - 9$$

$$= 0 - 9$$

$$= -9 < 0$$

$\rightarrow$ tidak terjadi ekstreme

$\rightarrow$ bukan titik ekstreme

(II) Untuk titik kritis $(x_2, y_2) = (1,1)$

$$\rightarrow AC - B^2 = 36x_2y_2 - 9$$

$$= 36 - 9$$

$$= 27 > 0$$

$\rightarrow$ terjadi ekstreme

$$A = 6x$$

$A = 6 > 0$ terjadi Minimum di titik kritis $(1,1)$

$$Z_{min} = x_2^3 + y_2^3 - 3x_2y_2$$

$$= 1^3 + 1^3 - 3(1)(1)$$

$$= -1$$

Contoh (3)

Mencari nilai ekstrim dari

$$\boxed{Z = xy(10 - x - y)}$$

$$\hookrightarrow \text{Diubah } Z = 10xy - x^2y - xy^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 10y - 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 10x - x^2 - 2xy$$

Langkah 1:

Mencari titik-titik kritis

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{array}}$$

$$\text{(I)} 10y - 2xy - y^2$$

$$\text{(II)} 10x - x^2 - 2xy$$

$$\text{(I)} y(10 - 2x - y) = 0$$

$$\text{(II)} x(10 - x - 2y) = 0$$

$$\text{(I)} (10 - 2x - y) = 0$$

$$\text{(II)} (10 - x - 2y) = 0$$

Jika ingin menggunakan SPL Non Homogen

$$-2x - y = -10$$

$$-x - 2y = -10$$

$$\text{atau} \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 10 \\ 1 & 2 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 10 \\ 2 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & -3 & | & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_2(-\frac{1}{3})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & 1 & | & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{B_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & | & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\rightarrow y = \frac{10}{3}$$

$$\text{Titik kritisnya } (x_1, y_1) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

Didapat nilai maksimum

$$Z = xy(10 - x - y)$$

$$Z = \left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\left(10 - \frac{10}{3} - \frac{10}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$$

Contoh (4)

Diketahui bilangan riil 10

Pecahlah / bagilah bilangan 10 + menjadi tiga bilangan riil
sedemikian rupa sehingga hasil kalinya maksimum

10			
(I) > 0	(II) > 0	(III) > 0	(I)(II)(III) > 0
1	1	8	$z = (1)(1)(8) = 8$
2	3	5	$z = (2)(3)(5) = 30$
7	2	1	$z = (7)(2)(1) = 14$
⋮	⋮	⋮	⋮
5	3	2	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
(a)	(b)	(c)	$z = abc = \max$
⋮	⋮	⋮	⋮
6	1	3	
4	3	3	$z = (4)(3)(3) = 36$
(x) > 0	(y) > 0	(10 - x - y) > 0	$z = f(x, y)$ ↳ dicari maksimumnya

Langkah 3.

Diselidiki untuk setiap titik-titik kritisnya

Kemungkinan-kemungkinannya

1. Jika $AC - B^2 > 0$ & $A < 0 \rightarrow$ terjadi maksimum
2. Jika $AC - B^2 > 0$ & $A > 0 \rightarrow$ terjadi minimum
3. Jika $AC - B^2 < 0 \rightarrow$ tidak terjadi ekstreme
4. Jika $AC - B^2 = 0 \rightarrow$
... dapat terjadi maksimum ataupun minimum

Contoh (5)

Carilah nilai ekstrem dari persamaan berikut

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - y^2$$

Jawab:

titik kritis

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2y = 0$$

$$f_y(x, y) = 2x - 2y = 0$$

melalui eliminasi kedua fungsi tersebut $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ didapat

$$3x^2 + 2x = 0$$

$$x(3x + 2) = 0$$

maka

$$x = 0 ; y = 0 \rightarrow A(0,0)$$

atau

$$x = -\frac{2}{3} ; y = -\frac{2}{3} \rightarrow B\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = -2$$

$$f_{xy}(x, y) = 2$$

$$D(x, y) = -12x - 2^2 = -12x - 4$$

Titik A(0,0)

$$D(A) \Rightarrow D(0,0) = -12 \cdot 0 - 2^2 = -4 < 0$$

$D < 0 \rightarrow A(0,0)$ titik pelana

Titik $B\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{aligned} D(B) \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= -12\left(-\frac{2}{3}\right) - 2^2 \\ &= -12\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$D\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 4 > 0$$

$$\begin{aligned} f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= 6\left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= -4 < 0 \end{aligned}$$

$f(B) \rightarrow$ nilai maks relatif

substitusikan nilai ke dalam persamaan

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - y^2$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Contoh(6)

Carilah nilai ekstrem dari persamaan berikut ini

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$$

Jawab:

titik kritis

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y = 0$$

$$f_y(x, y) = 3x + 3y^2 = 0$$

berdasarkan eliminasi dari kedua persamaan tersebut di atas, didapat

$$3x^3 - 3y^3 = 0$$

$$\boxed{x = y}$$

substitusikan ke dalam persamaan sebelumnya

$$3x^2 + 3x = 0$$

$$3x(x + 1) = 0$$

maka didapat

$$x = 0; y = 0 \rightarrow A(0,0)$$

atau

$$x = -1; y = -1 \rightarrow B(-1, -1)$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

$$f_{xy}(x, y) = 3$$

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

$$= 36xy - 9$$

$$\text{Titik } A(0,0) \rightarrow D(A) \Rightarrow D(0,0) = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$$

↳ titik pelana

$$\text{Titik } B(-1, -1)$$

$$D(B) \Rightarrow D(-1, -1) = 36(-1)(-1) - 9 = 27 > 0$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(-1, -1) &= 6(-1) \\ &= -6 < 0 \end{aligned}$$

nilai maksimum relatif

$$\begin{aligned} \therefore f(x, y) &= x^3 + 3xy + y^3 \\ &= (-1)^3 + 3(-1)(-1) \\ &\quad + (-1)^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

III. Mencari Titik Ekstrim dan Jenisnya

Contoh (7)

Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya, serta harga maksimum atau minimum dari fungsi dua variabel berikut ini:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

Jawab:

Syarat ekstrim:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \rightarrow x = y^2$$

$$3(y^2)^2 - 3y = 0$$

$$3y^4 - 3y = 0 \rightarrow 3y(y^3 - 1) = 0$$

$$3y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y^3 - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 1$$

∴ Jadi, titik kritis (0,0) dan (1,1)

Syarat titik kritis menjadi titik ekstrim jika dipenuhi:

$$(x_0, y_0) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 6x \cdot 6y - (-3)^2$$

di (0,0) = $0 - 9 < 0$, jadi titik (0,0) bukan merupakan titik ekstrim

di (1,1) = $6 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 - 9 > 0$, jadi titik (1,1) merupakan titik ekstrim

Jenis ekstrim maksimum atau minimum menggunakan ketentuan / ditentukan dengan:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ di } (1,1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$

maka, (1,1) merupakan titik ekstrim minimum

Harga fungsi minimum:

$$\begin{aligned} Z_{min} &= x^3 + y^3 - 3xy \\ &= 1 + 1 - 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Contoh (8)

Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya, serta harga maksimum atau minimum dari fungsi dua variabel berikut ini:

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Jawab:

Syarat ekstrim:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{y} \rightarrow \left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \rightarrow 4 + y^4 - 5y^2 = 0$$

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0$$

$$(y^2 - 4)(y^2 - 1) = 0$$

$$y^2 - 4 = 0 \rightarrow y_1 = 2 \text{ dan } y_2 = -2 \rightarrow x_1 = 1 \text{ dan } x_2 = -1$$

$$y^2 - 1 = 0 \rightarrow y_3 = 1 \text{ dan } y_4 = -1 \rightarrow x_3 = 2 \text{ dan } x_4 = -2$$

Jadi, titik-titik kritis: (1,2), (-1,-2), (2,1), dan (-2,-1)

Syarat titik kritis menjadi titik ekstrim jika dipenuhi:

$$(x_0, y_0) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 6x \cdot 6x - (6y)^2$$

$$\text{di } (1,2) = 36 - 36 \cdot 2^2 < 0$$

jadi titik (1,2) bukan merupakan titik ekstrim

$$\text{di } (-1,-2) = 36(-1)^2 - 36 \cdot (-2)^2 < 0$$

jadi titik (-1,-2) bukan merupakan titik ekstrim

$$\text{di } (2,1) = 36 \cdot 2^2 - 36(1)^2 > 0$$

jadi titik (2,1) merupakan titik ekstrim

$$\text{di } (-2,-1) = 36 \cdot (-2)^2 - 36(-1)^2 > 0$$

jadi titik (-2,-1) merupakan titik ekstrim.

Jenis ekstrim maksimum atau minimum menggunakan ketentuan dengan:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \text{ di } (2,1) = 6 \cdot 2 = 12 > 0$$

maka (2,1) merupakan titik ekstrim minimum

Harga fungsi minimum:

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15(2) - 12(1) \\ &= -28 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \text{ di } (-2,-1) = 6(-2) = -12 < 0$$

maka (-2,-1) merupakan titik ekstrim maksimum

Harga fungsi maksimum:

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \\ &= (-2)^3 + 3(-2)(-1)^2 - 15(-2) \\ &\quad - 12(-1) \\ &= 28 \end{aligned}$$

IV. Umpan Balik

- 1) Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya, serta harga maksimum atau minimum fungsi dua variabel berikut:

$$z = x^2y^2(2x + 4y + 1)$$

- 2) Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya, serta harga maksimum atau minimum fungsi dua variabel berikut:

$$z = (x - y)(1 - xy)$$

- 3) Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya, serta harga maksimum atau minimum fungsi dua variabel berikut:

$$z = 3x^3 + 9xy^2 - 45x - 36y$$

- 4) Selidiki apakah

$$Z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

mempunyai titik maksimum atau minimum, berapa nilainya!

- 5) Carilah nilai ekstrim dari

$$\boxed{Z = x^3 + y^3 - 3xy}$$

BAB III

INTEGRAL LIPAT DUA (BAGIAN PERTAMA)

I. Pendahuluan

Integral lipat dua (*double integrals*) merupakan bentuk integral biasa atau tunggal hasil pengintegralan pertama harus diintegrasikan kembali. Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa akan mampu menghitung integral lipat dua dalam koordinat kartesius yang meliputi:

- 1) Integral lipat dua pada daerah persegi panjang
- 2) Integral lipat dua pada daerah umum
- 3) Menghitung luas antara dua kurva

II. Double Integral

Pada Kalkulus 2

* Double integral:

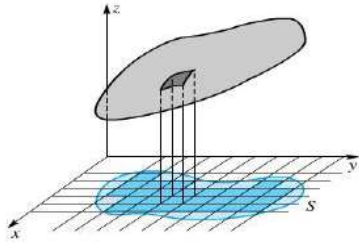
Bentuk umumnya

$$\boxed{\iint_L f(x, y) dL}$$

ada 2 urutan dL

$$\hookrightarrow dL = dydx$$

$$\hookrightarrow dL = dx dy$$



Gambar 3. 1. Luasan L dengan Integral Fungsi 2 Variabel

Gambar 3.1 merupakan integral dari fungsi 2 variabel $f(x, y)$ pada suatu luasan L.

Pada bidang xy atau xoy

(*) Cara menghitung double integral

Beberapa contoh pendahuluan

(1) Akan dihitung bentuk double integral sebagai berikut:

$$\int_1^2 \int_3^4 (x^2 + y^2) dy dx$$

jika ditulis lebih lengkap/jelas sebagai berikut

$$\int_1^2 \left\{ \int_3^4 (x^2 + y^2) dy \right\} dx$$

→ yang dihitung terlebih dahulu yang ada di dalam kurung

Dihitung terlebih dahulu Integral $\int_3^4 (x^2 + y^2) dy$

→ variabelnya y

Pada Kalkulus 1

$$\int_3^4 (x^2 + a^2) dx$$

→ variabelnya x, (selain x dianggap konstan)

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 + a^2 \right) \Big|_{x=3}^{x=4}$$

$$= \left(\frac{1}{3} (4)^3 + 4a^2 \right) - \left(\frac{1}{3} (3)^3 + 3a^2 \right)$$

$$= \dots$$

$$\int_3^4 (b^2 + y^2) dy$$

→ variabelnya y (selain y dianggap konstan)

$$= (b^2) + \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=3}^{y=4}$$

$$= \left(4b^2 + \frac{1}{3} (4)^3 \right) - \left(3b^2 + \frac{1}{3} (3)^3 \right)$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_1^2 (x^2 + y^3) dx \quad \int_{x=1}^{x=2} (x^2 + y^3) dx \\
 & \rightarrow \text{variabelnya } x, y \text{ konstan} \\
 & = \left(\frac{1}{3} x^3 + y^3 x \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \\
 & = \boxed{\left(\frac{8}{3} + 2y^3 \right) - \left(\frac{1}{3} + y^3 \right)}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_1^2 (x^2 + y^3) dy \rightarrow \text{variabelnya } y, x \text{ konstan}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{y=1}^{y=2} (x^2 + y^3) dy = \left(x^2 y + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{y=1}^{y=2} \\
 & = \boxed{\left(2x^2 + 4 \right) - \left(x^2 + \frac{1}{4} \right)}
 \end{aligned}$$

gabungan

$$(1) \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 + y^3) dy \right) dx$$

$$\text{Umumnya ditulis } (1) \int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^3) dy dx$$

Cara menghitungnya

Dihitung terlebih dahulu yang di dalam tanda kurung

$$\int_1^2 (x^2 + y^3) dy \rightarrow \text{variabelnya } y$$

(x sebagai konstan)

$$= \int_{y=1}^{y=2} (x^2 + y^3) dy$$

$$= \left(x^2 y + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{y=1}^{y=2}$$

$$= (2x^2 + 4) - \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) = x^2 + \frac{15}{4}$$

$$\text{Jadi, } \int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^3) dy dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left\{ \int_{y=1}^{y=2} (x^2 + y^3) dy \right\} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 + \frac{15}{4} \right) dx \rightarrow \text{variabelnya } x$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{15}{4}x \right) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{15}{4} \right) - (0 - 0)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{15}{4}$$

$$= \frac{4 + 45}{12} = \boxed{\frac{49}{12}}$$

$$(2) \int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^3) dx dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 + y^3) dx \right) dy$$

Dihitung terlebih dahulu yang di dalam tanda kurung

$$\int_1^2 (x^2 + y^3) dx \rightarrow \text{variabelnya } x$$

$$= \int_{x=1}^{x=2} (x^2 + y^3) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^3 \right) \Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2y^3 \right) - \left(\frac{1}{3} + y^3 \right)$$

$$= y^3 + \frac{7}{3}$$

$$\text{Jadi } \int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^3) dx dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(y^3 + \frac{7}{3} \right) dy \rightarrow \text{variabel } y$$

$$= \left(\frac{1}{4} y^4 + \frac{7}{3} y \right) \Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{7}{3}$$

$$= \frac{3 + 28}{12}$$

$$= \boxed{\frac{31}{12}}$$

Catatan: Dari Contoh (1) dan (2) terlihat bahwa urutan $\boxed{dydx}$ dengan urutan $\boxed{dxdy}$ berbeda hasilnya

*) Integral dari fungsi 2 variabel $f(x, y)$ dan fungsi 3 variabel $f(x, y, z)$

- a. Integral dari fungsi 2 variabel $f(x, y)$
berbentuk integral lipat dua $\iint dxdy$
- b. Integral dari fungsi 3 variabel $f(x, y, z)$
berbentuk integral lipat tiga $\iiint dxdydz$

Prasyarat:

Paham integral 1 variabel

$$f(x) \rightarrow \int f(x)dx \dots \int_a^b f(x)dx$$

*) Integral dari fungsi 2 variabel $f(x, y)$ menggunakan $\iint \rightarrow \dots$
... dua kali

Dimulai contoh-contoh menghitung double integral dari $f(x, y)$

Contoh (1)

$$\int_1^2 \int_3^4 (2xy + x^2 + y^2) dy dx$$

jika ditulis secara lebih lengkap menjadi

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left\{ \int_3^4 (2xy + x^2 + y^2) dy \right\} dx \\ = \int_{x=1}^{x=2} \left\{ \int_{y=3}^{y=4} (2xy + x^2 + y^2) dy \right\} dx \end{aligned}$$

yang dihitung terlebih dahulu yang di dalam kurung

$$\int_{y=3}^{y=4} (2xy + x^2 + y^2) dy \rightarrow \text{Jika menggunakan } \boxed{dy}$$

$$\rightarrow \boxed{y \text{ sebagai variabel}}$$

integral dalam variabel y

Selain y dianggap konstan

$$\begin{aligned}
&= \left(xy^2 + x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{y=3}^{y=4} \\
&= \left(16x + 4x^2 + \frac{64}{3} \right) - (9x + 3x^2 + 9) \\
&= \boxed{7x + x^2 + \frac{37}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{x=1}^{x=2} \left\{ \int_{y=3}^{y=4} (2xy + x^2 + y^2) dy \right\} dx \\
&= \int_{x=1}^{x=2} \left(7x + x^2 + \frac{37}{3} \right) dx \rightarrow \text{variabelnya } x \\
&= \left(\frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{37}{3}x \right) \Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{28}{2} + \frac{8}{3} + \frac{74}{3} \right) - \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{37}{3} \right)
\end{aligned}$$

Contoh (2)

$$a) \int_0^1 \int_2^3 (x^2y^3 + 4) dy dx$$

$$b) \int_0^1 \int_2^3 (x^2y^3 + 4) dx dy$$

$$\text{Jawab: } a) \int_{x=0}^{x=1} \left\{ \int_{y=2}^{y=3} (x^2y^3 + 4) dy \right\} dx$$

$$\text{Dihitung terlebih dahulu } \int_{y=2}^{y=3} (x^2 y^3 + 4) dy$$

→ variabel y

$$= \left(\frac{1}{4} x^2 y^4 + 4y \right) \Big|_{y=2}^{y=3}$$

$$= \left(\frac{81}{4} x^2 + 12 \right) - (4x^2 + 8)$$

$$= \frac{65}{4} x^2 + 4$$

$$\therefore \int_0^1 \int_2^3 (x^2 y^3 + 4) dy dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{65}{4} x^2 + 4 \right) dx$$

→ variabel x

$$= \left(\frac{65}{12} x^3 + 4x \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{65}{12} + 4 = \boxed{\frac{113}{12}}$$

$$\text{Jawab: b) } \int_{x=0}^{x=1} \left\{ \int_{y=2}^{y=3} (x^2 y^3 + 4) dx \right\} dy$$

$$\text{Dihitung terlebih dahulu } \int_{y=2}^{y=3} (x^2 y^3 + 4) dx$$

→ variabel x

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{3} x^3 y^3 + 4x \right) \Big|_{x=2}^{x=3} \\
&= (9y^3 + 12) - \left(\frac{8}{3} y^3 + 8 \right) \\
&= \frac{19}{3} y^3 + 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_0^1 \int_2^3 (x^2 y^3 + 4) dx dy &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{19}{3} y^3 + 4 \right) dy \\
&\rightarrow \text{variabel } y \\
&= \left(\frac{19}{12} y^4 + 4y \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{19}{12} + 4 \\
&= \boxed{\frac{67}{12}}
\end{aligned}$$

Contoh (3)

Selesaikan persamaan berikut ini:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$$

Jawab:

$$\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^x dy \right\} dx$$

Dihitung terlebih dahulu $\int_{x^2}^x dy \rightarrow$ variabel y

$$= \int_{y=x^2}^{y=x} dy$$

$$= y \Big|_{y=x^2}^{y=x}$$

$$= x - x^2$$

$$\therefore \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \rightarrow \text{variabel } x$$

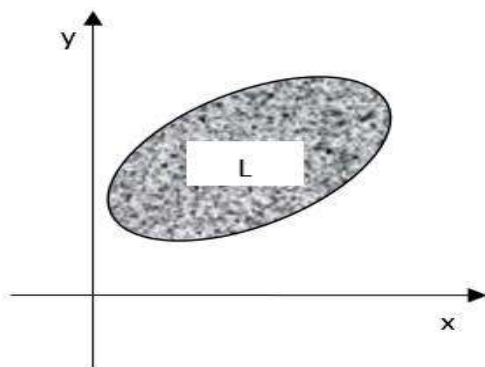
$$= \int_{x=0}^{x=1} (x - x^2) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

*) Bentuk umum double integral



Gambar 3. 2. Grafik Luasan L

$$\iint_L f(x, y) dL$$

dengan dL $\begin{cases} dL = dydx \\ dL = dxdy \end{cases}$

(1) Jika menggunakan urutan $dL = dy dx$

$$\iint_L f(x, y) dL = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

(2) Jika menggunakan urutan $dL = dx \, dy$

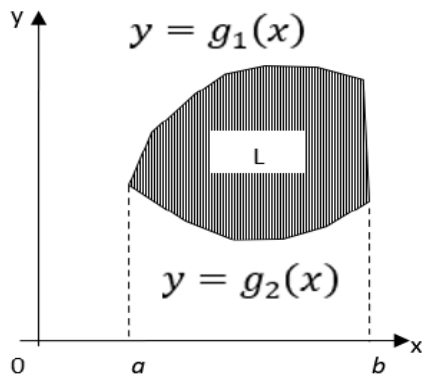
$$\iint_L f(x, y) dL = \int_{y=a}^{y=b} \int_{x=g_2(x)}^{x=g_1(x)} f(x, y) dx \, dy$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dx \right\} dy$$

*) Beberapa contoh penggunaan

Mencari luas dan / dari luasan L

(I)



Gambar 3. 3. Grafik Luasan L dengan $y = g_1(x)$ dan $y = g_2(x)$

Secara simbolis ditulis

$$\boxed{\text{luas } L = \iint_L dL}$$

→ Urutan dL ada 2 macam $\nearrow (I) dL = dydx$
 $\searrow (II) dL = dxdy$

Anjuran: gunakan arsiran tegak

Pada gambar (I) di atas: $\text{luas } L = \iint_L dL$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} dy dx$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} dy \right\} dx$$

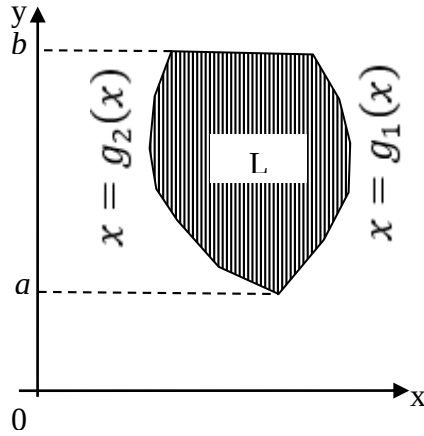
Dihitung terlebih dahulu $\int_{g_2(x)}^{g_1(x)} dy = y \Big|_{g_2(x)}^{g_1(x)}$

$$= g_1(x) - g_2(x)$$

$$\therefore \boxed{\text{luas } L = \int_a^b \{g_1(x) - g_2(x)\} dx}$$

Sama dengan Rumus luas L pada Kalkulus 1

(II)



Gambar 3. 4. Grafik Luasan L dengan $x = g_1(x)$ dan $g_2(x)$

Anjuran: gunakan arsiran datar

$$\begin{aligned} \text{luas } L &= \iint_L dL \\ &= \int_{y=a}^{y=b} \int_{x=g_2(x)}^{x=g_1(x)} dx dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} dx \right\} dy \end{aligned}$$

Contoh (4)

Dengan menggunakan integral, hitunglah

a) luas $\triangle OCB$

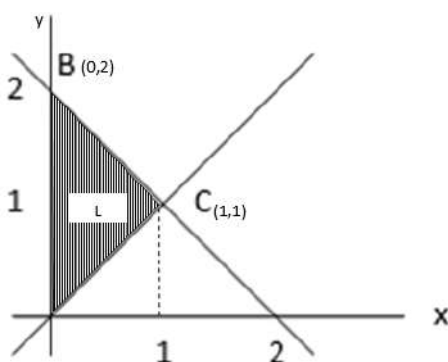
b) luas ΔOAC

Jawab: a)

Menggunakan Rumus I:

$$\text{luas } L = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} dy dx$$

lihat gambar:



Gambar 3. 5. Grafik Luasan L berbentuk Segitiga

dimana dengan

$$a = 0 ; b = 1$$

sebagai $y = g_1(x)$ adalah garis lurus BC

→ Persamaannya $y = \dots$?

sebagai $y = g_2(x)$ adalah garis lurus OC → Persamaannya $y = \dots$

Salah satu persamaan garis lurus: $\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$

$$\begin{array}{lcl}
 B(0,2) \text{ sebagai } B(x_1, y_1) & \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 0 \\ \searrow y_1 = 2 \end{array} & \text{Secara serupa} \\
 C(1,1) \text{ sebagai } B(x_2, y_2) & \begin{array}{l} \nearrow x_2 = 1 \\ \searrow y_2 = 1 \end{array} & \text{didapat} \\
 & & AC: \boxed{y = x} \\
 & \rightarrow \frac{y-2}{1-2} = \frac{x-0}{1-0} & \rightarrow \text{sebagai } y \\
 & & = g_2(x) \\
 & \frac{y-2}{-1} = \frac{x}{1} \\
 & y-2 = -x \\
 & BC \boxed{y = x+2} \rightarrow \text{sebagai } y = g_1(x)
 \end{array}$$

Jadi, luas $L_1 = \text{luas } \triangle OCB$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x}^{y=-x+2} dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_x^{-x+2} dy \right\} dx$$

Dihitung $\int_x^{-x+2} dy \rightarrow \text{variabel } y$

$$= y \Big|_{y=x}^{y=-x+2}$$

$$= (-x + 2) - x$$

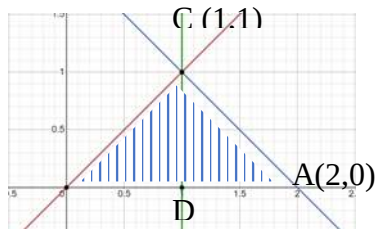
$$= -2x + 2$$

$$\therefore \text{luas } \triangle OCB = \int_{x=0}^{x=1} (-2x + 2) dx \rightarrow \text{variabel } x$$

$$(-x^2 + 2x) \Big|_0^1 = (-1 + 2) - (-0 + 0) = \boxed{1}$$

Jawab b) Diberikan dua cara

Cara (1) $\triangle OAC$ dipecah jadi 2



Gambar 3. 6. Grafik $y=x$, $y=-x+2$

$$\triangle OAC = \triangle ODC + \triangle DAC$$

$$\text{luas } \triangle ODC = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} dy dx$$

Dihitung terlebih dahulu $\int_{y=0}^{y=x} dy = y \Big|_0^x = x$

$$\begin{aligned}\therefore \text{luas } \triangle ODC &= \int_0^1 x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\text{luas } \triangle DAC = \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=-x+2} dy dx$$

Dihitung terlebih dahulu

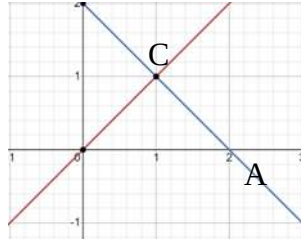
$$\int_{y=0}^{y=-x+2} dy = y \Big|_0^{-x+2} = -x + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{luas } \triangle DAC &= \int_1^2 (-x + 2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_1^2 \\ &= (-2 + 4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{luas } \triangle OAC = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{1}$$

Cara (2)



Gambar 3. 7. Grafik $x=y$ dan $x=-y+2$

Persamaan garis OC : $y = x$ atau $\boxed{x = y}$

Persamaan garis AC : $y = -x + 2$

atau $\boxed{x = -y + 2}$

$$\therefore \text{luas } \triangle OAC = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=-y+2} dx \, dy$$

$$\text{Dihitung terlebih dahulu } \int_{x=y}^{x=-y+2} dx$$

$$= x \Big|_{x=y}^{x=-y+2}$$

$$= (-y + 2) - y$$

$$= -2y + 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{luas } \triangle OAC &= \int_{y=0}^{y=1} (-2y + 2) dy \\
 &= (-y^2 + 2y) \Big|_0^1 \\
 &= -1 + 2 \\
 &= \boxed{1}
 \end{aligned}$$

III. Mencari Luas Dengan Menggunakan Integral Lipat Dua

Integral berulang (integral ganda atau integral lipat) merupakan materi kalkulus lanjut yang dipelajari secara mendalam untuk menganalisis masalah luas dan volume, baik pada bidang dua dimensi maupun tiga dimensi. Dalam memberikan pemahaman tentang materi tersebut, berikut disajikan beberapa soal dan pembahasan khusus terkait dengan integral lipat dua, yaitu integral dengan dua simbol sekaligus.

Contoh (5)

Hitunglah

$$\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy$$

Jawab:

dengan menggunakan aturan pengintegralan, diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy &= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 + 2xy \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^2 \left[\left(\frac{1}{3} + 2y \right) - 0 \right] dy \\ &= \left[\frac{1}{3} y + y^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} + 4 - 0 = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy = \frac{14}{3}}$$

Contoh (6)

Hitunglah

$$\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x+y)^2}$$

Jawab:

Tahap integrasi pertama adalah dengan menganggap x sebagai suatu konstanta dan integrasikan terhadap variable y (menggunakan teknik substitusi), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy \, dx}{(x+y)^2} &= - \int_3^4 \left[\frac{1}{x+y} \right]_1^2 dx \\
&= \int_3^4 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\
&= [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_3^4 \\
&= \left[\ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \right]_3^4 \\
&= \ln \frac{5}{6} - \ln \frac{4}{5} \\
&= \ln \frac{25}{24}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy \, dx}{(x+y)^2} = \ln \frac{25}{24}}$$

Contoh:

Hitunglah

$$\int_0^1 \int_x^1 (x+y) \, dy \, dx$$

Jawab:

dengan menggunakan aturan pengintegralan, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 (x+y) dy dx &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_x^1 dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) - \left(x^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) \right] dx \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{\int_0^1 \int_x^1 (x+y) dy dx = \frac{1}{2}}$$

Contoh (7)

Hitunglah

$$\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy$$

Jawab:

Gunakan teknik integrasi parsial

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v}$$

dengan demikian, didapatkan

$$\begin{aligned}\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy &= \int_1^{\ln 8} [e^{x+y}]_0^{\ln y} dy \\&= \int_1^{\ln 8} (e^{\ln y + y} - e^y) dy \\&= \int_1^{\ln 8} (ye^y - e^y) dy \\&= [ye^y - 2e^y]_1^{\ln 8}\end{aligned}$$

gunakan teknik integral parsial

$$\begin{aligned}&= [e^y(y - 2)]_1^{\ln 8} \\&= e^{\ln 8}(\ln 8 - 2) - (e(1 - 2)) \\&= 8(\ln 8 - 2) + e = 8 \ln 8 - 16 + e\end{aligned}$$

Catatan:

$$\boxed{a^{a \log b} = b | \ln a = {}^e \log a}$$

Jadi,

$$\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy = 8 \ln 8 - 16 + e$$

Contoh (8)

Hitunglah

$$\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y dy dx$$

Jawab:

dengan menggunakan aturan pengintegralan, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y dy dx &= \int_0^{\pi} [-x \cos y]_0^x dx \\ &= \int_0^{\pi} (-x \cos x + x) dx \\ &= \left[-x \sin x - \cos x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

Gunakan teknik integral parsial

$$\begin{aligned} &= -\pi \sin \pi - \cos \pi + \frac{1}{2} \pi^2 - (0 - 1 + 0) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \pi^2 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y \, dy \, dx = 2 + \frac{1}{2} \pi^2}$$

Contoh (9)

Hitung nilai integral lipat dua yang ditunjukkan atas R

$$\iint_R xy^2 \, dA; R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

Jawab:

Sajikan integral lipat dua tersebut beserta batas integrasinya sesuai dengan R , kemudian integralkan

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^1 xy^2 \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 y^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 y^2 \left(\frac{1}{2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} [y^3]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{6} (1 - (-1)) \\ &= \frac{1}{6} (2) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jadi, nilai integral lipat dua tersebut adalah $\boxed{\frac{1}{3}}$

Contoh (10)

Hitung nilai integral lipat dua yang ditunjukkan atas R

$$\iint_R (x^2 + y^2) dA; R \\ = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

Jawab:

Sajikan integral lipat dua tersebut beserta batas integrasinya sesuai dengan R , kemudian integralkan

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right]_{-1}^1 dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} + y^2 - \left(-\frac{1}{3} - y^2 \right) \right] dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3} y + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} (2 + 2^3) - 0 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

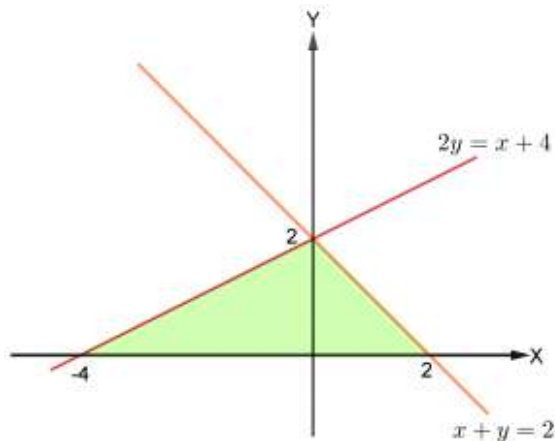
Jadi, nilai integral lipat dua tersebut adalah $\boxed{\frac{20}{3}}$

Contoh (11)

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $x + y = 2$ dan $2y = x + 4$ dengan menggunakan integral lipat dua

Jawab:

Garis $x + y = 2$ ekuivalen dengan $x = 2 - y$, sedangkan garis $2y = x + 4$ ekuivalen dengan $x = 2y - 4$. Titik potong kedua garis tersebut adalah $(0, 2)$. Grafiknya adalah sebagai berikut:



Gambar 3. 8. Grafik Luas Daerah yang dibatasi oleh $x+y=2$ dan $2y=x+4$

Luas daerah yang dimaksud adalah

$$A = \iint_D dA$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \int_{x=2y-4}^{x=2-y} dx \, dy \\
&= \int_0^2 [(2-y) - (2y-4)] \, dy \\
&= \int_0^2 (6-3y) \, dy \\
&= \left[6y - \frac{3}{2}y^2 \right]_0^2 \\
&= (12-6) - 0 = 6
\end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang dimaksud adalah 6 satuan luas

IV. Umpan Balik

- 1) Hitunglah integral berikut dengan mengubahnya terlebih dahulu dalam sistem koordinat kutub

$$\int_{D_1}^{D_2} \int 2xy \, dA$$

D adalah luas daerah pada kuadran pertama di antara lingkaran berjari-jari 2 dan lingkaran berjari-jari 5 yang berpusat di titik asal

- 2) Hitunglah integral berikut:

$$a) \int_0^1 \int_2^3 (x^2 y^3 + 5) dy \, dx$$

$$b) \int_0^1 \int_2^3 (x^2 y^3 + 6) dx \, dy$$

- 3) Rumuskan integral untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh kurva polar

$$r = 3 + 2 \sin \theta$$

yang berada di luar lingkaran $r = 2$

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB IV

INTEGRAL LIPAT DUA

(BAGIAN DUA)

I. Pendahuluan

Pada bagian ini akan dibahas perluasan integral tertentu ke bentuk integral lipat dua dari fungsi dua peubah. Akan dibahas bentuk-bentuk integral lipat dalam koordinat kartesius, koordinat kutub, maupun dalam koordinat yang lebih umum. Penerapan integral lipat diantaranya untuk menghitung luas, volume, pusat massa, dan momen inersia.

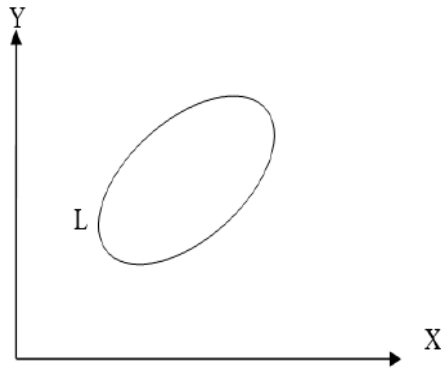
Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa dapat:

- 1) Menghitung integral lipat dua dalam koordinat kartesius.
- 2) Menghitung integral lipat dua dalam koordinat kutub.
- 3) Menghitung integral lipat dua dalam koordinat yang lebih umum melalui penggantian peubah.

II. Menghitung Integral Lipat Dua Dalam Koordinat Kartesius

*) Double Integral Dalam Koordinat Cartesius

Variabelnya x, y



Gambar 4. 1. Suatu Luasan L dalam Koordinat Cartesius

Bentuk umumnya

$$\boxed{\iint_L f(x, y) dL}$$

adalah integral tertentu dari $f(x, y)$ pada luasan L,

dimana L adalah luasan pada bidang xy

dL dapat berbentuk urutan:

↳ (1) $dL = dydx$

↳ (2) $dL = dxdy$

(1) Jika $dL = dydx$ maka

$$\iint_L f(x, y) dL = \int_a^b \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dydx$$

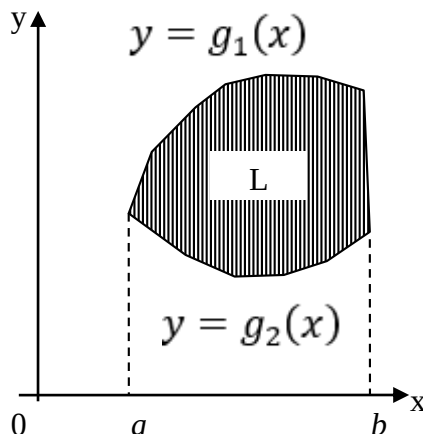
$$= \int_{x=a}^{x=b} \left\{ \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

→ lihat L pada gambar (4.2)

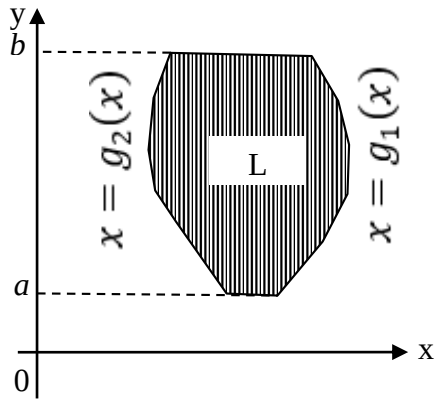
(2) Jika $dL = dx dy$ maka

$$\begin{aligned} \iint_L f(x, y) dL &= \int_a^b \int_{g_2(y)}^{g_1(y)} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{y=a}^{y=b} \left\{ \int_{x=g_2(y)}^{x=g_1(y)} f(x, y) dx \right\} dy \end{aligned}$$

→ lihat L pada gambar (4.3)



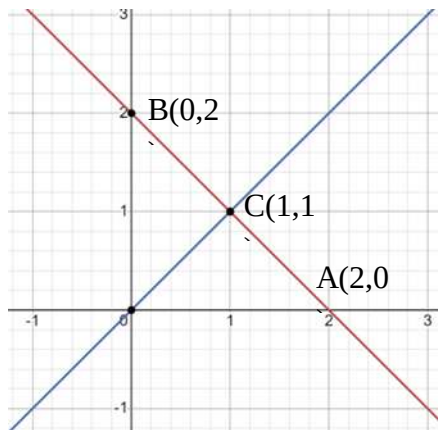
Gambar 4. 2. Grafik Luasan L dengan $y = g_1(x)$ dan $y = g_2(x)$



Contoh (1)

Persamaan garis lurus melalui 2 titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Gambar 4. 3. Grafik $y=x$ dan $y=-x+2$

(*) Persamaan garis OC:

$$O (x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$C (x_2, y_2) = (1, 1)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - 0}{1 - 0}$$

$$\boxed{y = x}$$

(*) Persamaan garis AB:

$$A (x_1, y_1) = (2, 0)$$

$$B (x_2, y_2) = (0, 2)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

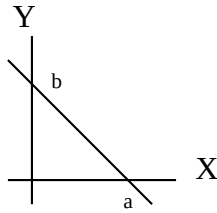
$$\frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 2}{0 - 2}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x - 2}{-2}$$

$$y = \frac{2(x - 2)}{-2}$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

Cara lain mencari persamaan garis lurus yang melalui dua titik (a, o) dan (o, b) sebagai berikut:



Gambar 4. 4. Grafik melalui 2 titik (a, o) dan (o, b)

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

$$a = 2 ; b = 2$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{y}{2} = 1 - \frac{x}{2}$$

$$\boxed{y = 2 - x}$$

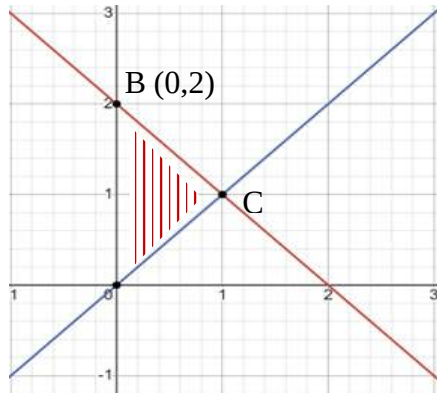
Contoh (2)

Hitung $\iint_L (x + y) dL$

a) Jika $L = \Delta OCB$

b) Jika $L = \Delta OAC$

Jawab a)



Gambar 4. 5. Grafik $y=x$ dan $y=-x+2$

Menggunakan (1)

$$\begin{aligned} \iint_L (x+y) dL &= \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} (x+y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left\{ \int_{y=x}^{y=-x+2} (x+y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

$$a=0 \quad g_1 = -x+2$$

$$b=1 \quad g_2 = x$$

Dihitung terlebih dahulu

$$\int_{y=x}^{y=-x+2} (x+y) dy$$

→ y sebagai variabel (x sebagai konstan)

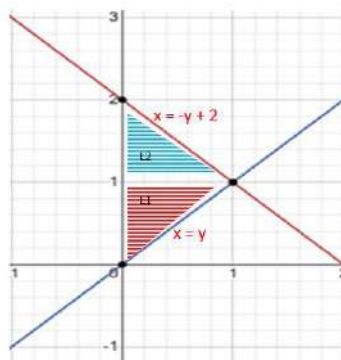
$$\begin{aligned}
&= \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=x}^{y=-x+2} \\
&= \left[x(-x+2) + \frac{1}{2}(-x+2)^2 \right] - \left[\left(x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) \right] \\
&= (-x^2 + 2x) + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) \\
&= -2x^2 + 2 \\
\therefore \int_L (x+y)dL &= \int_{x=0}^{x=1} (-2x^2 + 2) dx
\end{aligned}$$

↳ variabelnya x

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right) \Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{3} + 2 = \boxed{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

Seandainya diselesaikan menggunakan cara (2) $dL = dx dy$

L dibagi menjadi L_1 dan L_2 (lihat gambar)



Gambar 4. 6. Grafik $x=-y+2$ dan $x=y$

$$\iint_L (x + y) dL = \iint_{L_1} (x + y) dL + \iint_{L_2} (x + y) dL$$

$$(1) \text{ Menghitung } \iint_{L_1} (x + y) dL$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=y} (x + y) dx dy$$

Dihitung terlebih dahulu

$$\int_{x=0}^{x=y} (x + y) dx \rightarrow \text{variabelnya } x$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + xy \right) \Big|_{x=0}^{x=y}$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + y^2$$

$$= \frac{3}{2}y^2$$

$$\iint_{L_1} (x + y) dL = \int_{y=0}^{y=1} \frac{3}{2}y^2 dy \rightarrow \text{variabelnya } y$$

$$= \frac{1}{2}y^3 \Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

(2) Menghitung $\iint_{L_2} (x + y) dL$

$$= \int_{y=1}^{y=2} \int_{x=0}^{x=-y+2} (x + y) dx dy$$

Dihitung terlebih dahulu

$$\int_{x=0}^{x=-y+2} (x + y) dx \rightarrow \text{variabelnya } x$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 + xy \right) \Big|_{x=0}^{x=-y+2}$$

$$= \frac{1}{2} (-y + 2)^2 + (-y + 2)y$$

$$= \frac{1}{2} (y^2 - 4y + 4) - y^2 + 2y$$

$$= -\frac{1}{2} y^2 + 2$$

$$\iint_{L_2} (x + y) dL = \int_{y=1}^{y=2} \left(-\frac{1}{2} y^2 + 2 \right) dy \rightarrow \text{variabel } y$$

$$= \left(-\frac{1}{6}y^3 + 2y \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(-\frac{8}{6} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{6} + 2 \right)$$

$$= -\frac{7}{6} + 2$$

$$= \frac{5}{6}$$

∴ Dari (1) dan (2) didapat

$$\iint_L (x + y) \, dL = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$$

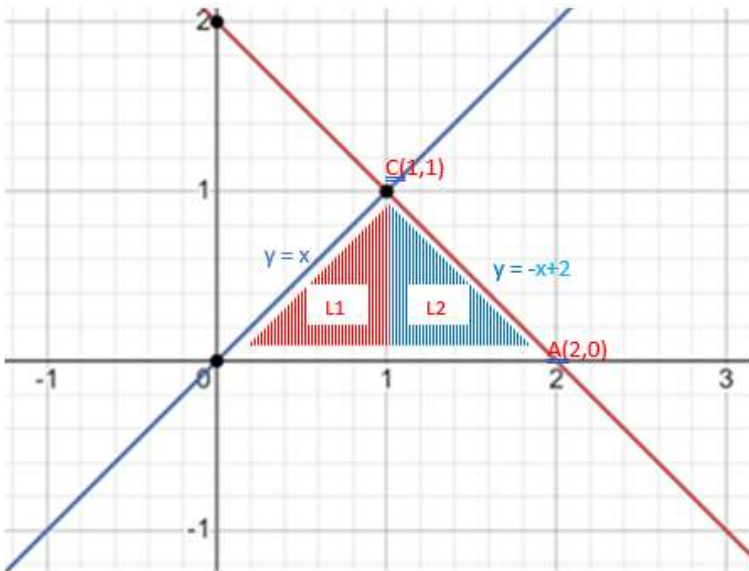
$$= \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Catatan: Dari contoh (1) lebih baik dari (2)

Jawab b)

Jika menggunakan cara (1)

maka L harus dibagi 2 menjadi L_1 dan L_2



Gambar 4. 7. Grafik $y=x$ dan $y=-x+2$

$$\iint_L (x+y) dL = \iint_{L_1} (x+y) dL + \iint_{L_2} (x+y) dL$$

Sedangkan jika menggunakan cara (2)

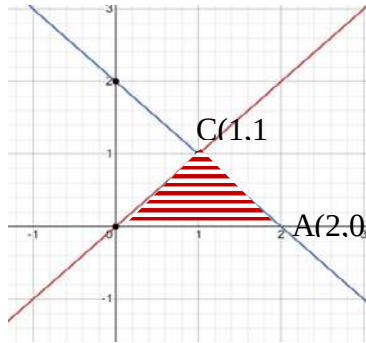
maka L tidak perlu dibagi

*) Persamaan garis OC: $y = x$ diubah menjadi $\boxed{x = y}$

*) Persamaan garis AC $\boxed{x = -y + 2}$

$$\iint_L (x+y) dL = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=-y+2} (x+y) dx dy$$

Menggunakan cara (2)



Gambar 4. 8. Grafik $x=y$, $x=-y+2$

$$\begin{aligned}
 & \text{Dihitung dahulu } \int_{x=y}^{x=-y+2} (x+y) dx \\
 & \quad \rightarrow \text{variabelnya } x \\
 & = \left(\frac{1}{2}x^2 + xy \right) \Big|_{x=y}^{x=-y+2} \\
 & = \left(\frac{1}{2}(-y+2)^2 + (-y+2)y \right) - \left(\frac{1}{2}y^2 + y^2 \right) \\
 & = \frac{1}{2}(y^2 - 4y + 4) - y^2 + 2y - \frac{3}{2}y^2 = -2y^2 + 2 \\
 & \therefore \iint_L (x+y) dL = \int_{y=0}^{y=1} (-2y^2 + 2) dy \\
 & \quad \rightarrow \text{variabelnya } y \\
 & = \left(-\frac{2}{3}y^3 + 2y \right) \Big|_0^1 \\
 & = -\frac{2}{3} + 2
 \end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}}$$

Contoh (3)

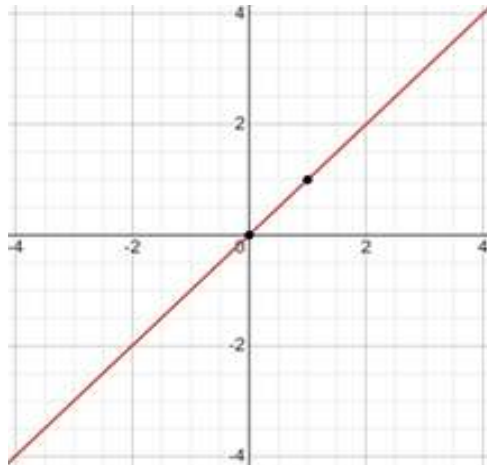
Luasan L dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$

Hitung $\iint_L xy^2 dL$

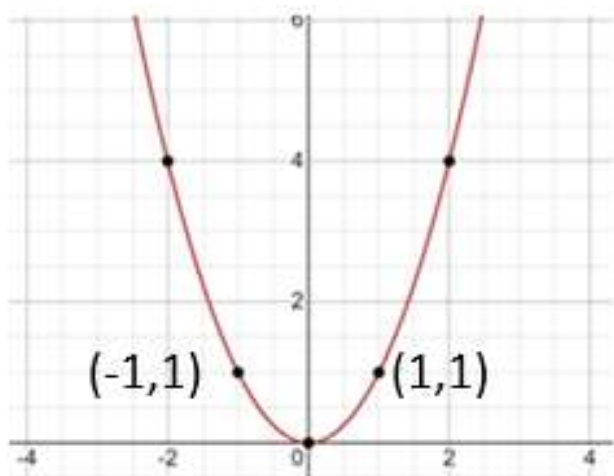
Pilihan (1) arsiran tegak, $dL = dydx$

Jawab:

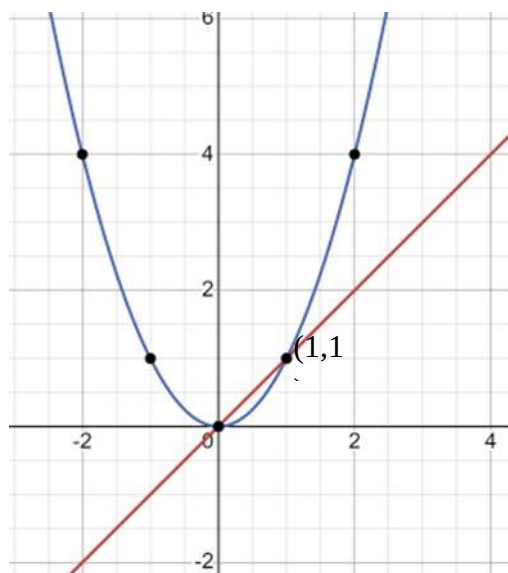
Perhatikan gambar berikut



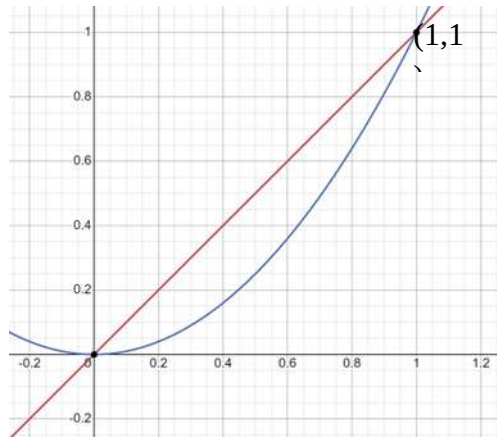
Gambar 4. 9. Kurva $y = x$



Gambar 4. 10. Kurva $y = x^2$



Gambar 4. 11. Penggabungan Grafik kurva
 $y = x^2$ dan $y = x$



Gambar 4. 12. Grafik Kurva Gabungan $y = x$ dan

$$y = x^2$$

$$\iint_L xy^2 dL = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=x} xy^2 dy dx$$

Dihitung dahulu

$$\int_{y=x^2}^{y=x} xy^2 dy \rightarrow \text{variabel } y$$

$$= \left(\frac{1}{3} xy^3 \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x}$$

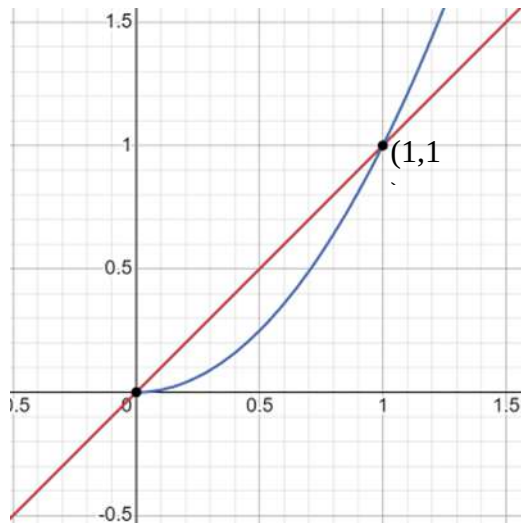
$$= \frac{1}{3} xx^3 - \frac{1}{3} xx^6$$

$$= \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{3} x^7$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \iint_L xy^2 dL &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7 \right) dx \rightarrow \text{variabel } x \\
 &= \left(\frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{24}x^8 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{15} - \frac{1}{24} \\
 &= \frac{3}{120} = \frac{1}{40}
 \end{aligned}$$

Catatan: Jika menggunakan cara (2) $dL = dx dy$

$$\iint_L xy^2 dL = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} xy^2 dx dy$$



Gambar 4. 13. Grafik Kurva Gabungan $x=y$ dan $x=\sqrt{y}$

Dihitung terlebih dahulu

$$\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} xy^2 dx \rightarrow \text{variabel } x$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{2} y^4$$

$$= \frac{1}{2} (y^3 - y^4)$$

$$\therefore \iint_L xy^2 dL = \int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{2} (y^3 - y^4) dy \rightarrow \text{variabel } y$$

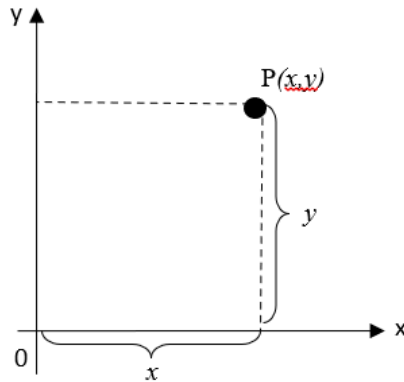
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{20} - \frac{4}{20} \right) = \frac{1}{40}$$

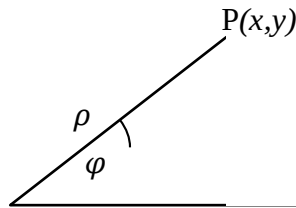
III. Menghitung Integral Lipat Dua Dalam Koordinat Kutub / Polar

Dalam Koordinat Cartesian / Koordinat Kartesius menggunakan variabel x dan y



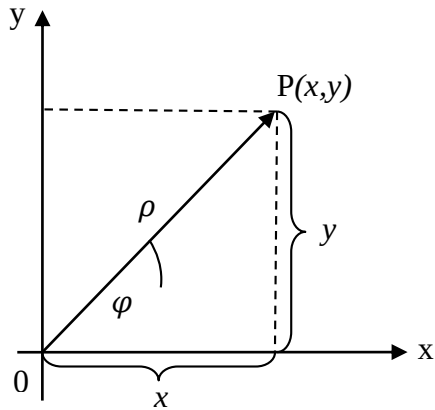
Gambar 4. 14. Koordinat Cartesius titik P (x, y)

Dalam Koordinat Polar menggunakan variabel φ dan ρ



Gambar 4. 15. Sudut $\varphi < 90^\circ$

Hubungan antara Koordinat Cartesian dengan Koordinat Polar



Gambar 4. 16. Hubungan Koordinat Cartesius dengan Koordinat Polar

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$$

$$\boxed{x = \rho \cos \varphi}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$$

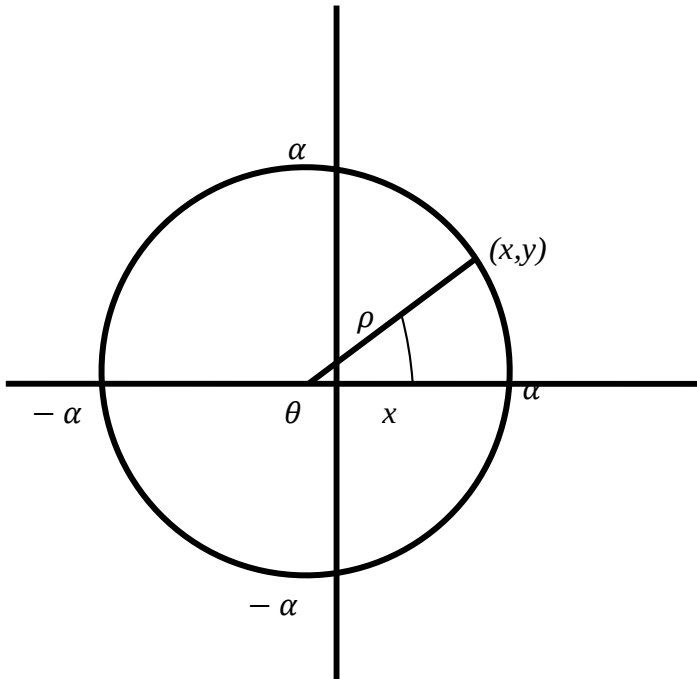
$$\boxed{y = \rho \sin \varphi}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$$

*) Jika luasan L berupa lingkaran atau bagian dari lingkaran, maka umumnya integralnya menjadi lebih mudah / sederhana jika menggunakan Koordinat Polar.

Contoh beberapa persamaan dalam koordinat polar

(1
)



Gambar 4. 17. Grafik Lingkaran dengan Pusat di θ dengan Jari-jari a

Persamaannya dalam Koordinat Cartesius

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2} \text{ (I)}$$

Dalam Koordinat Polar persamaan lingkaran tersebut

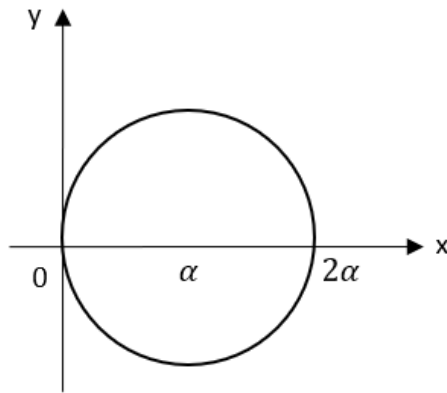
Menjadi:

$$\rho^2 = a^2$$

$$\boxed{\rho = a} \text{ (II)}$$

Persamaan (I) dan (II) menyatakan luasan / lingkaran yang sama

(2
)



Gambar 4. 18. Grafik Lingkaran dengan Pusat di $(\alpha, 0)$ dengan Jari-jari α

Persamaannya:

1. Dalam Koordinat Cartesian:

$$\boxed{(x - a)^2 + y^2 = a^2}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 2ax} \text{ (I)*}$$

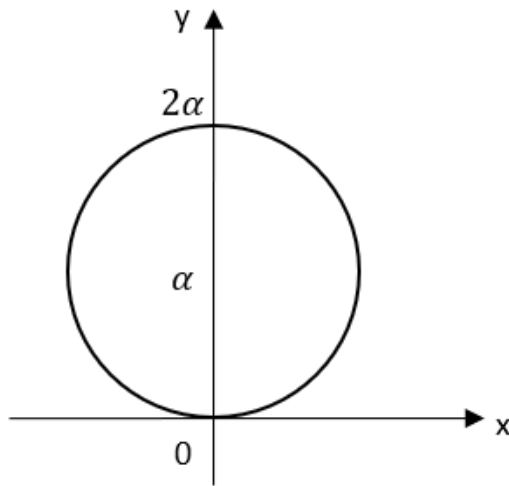
2. Dalam Koordinat Polar menjadi:

$$\rho^2 = 2a \rho \cos \varphi$$

$$\boxed{\rho = 2a \cos \varphi} \text{ (II)*}$$

*) lingkaran yang sama

(3
)



Gambar 4. 19. Grafik Lingkaran dengan Pusat di $(0, \alpha)$ dengan Jari-jari α

Persamaannya:

1. Dalam Koordinat Cartesian:

$$\boxed{x^2 + (y - a)^2 = a^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 2ay} \text{ (I)*}$$

2. Dalam Koordinat Polar menjadi:

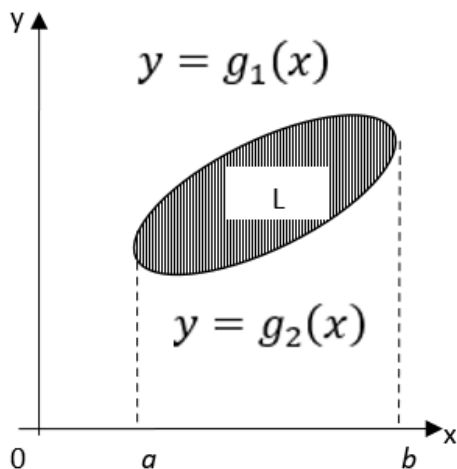
$$\rho^2 = 2a\rho \sin \varphi$$

$$\boxed{\rho = 2a \sin \varphi} \text{ (II)*};$$

*) lingkaran yang sama

*) Bentuk double integral

(I) Dalam koordinat Cartesian (variabel x dan y)

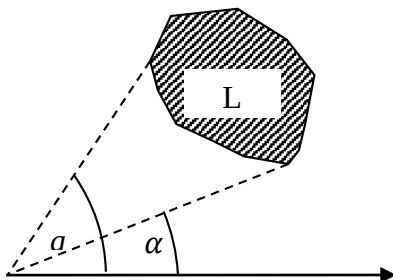


Gambar 4. 20. Grafik Luasan L dengan $y = g_1(x)$ dan $y = g_2(x)$

$$\iint_L f(x, y) dL = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} f(x, y) dy dx$$

Catatan $dL = \begin{cases} dydx \\ \text{atau} \\ dx dy \end{cases}$

- (II) Dalam Koordinat Cartesius bentuk double integralnya menjadi sebagai berikut:



Gambar 4. 21. Luasan L dengan Sudut φ dan α

$$\iint_L f(\varphi, \rho) dL = \int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=b} \int_{\rho=g_2(\varphi)}^{\rho=g_1(\varphi)} f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi$$

Catatan

Dalam Koordinat Polar

$$dL = \rho d\rho d\varphi$$

$$\text{luas } L = \iint_L dL$$

I. Dalam Koordinat Cartesian:

$$\iint_L dL = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} dy dx$$

atau

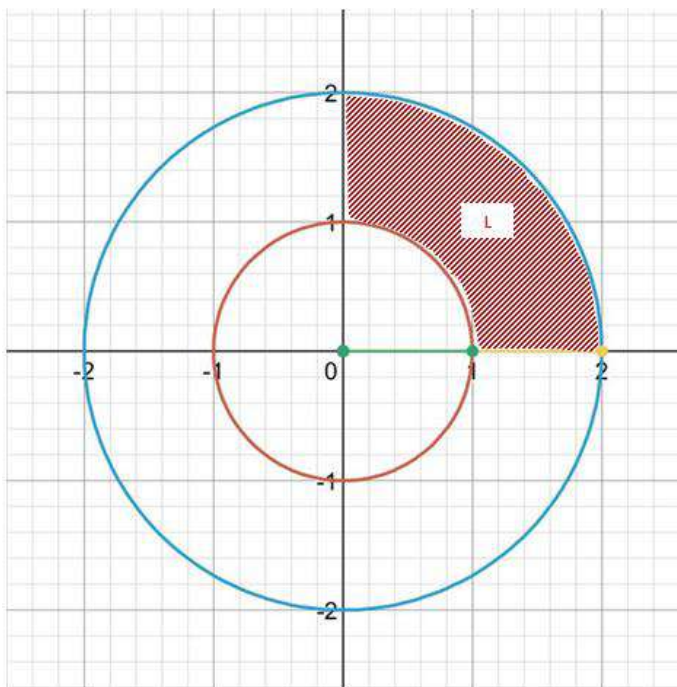
$$\int_{y=a}^{y=b} \int_{x=g_2(y)}^{x=g_1(y)} dx dy$$

II. Dalam Koordinat Polar:

$$\iint_L dL = \int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\beta} \int_{\rho=g_2(\varphi)}^{\rho=g_1(\varphi)} \rho d\rho d\varphi$$

Contoh (4)

Hitung luas yang diarsir menggunakan Koordinat Polar!



Gambar 4. 22. Luasan Arsir L dalam Grafik Lingkaran

I. Persamaan Lingkaran Besar:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Jari-jari: 2

II. Persamaan Lingkaran Kecil:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Jari-jari: 1

Jawab:

Langkah I:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Dalam Koordinat Polar menjadi

$$\rho^2 = 4$$

$$\boxed{\rho = 2}$$

Langkah II:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dalam Koordinat Polar menjadi

$$\rho^2 = 1$$

$$\boxed{\rho = 1}$$

$$\text{Luas } L = \iint_L dL$$

$$= \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/2} \int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho \, d\rho d\varphi$$

$$= \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/2} \left\{ \int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho \, d\rho \right\} d\varphi$$

Dihitung terlebih dahulu

$$\int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho \, d\rho \rightarrow \text{variabel } \rho$$

$$= \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_1^2$$

$$= 2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{Luas L} = \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/2} \frac{3}{2} \, d\varphi \rightarrow \text{variabel } \varphi$$

$$= \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{3}{4} \pi$$

Contoh (5)

Luasan L dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$

$$\text{Hitung } \iint_L xy^2 dL$$

Pilihan (1) arsiran tegak, $dL = dydx$

$$\iint_L xy^2 dL = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=x} xy^2 dy dx$$

$$\text{Dihitung dahulu } \int_{y=x^2}^{y=x} xy^2 dy \rightarrow \text{variabel } y$$

$$= \frac{1}{3}xy^3 \Big|_{y=x^2}^{y=x}$$

$$= \frac{1}{3}xx^3 - \frac{1}{3}xx^6$$

$$= \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7$$

$$\begin{aligned}
\therefore \iint_L xy^2 dL &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7 \right) dx \rightarrow \text{variabel } x \\
&= \left(\frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{24}x^8 \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{15} - \frac{1}{24} \\
&= \frac{3}{120} = \frac{1}{40}
\end{aligned}$$

Catatan: Jika menggunakan (2) $dL = dx dy$

$$\iint_L xy^2 dL = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} xy^2 dx dy$$

$$\begin{aligned}
&\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} xy^2 dx \rightarrow \text{variabel } x \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 y^2 \right) \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^4$$

$$\therefore \iint_L xy^2 dL = \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^4 \right) dy \rightarrow \text{variabel } y$$

$$= \left(\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{10}y^5 \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{40}$$

VI. Umpan Balik

- 1) Hitunglah integral berulang berikut:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$

- 2) Hitunglah integral berulang berikut:

a) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} r^2 \, dr \, d\theta$

- 3) Hitunglah integral berulang berikut:

$$\int_0^{\pi} \int_0^2 r \cos \frac{\pi}{4} \, dr \, d\theta$$

- 4) Hitunglah integral berulang berikut:

$$\int_0^{\pi} \int_0^2 r \cos \frac{\pi}{6} \, dr \, d\theta$$

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB V

INTEGRAL LIPAT TIGA

I. Pendahuluan

Pada bahasan sebelumnya telah dibahas mengenai integral lipat dua dan penentuan batasan daerah nya untuk mencari luas pada fungsi dua peubah. Dalam persoalan fungsi tiga peubah, penentuan batasan dan pemecahan masalah volume dari fungsi digunakan dengan integral lipat tiga. Sebab itu, pada modul ini akan membahas mengenai bagaimana menyelesaikan integral lipat tiga dan bagaimana menentukan batas dan penyelesaian dari fungsi integral yang memiliki tiga variabel secara detail.

Integral Lipat Tiga merupakan perluasan dari integral lipat dua ke dimensi yang lebih tinggi. Seperti halnya integral tunggal yang ditentukan untuk fungsi satu variabel dan integral lipat dua (integral ganda) untuk fungsi dua peubah, kita menentukan integral lipat tiga untuk menentukan fungsi tiga variabel atau peubah. Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan lipat-dua dapat diperluas meluas secara wajar menjadi integral lipat-tiga, atau bahkan ke integral lipatan.

II. Double Integral

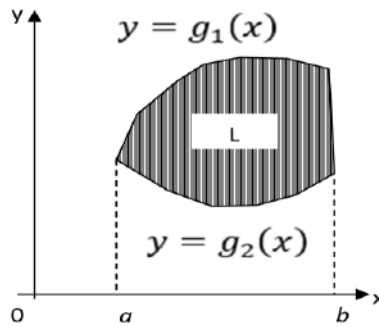
(I) Koordinat Cartesian

variabelnya: x, y

Bentuk umum Double Integral

$$\boxed{\iint_L f(x, y) dL}$$

(1)

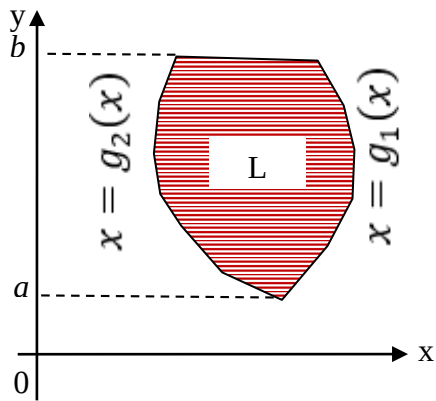


Gambar 5. 1. Grafik Luasan L dengan $y = g_1(x)$ dan $y = g_2(x)$

$$\boxed{dL = dydx}$$

$$\iint_L f(x, y) dL = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} f(x, y) dy dx$$

(2)



Gambar 5. 2. Grafik Luasan L dengan $x = g_1(x)$ dan $g_2(x)$

$$\boxed{dL = dx dy}$$

$$\begin{aligned} \iint_L f(x, y) dL = \\ \int_{y=a}^{y=b} \int_{x=g_2(y)}^{x=g_1(y)} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

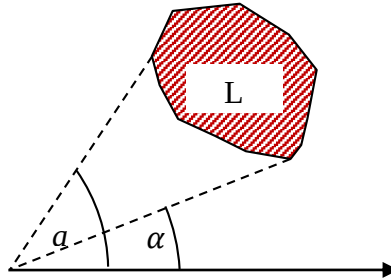
(II) Koordinat polar

variabelnya: ρ, φ

Bentuk umum Double Integral

$$\boxed{\iint_L f(x, y) dL}$$

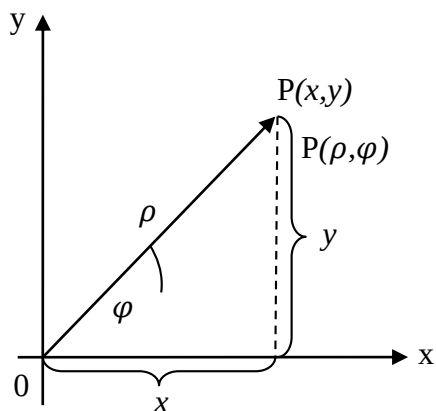
$$dL = \int d\rho d\varphi$$



Gambar 5. 3. Luasan L dengan Sudut φ dan α

$$\iint_L f(\varphi, \rho) dL = \int_{\varphi=a}^{\varphi=b} \int_{\rho=g_2(y)}^{\rho=g_1(y)} f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi$$

Hubungan variabel Koordinat Cartesius dengan Koordinat Polar



Gambar 5. 4. Grafik yang terbentuk berdasarkan dari hubungan variabel Koordinat Cartesius dengan Koordinat Polar

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\begin{array}{l} \boxed{dydx} \\ \text{atau} \} \boxed{\rho d\rho d\varphi} \\ \boxed{dxdy} \end{array}$$

Catatan: Dalam Double Intergral Koordinat Polar sering dijumpai bentuk-bentuk integral antara lain

(1) $\int \sin^m \varphi \cos^n \varphi d\varphi$ m, n bulat positif

a) Jika n ganjil → Substitusinya:

$$t = \sin \varphi$$

$$dt = \cos \varphi d\varphi$$

b) Jika m ganjil → Substitusinya:

$$dt = \cos \varphi$$

$$dt = -\sin \varphi d\varphi$$

c) Jika m dan n genap:

gunakan Rumus

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

(2) *) $\int \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi \rightarrow$

Menggunakan Rumus:

$$\cos m\varphi \cos n\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)\varphi + \cos(m-n)\varphi \}$$

*) $\int \sin m\varphi \cos n\varphi d\varphi \rightarrow$ Menggunakan Rumus:

$$\sin m\varphi \cos n\varphi = \frac{1}{2} \{ \sin(m+n)\varphi + \sin(m-n)\varphi \}$$

*) $\int \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi \rightarrow$ Menggunakan Rumus:

$$\sin m\varphi \sin n\varphi = \frac{1}{2} \{ -\cos(m+n)\varphi + \cos(m-n)\varphi \}$$

Contoh (1)

$$\int \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \quad m = 4$$

$$n = 3 \rightarrow \text{ganjil}$$

$$\text{Substitusi } \boxed{t = \sin \varphi} \rightarrow dt = \cos \varphi d\varphi$$

Dengan substitusi di atas

$$\int \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \int \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi$$

$$= \int \sin^4 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$= \int (\sin^4 \varphi - \sin^6 \varphi) \cdot \cos \varphi d\varphi$$

$$= \int (t^4 - t^6) dt$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + c$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 \varphi - \frac{1}{7} \sin^7 \varphi + c$$

Contoh (2)

$$\int \cos^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \cos(3 + 2)\varphi + \cos(3 - 2)\varphi \right) d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int (\cos 5\varphi + \cos \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin 5\varphi + \sin \varphi \right) + c \\
 &= \frac{1}{10} \sin 5\varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi + c
 \end{aligned}$$

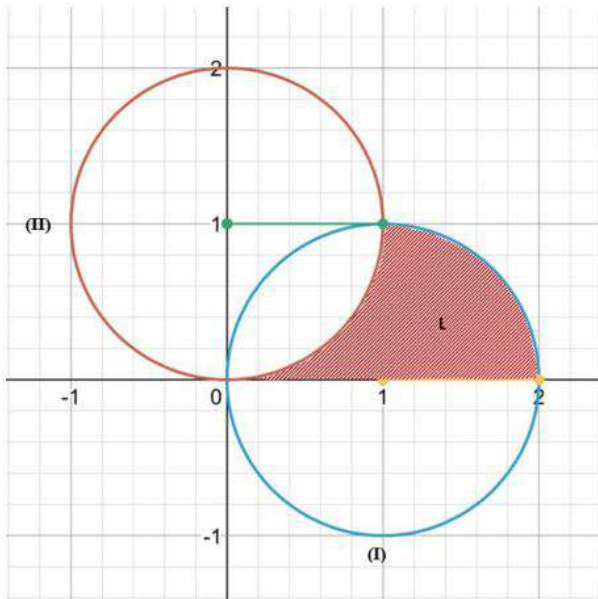
Contoh:

Diketahui

lingkaran I = $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

lingkaran II = $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

Ditanya: luas yang diarsir gunakan Koordinat Polar



Gambar 5. 5. Grafik 2 Lingkaran (Lingkaran I & Lingkaran II) yang saling berpotongan

Lingkaran I:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$\dots x^2 + y^2 = 2x$$

Dalam Koordinat Polar menjadi:

$$\text{Ingat: } x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$x = \rho \cos \varphi$$

$\therefore$ Lingkaran I menjadi:

$$\rho^2 = 2\rho \cos \varphi$$

atau

$$\rho = 2 \cos \varphi$$

Langkah II:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

atau

$$x^2 + y^2 = 2y$$

dalam Koordinat Polar menjadi

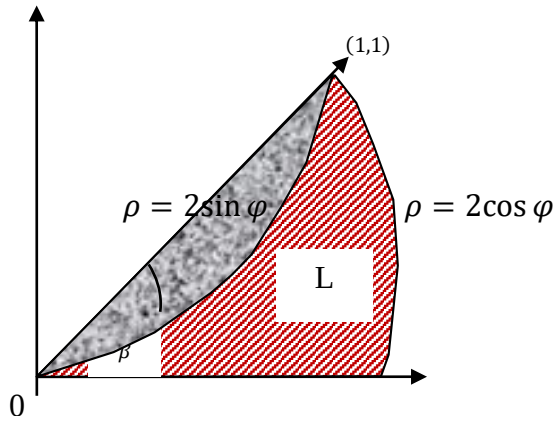
$$\rho^2 = 2\rho \sin \varphi$$

atau

$$\rho = 2 \sin \varphi$$

Rumus

$$luasan L = \iint_L dL$$



Gambar 5. 6. Luasan L yang terbentuk dari persamaan $\rho=2 \sin \varphi$ dan $\rho=2 \cos \varphi$

Mulai mengarsir: $\angle \alpha = 0$

Selesai mengarsir: $\angle \beta = \frac{\pi}{4} (45^\circ)$

$$\begin{aligned}
 \text{Jadi luas } L &= \iint_L dL \\
 &= \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/4} \int_{\rho=2 \sin \varphi}^{\rho=2 \cos \varphi} \rho d\rho d\varphi \\
 &= \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/4} \left\{ \int_{\rho=2 \sin \varphi}^{\rho=2 \cos \varphi} \rho d\rho \right\} d\varphi
 \end{aligned}$$

Dihitung terlebih dahulu

$$\int_{\rho=2\sin\varphi}^{\rho=2\cos\varphi} \rho d\rho \rightarrow \text{variabelnya } \rho$$

$$= \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_{\rho=2\sin\varphi}^{\rho=2\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\dots \cos \varphi) - (\dots \sin \varphi) \}$$

$$= 2\cos^2 \varphi - 2\sin^2 \varphi$$

$$\therefore \text{luas } L = \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/4} (2\cos^2 \varphi - 2\sin^2 \varphi) d\varphi \rightarrow \text{variabel } \varphi$$

$$\text{gunakan } \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \sin^2 \varphi$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\cos^2 \varphi - 2\sin^2 \varphi &= (1 + \cos 2\varphi) - (1 - \cos 2\varphi) \\ &= 2 \cos 2\varphi \end{aligned}$$

$$\therefore \text{luas } L = \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\varphi d\varphi \rightarrow \text{variabel } \varphi$$

$$= \sin 2\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \text{luas } L = 1$$

Lingkaran I =

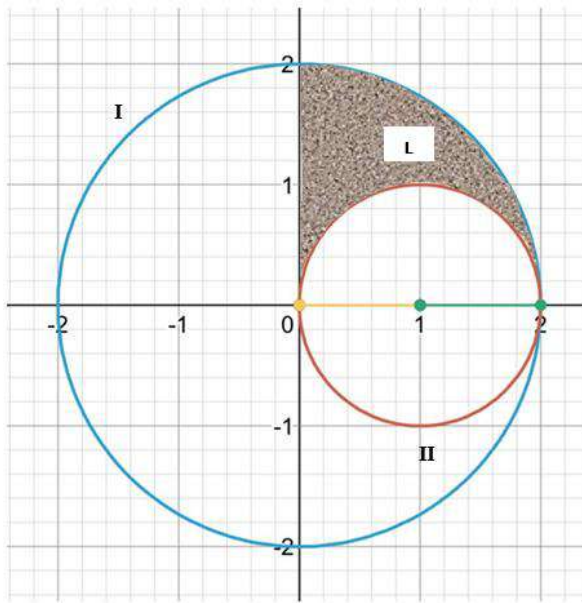
$$x^2 + y^2 = 4$$

Lingkaran II =

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

Lihat gambar: Hitung luas L

(menggunakan Koordinat Polar)



Gambar 5. 7. Grafik 2 Lingkaran (Lingkaran I & Lingkaran II) yang saling bersinggungan di dalam

Jawab:

$$\text{Lingkaran I} = x^2 + y^2$$

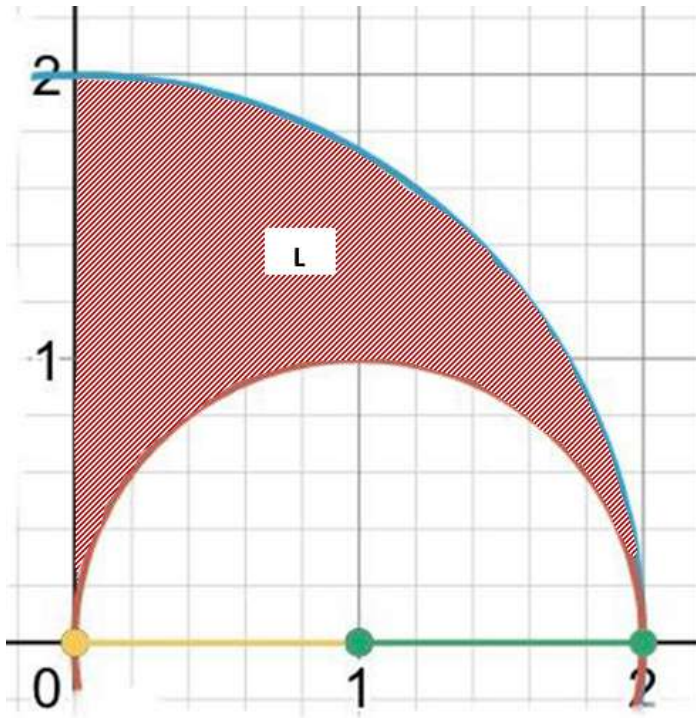
$= 4 \rightarrow$ Dalam Koordinat Polar menjadi

$$\rho^2 = 4 \text{ atau } \boxed{\rho = 2}$$

$$\text{Lingkaran II} = (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

atau $x^2 + y^2 = 2x \rightarrow$ Dalam Koordinat Polar menjadi

$$\rho^2 = 2\rho\cos\varphi \text{ atau } \boxed{\rho = 2\cos\varphi}$$



Gambar 5. 8. $\frac{1}{4}$ bagian dari Grafik 2 Lingkaran
(Lingkaran I & Lingkaran II) yang saling
bersinggungan di dalam

$$\begin{aligned}
 \text{Luas } L &= \iint_L dL \\
 &= \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/2} \int_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=2} \rho \, d\rho \, d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\int_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=2} \rho \, d\rho \rightarrow \text{variabel } \rho$$

$$= \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=2}$$

$$= \frac{1}{2} (4 - 4\cos^2\varphi)$$

$$= 2 - 2\cos^2\varphi$$

$$\therefore \text{luas } L = \int_0^{\pi/2} (2 - 2\cos^2\varphi) d\varphi$$

$$\rightarrow \left[\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2 - (1 + \cos 2\varphi)) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi$$

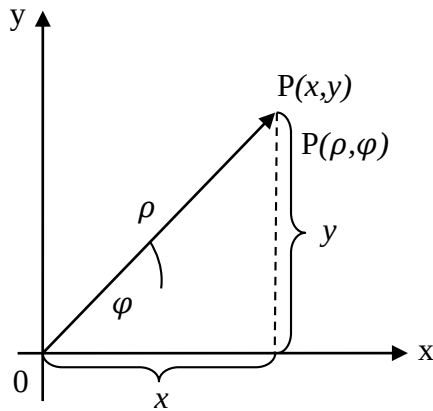
$\rightarrow \text{variabel } \varphi$

$$= \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - (0 - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Hubungan variabel Koordinat Cartesius dengan Koordinat Polar



Gambar 5. 9. Koordinat Polar P (ρ,φ)

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\left. \begin{array}{l} dydx \\ \text{atau} \\ dx dy \end{array} \right\} \rho d\rho d\varphi$$

Catatan:

Dalam Double Integral Koordinat Polar sering dijumpai bentuk-bentuk integral antara lain

(1) $\int \sin^m \varphi \cos^n \varphi d\varphi$ m, n bulat positif

a) Jika n ganjil → Substitusinya:

$$t = \sin \varphi$$

$$dt = \cos \varphi d\varphi$$

b) Jika m ganjil → Substitusinya:

$$dt = \cos \varphi$$

$$dt = -\sin \varphi d\varphi$$

c) Jika m dan n genap:

gunakan Rumus

$$\begin{array}{l} \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \\ \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \end{array}$$

(2) a) $\int \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi$ → Pakai Rumus:

$$\cos m\varphi \cos n\varphi$$

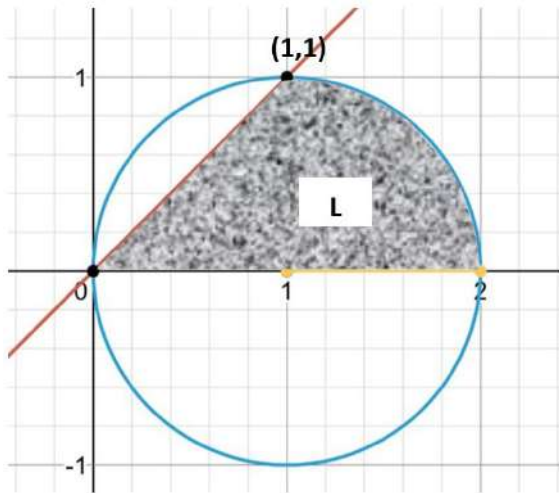
$$= \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)\varphi + \cos(m+n)\varphi \}$$

b) $\int \sin m\varphi \cos n\varphi d\varphi \rightarrow$ Pakai Rumus:

$$\sin m\varphi \cos n\varphi = \frac{1}{2} \{ \sin(m+n)\varphi + \sin(m-n)\varphi \}$$

c) $\int \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi \rightarrow$ Pakai Rumus:

$$\sin m\varphi \sin n\varphi = \frac{1}{2} \{ -\cos(m+n)\varphi + \cos(m-n)\varphi \}$$



Gambar 5. 10. Grafik Lingkaran $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

Lingkaran: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

L lihat gambar

Hitung $\iint_L y \, dL$

Jawab:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

atau

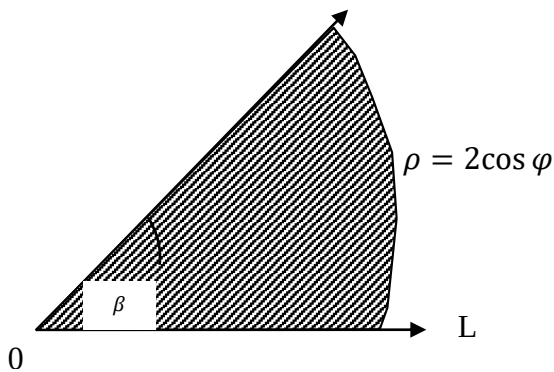
$$x^2 + y^2 = 2x$$

dalam Koordinat Polar menjadi

$$\rho^2 = 2\rho \cos \varphi$$

atau

$$\boxed{\rho = 2 \cos \varphi}$$



Gambar 5. 11. Suatu Luasan L yang terbentuk dari $\rho=2\cos\varphi$ dengan $\alpha=0$ dan $\beta=\pi/4$

$$\therefore \iint_L y \, dL = \int_{\alpha=0}^{\beta=\pi/4} \int_{\rho=0}^{\rho=2\cos\varphi} (\rho \sin \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\cos\varphi} \sin \varphi \, \rho^2 \, d\rho \, d\varphi$$

Dihitung terlebih dahulu

$$\int_0^{2\cos\varphi} \sin \varphi \, \rho^2 \, d\rho \rightarrow \text{variabel } \rho$$

$$= \sin \varphi \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\varphi}$$

$$= \sin \varphi \left(\frac{8}{3} \cos^3 \varphi \right)$$

$$= \frac{8}{3} \sin \varphi \cos^3 \varphi$$

$$\therefore \iint_L y \, dL = \int_0^{\pi/4} \frac{8}{3} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \rightarrow \text{variabel } \varphi$$

$$\int \sin \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi$$

$\hookrightarrow \sin \varphi$
 $\hookrightarrow$ pangkat ganjil
 $\hookrightarrow$ menggunakan substitusi $t = \cos \dots$
 $\hookrightarrow \cos^3 \varphi$
 $\hookrightarrow$ pangkat ganjil
 $\hookrightarrow$ menggunakan substitusi $t = \sin \varphi$

Jika memilih substitusi:

$$t = \sin \varphi \rightarrow dt = \cos \varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi &= \int \sin \varphi \cos^2 \varphi (\cos \varphi d\varphi) \\
 &= \int \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) (\cos \varphi d\varphi) \\
 &= \int t(1 - t^2) dt \\
 &= \int (t - t^3) dt
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 + (c)$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^4\varphi + (c)$$

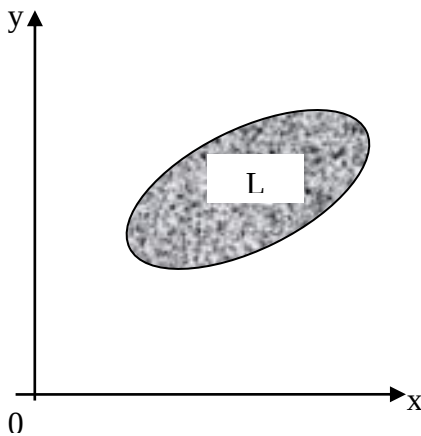
$$\begin{aligned} \therefore \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \\ &= \frac{8}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \sin^2 0 - \frac{1}{4} \sin^4 0 \right) \right\} \\ &= \frac{8}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \right) - (0 - 0) \right\} \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{3}{16} \right) \end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

III. Triple Integral

Berupa integral tertentu (definit integral)
dari suatu fungsi 3 variabel $f(x, y, z)$

Jika double integral berbentuk umum



Gambar 5. 12. Grafik Luasan L

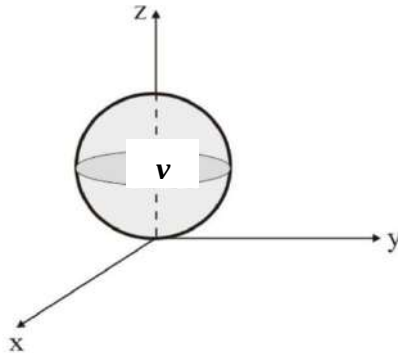
$$\iint_L f(x,y)dL \text{ dengan } dL$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow dL &= dydx \\ \hookrightarrow dL &= dxy \end{aligned} \} \rightarrow \text{Koordinat Cartesius}$$

$$\text{atau } \iint_L f(\varphi, \rho) dL$$

$$\text{dengan } dL = \rho d\rho d\varphi$$

Triple integral mempunyai bentuk umum
dalam Koordinat Cartesius:



Gambar 5. 13. Bentuk Umum Triple Integral dalam
Koordinat Cartesius

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dv}$$

$\rightarrow dv$ dapat berupa urutan

$$\begin{aligned}
&\hookrightarrow \boxed{dv = dzdydx} \\
&\hookrightarrow \boxed{dv = dzdxdy} \quad \rightarrow \text{yang umumnya digunakan} \\
&\hookrightarrow dv = dydzdx \\
&\hookrightarrow dv = dydxdz \\
&\hookrightarrow dv = dxdzdy \\
&\hookrightarrow dv = dxdydz
\end{aligned}$$

integral dari fungsi $f(x,y,z)$ pada volume benda v

Jika menggunakan urutan $\boxed{dV = dzdydx}$

$$\text{maka bentuk umum } \iiint_V f(x,y,z)dv =$$

$$\Rightarrow \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=h_2(x)}^{y=h_1(x)} \int_{z=g_2(x,y)}^{z=g_1(x,y)} f(x,y,z)dz dy dx$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y=h_2(x)}^{y=h_1(x)} \left\{ \int_{z=g_2(x,y)}^{z=g_1(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dy \right] dx$$

Cara menghitungnya:

$$(1) \text{Dihitung dahulu } \int_{z=g_2(x,y)}^{z=g_1(x,y)} f(x,y,z)dz$$

→ variabelnya Z

→ hasil integralnya

berupa fungsi 2 variabel x dan y, misal ... F(x, y)

$$\text{Jadi } \iiint_V f(x, y, z) dv = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=h_2(x)}^{y=h_1(x)} F(x, y) dy dx$$

→ Double integral

→ Selanjutnya dihitung seperti pada double integral

Contoh:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 xyz \, dz \, dy \, dx \\ = \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=1}^{y=2} \left\{ \int_{z=2}^{z=3} xyz \, dz \right\} dy \right] dx \end{aligned}$$

$$\text{Dihitung terlebih dahulu } \int_{z=2}^{z=3} xyz \, dz$$

→ variabelnya z

$$= \frac{1}{2} xyz^2 \Big|_{z=2}^{z=3}$$

$$= \frac{1}{2} (9xy - 4xy) = \frac{5}{2} xy$$

$$\therefore \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 xyz \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_1^2 \frac{5}{2} xy \, dy \, dx$$

→ double integral ...

Dihitung terlebih dahulu

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{5}{2} xy \, dy \rightarrow \text{variabel } y \\ &= \frac{5}{4} xy^2 \Big|_{y=1}^{y=2} \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{4} (4x - x) = \frac{15}{4} x$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 xyz \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \frac{15}{4} x \, dx \\ &\rightarrow \text{variabel } x \end{aligned}$$

$$= \frac{15}{8} x^2 \Big|_0^1 = \boxed{\frac{15}{8}}$$

$$\text{Contoh: } \iiint_v z \, dv = \int_0^1 \int_x^{2x} \int_{xy}^{x^2y^3} z \, dz \, dy \, dx$$

$$\text{Dihitung } \int_{xy}^{x^2y^3} z \, dz \rightarrow \text{variabel } z$$

$$= \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=xy}^{z=x^2y^3}$$

$$= \frac{1}{2} x^4 y^6 - \frac{1}{2} x^2 y^2$$

$$\text{Dihitung } \int_x^{2x} \left(\frac{1}{2} x^4 y^6 - \frac{1}{2} x^2 y^2 \right) dy$$

$\rightarrow \text{variabel } y$

$$= \left(\frac{1}{14} x^4 y^7 - \frac{1}{6} x^2 y^3 \right) \Big|_{y=x}^{y=2x}$$

$$= \left(\frac{128}{14} x^{11} - \frac{8}{6} x^5 \right) - \left(\frac{1}{14} x^{11} - \frac{1}{6} x^5 \right)$$

$$= \frac{127}{14}x^{11} - \frac{7}{6}x^5$$

$$\therefore \iiint_v z \, dv = \int_0^1 \left(\frac{127}{14}x^{11} - \frac{7}{6}x^5 \right) dx$$

$\rightarrow$ variabel x

$$= \left[\frac{127}{14} \left(\frac{x^{12}}{12} \right) - \frac{7}{6} \left(\frac{x^6}{6} \right) \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{127}{(14)(12)} - \frac{7}{(6)(6)} = \dots$$

Contoh:

Hitung integral lipat tiga berikut

$$\iiint_V x^2 y z \, dV$$

dengan B adalah

$$B = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

Jawab:

$$\iiint_B x^2 y z \, dV = \int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 x^2 y z \, dx \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 y z \right]_1^2 dy dz \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \frac{7}{3} y z dy dz \\
&= \frac{7}{3} \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 z \right]_0^1 dz \\
&= \frac{7}{3} \int_0^2 \frac{1}{2} z dz \\
&= \frac{7}{6} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Contoh:

Hitung integral lipat berikut ini

$$\int_{-2}^5 \int_0^{3x} \int_y^{x+2} 4 dz dy dx$$

Jawab:

$$\int_{-2}^5 \int_0^{3x} \int_y^{x+2} 4 dz dy dx = \int_{-2}^5 \int_0^{3x} \left(\int_y^{x+2} 4 dz \right) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^5 \int_0^{3x} [4z]_y^{x+2} dy dx \\
&= \int_{-2}^5 \int_0^{3x} (4x - 4y + 8) dy dx \\
&= \int_{-2}^5 [4xy - 2y^2 + 8y]_0^{3x} dx \\
&= \int_{-2}^5 (-6x^2 + 24x) dx \\
&= -14
\end{aligned}$$

Contoh:

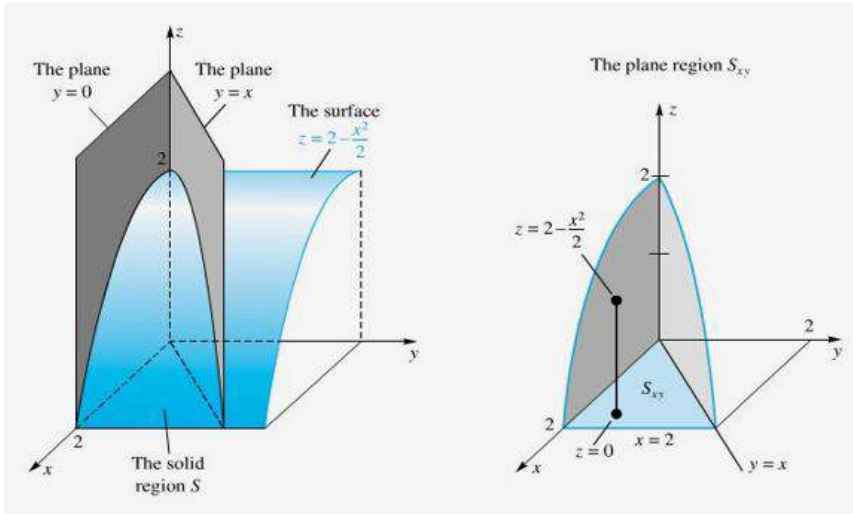
Hitung integral lipat tiga untuk

$$f(x, y, z) = 2xyz$$

dalam daerah pejal S yang dibatasi oleh tabung parabol

$$z = 2 - \frac{1}{2}x^2$$

dan bidang-bidang $z = 0$, $y = x$, dan $y = 0$



Gambar 5. 14. Grafik 3 Dimensi suatu Integral Lipat Tiga

Jawab:

Daerah pejal S diperlihatkan melalui Gambar pada halaman sebelumnya. Integral lipat tiga:

$$\iiint_S 2xyz \, dV$$

dapat dihitung dengan integral lipat. Perhatikan bahwa S adalah suatu himpunan z sederhana dan bahwa proyeksinya S_{xy} pada bidang xy adalah y sederhana (juga x sederhana).

Jadi,

$$\iiint_S 2xyz \, dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} 2xyz \, dz \, dy \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \int_0^x [xyz^2]_0^{2-x^2/2} dy dx \\
&= \int_0^2 \int_0^x \left(4xy - 2x^3y + \frac{1}{4}x^5y \right) dy dx \\
&= \int_0^2 \left(2x^3 - x^5 + \frac{1}{8}x^7 \right) dx = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Terdapat beberapa urutan pengintegralan berbeda yang memungkinkan dalam Contoh di atas. Ilustrasi cara lain untuk mengerjakan soal pada Contoh sebelumnya sebagai berikut:

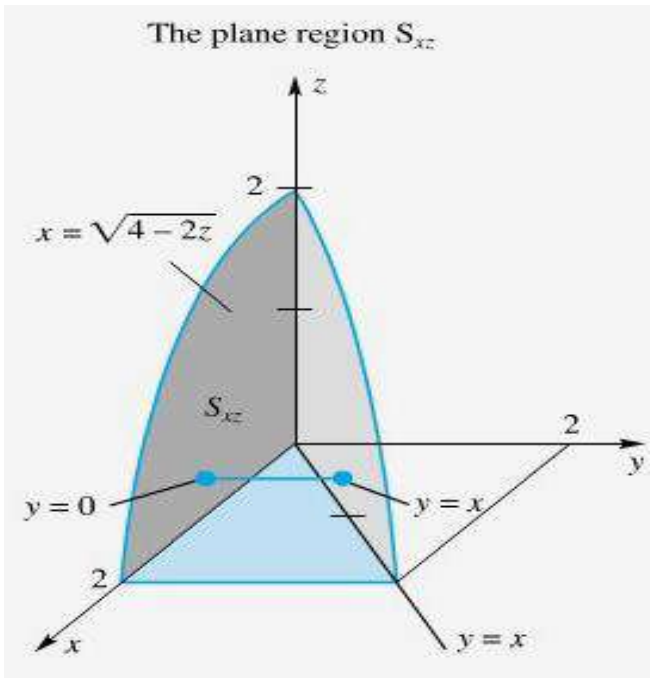
Hitung integral dari Contoh sebelumnya dengan mengerjakan pengintegralan dalam urutan $dy dx dz$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa benda pejal S adalah y sederhana dan diproyeksikan ke dalam himpunan bidang S_{xz} yang diperlihatkan pada Gambar 5. 15. Integralkan sepanjang garis horizontal dari $y = 0$ ke $y = x$, kemudian integralkan hasilnya terhadap S_{xz}

$$\begin{aligned}
\iiint_S 2xyz \, dV &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^x 2xyz \, dy \, dx \, dz \\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} x^3 z \, dx \, dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \int_0^2 (\sqrt{4-2z})^4 z \, dz \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^2 (16z - 16z^2 + 4z^3) \, dz \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



Gambar 5. 15. Proyeksi suatu Integral Lipat Tiga pada Himpunan Bidang S_{xz}

IV. Umpan Balik

1) Hitunglah integral-integral berulang berikut:

a) $\int_{-3}^7 \int_0^{2x} \int_y^{x-1} dz \, dy \, dx$

b) $\int_0^2 \int_{-1}^4 \int_0^{3y+x} dz \, dy \, dx$

2) Hitunglah integral-integral berulang berikut:

a) $\int_1^4 \int_{z-1}^{2z} \int_0^{y+2z} dx \, dy \, dz$

b) $\int_0^5 \int_{-2}^4 \int_1^2 6xy^2z^3 \, dx \, dy \, dz$

3) Hitung integral berikut:

a) $\int_4^{24} \int_0^{24-x} \int_0^{24-x-y} \frac{y+z}{x} \, dz \, dy \, dx$

b) $\int_0^5 \int_0^3 \int_{z^2}^9 xyz \, dx \, dz \, dy$

c) $\int_0^2 \int_1^z \int_0^{\sqrt{x/z}} 2xyz \, dy \, dx \, dz$

4) Hitung integral berikut:

a) $\int_0^{\pi/2} \int_0^z \int_0^y \sin(x+y+z) \, dx \, dy \, dz$

b) $\int_{-2}^4 \int_{x-1}^{x+1} \int_0^{\sqrt{2y/x}} 3xyz \, dz \, dy \, dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \int_{\sin 2z}^0 \int_0^{2yz} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \, dx \, dy \, dz$

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB VI

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDINER)

I. Pendahuluan

Persamaan Diferensial (PD) adalah salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk PD. Persamaan Diferensial (PD) merupakan suatu bentuk model matematika yang banyak digunakan dalam sains dan teknologi, misalnya dalam fisika, mekanika teknik, rangkaian listrik, perpindahan panas, geometri dan masih banyak lagi.

Persamaan Diferensial digunakan sebagai alat untuk mengetahui kelakuan maupun sifat-sifat solusi masalah yang ditinjau. Karena itu, penting sekali mempelajari Persamaan Diferensial. Dalam modul ini, Anda pertama-tama mempelajari Persamaan Diferensial yang lebih sederhana, yaitu PD orde satu. Anda akan mengenal tipe-tipe persamaan diferensial dan mempelajari bagaimana caranya menyelesaikan Persamaan Diferensial tersebut.

Prasyarat: Dapat menghitung $\int f(x) dx$

II. Persamaan Diferensial (*Differential Equations*)

Persamaan Diferensial adalah persamaan yang mengandung derivative atau diferensial dan dapat dibagi menjadi Persamaan Diferensial Biasa atau Persamaan Diferensial Ordiner (*Ordinary*) serta Persamaan Diferensial Parsial (*Partial Deffer*).

1) Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa adalah persamaan yang mengandung satu variabel bebas, satu variabel bebas beserta derivativenya.

Contoh1:

a) $\frac{dy}{dx} = x + 5$

b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$

atau dapat ditulis $x dy + y dx = 0$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y-5}{3x-2y+7}$

d) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = (x+1)^2$

e) $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$

f) $(x^2 + 2xy) dx + (y^2 + x^2) dy = 0$

g) $y'' + 5y' + 6y = (2x + 1)e^{3x}$

h) $y''' + 2y'' + y' = \sin x$

i) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

Jika suatu persamaan mengandung satu atau lebih derivative derivatif terhadap suatu variabel tertentu, maka variabel ini disebut variabel bebas. Suatu variabel disebut tak bebas jika derivatif dari variabel ini ada.

Dalam persamaan diferensial e), h) dan i) pada contoh di atas, x adalah variabel bebas, sedangkan y adalah variabel tak bebas.

Persamaan diferensial a) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ dapat ditulis dalam bentuk $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x+5}$, dalam hal ini variabel manapun, x atau y dapat dipandang sebagai variabel bebas, dan yang lain sebagai variabel tak bebas.

2) Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Diferensial Parsial adalah persamaan yang mengandung dua atau lebih variabel bebas, satu variabel tak bebas beserta derivatif parsialnya.

Contoh 2:

$$a) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$b) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z + x \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$c) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$$

$$d) \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$e) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

Dalam persamaan diferensial b) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x \frac{\partial z}{\partial y}$ terdapat dua variabel bebas yaitu x dan y, dan dalam persamaan diferensial e) $\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$ terdapat tiga variabel bebas yaitu t, x dan y.

Selanjutnya yang dibahas dalam buku ini terbatas hanya pada Persamaan Diferensial Biasa. Oleh karena itu, untuk selanjutnya jika disebut Persamaan Diferensial yang dimaksud adalah Persamaan Diferensial Biasa.

Jika dalam suatu persamaan diferensial hanya terdapat satu variabel bebas, maka derivatif yang terkandung dalam persamaan tersebut adalah derivatif biasa. Persamaan diferensial ini disebut persamaan diferensial biasa. Sebaliknya jika terdapat lebih dari satu variabel bebas, maka derivatif yang terkandung dalam persamaan tersebut merupakan derivatif parsial. Persamaan diferensial ini disebut persamaan diferensial parsial.

Jadi, pada intinya persamaan diferensial biasa (PDB) dapat dijelaskan sebagai suatu persamaan yang memuat suatu atau lebih turunan fungsi satu peubah bebas yang tidak diketahui. Jika fungsi terdiri dari satu peubah bebas, maka dapat dikatakan sebagai persamaan diferensial parsial (PDP).

Pada bagian selanjutnya, dijelaskan tentang turunan tertinggi dari fungsi yang terlibat dalam persamaan diferensial (orde) serta pangkat dari turunan tertinggi fungsi yang terlibat dalam persamaan (derajat).

III. Kegiatan Pembelajaran 2

1. Judul Kegiatan Pembelajaran
Order dari Persamaan Diferensial
2. Kemampuan Akhir dan Sub Kemampuan Akhir
 - a. Ketepatan penyelesaian PD exact
 - b. Ketepatan penyelesaian faktor integrasi
 - c. Ketepatan penyelesaian PD Bernoulli
3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

Persamaan Diferensial mempunyai bentuk umum:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

atau

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

disebut Persamaan Diferensial Order n. Order Persamaan Diferensial ditentukan oleh derivative tertinggi yang muncul dalam Persamaan Diferensialnya

- 1) Bentuk umum Persamaan Diferensial Order 1:
 $F(x, y, y') = 0$

Suatu PD orde satu dapat dinyatakan secara umum dalam dua bentuk, yaitu:

Bentuk implisit,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ atau } F(x, y, y') = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Bentuk eksplisit

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ atau } y' = f(x, y) \dots\dots\dots$$

(2)

catatan:

y' atau $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama dari y terhadap variabel x

y'' atau $\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah turunan pertama dari y terhadap variabel x

... dan seterusnya ...

Contoh 3:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x+5}y = (x+5)^3$$

$$\frac{dN}{dt} = kN, N = N(t) \quad \text{orde 1 derajat 1}$$

$$y' + 2 \sin x = 0 \quad \text{orde 1 derajat 1}$$

Contoh mengidentifikasi PD orde satu:

$$1. \boxed{xy'} + y^2 + x^2 + 1 = 0$$

atau

$$\boxed{x \frac{dy}{dx}} + y^2 + x^2 + 1 = 0$$

PD orde satu bentuk implisit

$$2. \boxed{y''} - 2y + e^x = 0$$

atau

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} - 2y + e^x = 0$$

bukan PD orde satu,

PD orde dua bentuk implisit

$$3. \boxed{y'} = 2y + e^x$$

PD orde satu bentuk eksplisit:

$$f(x, y) = 2y + e^x$$

$$4. \boxed{y''} = xy + x^2$$

bukan PD orde satu,

PD orde dua bentuk eksplisit

*) catatan:

Perhatikan orde turunan variabel y
terhadap x yang ada di dalam $\boxed{}$

Suatu fungsi $y = y(x)$ dikatakan solusi PD (1)
atau (2) apabila $y = y(x)$ dan turunannya y'
memenuhi PD (1) atau (2)

Contoh 4:

Tinjau PD: $y' = \cos x$
..... (3)

Penyelesaian:

Solusi umum PD ini adalah

$$y = \sin x + C$$

Fungsi-fungsi:

$$y = \sin x + 1$$

$$y = \sin x$$

$$y = \sin x - 4$$

masing-masing adalah solusi khusus PD (3) yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil masing-masing nilai $C = 1$, $C = 0$ dan $C = -4$. Dalam menentukan solusi khusus yang memenuhi syarat awal $y(\pi/2) = 10$, ditentukan C dari solusi umum $y = \sin x + C$ dengan mengambil nilai $y = 10$ dan $x = \pi/2$. Jadi, $10 = \sin(\pi/2) + C \rightarrow C = 9$ sehingga solusi khusus yang memenuhi syarat awal $y(\pi/2) = 10$ adalah $y = \sin x + 9$.

Contoh 5:

Tinjau PD: $(y')^2 - xy' + y = 0$
..... (4)

Penyelesaian:

Solusi umum PD (4) adalah

$$y = Cx - C^2$$

dengan mengambil $C = 1$, $C = 2$, $C = -4$ diperoleh masing-masing solusi khusus $y = x - 1$, $y = 2x - 4$ dan $y = -4x - 16$. Dalam menentukan solusi khusus yang memenuhi syarat awal $y(1) = -6$, tentukan C dari persamaan $y = Cx - C^2$ dengan mengambil nilai $y = -6$ untuk $x = 1$. Ini memberikan

$$\begin{aligned} -6 &= C \cdot 1 - C^2 \\ &= C - C^2 \end{aligned}$$

atau

$$C^2 - C - 6 = 0$$

$$\hookrightarrow (C - 3)(C + 2) = 0$$

$$\hookrightarrow C_1 = 3, \quad C_2 = -2$$

Jadi, ada dua solusi khusus yang memenuhi syarat awal $y(1) = -6$, yaitu

$$y = 3x - 9$$

dan

$$y = -2x - 4$$

Adanya dua solusi khusus ini disebabkan PD (4) mempunyai pangkat dua.

Contoh 6:

Tentukan PD yang solusi umumnya $x^2 + y^2 = C$

Penyelesaian:

dengan menurunkan $x^2 + y^2 = C$ terhadap x secara implisit diperoleh:

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

karena persamaan ini tidak lagi memuat C , maka secara langsung diperoleh PD:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

sebagai PD yang solusi umumnya

$$x^2 + y^2 = C$$

Contoh 7:

Tentukan PD yang solusi umumnya:

$$g(x, y, C) = x^2 - Cy + C^2 = 0$$

Penyelesaian:

dengan menurunkan $g(x, y, C)$ terhadap x secara implisit diperoleh

$$2x - Cy' = 0$$

eliminasi C dari kedua persamaan:

$$\begin{cases} x^2 - Cy + C^2 = 0 \\ 2x - Cy' = 0 \end{cases}$$

dari persamaan kedua diperoleh

$$C = \frac{2x}{y'}$$

dimasukkan ke persamaan pertama, menghasilkan:

$$x^2 - \frac{2x}{y'} \cdot y + \left(\frac{2x}{y'}\right)^2 = 0$$

atau

$$4x - 2yy' + x(y')^2 = 0$$

PD ini mempunyai solusi umum

$$g(x, y, C) = x^2 - Cy + C^2 = 0$$

2) Bentuk umum Persamaan Diferensial Order 2:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Contoh 8:

$$y'' + 6y' - 7y = 2 \cos 3x$$

$$y'' + e^x y' + \sin xy = e^x \cos x \quad \text{orde 2 derajat 1}$$

$$x^3 y'' + y' \cos 2x = x^2 y^2 \quad \text{orde 2 derajat 1}$$

Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 1:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$$

Contoh 9:

Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 6x^5$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 6x^5$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 3x^2 + 6x^5 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 3x^2 + 6x^5 \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{6x^{5+1}}{5+1} + c_1$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{6x^6}{6} + c_1$$

$$= x^3 + x^6 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + x^6 + c_1$$

$$dy = x^3 + x^6 + c_1 \, dx$$

$$\int dy = \int x^3 + x^6 + c_1 \, dx$$

$$y = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{6+1}}{6+1} + c_1x + c_2$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + c_1x + c_2$$

Contoh 10:

Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 10x^5$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 10x^5$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 4x^3 + 10x^5 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 4x^3 + 10x^5 \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + \frac{10x^{5+1}}{5+1} + c_1$$

$$= \frac{4x^4}{4} + \frac{10x^6}{6} + c_1$$

$$= x^4 + \frac{5}{3}x^6 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + \frac{5}{3}x^6 + c_1$$

$$dy = x^4 + \frac{5}{3}x^6 + c_1 \, dx$$

$$\int dy = \int x^4 + \frac{5}{3}x^6 + c_1 \, dx$$

$$y = \frac{x^{4+1}}{4+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{x^{6+1}}{6+1} + c_1x + c_2$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{21}x^7 + c_1x + c_2$$

Contoh 11:

Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10x^9 + 5x^4 + x$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10x^9 + 5x^4 + x$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 10x^9 + 5x^4 + x \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 10x^9 + 5x^4 + x \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x^{9+1}}{9+1} + \frac{5x^{4+1}}{4+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c_1$$

$$= \frac{10x^{10}}{10} + \frac{5x^5}{5} + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$= x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$dy = x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 \, dx$$

$$\int dy = \int x^{10} + x^5 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 \, dx$$

$$y = \frac{x^{10+1}}{10+1} + \frac{x^{5+1}}{5+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + c_1x + c_2$$

$$= \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$$

Contoh 12:

Carilah jawaban umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 8x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{5}x + 4 \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^{5+1}}{5+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + c_1$$

$$= \frac{8}{6}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + c_1$$

$$= \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + c_1$$

$$dy = \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + c_1 \, dx$$

$$\int dy = \int \frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 4x + c_1 \, dx$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{6+1}}{6+1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} \\ + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + c_1x + c_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{21}x^7 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{3}{30}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + c_1x \\
&\quad + c_2 \\
&= \frac{4}{21}x^7 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{10}x^3 + 2x^2 + c_1x + c_2
\end{aligned}$$

Contoh 13:

Carilah jawab umum persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2$$

Penyelesaian:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2 \, dx$$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \int 3x^9 + 10x^5 + 2x + 2 \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^{9+1}}{9+1} + \frac{10x^{5+1}}{5+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} + 2x + c_1$$

$$= \frac{3}{10}x^{10} + \frac{10}{6}x^6 + \frac{2}{2}x^2 + 2x + c_1$$

$$= \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + c_1$$

$$dy = \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + c_1 \, dx$$

$$\begin{aligned}
 \int dy &= \int \frac{3}{10}x^{10} + \frac{5}{3}x^6 + x^2 + 2x + c_1 \, dx \\
 y &= \frac{3}{10} \cdot \frac{x^{10+1}}{10+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{x^{6+1}}{6+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} \\
 &\quad + c_1x + c_2 \\
 &= \frac{3}{110}x^{11} + \frac{5}{21}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + c_1x \\
 &\quad + c_2 \\
 &= \frac{3}{110}x^{11} + \frac{5}{21}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c_1x + c_2
 \end{aligned}$$

Persamaan Diferensial Orde 2 Tipe 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

Contoh 14:

Carilah jawaban umum dari:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

Penyelesaian:

Misal

$$p = \frac{dy}{dx} \dots (1)$$

turunannya

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots (2)$$

Substitusikan persamaan (1) dan (2)

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p + 4x = 0$$

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p = -4x \dots (3)$$

catatan:

$$\frac{d(x \cdot p)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d(xp)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \cdot 1$$

$$\frac{d(xp)}{dx} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p \dots (4)$$

jika persamaan (3) = (4), maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = -4x$$

kedua ruas diintegralkan

$$\int \frac{d(xp)}{dx} = \int -4x \, dx$$

$$xp = -2x^2 + c_1$$

substitusi p dengan (1)

$$x \frac{dy}{dx} = -2x^2 + c_1 \rightarrow \text{kedua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x + \frac{c_1}{x}$$

integralkan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{dx} = \int -2x + \frac{c_1}{x} dx$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int -2x + c_1 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$y = -x^2 + c_1 \cdot \ln x + c_2$$

Contoh 15:

Carilah jawaban umum:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 8x = 0$$

Penyelesaian:

Substitusikan persamaan (1) dan (2)

$$x \frac{dp}{dx} + p - 8x = 0$$

$$x \frac{dp}{dx} + p = 8x$$

sama dengan persamaan (4)

maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = 8x$$

integralkan kedua ruas

$$\int \frac{d(xp)}{dx} = \int 8x dx$$

$$xp = 4x^2 + c_1$$

substitusi p dengan (1)

$$x \frac{dy}{dx} = 4x^2 + c_1 \rightarrow \text{kedua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{c_1}{x}$$

integralkan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 4x + \frac{c_1}{x} dx$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 4x + c_1 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$y = 2x^2 + c_1 \cdot \ln x + c_2$$

Contoh 16:

Carilah penyelesaian umum:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12x = 0$$

Penyelesaian:

Substitusi persamaan (1) dan (2) menjadi

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p = 12x$$

→ persamaan sama dengan (4), maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = 12x$$

kedua ruas diintegral

$$\int \frac{d(xp)}{dx} = \int 12x dx$$

$$xp = 6x^2 + c_1$$

substitusi persamaan (1) ke dalam p

$$x \frac{dy}{dx} = 6x^2 + c_1 \rightarrow \text{kedua ruas dibagi } x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x + \frac{c_1}{x}$$

integralkan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 6x + \frac{c_1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 6x + c_1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = 3x^2 + c_1 \cdot \ln x + c_2$$

IV. Pangkat (Degree) dari Persamaan Diferensial

Pangkat Persamaan Diferensial ditentukan oleh pangkat tertinggi dari derivative tertinggi yang muncul.

Contoh 17:

- | | |
|---|----------------|
| 1) $x^2(y')^2 - xy' = y = \ln x$
2 | Orde 1 Pangkat |
| 2) $x^2y'' + x(y')^3 + y^5 = e^x$
1 | Orde 2 Pangkat |
| 3) $x^2(y'')^2 - x(y')^2 - y^5 = \sin^2 x$
2 | Orde 2 Pangkat |

V. Penyelesaian Suatu Persamaan Diferensial

Mencari jawab atau penyelesaian suatu Persamaan Diferensial tidak lain adalah menghilangkan derivative-derivative yang ada dengan cara integral tak tentu, sehingga sebagai hasilnya akan mengandung konstanta sebarang C.

Jawab atau penyelesaian yang mengandung konstanta sebarang C tersebut, disebut Jawab Umum atau Penyelesaian Umum yang berupa himpunan penyelesaian yang memenuhi Persamaan Diferensialnya secara identik.

Jika konstanta C diberi nilai tertentu akan diperoleh Jawab Khusus atau Penyelesaian Khusus yang merupakan salah satu anggota dari himpunan penyelesaiannya.

Contoh 18:

1) Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$

Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$ mempunyai jawab umum $y = cx$ yang berupa himpunan atau berkas garis lurus melalui titik 0. Jika konstanta C diberikan nilai tertentu, misalkan $C = 4$, maka akan diperoleh jawab khusus $y = 4x$ yang berupa satu garis lurus salah satu anggota dari berkas garis lurus $y = Cx$.

Bahwa $y = Cx$ merupakan penyelesaian umum dari Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$ dapat dijelaskan sebagai berikut:

Untuk $y = Cx$ maka,

$$\frac{dy}{dx} = C$$

Jika disubstitusikan pada Persamaan Diferensial:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

maka akan diperoleh hubungan

$$c - \frac{cx}{x} = 0$$

yang dipenuhi secara identik.

2) Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} = 2x$

Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} = 2x$ mempunyai jawaban umum

$$y = x^2 + c$$

Penyelesaian:

Dari $\frac{dy}{dx} = 2x$ atau $dy = 2x dx$ jika diintegrasikan didapat

$$\int dy = \int 2x dx$$

atau

$$y = x^2 + c$$

Jawab umum tersebut berupa himpunan parabola-parabola.

Misalkan akan dicari salah satu jawab khusus yang memenuhi syarat $y(2) = 5$:

Dari

$$y = x^2 + c$$

didapat

$$5 = 2^2 + c$$

$$c = 1$$

sehingga jawab khusus yang menentukan syarat $y(2) = 5$ adalah $y = x^2 + 1$, tidak lain adalah parabola yang melalui titik $(x, y) = (2, 5)$ yang merupakan salah satu parabola anggota himpunan parabola $y = x^2 + c$.

- 3) Persamaan Diferensial: $y'' + 2y' - 3y = 0$

Persamaan Diferensial:

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

mempunyai jawab umum:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

Penjelasan:

Jika

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

maka:

$$y' = c_1 e^x - 3c_2 e^{-3x}$$

dan

$$y'' = c_1 e^x + 9c_2 e^{-3x}$$

Jika disubstitusikan pada Persamaan Diferensialnya, didapat:

$$(c_1 e^x + 9c_2 e^{-3x}) + 2(c_1 e^x - 3c_2 e^{-3x}) - 3(c_1 e^x + c_2 e^{-3x}) = 0$$

yang dipenuhi secara identik.

Catatan:

Ketiga contoh di atas belum menjelaskan cara mencari jawab umum suatu Persamaan Diferensial, yang baru akan dibahas pada modul-modul berikutnya.

Persamaan Diferensial orde satu adalah suatu fungsi yang memuat satu variabel bebas (x) dan satu variabel tak bebas (y) beserta turunan pertamanya (y') yang dikaitkan secara eksplisit atau implisit.

Solusi umum Persamaan Diferensial adalah fungsi yang memuat konstanta C dan memenuhi Persamaan Diferensial tersebut. Solusi khusus adalah solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil nilai C suatu bilangan tertentu atau solusi yang memenuhi syarat yang diberikan, misalnya syarat awal. Grafik dari solusi umum merupakan keluarga lengkungan, di mana untuk setiap nilai C diperoleh suatu lengkungan (kurva) atau trayektori.

Contoh:

Tentukanlah persamaan diferensial biasa (PDB) yang penyelesaiannya

$$y = Ae^{x+B}$$

Jawab:

Bentuk $y = Ae^{x+B}$ dapat ditulis ulang menjadi:

$$\begin{aligned} y &= Ae^x \cdot e^B \\ &= Ae^B \cdot e^x \end{aligned}$$

Bentuk Ae^B dapat digantikan oleh satu konstanta sembarang (C), sehingga bentuk $y = Ae^{x+B}$ dapat ditulis menjadi:

$$y = Ce^x$$

Dengan demikian, konstanta sembarangnya hanya 1, sehingga hanya diturunkan satu kali, diperoleh $y = Ce^x$. Terlihat bahwa konstanta C masih ada. Oleh sebab itu, konstanta C harus dieliminasi dengan cara mensubstitusikan persamaan $y = Ce^x$, sehingga diperoleh PDB yang ditanyakan, yakni:

$$y' = y$$

atau

$$y' - y = 0$$

Contoh:

Carilah PDB yang penyelesaiannya

$$x^2y^3 + x^3y^5 = C$$

Jawab:

PDB yang diberikan diturunkan terhadap x satu kali, diperoleh:

$$2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} + 3x^2y^5 + 5x^3y^4 \frac{dy}{dx} = 0$$

adalah PDB yang ditanyakan karena konstanta sembarang sudah lenyap.

IV. Umpan Balik

- 1) Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi berikut merupakan jawab umum dari persamaan Diferensial bersangkutan:

Soal Persamaan Diferensial

a) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

b) $y'' - 6y' + 9y = e^x$

Jawaban Fungsi

a) $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$

b) $y = (c_1 - c_2x)e^{3x} + \frac{e^x}{4}$

- 2) Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi berikut merupakan jawab umum dari persamaan Diferensial bersangkutan:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 0$

b) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

Jawaban Fungsi

a) $y = \frac{c_1}{x} + c_2$

b) $2y^2 - xy + x^3 = c$

- 3) Manakah di antara PD berikut yang merupakan PD orde satu

a) $y'' + 3y - xy = 0$

b) $xy' + 3y \sin x + 2 = 0$

- 4) Dalam rangka mengidentifikasi tipe-tipe PD orde satu, tentukan manakah di antara PD berikut dalam bentuk eksplisit atau implisit

a) $x(y')^2 + 4y' - x^3 = 0$

b) $y' = \frac{x+y}{xy}$

c) $y' = y \sin x + x^2$

d) $xy' + 3y \sin x - 2 = 0$

- 5) Tentukan PDB yang penyelesaiannya:

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

dengan A dan B konstanta sembarang

REFERENSI

- Ayres, F. Jr. (1972). *Differential equations*. Schaum's Outline Series.
- Piskunov, M. (1969). *Differential and integral calculus*. MIR Publishers.
- Ayres, F. Jr. (1972). *Calculus*. Schaum's Outline Series.
- Spiegel, M. R. (1989). *Advanced mathematics for engineers & scientists*. Schaum's Outline Series.
- Spiegel, M. R., & Koko, M. (1989). *Matematika lanjutan untuk insinyur dan ilmuwan*. Erlangga.
- Purcell, E. J. (2006). *Calculus* (9th ed.). Prentice Hall.
- Kreyszig, E. (2006). *Advanced engineering mathematics: Student solutions manual and study guide* (9th ed.). John Wiley.
- Croft, A., Davison, R., & Hargreaves, M. (2000). *Engineering mathematics*. Addison Wesley.
- Ayres, F. Jr. (1972). *Differential equations*. McGraw-Hill.
- Spiegel, M. R. (1991). *Kalkulus lanjutan*. Erlangga.

BIOGRAFI PENULIS



Stepanus, ST., MT.

Lahir pada tanggal 10 September 1980 di Jakarta.

Sejak 1 Mei 2017 menjadi Dosen Tetap di Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia, Jakarta.

Pengalaman kerja sejak 1997 s/d sekarang sebagai Guru Les Private Matematika & Fisika untuk anak didik SD-SMP-SMA, pada tahun 2001 - 2004 menjadi Guru Matematika SD Pelita Hati, dan sejak 21 Mei 2007 s/d sekarang sebagai Konsultan Keuangan Prudential.

Menyelesaikan pendidikan gelar Sarjana Teknik, Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia di Jakarta pada tanggal 13 Februari 2008. Selanjutnya, mendapatkan gelar Magister Teknik Elektro, Prodi Teknik Elektro, Pascasarjana Universitas Kristen Indonesia di Jakarta pada tanggal 24 Agustus 2018.

Bidang peminatan adalah Kalkulus dan Energi.



ukipressdigital.uki.ac.id



UKI PRESS

Pusat Penerbit dan Pencetakan
Universitas Kristen Indonesia
Jl. Mayjen Sutoyo No. 2, Cawang
Jakarta Timur 13630

ISBN 978-623-8737-27-7



9

786238

737277