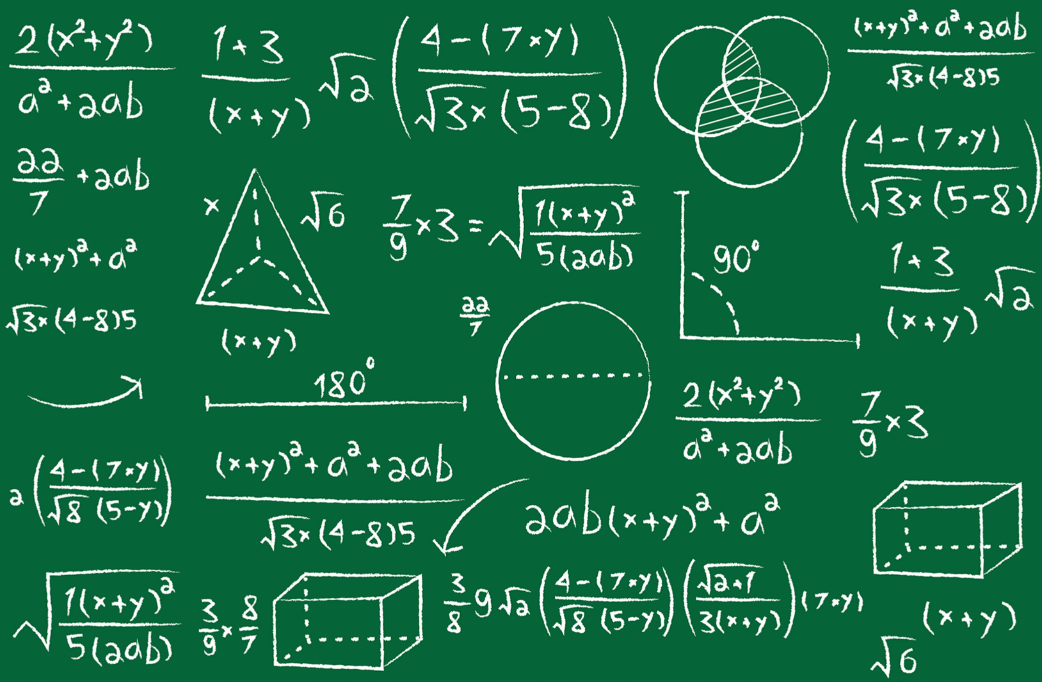
UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
JAKARTA 1953
MELAYANI, BUKAN DILAYANI

BUKU AJAR
DERET DAN FUNGSI KHUSUS



STEPANUS, S.T., M.T.

BUKU AJAR
DERET DAN FUNGSI KHUSUS

Penulis:
Stepanus, ST., MT

UKI PRESS
Pusat Penerbitan dan Pencetakan
Buku Perguruan Tinggi
Universitas Kristen Indonesia
Jakarta
2024

BUKU AJAR
DERET DAN FUNGSI KHUSUS

Penulis:
Stepanus, ST., MT

Editor:
Stepanus, ST., MT
Antonius Doddy Tyas Prasetyo, ST, MSc

ISBN: 978-623-8737-15-4

Penerbit: UKI Press
Anggota APPTI
Anggota IKAPI

Redaksi: Jl. Mayjen Sutoyo No.2 Cawang Jakarta - 13630
Telp. (021) 8092425

Cetakan I Jakarta: UKI Press, 2024

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur hanya bagi Tuhan Yesus Kristus, oleh karena anugerah-Nya yang melimpah, kemurahan dan kasih setia yang besar akhirnya penulis dapat menyelesaikan **Buku Ajar "DERET DAN FUNGSI KHUSUS"**.

Buku Ajar ini disusun sebagai panduan matakuliah Deret dan Fungsi Khusus di Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia, Jakarta. Buku Ajar ini terdiri dari enam Bab yang secara keseluruhan memiliki bobot 2 sks dimana masing-masing bab akan memperlihatkan pokok-pokok penting yang harus dipahami mahasiswa. Untuk membantu pembaca dalam memahami semua materi tersebut, Buku Ajar ini dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaiaannya, serta latihan soal.

Penyusunan Buku Ajar ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penulis menyadari bahwa Buku Ajar ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan Buku Ajar ini. Semoga Buku Ajar ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya mahasiswa.

Akhir kata penulis mengucapkan terimakasih dan salam buat kita semua.

Jakarta, Juli 2024
Penulis,

Stepanus, ST., MT

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
BARISAN BILANGAN DAN DERET BILANGAN

A. Pendahuluan

Amati dan kritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan secara arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan dan deret, berbagai konsep dan aturan matematika terkait barisan dan deret akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah. Kita akan mempelajari beberapa kasus dan contoh yang berkaitan dengan barisan dan deret pada modul ini. Barisan suatu objek membicarakan masalah urutannya dengan aturan tertentu. Aturan yang dimaksud adalah pola barisan. Kita memerlukan pengamatan terhadap suatu barisan untuk menemukan pola.

B. Barisan & Deret Bilangan

Secara sederhana, barisan merupakan susunan dari bilangan−bilangan yang urutannya berdasarkan bilangan asli. Suatu barisan dan deret bilangan yang terdiri dari n suku biasanya dinyatakan dalam bentuk:

Barisan Bilangan:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$$

Deret Bilangan:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

U_1 menyatakan suku ke–1

U_2 menyatakan suku ke–2

U_3 menyatakan suku ke–3

-

-

U_n menyatakan suku ke–n

Urutan bilangan dengan pola aturan tertentu sehingga dapat ditentukan suku umumnya (U_n)

Contoh 1

a) $1,4,9,16,\ldots \quad U_n = n^2$

b) $2,6,12,20,\ldots \quad U_n = n^2 + n$

c) $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\ldots \quad U_n = \frac{1}{n^2 + n}$

d) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots \quad U_n = \frac{n}{n+1}$

e) $\frac{3}{2},\frac{5}{5},\frac{7}{8},\frac{9}{11},\ldots \quad U_n = \frac{2n+1}{3n-1}$

Deret:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

$$J_1 = U_1$$

$$J_2 = U_1 + U_2$$

$$J_n = U_1 + U_2 + \cdots U_n$$

Contoh 2

1) Deret:

$$J_n = 2n^3 - 3n^2$$

Ditanya: $U_{10}\ dan\ J_{10}$

Jawab:

$$U_n = J_n - J_{n-1}$$

$$= 2n^3 - 3n^2 - [2(n-1)^3 - 3(n-1)^2]$$

$$U_n = 2n^3 - 3n^2 - [2(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - 3(n^2 - 2n + 1)]$$

$$= 6n^2 - 12n + 5$$

Jadi,

$$U_{10} = 600 - 120 + 5$$
$$= \mathbf{485}$$
$$J_{10} = 2000 - 300$$
$$= \mathbf{1700}$$

POLA BILANGAN

1. Pengertian Barisan Bilangan

Barisan bilangan adalah urutan bilangan-bilangan dengan aturan tertentu.

Contoh :

a. $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

b. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

c. $14, 11, 8, 5, 2, \ldots$

d. $2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots$

e. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

f. $8, 4, 3, 1, -2, -5, \ldots$

g. $1, 5, 3, 7, 9, \ldots$

Pada contoh diatas, bilangan-bilangan pada a,b,c,d,e mempunyai aturan tertentu sehingga disebut sebagai **barisan bilangan**, sedangkan f dan g tidak mempunyai aturan.

2. Pola Bilangan Suku ke-n

Contoh 3

1) Barisan bilangan: $1, 3, 5, 7, \ldots$ Maka,

$$U_1 = 1$$
$$= (2\ x\ 1) - 1$$

$$U_2 = 3$$
$$= (2\ x\ 2) - 1$$

$$U_3 = 5$$
$$= (2\ x\ 3) - 1$$

$$U_4 = 7$$
$$= (2\ x\ 4) - 1$$

.... dst

2) Barisan bilangan: $1, 4, 9, 16, \ldots$ Maka,

$$U_1 = 1$$
$$= (1\ x\ 1)$$

$$U_2 = 4$$
$$= (2\ x\ 2)$$

$$U_3 = 9$$
$$= (3\ x\ 3)$$

$$U_4 = 16$$
$$= (4\ x\ 4)$$
.... dst

Rumus sebagai berikut:

1) $U_n = (2\ x\ n) - 1$

2) $U_n = (n\ x\ n) = n^2$

Contoh 4

1) Tentukan tiga suku pertama suatu barisan yang rumus suku ke-n nya $U_n = 3n^2 - 2$

   Jawab :

$$U_1 = 3(1) - 2$$
$$= 3 - 2$$
$$= \mathbf{1}$$

$$U_2 = 3(4) - 2$$
$$= 12 - 2$$
$$= \mathbf{10}$$

$$U_3 = 3(9) - 2$$
$$= 27 - 2$$
$$= \mathbf{25}$$

Jadi tiga suku pertama barisan tersebut adalah **1, 10, 25**

2) Tentukan rumus suku ke-n dari barisan
   a) 4, 6, 8, 10, ….
   b) 1, 9, 25, 49, ….

Jawab :

a) 4, 6, 8, 10, ….

$$U_1 = 4$$
$$= 2 + 2$$
$$= (2\ x\ 1) + 2$$

$$U_2 = 6$$
$$= 4 + 2$$
$$= (2\ x\ 2) + 2$$

$$U_3 = 8$$
$$= 6 + 2$$
$$= (2\ x\ 3) + 2$$

$$U_4 = 10$$
$$= 8 + 2$$
$$= (2\ x\ 4) + 2$$

Jadi rumus yang gunakan adalah

$$U_n = (2\ x\ n) + 2$$

atau

$$U_n = 2n + 2$$

b) 1, 9, 25, 49, ….

$$U_1 = 1$$
$$= ((2\ x\ 1) - 1)^2$$

$$U_2 = 9$$
$$= ((2\ x\ 2) - 1)^2$$

$$U_3 = 25$$
$$= ((2\ x\ 3) - 1)^2$$

$$U_4 = 49$$
$$= ((2\ x\ 4) - 1)^2$$

Jadi rumus yang digunakan adalah

$$U_n = ((2\ x\ n) - 1)^2$$

3) Suatu barisan bilangan dengan rumus $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

a) Tulis empat buah suku pertamanya

b) Berapa suku ke-5 dan ke-7

Jawab:

a) $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$U_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$U_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$U_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

$$U_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{16}}$$

Jadi barisannya adalah

$$\mathbf{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots}$$

b) Suku ke-5 adalah

$$U_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

Suku ke-7 adalah

$$U_7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{128}$$

C. Deret Aritmatika dan Geometri

Barisan Dan Deret Aritmatika (DA)

1. Barisan Aritmatika

Barisan Aritmatika adalah barisan bilangan yang selisih antara dua suku yang berurutan sama ataupun tetap.

Sebagai contoh:

a) $3, 8, 13, 18, \ldots$

Selisih

$$8 - 3 = 13 - 8 = 18 - 13$$
$$= 5$$

b) $10, 7, 4, 1, \ldots$

Selisih

$$7 - 10 = 4 - 7 = 1 - 4$$

$$= -3$$

c) $2, 4, 6, 8, \ldots$

Selisih

$$4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6$$
$$= 2$$

d) $25, 15, 5, -5, \ldots$

Selisih

$$15 - 25 = 5 - 15 = -5 - 5$$
$$= -10$$

Selisih dua suku yang berurutan disebut beda (b)

Rumus:

$$b = U_2 - U_1$$

$$b = U_3 - U_2$$

$$b = U_4 - U_3$$

dst

$$b = U_n - U_{n-1}$$

Jika suku pertama $= a$ dan beda $= b$, maka secara umum barisan Aritmatika tersebut adalah:

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$$

$$(a), (a + b), (a + 2b), (a + 3b), \ldots, (a + (n - 1)b)$$

Jadi rumus suku ke-n barisan aritmatika adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Contoh 5

1) Diketahui suatu barisan Aritmatika dengan $U_2 = 7$ dan $U_6 = 19$.

Tentukan:

a) Beda
b) Suku Pertama
c) Suku ke-41

Jawab:

(*)

$$\begin{aligned} U_6 &= a + 5b = 19 \\ U_2 &= a + 1b = 7 \; - \\ \hline 4b &= 12 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

(**)

$$U_2 = a + 1b = 7$$

$$a + 1(3) = 7$$

$$a + 3 = 7$$

$$a = 7 - 3$$

$$a = 4$$

Maka

$$U_{41} = a + 40b$$

$$= 4 + 40(3)$$

$$= 4 + 120$$
$$= \mathbf{124}$$

Jadi didapatkan:

a) Beda $(b) = \mathbf{3}$
b) Suku pertama $(a) = \mathbf{4}$
c) Suku ke-41 ($U_{41} = \mathbf{124}$)

2) Diketahui barisan Aritmatika $4, 7, 10$, ...

Tentukan:

a) Beda
b) U_{10}
c) Rumus suku ke-n

Jawab:

a) Beda

$$b = 7 - 4$$
$$b = \mathbf{3}$$

b) U_{10}

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$U_{10} = 4 + (10-1)3$$

$$= 4 + (9\ x\ 3)$$
$$= 4 + 27$$
$$= \mathbf{31}$$

c) Rumus suku ke-n

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$U_n = 4 + (n-1)3$$

$$U_n = 4 + 3n - 3$$

$$\boldsymbol{U_n = 3n + 1}$$

2. Deret Aritmatika

Deret aritmatika adalah urutan di mana setiap suku berbeda dari yang sebelumnya dengan nomor tetap yang sama. Ini juga bisa disebut sebagai perkembangan aritmatika.

Contoh 6

1) $2 + 5 + 8 + 11 + 14$ ... adalah deret aritmatika dengan bedanya

$$5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11$$
$$= \mathbf{3}$$

2) $31 + 27 + 23 + 19$ ... adalah deret aritmatika dengan bedanya

$$27 - 31 = 23 - 27 = 19 - 23$$
$$= \mathbf{-4}$$

Misalkan suku pertama dari deret aritmatika adalah U_1 dan perbedaan persekutuan adalah b, sehingga deret aritmatika menjadi:

$$a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \cdots$$

Suku ke- n deret aritmatika:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Jika suku pertama adalah U_1 dan perbedaan persekutuan adalah b, suku-suku tersebut adalah

$$U_1, U_1 + b, U_1 + 2b, U_1 + 3b, \qquad dst$$

Misalkan U_n adalah suku terakhir dari deret aritmatika maka untuk jumlah J_n dari n bilangan bulat pertama sebagai berikut:

$$J_n = U_1 + (U_1 + b) + (U_1 + 2b) + \cdots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n$$

tapi,

$$J_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \cdots + (U_1 + 2b) + (U_1 + b) + U_1$$

Menambahkan dua persamaan ini secara vertikal kita dapatkan

$$2J_n = (U_1 + U_n) + (U_1 + U_n) + \cdots + (U_1 + U_n) + (U_1 + U_n)$$

$$2J_n = n(U_1 + U_n)$$

Dimana,

$$U_n = U_1 + (n-1)b$$

Jumlah suku pertama deret aritmatika:

$$J_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$= \frac{n}{2}\ [U_1 + U_1 + (n-1)b]$$

Jumlah seluruh suku-suku deret aritmatika:

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

Contoh 7

1) Cari jumlah bilangan bulat antara 1-100 yang habis dibagi 9

Jawab:

$$9 + 18 + 27 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 90 + 99$$
$$(a = 9, b = 9)$$

Berupa Deret Aritmatika dengan $U_1 = a = 9;\ U_n = 99$

$$J_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$= \frac{n}{2}(9 + 99)$$

Mencari n:

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$99 = 9 + (n-1)\,9$$

maka $n = 11$

$$J_n = \frac{11}{2}(9+99)$$

$$= 5{,}5(108)$$

$$= \mathbf{594}$$

2) Carilah:

$$a + (a+1) + (a+2) + \cdots + 50 = 1139$$

Ditanya: a jika a bulat positif

Jawab:

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$50 = a + (n-1)1$$

$$a = 51 - n$$

$$J_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$\frac{n}{2}[2a + (n-1)] = 1139$$
$$n\big(2a + (n-1)\big) = 2278$$

$$n[2(51-n) + (n-1)] = 2278$$

$$102n - 2n^2 + n^2 - n = 2278$$

$$n^2 - 101n + 2278 = 0$$

Rumus sebagai berikut:

$$n = \frac{101 \pm \sqrt{(-101)^2 - 4(1)(2278)}}{2}$$

$$= \frac{101 \pm \sqrt{1089}}{2}$$

$$= \frac{101 \pm 33}{2}$$

$n_1 = 67$ dan $n_2 = 34$

$$a_1 = 51 - 67$$

$$a_1 = \mathbf{-16}$$

$$a_2 = 51 - 34$$

$$a_2 = \mathbf{17}$$

3) Diketahui deret aritmatika dengan $U_5 = 8$ dan $U_9 = 20$. Suku ke-10 adalah

Jawab:

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$U_5 = 8\ ;\ U_9 = 20$$

$$a + (5-1)b = 8\ ;\ a + (9-1)b = 20$$

Sehingga

$$\begin{array}{r} a + 4b = 8 \\ \underline{a + 8b = 20}\ - \\ -4b = -12 \end{array}$$

$$b = \frac{-12}{-4}$$

$$b = \mathbf{3}$$

Selanjutnya subsitusikan $b = 3$ pada persamaan $a + 4b = 8$

$$a + 4b = 8$$

$$a + 4(3) = 8$$

$$a + 12 = 8$$

$$a = 8 - 12$$

$$a = \mathbf{-4}$$

Jadi, rumus $U_n = a + (n-1)b$ akan menjadi $U_n = -4 + (n-1)3$

$$U_{10} = -4 + (10-1)3$$

$$U_{10} = -4 + 9.3$$

$$U_{10} = -4 + 27$$

$$U_{10} = \mathbf{23}$$

4) Seorang pegawai kecil menerima gaji tahun pertama sebesar Rp3.000.000. Setiap tahun gaji tersebut naik Rp500.000. Jumlah uang yang diterima pegawai tersebut selama sepuluh tahun adalah

Jawab:

Gaji tahun pertama

$$a = \text{Rp } 3.000.000$$

Tambahan gaji pertahun

$$b = \text{Rp } 500.000$$

$$n = 10\ tahun$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\ x\ 3.000.000 + (10-1)500.000)$$

$$S_{10} = 5\ (6.000.000 + (9)500.000)$$

$$S_{10} = 5\ (6.000.000 + 4.500.000)$$

$$S_{10} = 5\ x\ (10.500.000)$$

$$S_{10} = \mathbf{52.500.000}$$

5) Sebuah suku ke-5 dalam deret aritmatika adalah 11 dan jumlah nilai suku ke-8 dengan suku ke-12 sama dengan 52. Jumlah 8 suku yang pertama deret tersebut adalah

Diketahui:

$$U_5 = 11 \rightarrow a + 4b = 11 \quad (\mathbf{1})$$

dan,

$$U_8 + U_{12} = 52$$

$$a + 7b + a + 11b = 52$$

$$2a + 18b = 52$$

$$a + 9b = 26 \quad (\mathbf{2})$$

Eliminasi dari persamaan (1) dan (2) untuk mendapatkan nilai b.

$$a + 4b - (a + 9b) = 11 - 26$$

$$a + 4b - a - 9b = -15$$

$$4b - 9b = -15$$
$$-5b = -15$$

$$b = \frac{15}{-5}$$

$$b = \mathbf{3}$$

Substitusi nilai $b = 3$ pada persamaan (1) untuk mendapatkan nilai a

$$a + 4b = 11$$

$$a + 4.3 = 11$$

$$a + 12 = 11$$

$$a = 11 - 12$$

$$a = \mathbf{-1}$$

Jadi, jumlah 8 suku yang pertama deret tersebut adalah

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$S_8 = 4(2.(-1) + 7.3)$$

$$S_8 = 4(-2 + 21)$$
$$S_8 = 4\ x\ 19$$

$$S_8 = 7\mathbf{6}$$

6) Diketahui barisan aritmetika $1, 3, 5, 7, \dots, 225.$

Tentukan banyaknya suku (n) dan jumlah suku tersebut!

Penyelesaian:

$$a = 1, b = 2, U_n = 225$$

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$225 = 1 + (n-1)2$$

$$225 = 1 + 2n - 2$$

$$226 = 2n$$

$$n = 113$$

Jadi banyaknya suku ada 113.

$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$S_{113} = \frac{113}{2}(1 + 225)$$

$$S_{113} = \mathbf{12769}$$

7) Si Dadap berhasil lulus ujian saringan masuk PT (Perguruan Tinggi). Sebagai mahasiswa, mulai 1 Januari 2008 ia menerima uang saku sebesar Rp 500.000 untuk satu triwulan. Uang saku ini diberikan setiap permulaan triwulan. Untuk setiap triwulan berikutnya uang saku yang diterimanya dinaikkan sebesar Rp25.000. Berapa besar uang saku yang akan diterima si Dadap pada awal tahun 2011?

Jawab:

Triwulan ke−1:

$$U_1 = a = Rp\ 500.000$$

Triwulan ke−2:

$$U_2 = a + b = Rp\ 525.000$$

Jadi

$$b = Rp\ 25.000$$

Pada awal tahun 2011 telah dipakai kuliah selama 3 tahun atau 12 triwulan, berarti:

$$U_{12} = a + (12 - 1)b$$

$$U_{12} = 500.000 + (11\ x\ 25.000)$$

$$U_{12} = \mathbf{775.000}$$

Jadi besarnya uang yang akan diterima si Dadap pada awal tahun 2011 adalah
Rp. 775.000

8) Dari soal contoh di atas, berapa lamakah si Dadap menyelesaikan kuliahnya apabila selama ia kuliah telah menerima uang saku sebesar Rp 23.450.000?

Jawab:
Uang yang diterima si Dadap selama kuliah Rp 23.450.000 merupakan jumlah deret uang masing-masing triwulan.

$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$23.450.000 = \frac{n}{2}[2\ x\ 500.000 + (n - 1)25.000]$$

$$23.450.000 = 500.000n + 12.500n^2 - 12.500n$$

$$n^2 + 39n - 1876 = 0$$

$$(n - 28)(n + 67) = 0$$

$n = 28$ triwulan atau 7 tahun
Jadi, si dadap menyelesaikan kuliahnya selama 7 tahun.

9) Pada tahun pertama sebuah butik memproduksi 400 stel jas. Setiap tahun rata-rata produksinya bertambah 25 stel jas Berapakah banyaknya stel jas yang diproduksi pada tahun ke-5 ?

Jawab:
Banyaknya produksi tahun I, II, III, dan seterusnya membentuk barisan aritmetika yaitu $400, 425, 450, \ldots$

$$a = 400; b = 25$$

Sehingga

$$U_5 = a + (5 - 1)b$$

$$= 400 + 4(25)$$

$$= 400 + 100 = \mathbf{500}$$

Jadi banyaknya produksi pada tahun ke-5 adalah 500 stel jas.

3.1. Deret Geometri (DG)

Suatu deret bersifat geometri jika setiap suku dapat diperoleh dari yang sebelumnya dengan mengalikan dengan konstanta bukan nol yang sama. Urutan geometris juga disebut sebagai perkembangan geometri.
Deret geometri adalah jumlah dari semua suku-suku pada barisan geometri. Jika barisan geometrinya$U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$

maka deret geometrinya $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n +$ dan dilambangkandengan S_n.

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n +$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Contoh 8

1) $2 + 10 + 50 + 250$ ... adalah deret geometri karena setiap suku dapat diperoleh dengan cara mengalikan dengan yang sebelumnya sebesar 5.

Perhatikan bahwa $10: 2 = 50: 10 = 250: 50 = 5$, jadi setiap suku dibagi dengan yang sebelumnya memberikan konstanta yang sama dan disebut sebagai rasio (p).

Deret geometri menjadi:

$$a + ap + ap^2 + ap^3 + \cdots$$

Suku ke- *n* dari deret geometri:

$$U_n = ap^{(n-1)}$$

Jika suku pertama adalah U_1 dan rasio persekutuan adalah p, suku-suku tersebut adalah

$$U_1 + U_1p + U_1\,p^2 + U_1\,p^3, \ldots\ dst$$

Misalkan U_n adalah suku terakhir dari deret geometri maka untuk jumlah J_n dari n bilangan bulat pertama sebagai berikut:

$$J_n = U_1 + U_1 p + U_1 p^2 + U_1 p^3 + \cdots + U_1 p^{(n-2)} + U_1 p^{(n-1)} \quad (*)$$

$$n = (U_1 p + U_1 p^2 + U_1 p^3 + U_1 p^4 + \cdots + U_1 p^{(n-1)} + U_1 p^n$$

$$n = (J_n - U_1) + U_1 p^n$$

$$n - J_n = U_1 p^n - U_1$$

$$J_n(p-1) = U_1(p^n - 1)$$

$$J_n = \frac{U_1(p^n - 1)}{(p-1)}$$

Jumlah *n* suku pertama deret geometri:

$$J_n = \frac{a - ap^n}{1-p} \quad dimana\ (p \neq 1)$$

Jumlah seluruh suku-suku deret geometri:

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} = \frac{a-ap^n}{1-p}$$

Contoh 9

1) Deret Geometri = $4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$

Ditanya: $U_{10}\ dan\ J_{10}$

Jawab:

$$p = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{4};$$

$$a = 4$$

$$U_n = ap^{(n-1)} \rightarrow U_{10}$$
$$= 4\left(\frac{1}{4}\right)^9$$

$$= \frac{1}{4^8}$$

$$J_n = \frac{a - ap^n}{1 - p}$$

$$J_{10} = \frac{4(1 - (\frac{1}{4})^{10})}{\frac{3}{4}}$$

$$= \mathbf{\frac{16}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{10}}\right)}$$

2) Deret Geometri = $U_2 = 6;\ U_5 = 162$
Ditanya $J_5 =$?

$$\frac{ap^4}{ap} = \frac{162}{6} \rightarrow p^3 = 27$$

$$\boldsymbol{p = 3}$$

$$a = U_1 = \frac{ap}{p} = \frac{6}{3}$$
$$\boldsymbol{a = 2}$$

$$J_5 = \frac{a(1-p^5)}{1-p}$$

$$= \frac{2(1-3^5)}{1-3}$$

$$= \frac{2(1-243)}{-2} = \mathbf{242}$$

3) Sebuah tali dipotong menjadi bagian, sehingga membentuk deret geometri. Jika panjang potongan tali terpendek adalah 3 cm dan potongan tali terpanjang 96 cm, panjang tali semula adalah

Jawab:
Panjang tali membentuk deret geometri.
Panjang tali terpendek $a = 3$
Potongan tali terpanjang $U_n = U_6 = 96$
Jumlah potongan $n = 6$
Panjang tali semula $S_n = S_6$
Kita cari terlebih dulu rasio atau r

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_6 = 3r^{6-1}$$

$$96 = 3r^5$$

$$r^5 = \frac{96}{3}$$

$$r^5 = 32$$

$$r = \mathbf{2}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_6 = \frac{3(64 - 1)}{1}$$

$$S_6 = 3.63$$

$$S_6 = \mathbf{189}$$

4) Banyaknya penduduk kota Bandung pada tahun 2007 ada 3,2 juta orang. Setiap 10 tahun penduduk kota Bandung bertambah dua kali lipat dari jumlah semula. Berapakah banyaknya penduduk kota Bandung pada tahun 1947?

Jawab:

Karena penduduk kota bandung tiap 10 tahun bertambah dua kali lipat dari jumlah semula, berarti $r = 2$.

Dari tahun 1947 ke tahun 2007 = 60 tahun,

ini sama dengan n = 60 tahun : 10 tahun = 6.

Penduduk pada tahun 2007 = 3,2 juta orang,

Sehingga,

$$U_6 = 3{,}2\ juta = 32\ x\ 10^5$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$32\ x\ 10^5 = a2^{6-1}$$

$$2^5\ x\ 10^5 = a\ .\ 2^5$$

$$a = \mathbf{10^5}$$

Jadi penduduk kota Bandung pada tahun 1947 = 100.000 orang.

5) Produksi sebuah pabrik roti pada bulan pertama adalah 500 buah, jika produksi pada bulan-bulan berikutnya menurun $\frac{1}{5}$ dari produksi bulan sebelumnya.

Tentukan:

a) Jumlah produksi pada bulan ke-5
b) Jumlah produksi selama 5 bulan pertama

Jawab:

Pabrik memproduksi roti

Pada bulan pertama = 500

Pada bulan kedua = $500 - (1/5\ x\ 500) = 500 - 100 = 400$

Pada bulan ketiga = $400 - (1/5\ x\ 400) = 400 - 80 = 320$ dan seterusnya

Sehingga membentuk barisan geometri $500, 400, 320, \ldots$

$$a = 500$$

$$r = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$$

a) Jumlah produksi pada bulan ke-5 $= U_5$

$$U_5 = ar^{n-1}$$

$$= 500\left(\frac{4}{5}\right)^{5-1}$$

$$= 500\left(\frac{4}{5}\right)^{4}$$

$$= 500\left(\frac{256}{625}\right)$$

$$= 204{,}8 \approx \mathbf{205}$$

Jadi jumlah produksi pada bulan ke-5 adalah 205 roti.

b) Jumlah produksi selama 5 bulan pertama adalah S_5

$$S_5 = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$= \frac{500\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right)}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$= \frac{500\left(1 - \left(\frac{1024}{3125}\right)\right)}{\frac{1}{5}}$$

$$= 500\left(\frac{2101}{3125}\right).5$$

$$= \frac{5252500}{3125}$$

$$= 1680.8 \approx \mathbf{1681}$$

Jadi jumlah produksi selama 5 bulan pertama adalah 1681 roti.

D. Umpan Balik

1) Tentukan 4 suku pertama dari barisan-barisan dengan rumus suku ke-n
   a) $U_n = n + 5$
   b) $U_n = (n + 1)2$
   c) $U_n = n^2 + n$
   d) $U_n = 2n - 3$

2) Hitunglah nilai n dari barisan-barisan berikut ini, jika:
   a) $U_n = n - 16 = 0$
   b) $U_n = 3n - 1 = 80$
   c) $U_n = 2n - 2 = 30$
   d) $U_n = n^2 + 5n + 6 = 0$

3) Diberikan sebuah barisan aritmetika dengan rumus

suku ke-n adalah

$$U_n = 3n + 1$$

a) Tuliskan 5 suku pertama
b) Suku ke berapakah yang besarnya 100?
c) Hitunglah jumlah 20 suku pertama

4) Hitunglah jumlah 20 suku pertama dari deret aritmetika berikut:
   a) $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots$
   b) $-10 - 5 + 0 + 5 + \cdots$
   c) $20 + 15 + 10 + \cdots$
   d) $5 + 3 + 1 + \cdots$

5) Hitunglah jumlah 25 suku pertama dari deret aritmetika jika diketahui:
   a) $U_4 = 4$ dan $U_8 = 16$
   b) $U_6 = 5$ dan $U_{10} = 25$
   c) $U_{15} = 60$ dan $U_{17} = 50$
   d) $U_{12} = 17$ dan $U_{15} = 26$

6) Ahmad mendepositokan uangnya pada sebuah bank sebesar Rp 10.000.000,00 dengan bunga 15% pertahun. Berapa jumlah uang Ahmad setelah 8 tahun, jika ia tidak pernah mengambil uangnya?

7) Sebuah perusahaan membeli mesin baru seharga Rp 15.000.000,00. Tiap tahun mesin tersebut mengalami penyusutan harga 10%. Taksirlah harga mesin tersebut pada akhir tahun ke empat!

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB II
DERET KONVERGEN DAN DIVERGEN

A. Pendahuluan

Konsep dasar untuk rangkaian dan rangkaian kompleks serta pengujian untuk konvergensi dan divergensi sangat mirip dengan konsep-konsep dalam kalkulus (nyata). Definisi dasarnya seperti dalam kalkulus. Urutan tak terbatas atau, singkatnya, urutan, adalah diperoleh dengan menetapkan ke setiap bilangan bulat positif n sebuah nomor yang disebut suku barisan.

Deret **konvergen** adalah deret yang jumlah parsial konvergennya, dan disebut jumlah (J). Deret yang tidak konvergen disebut **divergen**.

Diberikan urutan umum:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$$

kita dapat membentuk urutan jumlah

$$J_1 = U_1;$$

$$J_2 = U_1 + U_2;$$

$$J_3 = U_1 + U_2 + U_{3,}$$

dan secara umum

$$J_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n (n = 1,2 \dots)$$

disini disebut jumlah parsial ke-n dari deret atau deret tak hingga.

Syarat suatu deret konvergen dan divergen yaitu:

1. Jika $J = \lim_{n\to\infty} J_n$ ada dan berhingga maka ***deret konvergen***

2. Jika $J = \lim_{n\to\infty} J_n$ tidak ada atau tak berhingga (∞) maka ***deret divergen***

- Pada Deret Aritmatika:

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$= \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$= \infty\ (U_1 + U_n)$$

$$= \infty \to \boldsymbol{divergen}$$

Jadi deret aritmatika (DA) selalu divergen.

- Pada Deret Geometri:

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-p^n)}{1-p}$$

1. Jika $|p| < 1$
   maka,

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a}{1-p} - \frac{ap^n}{1-p}\right]$$

$$J = \frac{a}{1-p} \to \boldsymbol{konvergen}$$

2. Jika $|p| > 1$
   maka
$$\lim_{n\to\infty} J_n = \pm\infty \rightarrow \boldsymbol{divergen}$$

3. Jika $p = 1 \rightarrow$ deret: $a + a + a + \cdots$
$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} an = \infty \rightarrow \boldsymbol{divergen}$$

4. Jika $p = -1 \rightarrow$ deret: : $a - a + a - a + \cdots$,
$$J_n = \begin{cases} 0\ untuk\ n\ genap \\ a\ untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$
   $\lim_{n\to\infty} J_n$ tidak ada → deret ***divergen***

Jadi deret geometri (DG) konvergen jika $|p| < 1$ dan divergen jika$|p| \geq 1$.

- Bentuk umum dari suatu deret tak berhingga adalah:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$$

$$U_1, U_2, U_3, \ldots$$

Disebut suku-suku deret

$$S_1 = U_1$$

$$S_2 = U_1 + U_2$$

$$S_3 = U_1 + U_2 + U_3$$

$$S_4 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$-$$

$$-$$

$$-$$

$$S_{n-1} = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

S_n adalah jumlah n suku-suku yang pertama dari deret.

Contoh 1

1) 2 + 5 + 8 + 11 +……. DA dengan $a = 2$ dan $b = 3$, Divergen

Jawab:

$$J_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$J_n = \frac{n}{2}(4 + (n-1)3)$$

$$J_n = \frac{n}{2}(3n + 1)$$

$$J_n = \frac{3n^2 + n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + n}{2} = \infty, \ \boldsymbol{Divergen}$$

2) $1 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 1 -$ ….. DA dengan $a = 1$ dan $b = -\frac{1}{2}$, ***Divergen***

Jawab:

$$J_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$J_n = \frac{n}{2}\left(2 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$J_n = \frac{n}{2}\left(2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)$$

$$J_n = \frac{n}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}n\right)$$

$$J_n = \frac{5n - n^2}{4}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n - n^2}{4} = \infty, \;\; \boldsymbol{divergen}$$

3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$ DG dengan $a = 1$ dan $|p| = \frac{1}{2} < 1$,

Konvergen:

$$J = \frac{a}{1-p}$$

$$J = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$J = \mathbf{2}$$

Jawab:

$$J_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})}$$

$$J_n = 2(1-2^{-n})$$

$$J_n = 2(1-\frac{1}{2^n})$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{\infty}\right)$$

$$= 2(1-0)$$

$$= \mathbf{2}, \boldsymbol{Konvergen}$$

4) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+$ ………. DG dengan $a = 1$ dan $|p| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$,

Konvergen:

$$J = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$J_n = \frac{1(1-(-\frac{1}{3})^n)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$J_n = \frac{1-(-3^{-1})^n}{\frac{4}{3}}$$

$$J_n = \frac{3}{4}(1-(-3^{-1})^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4}(1-(-3^{-1})^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{3}{4}(1-(-3^{-1})^\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{-1}{3^\infty}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{3}{4}(1-0)$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{4}, konvergen}$$

5) $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+$………... DG dengan $a = 1$ dan $|p|$= $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$ >1,

Divergen
Jawab:

$$J_n = \frac{1-(-\frac{3}{2})^n}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$J_n = \frac{2}{5}(1 - (-\frac{3}{2})^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{5}(1 - (-\frac{3}{2})^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{2}{5}(1 - (-\frac{3}{2})^\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{2}{5}(1 - \infty)$$

$$= -\infty, \boldsymbol{divergen}$$

6) 5 – 5 + 5 – 5 +……… DG dengan $a = 5$ dan $p = -1$ → ***Divergen***

B. Konvergen dan Divergen

Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

dikatakan konvergen bila $\lim_{n\to\infty} S_n$ ada dan mempunyai harga yang berhingga, dikatakan divergen bila $\lim_{n\to\infty} S_n$ tidak ada dan mempunyai harga tak berhingga.

Contoh 2

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

Deret ini adalah deret konvergen karena

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

2) $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$

Deret ini adalah divergen karena

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

3) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$

Deret ini adalah divergen karena

$$\lim_{n\to\infty} S_n \ , \boldsymbol{tak\ ada}$$

Deret-Deret Istimewa

1. Deret Hitung:

$$a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{a + (n-1)b\}$$

Adalah divergen.

2. Deret Ukur:

$$a + ap + ap^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} ap^{n-1}$$

Dimana a dan p konstanta

$$S_n = \ a + ap + ap^2 + \cdots + ap^{n-1}$$

$$= a(1 + p + p^2 + \cdots + \ p^{n-1}) \,.\, \frac{(1-p)}{(1-p)}$$

$$S_n = a\frac{(1-p^n)}{(1-p)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-p^n)}{(1-p)}$$

$$= \frac{a}{(1-p)} \text{ Untuk } |p| < 1 \text{ , } (\boldsymbol{konvergen})$$

$$= \infty \text{ Untuk } |p| \geq 1 \text{ , } (\boldsymbol{divergen})$$

3. Deret Hyperharmonis

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

Dimana k adalah konstanta.
Deret ini konvergen untuk $k > 1$, divergen untuk 0 < $k \leq 1$.
Deret hyperharmonis dengan $k = 1$ disebut deret harmonis.

Contoh 3

1) Deret

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^n} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \geq n\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2} = \infty \; Deret \; Divergen$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \mathbf{1}$$

Walaupun $\lim_{n\to\infty} U_n = 1$ konvergen, tapi tidak berarti deretnya juga harus konvergen.

2) Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

$$a = 1;$$

$$p = \frac{1}{2} < 1$$

$$S_n = \frac{(1 - p^n)}{(1 - p)}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

$$= \mathbf{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \mathbf{2}$$

• *Sifat-sifat Umum Dari Deret Tak Berhingga*

1. Suatu deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

yang konvergen atau divergen tidak akan berubah bila sejumlah yang terbatas dari suku-suku deret tersebut ditambahkan atau dikurangkan.

Bukti:

Andaikan deret konvergen, maka untuk sembarang $\in > 0$ dapat ditemukan suatu integer p sedemikian rupa sehingga untuk sembarang pasang bilangan $m > p$ dan $n > p$, dipenuhi $|S_n - S_m| < \in$

Syarat konvergen tersebut tidak akan berubah dengan ditambah atau dikurangi oleh sejumlah terbatas dari suku-suku deret.

Yaitu

jumlah dari deret akan berubah dengan penambahan atau pengurangan dari sejumlah suku-suku deret tapi konvergensinya tidak akan berubah.

2. $Bila\ deret \sum_{n=1}^{\infty} U_n\ konvergen,$

maka $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. Sebaliknya bila $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n\ belum\ tentu\ konvergen.$$

Bukti:

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

Bila deret konvergen, berarti

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ dan } \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

Sehingga:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Contoh 4

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

Deret adalah divergen (deret hyperharmonis)

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ dengan } p = 1$$

$$\text{Tapi } \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

Bila, $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$ deret pasti divergen. Jika deret divergen belum tentu $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$.

2. Bila deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ kovergen dengan jumlah S. Jika deret baru yang dibentuk dengan mengalikan masing-masing suku dengan suatu konstanta k, yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} kU_n = kU_1 + kU_2 + kU_3 + \cdots + kU_n + \cdots$$

$maka\ deret \sum_{n=1}^{\infty} kU_n$ $a$kan konvergen dengan jumlah $k\ S$.

Sebaliknya bila $\sum_{n=1}^{\infty} U_n\ divergen$

$$maka \sum_{n=1}^{\infty} kU_n\ \ divergen\, juga.$$

Bukti:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$S_n{}' = kU_1 + kU_2 + kU_3 + \cdots + kU_n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = k \lim_{n\to\infty} S_n = k\ S$$

3. Bila deret $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen dengan jumlah S dan

deret $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ konvergen dengan jumlah S', maka

$$\sum_{n=1}^{\infty}(U_n \pm V_n)$$

Juga konvergen dengan jumlah $(S \pm S')$

Bukti:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$S_n{}' = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

$$S_n \pm S_n{}' = (U_1 \pm V_1) + (U_2 \pm V_2) + (U_3 \pm V_3) + \cdots + (U_n \pm V_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n \pm S_n{}') = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} S_n = S \pm S$$

Artinya:

Deret-deret yang konvergen dapat dijumlahkan atau dikurangkan suku semi suku.

Deret positif adalah deret dengan semua suku-suku positif.

Deret negatif adalah deret dengan semua suku-suku negatif.

Deret negatif dapat dibahas sebagai deret negatifnya dari deret positif.

Yaitu:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} U_n,$$

Dimana

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \ \boldsymbol{deret\ positif}.$$

Deret berayun adalah deret dengan suku-suku bergantian positif dan negatif.

C. Deret Dirichlet

Syarat deret Dirichlet adalah bila f(x) ditentukan dalam interval $(-L, L)$: Bernilai tunggal.

a. Terbatas (**bounded**).
b. Merupakan fungsi periodik diluar $(-L, L)$ dengan periode $2L$.
c. Kontinu kecuali pada beberapa titik diskontinu.
d. Mempunyai maksimum dan minimum yang berhingga.

Maka deret Fourier konvergen ke:

1. $f(x)$ di x dimana $f(x)$ kontinu
2. $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ untuk x dimana $f(x)$ tidak kontinu

Dengan Tes Integral dapat dijelaskan konvergen atau divergennya deret Dirichlet sebagai berikut:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

Nanti akan diperlihatkan deret Dirichlet: Konvergen untuk $p > 1$
Divergen untuk $p \leq 1$

Tes Integral dapat menjelaskan konvergen atau divergennya deret Dirichlet sebagai berikut:

Deret Dirichlet:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots (*)$$

Dengan memperhatikan

$$\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{array}{l} \to \;\; Divergen\; untuk\; p \leq 1 \\ \to \;\; Konvergen\; untuk\; p > 1 \end{array}$$

Maka deret Dirichlet (*) diatas akan

$$\begin{array}{l} \to \;\; Divergen\; untuk\; p \leq 1 \\ \to \;\; Konvergen\; untuk\; p > 1 \end{array}$$

Contoh 5

1) Untuk $p = 1 \to$

Deret Dirichlet menjadi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \;\; \boldsymbol{Divergen}$$

(Deret Harmonis Divergen)

2) Untuk $p = \frac{1}{2} < 1 \to$

Deret Dirichlet menjadi:

$$1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \cdots$$

Atau

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots \quad \boldsymbol{Divergen}$$

3) Untuk $p=2>1 \rightarrow$
Deret Dirichlet menjadi:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \quad \boldsymbol{Konvergen}$$

4) Untuk $p=\frac{3}{2}>1 \rightarrow$

Deret Dirichlet menjadi:

$$1+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots$$

Atau

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\cdots \quad \boldsymbol{Konvergen}$$

5) Deret

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots(*) \mathit{Deret\ Geometri}$$

Dengan $|p|=\frac{1}{2}<1$

Deret Konvergen:

$$U_n=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{\infty}$$

$$= \mathbf{0}$$

6) Deret

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots (*) Deret\ Geometri$$

Dengan $|p| = \frac{3}{2} > 1$

Deret Divergen:

$$U_n = 1.\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \mathbf{1}$$

7) Deret

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots(*) Deret\ Harmonis$$

Nanti akan diketahui deret divergen

$$U_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{\infty}$$

$$= \mathbf{0}$$

Theorema 1:

Jika deret

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

Konvergen dengan jumlah $J =$ A, maka deret

$$CU_1 + \mathrm{C}U_2 + CU_3 + \cdots + CU_n + \cdots$$

Konvergen dengan $J =$ CA

Theorema 2:

Jika deret

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

Konvergen dengan $J =$ A, dan deret

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots$$

Konvergen dengan $J =$ B,
maka deret:

$$(U_1 \pm V_1) + (U_2 \pm V_2) + \cdots + (U_n \pm V_n) + \cdots$$

Konvergen dengan $J =$ A $\pm$ B

Jika deret

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots,$$

Konvergen maka

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

Syarat perlu konvergen (Necessary Condition for Convergence)

Artinya:

1. Jika deret konvergen maka $\lim_{n\to\infty} U_n$=0
2. Jika $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$ maka deretnya divergen
3. Jika $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ deretnya dapat konvergen atau divergen
4. Jika deretnya divergen $\lim_{n\to\infty} U_n$ tidak harus $\neq 0$

Contoh 6

1) Deret:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}$$

Dicari:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^1}{(n+1)^1} = 1 \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{Deret\ Divergen}$$

Deret divergen yang

$$\lim_{n \to \infty} U_n = 0$$

adalah deret harmonis:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

(Deret Dirichlet dengan p = 1)

D. Tes Konvergensi & Divergensi

Tes Pembanding

Tes konvergensi untuk deret dengan suku-suku yang positif semua menggunakan Tes Banding yaitu dengan membandingkan antara deret yang pertama dengan deret yang kedua.

Misal ada deret dengan suku-suku positif semua

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots \text{ (*)}$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots \text{ (**)}$$

Theorema menurut Tes Banding sebagai berikut:

Theorema 1:

Jika deret (*) konvergen dan

$$V_1 \leq U_1; V_2 \leq U_2; V_3 \leq U_3; \dots ;\ V_n \leq U_n; \dots$$

Maka deret (**) juga ***konvergen***

Theorema 2:

Jika deret (*) divergen dan

$$V_1 \geq U_1; V_2 \geq U_2; V_3 \geq U_3; \dots ; V_n \geq U_n; \dots$$

Catatan:

Tes Banding Kedua kondisi yang telah dibuktikan (Teorema 1 dan 2) hanya berlaku untuk deret dengan suku positif. Tes Banding juga berlaku jika beberapa suku dari deret pertama atau kedua adalah nol. Tetapi kondisi ini tidak berlaku jika beberapa persyaratan dari suku deret tersebut adalah angka negatif.

Maka deret (**) juga ***divergen***

Contoh 7

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ (*) konvergen

(DG dengan $|p| = \frac{1}{2} < 1$)

Deret:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\cdots(**)$$

juga konvergen sebab:

$$\frac{1}{2}<1;\ \frac{1}{3}<\frac{1}{2};\ \frac{1}{5}<\frac{1}{4};\ \frac{1}{9}<\frac{1}{8};\ldots$$

2) $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots$ (*) divergen

(DG dengan $|p|=\frac{3}{2}>1$)

Deret:

$$\frac{2}{1}+\frac{4}{2}+\frac{10}{4}+\frac{28}{8}+\cdots(**)$$

juga divergen sebab:

$$\frac{2}{1}>1;\ \frac{4}{2}>\frac{3}{2};\ \frac{10}{4}>\frac{9}{4};\ \frac{28}{8}>\frac{27}{8};\ldots$$

- Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n = U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n+\cdots$$

Adalah deret positif, dan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n\ adalah\ deret\ positif\ pula\ yang\ konvergen\ dengan\ harga\ S'.$$

Bila untuk setiap harga n dan konstanta k yang positif berlaku

$$U_n \leq k\,V_n$$

Maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n\ adalah\ konvergen\ dengan\ harga\ S \leq k\ S'.$$

Bukti:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

$$\lim_{n \to \infty} S'_n = S'$$

$$S'_n < S' \dots \dots \dots\ (1)$$

Untuk harga k yang positif

$$kS'_n < kS'$$

$$U_1 \leq kV_1;\ U_2 \leq kV_2; \dots$$

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \leq kV_1 + kV_2 + \cdots + kV_n$$

$$\leq k(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)$$

Dimana

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

Sehingga diperoleh

$$S_n \leq kS'_n < kS' \dots \dots \dots (2)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n \leq k \lim_{n \to \infty} S'_n$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S\ \ dan\ \lim_{n \to \infty} S'_n = S'$$

sehingga

$$S \leq kS' \dots \dots \dots (3)$$

- Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \ dan \ \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ adalah deret} - \text{deret positif dan}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ adalah divergen.}$$

Bila untuk setiap harga n dan konstanta k berlaku:

$$U_n \geq kV_n \dots \dots \dots (4)$$

maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \ adalah \ divergen$$

Bukti:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

Untuk setiap n berlaku

$$U_n \geq kV_n$$

Sehingga

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \geq kV_1 + kV_2 + kV_3 + \cdots + kV_n$$

$$\geq k(V_1 + V_2 + V_3 \dots + V_n)$$

$$S_n \geq kS'_n \dots \dots \dots (5)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq k \lim_{n\to\infty} S'_n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq k(+\infty) = \infty \ldots\ldots\ldots (6)$$

maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \ adalah\ divergen$$

Contoh 8

1) Dengan memakai test pembandingan buktikan bahwa deret berikut ini

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

Adalah konveregen bila $p > 1$

Penyelesaian:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots$$

Tampak bahwa suku pertama dalam tanda kurung adalah berbentuk

$$\frac{1}{(2^N)^p}$$

Dibadingkan dengan deret berikut ini:

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^N}{(2^N)^p}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^N + \cdots$$

Ini adalah deret ukur dengan perbandingan $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, karena $p > 1$ deret ukur tersebut adalah konvergen,

$$\left(= \lim_{n\to\infty} S_n\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$$

Bila suku-suku yang berada dalam tanda kurung dari kedua deret kita perbandingkan

$$\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < \frac{1}{2^{p-1}} \ ; \ \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) < \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 ; \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^N + \cdots$$

Maka deret

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \mathit{adalah\ konvergen}$$

2) Dengan memakai tes pembandingan buktikan bahwa deret harmonis

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Adalah divergen.

Penyelesaian:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

Suku terakhir dalam masing-masing tanda kurung mempunyai bentuk $\frac{1}{n^p}$ dengan $n=2^N$

Dibandingkan dengan deret berikut ini

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\cdots+\frac{2^{N-1}}{2^N}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}$$

$$S_n = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{1+n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)}{2} = \infty$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}$$

Karena deret

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\ adalah\ deret\ divergen$$

maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ deret\ divergen$$

E. Umpan Balik

1. Dalam suatu gedung pertunjukan disusun kursi dengan baris paling depan tediri dari 12 kursi, baris kedua berisi 14 kursi, baris ketiga berisi 16 kursi, dan seterusnya. Berapa banyaknya kursi pada baris ke-20 dan jumlah seluruh kursi dalam gedung?

2. Empat bilangan membentuk suatu barisan aritmatika. Jika bilangan pertama dan bilangan kedua tetap, serta bilangan ketiga ditambah bilangan pertama dan bilangan keempat dikalikan 2, maka terbentuk suatu barisan geometri. Jika beda suku-suku pada barisan aritmatika adalah 2, maka jumlah empat bilangan pertama pada barisan geometri tersebut adalah?

3. Carilah rumus J_n, kemudian tentukan konvergen atau divergen dengan menggunakan limit tak hingga
   a. $-2-5-8-11-\cdots$
   b. $-1-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+1+\cdots$
   c. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$
   d. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$
   e. $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots$
   f. $5-5+5-5+\cdots$

4. Selidikilah deret-deret dibawah ini konvergen atau divergen:
   a. $\frac{1}{1\,x\,2}+\frac{1}{2\,x\,3}+\frac{1}{3\,x\,4}+\cdots$
   b. $ln\frac{2}{1}+ln\frac{3}{2}+ln\frac{4}{3}+\cdots$
   c. $\frac{1}{1\,x\,3}+\frac{1}{3\,x\,5}+\frac{1}{5\,x\,7}+\cdots$

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB III
TES KONVERGENSI DERET DENGAN SUKU-SUKU POSITIF

A. Pendahuluan

Salah satu pertanyaan dasar, ketika menyelidiki suatu deret adalah apakah deret yang diberikan konvergen atau divergen. Kita harus menetapkan kondisi yang cukup bagi seseorang untuk memutuskan pertanyaan ini. Kita juga harus memeriksa kondisi yang diperlukan untuk konvergensi suatu deret, dengan kata lain, kita akan menetapkan kondisi yang tepat untuk deret tersebut. Adapun dalam modul ini akan dijelaskan dengan berbagai tes Konvergensi untuk deret dengan suku-suku positif semua antara lain Tes Banding, Tes d'Alembert, Tes Cauchy dan Tes Integral.

B. Tes d'Alembert (Th. d'Alembert)

Tes konvergensi menggunakan Theorema Tes d'Alembert juga hanya berlaku jika dalam suatu deret dengan suku-suku positif semuanya. Misal ada deret dengan suku-suku positif:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots (*)$$

Rasio suku (n + 1) dengan suku ke-n, sebagai n→ ∞ , memiliki limit L yaitu,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{(n+1)}}{U_n} = L$$

Theorema menurut Tes d 'Alembert sebagai berikut:

1. Jika $L < 1$ maka deret (*) konvergen
2. Jika $L > 1$ maka deret (*) divergen
3. Jika $L = 1$, tes d'Alembert tidak dapat dipakai

Contoh 1

1) Deret:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots (*)$$

$$U_n = \frac{2n-1}{2^n};$$

$$U_{(n+1)} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{U_{(n+1)}}{U_n} = \frac{2n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2n-1}$$

$$= \frac{2n+1}{2(2n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{(n+1)}}{U_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n-2}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < 1,$$

jadi deret (*) ***konvergen***

2) Deret

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\cdots$$

Jawab:

$$U_n=\frac{2^n}{n};$$

$$U_{(n+1)}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{U_{(n+1)}}{U_n}=\frac{2n}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{(n+1)}}{U_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$$

$$=\mathbf{2}>1$$

Deret divergen dan istilah umumnya U_n mendekati tak hingga.

3) Deret

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Jawab:

$$U_n=\frac{1}{n(n+1)};$$

$$U_{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{(n+1)}}{U_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+2)}$$

$$= \mathbf{1}$$

Tes d'Alembert tidak memungkinkan kita untuk menyimpulkan bahwa rangkaian tersebut konvergen, tetapi dengan alasan lain kita dapat menetapkan fakta bahwa deret ini konvergen.

4) Divergen atau Konvergen dari $U_n = (n^2 + n - 1)/4^n$ dengan tes d'Alembert?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 + (n+1) - 1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2 + n - 1}{4^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n((n+1)^2 + (n+1) - 1)}{4^{n+1}(n^2 + n - 1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n(n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1)}{4.\,4^n.\,(n^2 + n - 1)}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2}}{\frac{n^2 + n - 1}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}.\,1$$

$$= \mathbf{\frac{1}{4}} < 1, deret\ konvergen$$

5) Periksa seri untuk konvergensi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

Dimana

$$U_n = \frac{(n + 1)!}{(n + 5).\,7^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5).7^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{(n+5).7^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^n.(n+5).(n+2)!}{7.7^n.(n+6).(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^n.(n+5).1.2.3\ldots n.(n+1).(n+2)}{7.7^n.(n+6).1.2.3\ldots n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+5).(n+2)}{7.(n+6)}$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7n+10}{n+6}$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+7n+10}{n^2}}{\frac{n+6}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{7}{n}+\frac{10}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{7}.\frac{1}{0}$$

$$= \frac{1}{7}.\infty$$

$$= \infty > 1, deret\ divergen$$

6) Tentukan konvergen atau divergen dari deret berikut dengan Tes d'Alembert

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{5}+\frac{2^4}{7}+\cdots$$

Rumus suku ke- n adalah

$$U_n=\frac{2^n}{2n-1}$$

$$U_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2(n+1)-1}$$

$$U_{n+1}=\frac{2^n.2}{2n+1}$$

Dicari

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{(n+1)}}{U_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n.2}{2n+1}}{\frac{2^n}{2n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n.2}{2n+1}\,x\,\frac{2n-1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{2n+1}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= \mathbf{2} > 1, deret\ divergen$$

7) Tentukan apakah deret konvergen atau divergen dengan tes d'Alembert !

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Jawab:

$$U_n = \frac{1}{n!}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{(n+1).\ \ n!}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$= \mathbf{0} < 1, deret\ konvergen$$

C. Tes Cauchy (Th. Cauchy)

Tes konvergensi menggunakan Theorema Tes Cauchy juga hanya berlaku jika dalam suatu deret dengan suku-suku positif semuanya. Misal ada deret dengan suku-suku positif:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots (*)$$

Hasil $\sqrt[n]{u_n}$ memiliki batas limit L sebagai n$\rightarrow \infty$ yaitu,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = L$$

Theorema menurut Tes Cauchy sebagai berikut:

1. Jika $L < 1$ maka deret (*) konvergen
2. Jika $L > 1$ maka deret (*) divergen
3. Jika $L = 1$, tes Cauchy tidak dapat dipakai

Contoh 2

1) Deret

$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \dots\dots + \left(\frac{2n-1}{n}\right)^n + \dots\dots \; (*)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n}\right)$$

= **2** > **1**, ***divergen***

2) Deret

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < 1, \boldsymbol{Konvergen}.$$

3) Periksa seri untuk konvergensi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{\frac{3n+2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3+\frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}}\right)^{3+\frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}} \right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7+\frac{1}{n}}{6+\frac{5}{n}} \right)^3$$

$$= \left(\frac{7}{6} \right)^3$$

$$= \mathbf{\frac{343}{216}} > 1 \; deret \; divergen$$

4) Deret

$$3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n + \cdots$$

$$U_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n(x)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n}$$

$$= \mathbf{2} > 1$$

Jadi Deretnya Divergen.

5) Selidikilah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

Penyelesaian:

$$U_n = \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{\log n}$$

Untuk $n > 10$,

$\frac{1}{\log n} = r < 1$, maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

Adalah konvergen.

<u>Kesimpulan:</u>

$$Bila \sum_{n=1}^{\infty} U_n \; adalah \; deret \; positif$$

$$dan \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} < 1 \; maka \; deret \; tersebut \; konvergen,$$

$$dan \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} > 1 \; maka \; deret \; tersebut \; divergen,$$

Jadi contoh diatas $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$, deret konvergen.

D. Tes Integral

Tes konvergensi menggunakan Theorema Tes Integral juga hanya berlaku jika dalam suatu deret dengan suku-suku positif semuanya dan sukunya tidak naik.

<u>Theorema Tes Integal 1:</u>

Misal deret

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots (*)$$

Suku-sukunya positif dan tidak naik.

Artinya:

$$U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \cdots \geq U_n \geq \cdots$$

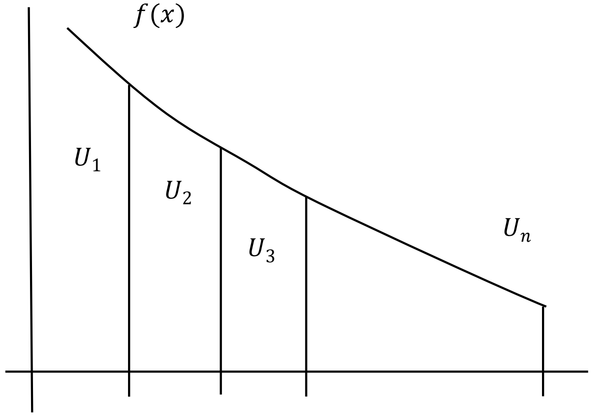
Misalkan pula fungsi f(x) kontinu dan tidak naik sedemikian, sehingga

$$f(1) = U_1;\ f(2) = U_2;\ f(3) = U_3; \ldots;\ f(n) = U_n; \ldots$$

<u>Theorema Tes Integral 2:</u>

1. Jika $\int_1^\infty f(x)\ dx$ konvergen maka deret (*) juga ***konvergen***

2. Jika $\int_1^\infty f(x)\ dx$ divergen maka deret (*) juga ***divergen***



Gambar 3. 1. Grafik Tes Integral

Tes Integral ini dapat menjelaskan konvergen atau divergennya.

Deret Dirichlet:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots (*)$$

Ambil sebagai fungsi

$$f(x) = \frac{1}{X^p}$$

Improper Integral

$$\int_1^\infty f(x)\ dx$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{X^p}\ dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} \frac{1}{X^p}\ dx$$

1. Untuk p = 1 →

$$\lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} \frac{1}{X}\ dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} lnx \Big|_{1}^{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty} (\ln N - \ln 1)$$

$$= \ln \infty - 0$$

$$= \infty \to \boldsymbol{Integral\ Divergen}$$

Jadi untuk p =1, deret dirichlet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Deret Harmonis Divergen.

2. Untuk p < 1 → (1-p) positif

$$\lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} \frac{1}{X^p}\ dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} X^{-p}\, dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-p} X^{1-p} \Big|_{1}^{N}$$

$$= \frac{1}{1-p} \left(\infty^{pos} - 1^{pos}\right)$$

$$= \infty$$

Untuk p < 1, ***<u>deret dirichlet diveregen.</u>***

3. Untuk p > 1 → (1-p) negatif

$$\lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} \frac{1}{X^{p}}\, dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} X^{-p}\, dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-p} X^{1-p} \Big|_{1}^{N}$$

$$= \frac{1}{1-p} \left(\infty^{neg} - 1^{neg}\right)$$

$$= \frac{1}{1-p} (0 - 1)$$

$$= \frac{1}{p-1}$$

Limitnya ada dan berhingga, jadi deretnya ***konvergen.***

Kesimpulan Deret Dirichlet:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots (*)$$

Divergen untuk p $\leq$ 1 dan Konvergen untuk p > 1

Contoh 3

1) 1+ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

   Divergen sebab p = 1

2) 1+ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$

   Divergen sebab p = $\frac{1}{2}$ < 1

3) 1+ $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ Konvergen sebab p = 2 > 1

4) Tentukan Konvergen atau divergen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dengan menggunakan Tes Integral

   Jawab:

$$= \int_1^\infty f(x)\, dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} x^{-2}\, dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} x^{-2}\, dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \Big|_{1}^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -x^{-1} \Big|_{1}^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{x} \Big|_{1}^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{\infty} - 1\right)$$

$$= -(0 - 1)$$

$$= \mathbf{1}\ (\boldsymbol{Ada\ Berhingga, jadi\ konvergen})$$

E. Alternating and Functional Series

Sejauh ini kita telah mempelajari deret dengan suku-suku yang semua persyaratannya positif. Pada bagian ini akan membahas deret dengan suku-suku yang memiliki tanda berganti-ganti positif negatif.

Alternating Series dengan suku-sukunya berganti-ganti tanda seperti

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots (*)$$

dengan $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots positif$.

Menurut **Theorema Leibniz**, misal ada alternating seri

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots (*)$$

dengan $U_n > 0$ (positif), sedemikian sehingga

$$U_1 > U_2 > U_3 > \cdots > U_n > \cdots$$

Jika

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0,$$

maka deret (*) konvergen dan jumlahnya $J > 0$ dan $J \leq U_1$

Contoh 4

1) Deret: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots (*)$

Deret diatas merupakan *alternating series* karena:

i. Suku-sukunya berganti-ganti tanda (*alternating series*)
ii. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots$

iii. $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

Jadi menurut Th. Leibniz deret (*) ***Konvergen***

(*) Sufficient Condition

Syarat cukup untuk Konvergen bagi *alternating series*.

Theorema 1:
Misal ada *alternating series*:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots (*)$$

dimana deret nilai mutlaknya:

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \cdots \; konvergen$$

maka deret (*) juga konvergen.

Contoh 5

1) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$

Konvergen (D.Dirichlet dengan $p = 2 > 1$),
maka deret

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

juga konvergen dengan jumlah $J > 0$ dan $J \leq 1$.

(*) Konvergen absolut dan konvergen bersyarat

Definisi:
misal ada *alternating series*:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots (*)$$

a. Jika deret nilai mutlaknya:

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots \; konvergen$$

maka deret (*) disebut konvergen absolut.

b. Jika deret (*) konvergen, sedang

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots \; divergen$$

maka deret (*) disebut konvergen bersyarat.

Contoh 6

1) Deret:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots (*)$$

Deret nilai mutlaknya:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Konvergen (DG dengan $|p| = \frac{1}{2} < 1$), maka deret (*) konvergen absolut.

2) Deret:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots (*)$$

Konvergen (Memenuhi Th. Leibniz). Deret nilai mutlaknya:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots$$

Divergen (Deret Harmonis). Jadi deret (*) Konvergen bersyarat.

Sebuah deret fungsi

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$$

disebut seri fungsional jika istilah-istilahnya adalah fungsi dari x.

Functional series bentuknya:

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \cdots + U_n(x) + \cdots$$

dimana suku-sukunya merupakan fungsi dengan variable x. Salah satu contoh dari deret fungsi adalah *Power Series* (Deret Pangkat / Deret Kuasa).

- ***Power Series***

Bentuk umum *Power Series* dengan variable x adalah:

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Dimana $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ... konstan dan disebut koefisien deretnya.

Contoh 7

Contoh Power Series antara lain:

1) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

   dengan

$$a_o = a_1 = a_2 = \cdots = \mathbf{1}$$

2) $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

   Dengan

$$a_o = 0;\ a_1 = \frac{1}{1!};\ a_2 = \frac{1}{2!}; \ldots ; a_n = \frac{1}{n!}$$

> ***Catatan:***
> Deret Fungsi/ *Power Series* dapat konvergen dan dapat juga divergen, tergantung pada nilai x nya.

Contoh 8

1) Deret

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

merupakan DG dengan p = x dan a = 1. Jadi deret diatas konvergen untuk $|x| < 1$ atau untuk -1 < x $<$ 1 dan divergen untuk $|x| \geq 1$ atau untuk $x \leq -1$ dan untuk $x \geq 1$.

Misal:

untuk $x = \frac{1}{2} \rightarrow$ deret

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \textbf{\textit{Konvergen}}$$

untuk $x = -\frac{3}{2} \rightarrow$ deret

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \cdots \textbf{\textit{Divergen}}$$

Daerah Konvergensi / Interval Konvergensi

Daerah Konvergensi adalah daerah dimana untuk setiap x yang terletak dalam daerah tersebut deret fungsinya konvergen. Daerah konvergensi yang terbentuk interval disebut interval konvergensi. Pada *Power Series* daerah konvergensinya berupa interval konvergensi.

Pada contoh deret

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

diatas daerah konvergensinya berupa interval -1 < x < 1 yang disebut interval konvergensi.

Menurut Theorema Abel**,** misalkan ada *Power Series*:

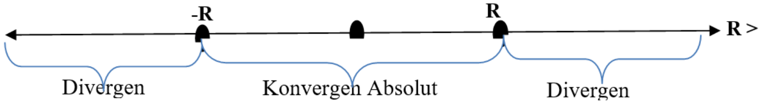
$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots (*)$$

1. Jika deret (*) konvergen untuk nilai x = x_o maka deret (*) akan konvergen absolut untuk nilai $|x| < |x_0|$
2. Jika deret (*) divergen untuk nilai x = x_o maka deret (*) akan divergen untuk nilai $|x| > |x_0|$

Catatan:
x_0 boleh negative atau positive

Theorema 2:

Daerah konvergensi dari *Power Series* berupa interval yang disebut interval konvergensi dengan titik 0 sebagai titik tengahnya.



Gambar 3.2. Interval Konvergensi

Bilangan positif R disebut Radius Konvergensi. Pada ujung-ujung interval konvergensi $(x = R\ dan\ x = -R)$ deretnya dapat konvergen atau divergen. Cara mencari interval konvergensi/Radius Konvergensi dari *Power Series*.
Misal ada *Power Series*:

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

suku-sukunya mungkin ada yang negative. Dibuat deret nilai mutlaknya:

$$|a_o| + |a_1x| + |a_2x^2| + |a_3x^3| + \cdots$$

atau

$$|a_o| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + |a_3||x^3| + \cdots$$

Suku-sukunya positif semua. Karena suku-sukunya positif semua maka antara lain dapat menggunakan tes d'Allembert atau Tes Cauchy untuk menentukan konvergensi deretnya dengan penyesuaian yang dapat dilihat pada bagian berikutnya.

(*) Tes d'Allembert untuk mencari interval konvergensi dari *Power Series*.

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots\ldots + U_n(x) + \ldots\ldots \ (*)$$

Misalkan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|U_{(n+1)}(x)|}{|U_n(x)|}$$

atau

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{(n+1)}(x)}{U_n(x)}\right| = L|x|$$

1. Jika $L|x| < 1$ atau $|x| < \frac{1}{L}$ maka deretnya konvergen absolut
2. Jika $L|x| > 1$ atau $|x| > \frac{1}{L}$ maka deretnya divergen
3. Jika $L|x| = 1$ atau $|x| = \frac{1}{L}$ masih perlu diselidiki lebih lanjut apakah deretnya konvergen atau divergen.

Contoh 9

1) Dengan Tes d'Alembert tentukan interval konvergensi deret:

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \cdots (*)$$

Jawab:

$$\left|\frac{2x}{1}\right| + \left|\frac{(2x)^2}{2}\right| + \left|\frac{(2x)^3}{3}\right| + \left|\frac{(2x)^4}{4}\right| + \cdots$$

$$|U_n| = \left|\frac{(2x)^n}{n}\right|$$

$$\left|U_{(n+1)}\right| = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{(n+1)}}{U_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)}\right|}{\left|\frac{(2x)^n}{n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2x)n}{(n+1)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n}{1+n}\right| |x|$$

$$= |\mathbf{2x}|$$

Maka,

1. Untuk $|2x| < 1$ atau $|x| < \frac{1}{2}$ atau $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ deret (*) konvergen absolut
2. Untuk $|2x| > 1$ atau $|x| > \frac{1}{2}$ atau $x < -\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2} < x$ deret (*) divergen
3. Untuk $|2x| = 1$ atau $|x| = \frac{1}{2}$ masih perlu diselidiki lebih lanjut apakah deret (*) konvergen atau divergen.

Untuk $x = \frac{1}{2}$ deret (*) menjadi:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \boldsymbol{konvergen}$$

Untuk x = $-\frac{1}{2}$ deret (*) menjadi:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$$

atau

$$-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots)\boldsymbol{Divergen}\ (\boldsymbol{Deret\ Harmonis})$$

Dari (1) dan (3) diatas, deret (*) konvergen untuk $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$, jadi $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ interval konvergensi deret (*)

(*) Tes Cauchy untuk mencari interval konvergensi dari *Power Series.*

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \cdots + U_n(x) + \cdots (*)$$

Misalkan

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{U_n(x)}\right| = L|x|$$

Atau

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = L|x|$$

1. Jika $L|x| < 1$ atau $|x| < \frac{1}{L}$ maka deretnya konvergen
2. Jika $L|x| > 1$ atau $|x| > \frac{1}{L}$ maka deretnya divergen
3. Jika $L|x| = 1$ atau $|x| = \frac{1}{L}$ perlu diselidiki lebih lanjut

Contoh 10

1) Dengan Tes Cauchy untuk mencai interval konvergensi deret

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots (*)$$

Deret nilai mutlaknya:

$$|x| + |x^2| + |x^3| + |x^4| + \cdots + |x^n| + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|}$$

$$= |x|$$

Jadi deret (*) konvergen untuk

$|x| < 1$ atau $-1 < x < 1$

dan divergen untuk

$|x| > 1$ atau $x < -1$ dan $x > 1$.

Sedang untuk

$|x| = 1$ atau $x = \pm 1$

sebagai berikut:

a. Untuk $x = 1$.
   Deret (*) menjadi $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ divergen

   (DG dengan $|p| = |-1| = 1$

b. Untuk x = -1.
   Deret (*) menjadi $-1 - 1 - 1 - 1 - \cdots$ divergen

   (DG dengan $a = -1$ dan $|p| = 1$

Jadi $-1 < x < 1$ adalah ***interval konvergensinya***.

Diferensiasi dari *Power Series*

<u>Theorema 1:</u>

Misal ada *Power Series*:

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots a_nx^n + \cdots (*)$$

Jika setiap suku-suku deretnya diturunkan (didiferensialkan), didapat deret baru:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots (**)$$

<u>Theorema 2:</u>

1. Jika deret (*) mempunyai radius konvergensi R atau mempunyai interval konvergensi $(-R, R)$ maka deret (**) juga mempunyai interval konvergensi $(-R, R)$
2. Jika untuk nilai x didalam interval konvergensinya $(-R < x < R)$ deret (*) mempunyai jumlah $J_*(x)$ dan deret (**) mempunyai jumlah $J_{**}(x)$ maka $J_{**}(x) = \big(J_*(x)\big)'$ atau $J_{**}(x)$ sama dengan derivative / turunan dari $J_*(x)$.

Contoh 11

1) *Power Series*:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots (*)$$

DG dengan $a = 1$ dan $|p| = |x|$
Deret turunannya:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots (**)$$

a. Deret (*) mempunyai interval konvergensi $-1 < x < 1$,
maka deret (**) juga mempunyai interval konvergensi $-1 < x < 1$

b. Untuk x didalam interval $-1 < x < 1$,
Jumlah deret (*):

$$J_*(x) = \frac{1}{1-x}$$

Jumlah deret (**):

$$J_{**}(x) = \left(J_*(x)\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Power Series **dari** $(\mathbf{x - c})$

$$a_o + a_1(\mathrm{x}-\mathrm{c}) + a_2(\mathrm{x}-\mathrm{c})^2 + a_3(\mathrm{x}-\mathrm{c})^3 + \cdots (*)$$

Cara untuk mencari daerah konvergensinya dengan dimisalkan $(\mathrm{x}-\mathrm{c}) = \mathrm{Y}$, maka deret (*) menjadi

$$a_o + a_1\mathrm{Y} + a_2\mathrm{Y}^2 + a_3\mathrm{Y}^3 + \cdots (**)$$

Contoh 12

1) Carilah daerah konvergensi deret

$$(\mathrm{x}-2) + (\mathrm{x}-2)^2 + (\mathrm{x}-2)^3 + \cdots (*)$$

Jawab:

Misalkan, $(\mathrm{x}-2) = \mathrm{Y}$, deret (*) menjadi $= \mathrm{Y} + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Y}^3 + \cdots (**)$ merupakan DG dengan $a = Y$ dan $|p| = |Y|$ yang akan konvergen untuk $|Y| < 1$ atau $|x-2| < 1$

Jadi daerah konvergensinya:

$$-1 < (x - 2) < 1$$

atau

$$1 < x < 3$$

F. Umpan Balik

1) Konvergen atau Divergen, selesaikan dengan tes d'Alembert
   a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$
   b. $2 + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{5} + \cdots$

2) Konvergen atau Divergen, gunakan dengan tes Cauchy
   a. $1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots$
   b. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots$

3) Konvergen atau Divergen, gunakan tes Integral
   a. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$
   b. $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots$

BAB IV
DERET FUNGSI TAYLOR, MACLAURIN DAN BINOMIAL

A. Pendahuluan

Pada modul ini kita akan menyelidiki masalah yang lebih umum yaitu fungsi manakah yang mempunyai penyelesaian deret pangkat dan bagaimana menetukannya? Kita akan memulainya dengan memisalkan suatu fungsi f sebagai sembarang funngsi yang dapat kita nyatakan sebagai deret pangkat.

B. Deret Taylor

Deret Taylor adalah merupakan deret pangkat. Bagian terakhir suatu deret Taylor itu mewakili fungsi analitik. Dan sekarang akan ditunjukkan bahwa setiap fungsi analitik bisa diwakili oleh deret pangkat, yaitu deret Taylor. Ini membuat Deret Taylor sangat penting dalam analisis kompleks. Memang lebih fundamental dalam analisis kompleks daripada di dalam kalkulus.

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \cdots$$

Dimana

$$|x-a| < R$$

Substitusikan $x = a$ pada persamaan di atas sehingga akan menghasilkan

$$f(a) = C_0$$

Jika persamaan $f(x)$ di atas diturunkan, maka akan di peroleh sebagai berikut ini:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + 4C_4(x-a)^3 \ldots$$

Dimana

$$|x-a| < R$$

Substitusikan $x = a$ pada persamaan di atas sehingga akan menghasilkan

$$f'(a) = C_1$$

Jika persamaan $f'(x)$di atas diturunkan, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut ini:

$$f''(x) = 2C_2 + 2.3C_3(x-a) + 3.4C_4(x-a)^2 + \cdots$$

Dimana

$$|x-a| < R$$

Substitusikan $x = a$ pada persamaan di atas sehingga akan menghasilkan

$$f''(a) = 2C_2$$

Jika persamaa $f''(x)$ diturunkan, maka kita akan peroleh persamaan $f'''(x)$ seperti berikut ini:

$$f'''(x) = 2.3C_3 + 2.3.4.C_4(x-a) + 3.4.5\,C_5(x-a)^2 + \cdots$$

Dimana

$$|x - a| < R$$

Substitusikan $x = a$ pada persamaan $f'''(x)$ di atas sehingga akan menghasilkan

$$f'''(a) = 2.3C_3 = 3!\,C_3$$

Jika proses di atas dilanjutkan terus, maka secara umum kita akan peroleh:

$$f^{(\mathrm{n})}(a) = 2\ x\ 3\ x\ 4\ x\ 5\ x \ldots x\ n\ x\ C_n$$

atau

$$C_n = \frac{f^{(\mathrm{n})}(a)}{n!}$$

Jika f mempunyai penyajian deret pangkat di a, yaitu jika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\ (x - a)^n, \qquad dimana\ |x - a| < R$$

maka koefisiennya diberikan oleh:

$$C_n = \frac{f^{(\mathrm{n})}(a)}{n!}$$

Catatan:

Koefisien c_n di atas adalah tunggal. Jadi, jika f memiliki penyelesaian deret pangkat di a, maka deretnya pasti berbentuk:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (\mathrm{x} - \mathrm{a})^{\mathrm{n}}$$

Jika fungsi f(x) dapat diturunkan (didiferensialkan) terus menerus dipersekitaran
$x = a$, maka f(x) tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat (*Power Series*) dari $(x - a)$ yang disebut **Deret Taylor** sebagai berikut:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots (*)$$

Artinya deret diruas kanan akan konvergen dengan jumlahnya $J = f(x)$. Perlu dicatat bahwa hubungan $f(x)$ dnegan jumlah deret Taylornya hanya berlaku (cocok) untuk nilai-nilai x yang terletak pada daerah konvergensi deretnya.

Contoh 1

1) Perderetkan $f(x) = \frac{1}{x}$ menjadi deret pangkat $(x - 1)$

   Jawab:
   Deret Taylor:

$$f(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!}f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1) + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \rightarrow f'''(1) = -6$$

$$\frac{1}{x} = 1 - \frac{(x-1)}{1!} + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$$

Jawab Interval Konvergensinya:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-1)^n}{(x-1)^{n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x-1| < 1 \rightarrow -1 < (x-1) \leq 2 \rightarrow 0 < x < 2$$

$x = 0 \rightarrow 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots$ Deret ***Divergen***

$x = 2 \rightarrow \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 \rightarrow$ Deret Divergen (DG) $|p| = |-1| = 1$

2) Perderetkan $f(x) = e^x$ menjadi deret pangkat dari $(x-1)$

Jawabnya berupa deret Taylor dengan $(x-a) = (x-1)$ atau $a = 1$ sebagai berikut:

$$e^x = f(1) + \frac{(x-1)}{1!}f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1) + \cdots$$

Diferensial (Turunan)

$$f(x) = e^x \to f(1) = e^1 = e$$

$$f'(x) = e^x \to f'(1) = e$$

$$f''(x) = e^x \to f''(1) = e$$

$$f'''(x) = e^x \to f'''(1) = e$$

Jadi

$$e^x = e + \frac{(x-1)}{1!}e + \frac{(x-1)^2}{2!}e + \frac{(x-1)^3}{3!}e + \cdots$$

Atau

$$e^x = e\left\{1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots\right\}$$

3) Carilah deret Taylor dari $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$

Jawabnya berupa deret Taylor dengan $(x - a) = (x - 1)$ atau $a = 0$ sebagai berikut:

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2$$

$$f'(x) = 6x + 4$$

$$f''(x) = 6$$

$$f'''(x) = 0$$

Untuk a = 0

$$f(0) = -2$$

$$f'(0) = 4$$

$$f''(0) = 6$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f(x) = f(0) + \frac{(x-a)^1}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ ...$$

$$f(x) = -2 + \frac{(x-0)^1}{1!} 4 + \frac{(x-0)^2}{2!} 6 + 0$$

$$f(x) = -2 + \frac{4x}{1!} + \frac{6x^2}{2!}$$

$$f(x) = -2 + 4x + 3x^2$$

Jadi deret taylor dari

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2$$

adalah

$$f(x) = -2 + 4x + 3x^2$$

4) Perderetkan

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$$

Menjadi deret pangkat $(x-1)$

Jawab:

Berupa Deret Taylor $(x-a) = (x-1)$ atau $a = 1$

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots$$

$$f(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!} f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} f'''(1) + \cdots$$

Diferensial (Turunan)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \rightarrow f(1) = 1 - 2 + 5 - 7 = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \rightarrow f'(1) = 3 - 4 + 5 = 4$$

$$f''(x) = 6x - 4 \rightarrow f''(1) = 6 - 4 = 2$$

$$f'''(x) = 6 \rightarrow f'''(1) = \mathbf{6}$$

$$f''''(x) = 0 \rightarrow f''''(1) = 0$$

$$f(x) = -3 + \frac{(x-1)}{1!}(4) + \frac{(x-1)^2}{2!}(2) + \frac{(x-1)^3}{3!}(6) + 0$$

$$f(x) = -3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$$

C. Deret Maclaurin

Sebenarnya Deret Maclaurin masih berhubungan erat dengan Deret Taylor. Deret Maclaurin merupakan kasus khusus jika ($a = 0$) maka deret Taylor berubah menjadi deret Maclaurin sebagai berikut:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots (**)$$

Deret Taylor atau Deret MacLaurin ini sangat bermanfaat dalam **metode numerik** untuk menghitung atau menghampiri nilai-nilai fungsi yang susah dihitung secara manual seperti nilai $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x$, atau $\ln(x+1)$. Tentu kita tidak akan bisa menghitung nilai-nilai fungsi tersebut tanpa menggunakan bantuan kalkulator atau tabel. Dalam modul ini menjelaskan mencoba untuk mendekati fungsi-fungsi tersebut menggunakan Deret MacLaurin.

Contoh 2

1) Perderetkan $f(x) = e^x$ menjadi deret pangkat dari x, kemudian cari interval konvergensinya.

Jawab:

Deret Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots (**)$$

yang dicari sebagai berikut:

$$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \rightarrow \ f''(0) = 1$$

Didapat:

$$e^x = \ 1 + \tfrac{x}{1!}(1) + \tfrac{x^2}{2!}(1) + \tfrac{x^3}{3!}(1) + \ \ldots$$

atau

$$e^x = \ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots (**)$$

Untuk mencari interval konvergensinya, dengan Tes d'Allembert sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{(n+1)}}{U_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{n!} . \frac{(n-1)!}{x^{n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \left|\frac{1}{n}\right|$$

$$= |x| . \frac{1}{\infty}$$

$$= \mathbf{0}$$

untuk setiap nilai x, karena 0 < 1 maka deret konvergen untuk setiap x atau konvergen untuk $-\infty < x < +\infty$

Kesimpulan:

$$e^x = \ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots (**)$$

berlaku untuk $-\infty < x < +\infty$

Catatan:

dari deret Taylor $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots (**)$ dapat dibentuk deret-deret baru antara lain:

a. Jika x diganti y didapat:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

b. Jika x diganti $-x$ didapat:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

c. Jika $x = 1$ didapat:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$e = 2.718$ disebut bilangan e / bilangan Napier.

2) Ekspansikan $f(x) = \sin x$ menjadi deret Maclaurin.

Jawab:
Deret Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

Diferensial (Turunan)

$$f(x) = \sin x \rightarrow f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow \ f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow \ f''(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f'''(x) = -cos \rightarrow \ f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'^{v}(x) = \sin x \rightarrow \ f'^{v}(0) = 0$$

$$f^{v}(x) = \cos x \rightarrow \ f^{v}(0) = 1$$

$$f^{vi}(x) = -\sin x \rightarrow \ f^{vi}(0) = 0$$

$$f^{vii}(x) = -\cos x \rightarrow \ f^{vii}(0) = -1$$

Didapat deret Maclaurinnya:
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Untuk mencari interval konvergensinya, dengan Tes d'Allembert sebagai berikut:
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{(n+1)}}{U_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} . \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x^2| \left|\frac{1}{2n\,(2n+1)}\right|$$

$$= \mathbf{0} < 1$$
untuk setiap x, jadi interval konvergensinya: $-\infty < x < +\infty$

3) Dengan cara serupa dapat dicari deret Maclaurin dari $f(x) = \cos x$, dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

interval konvergensinya: $-\infty < x < +\infty$

Jawab:

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f''''(x) = \cos x$$

Jika $f(0)$, maka

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''^{(0)} = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f''''(0) = 1$$

$$dst$$

Jadi

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

4) Deretkan $\sin^2 x$ dalam deret Maclaurin !

Jawab:

$$f(x) = \sin^2 x \quad ; \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \quad ; \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x \quad ; \quad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -4 \sin 2x \quad ; \quad f'''(0) = 0$$

$$f''''(x) = -8 \cos 2x \quad ; \quad f''''(0) = -8$$

$$f'''''(x) = 16 \sin 2x \quad ; \quad f'''''(0) = 0$$

$$f''''''(x) = 32 \cos 2x \quad ; \quad f''''''(0) = 32$$

dst

Jadi

$$sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + \frac{32x^6}{6!} - \cdots$$

5) Perderetkan $\ln(1 + x)$ menjadi deret Maclaurin

Jawab:

$$f(x) = \ln\ (1 + x) \ \rightarrow\ f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \ \rightarrow\ f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \ \rightarrow\ f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \;\rightarrow\; f'''(0) = 2$$

$$f^{iv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \;\rightarrow\; f^{iv}(0) = -6$$

Deret Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

Didapat:

$$\ln\,(1+x) = 0 + \frac{x}{1!}(1) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(2) + \frac{x^4}{4!}(-6) + \cdots$$

$$\ln\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Interval Konvegensinya: $-1 < x \leq 1$

6) Cari deret Maclaurin dari

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Jawab

Deret Maclaurin dari:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

- ***Formula Euler:*** $\boldsymbol{e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)}$

Bukti dari:

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

didapat

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$$

dengan

$$i = \sqrt{-1}$$

Mengingat:

$$i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^5 = i, dst$$

Maka:

$$e^{iy} = 1 +\ iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} \ldots$$

Atau

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$e^{iy} = (\cos y) + i\ (\sin y)\ ;$$

$$e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}((\cos y) + i\ (\sin y))$$

D. Deret Binomial

Deret Binomial merupakan salah satu bentuk khusus dari deret Maclaurin. Deret binomial merupakan suatu perluasan dari teorema binomial yang berbentuk (a+b) dalam bentuk deret tak hingga, kemudian dengan mengambil nilai a=1 dan b=x untuk menyatakan $(1 + x)^m$ dengan m adalah bilangan real, maka diperoleh deret binomial yaitu: $(1 + x)^m$

= 1 + …, berlaku untuk semua nilai x dengan |x| < 1.

Deret Binomial adalah deret Maclaurin dari $f(x) = (1 + x)^m$

$$f(x) = (1 + x)^m \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = m\,(1 + x)^{m-1} \rightarrow f'(0) = m$$

$$f''(x) = m\,(m-1)(1 + x)^{m-2} \rightarrow f''(0) = m\,(m-1)$$
$$f'''(x) = m\,(m-1)(m-2)(1 + x)^{m-3} \rightarrow f'''(0) = m\,(m-1)(m-2)$$

Deret Maclaurin:
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

Sehingga didapat deret Binomial:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots (*)$$

Jika m bulat positive maka banyak suku deret berhingga, berbentuk polynomial terdiri atas $(m + 1)$ suku.

Contoh 3

1) $m = 1 \rightarrow$ deretnya
$$(1 + x) = 1 + x \text{ (2 suku)}$$

2) $m = 2 \rightarrow$ deretnya
$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \text{ (3 suku)}$$

3) $m = 3 \rightarrow$ deretnya

$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ (4 suku)

4) $m = 4 \rightarrow$ deretnya

$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ (5 suku), dst

Ingat susunan segitiga pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Jika m bulat negatif atau pecahan maka deret Binomialnya mempunyai tak berhingga banyak suku (*infinite series*) dengan:

$$U_n = \frac{m\,(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}\,x^{n-1}$$

Dengan Tes d'Alembert dapat dicari radius konnvergensinya

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{(n+1)}}{U_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{m\,(m-1)\ldots(m-n+2)x^{n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x|$$

$$= |x|$$

jadi deret Binomial (*) konvergen untuk $|x| < 1$ atau $-1 < x < 1$

Contoh 4

1) Carilah deret Binomial dari $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Jawab:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

jadi jawabnya deret binomial dengan $m = -1$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$(1+x)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1}x + \frac{(-1)(-2)}{1.2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

berlaku untuk $-1 < x < 1$

Misal untuk

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Untuk

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

2) Cari deret Binomial dari $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Jawab:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

jadi jawabnya deret Binomial dengan $m = -\frac{1}{2}$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \cdots$$

Misal untuk

$$x = 0{,}1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}1}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{100}\right) - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{1000}\right) + \cdots$$

untuk

$$x = -0{,}1$$

$$\frac{1}{\sqrt{0{,}9}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{1000}\right) + \cdots$$

Jika x diganti $-x^2$ didapat deret binomial sebagai berikut:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots + \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n}x^{2n} + \cdots$$

3) Cari deret Binomial dari $f(x) = \frac{3}{2-x}$

Jawab:

$$f(x) = 3\left(\frac{1}{2 - x}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2(1 - \frac{1}{2}x)}\right)$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x}\right)$$

Dengan mengganti x dengan $-\frac{1}{2}x$

Maka $\frac{1}{1+x}$ menjadi $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}\right)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = 1 - \left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \cdots$$

Didapat deret Binomial dari

$$f(x) = \frac{3}{2-x}$$

Atau

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}\right)$$

Menjadi

$$f(x) = \frac{3}{2-x} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \cdots\right)$$

E. Menghitung Integral dengan Deret

Contoh 5

1) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x}\, dx =$

$$\ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = ln\frac{3}{2} - ln\frac{1}{2}$$

$$= \ln 3 - \ln 2 - \ln 1 + \ln 2$$

$$= \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

$$= 1{,}1$$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x}\, dx$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \{1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots\} dx$$

$$= \left\{x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots\right\} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\ \frac{1}{16} + \cdots\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\ \frac{1}{16} + \cdots\right]$$

$$= 1 + 0 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}\right) + 0 + \cdots$$

$$= 1{,}1$$

Rumus Integral Parsial:

*) $\int x \cos x \, dx$ → u = x → du = dx

→ dv = cos x dx → v = $\sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x$$

Contoh 6

1) $\int_0^1 e^x dx$

$$= e^x \Big|_0^1$$

$$= e^1 - e^0$$

$$= e - 1$$

$$= 2.718 - 1$$

$$= 1.718$$

Jika dihitung dengan deret:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) dx$$

$$= (x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots) \Big|_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

$$= \mathbf{1.718}$$

2) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$

$$substitusi\ y = x^2$$
$$dy = 2x\ dx$$
$$x\ dx = \frac{1}{2}dy$$

$$x = 0\ \rightarrow\ y = 0\,;\, x = 1\ \rightarrow\ y = 1$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}e^y\ dy$$

$$= \frac{1}{2}e^y \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(1.718\ ...)$$

$$= \mathbf{0.859}\ ...$$

Jika dihitung dengan deret:

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots$$

$$x\ e^{x^2} = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{6} + \frac{x^9}{24} + \cdots$$

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \int_0^1\ (\,x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{6} + \frac{x^9}{24} + \cdots)\ dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{48}x^8 + \frac{1}{240}x^{10} + \cdots\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{48} + \frac{1}{240} + \cdots$$

$$= \mathbf{0.859} \ldots$$

3) $\int_0^1 e^{x^2} dx$, dihitung dengan deret

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 (1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} \ldots)\, dx$$

$$= (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{42}x^7 + \frac{1}{216}x^9 + \cdots \Big|_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \cdots$$

$$= \mathbf{1.457} \ldots \rightarrow \boldsymbol{dibulatkan}\ \mathbf{1.46}$$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$

$$= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0)$$

$$= -(0 - 1)$$

$$= 1$$

Dihitung dengan deret:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 - \cdots \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{1}{720}(\frac{\pi}{2})^6 - \cdots$$

$$= \mathbf{1}$$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)$$

$$= (1 - 0) = \mathbf{1}$$

6) Hitung $\int_0^1 \frac{sinx}{x} \, dx$ (sampai 3 desimal)

$$sinx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{sinx}{x}\,dx = \int_0^1 (1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots)\,dx$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3.3!}+\frac{x^5}{5.5!}-\frac{x^7}{7.7!}+\cdots\right)\Big|_0^1$$

$$=\left(1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\cdots\right)$$

$$=\mathbf{0.946}$$

7) $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx =$

$$\int_0^1 (\frac{x^2}{1!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}\ldots)\,dx$$

$$=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7.3!}x^7+\frac{1}{11.5!}x^{11}-\cdots)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{42}+\frac{1}{1320}-\cdots=\mathbf{0}$$

8) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^4-x^6+\cdots)\,dx$$

$$=(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} + \cdots = \mathbf{0,464}$$

9) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+x)^2} dx =$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-2}\, dx = -(1+x)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\left(\frac{2}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Deret Binomial $m = -2$,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots)\ dx$$

$$= (x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= \mathbf{\frac{1}{3}}$$

10) $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$

Padahal $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg\ x$

$$jadi\ arctg\ x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

11) $\int_0^2 x\ cos\ x^2\ dx$

Jawab:

$$substiitusi\ y = x^2$$

$$dy = 2x\ dx$$

$$x\ dx = \frac{1}{2}dy$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0\ dan\ x = 2 \rightarrow\ y = 4$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 cos\ y\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\sin y\ \Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 4 - \sin 0)$$

$$= \mathbf{-0,378}$$

$$\int_0^2 x\ cos\ x^2\ dx$$

Dihitung dengan Deret:

$$= \int_0^2 x(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots)\, dx$$

$$= \int_0^2 (x - \frac{x^5}{2!} + \frac{x^9}{4!} - \frac{x^{13}}{6!} + \cdots)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}\,\frac{x^6}{2!} + \frac{1}{10}\,\frac{x^{10}}{4!} - \frac{1}{14}\,\frac{x^{14}}{6!} + \cdots \Big|_0^2$$

$$= 2 - \frac{64}{12} + \frac{1024}{240} - \frac{65536}{10080} + \cdots$$

$$= \mathbf{-0,378}$$

Kesimpulan rumus Deret Binomial:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2!}x^3 + \cdots$$

$$(1+x^2)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x^2 + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^4 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^6 + \cdots$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$$\int (ax+b)^m = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$$

F. Umpan Balik

1) Konvergen atau Divergen deret berikut

   a. $\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^3 + \left(\frac{11}{6}\right)^4 + \cdots$

2) Carilah interval konvergensi deret berikut

   a. $\frac{2x}{3} + \frac{(2x)^2}{6} + \frac{(2x)^3}{9} + \frac{(2x)^4}{12} + \cdots$

3) Carilah deret Taylor menjadi deret pangkat (x – 1) dari:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

4) Carilah deret Maclaurin dari:

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x}$$

5) Hitung Integral dengan deret

   a. $\int_0^1 x^2\ e^{-x} dx$

   b. $\int_0^1 x^2 \sin(x^3)\, dx$

6) Carilah Deret Binomial berikut

   a. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

   b. $f(x) = \frac{1}{2+x}$

Petunjuk untuk soal latihan:

1. Pakai syarat perlu Konvergen atau tes Cauchy
2. Pakai tes d'Alembert (yang disesuaikan) untuk deret fungsi
3. Deret Taylor dengan $(x - a) = (x - 1)$
4. Cari deret dari $f(x) = \cos x$

$$f(x) = \cos 2x \rightarrow f(x) = 1 - \cos 2x \rightarrow f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x}$$

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB V
FUNGSI PERIODIK DERET FUNGSI

A. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak kegiatan kita yang melibatkan funsi priodik seperti dalam pengukuran gelombang, kelistrikan, bunyi dan lainnya. Dalam matematika fungsi priodik dipelajari jika Anda membahas tentang *sinus* dan *cosinus*. Agar menambah pemahaman, dalam Bab ini kita akan bahas mengenai fungsi priodik *sinus* dan *cosinus*. Fungsi priodik juga dapat disebut sebagai **deret fourier**.

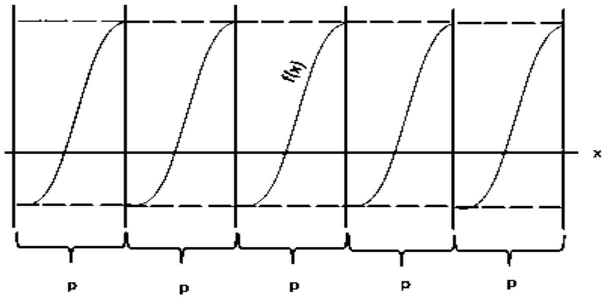
B. Fungsi Periodik

Fungsi $f\ (x)$ disebut fungsi periodik dengan periode p. Jika "p" adalah bilangan positif terkecil sehingga berlaku $f(x+p)=f(x)$

Sebagai perluasannya maka

$$\begin{aligned}\ldots = f(x-2p) &= f(x-p) = f(x) = f(x+p)\\ &= f(x+2p) = f(x+3p) = \cdots\end{aligned}$$

Jika $f\ (x)$ periodik dengan periode p maka **grafiknya** akan **berulang** bentuknya setiap interval sepanjang p



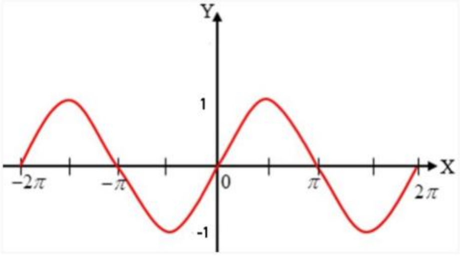
Gambar 5.1. Fungsi Periodik dengan Periode *p*

Beberapa contoh fungsi periodik antara lain:

1. $f\ (x) = \sin x \rightarrow$ fungsi periodik dengan periode $p = 2\pi$

$$..= \sin(x - 4\pi) = \sin(x - 2\,\pi) = sin\ x = \sin(x + 2\,\pi) = \sin(x + 4\,\pi) = \sin(x + 6\,\pi) =..$$

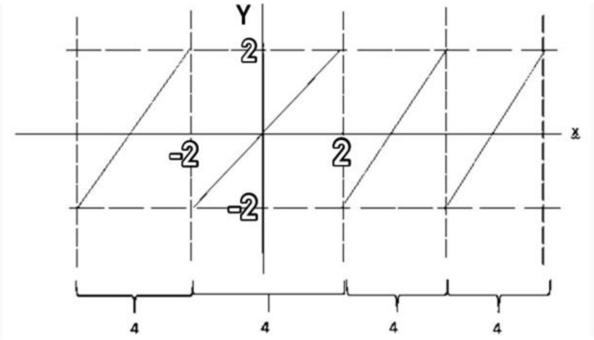
Grafiknya akan berulang bentuknya setiap panjang interval 2π



Gambar 5.2. Fungsi Periodik dengan Periode 2π

2. Gambarkan fungsi periodik $f\ (x)$ dengan periode 4 yang didefinisikan sebagai berikut:

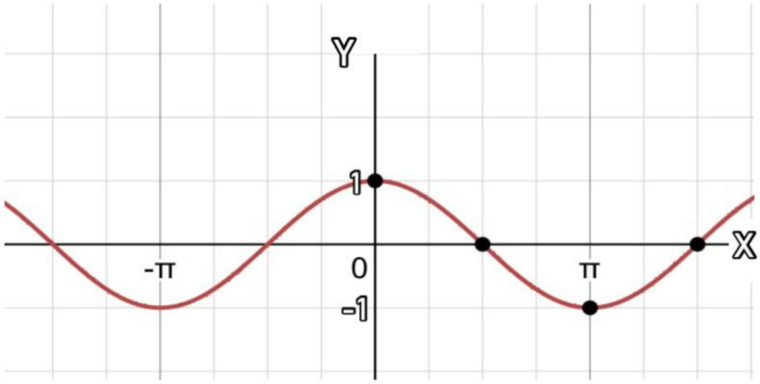
$$f\ (x) = x \text{ untuk } -2 < x < 2$$



Gambar 5.3. Fungsi Periodik dengan Periode 4

3. $f\ (x) = \cos x$ juga fungsi periodik dengan periode 2π

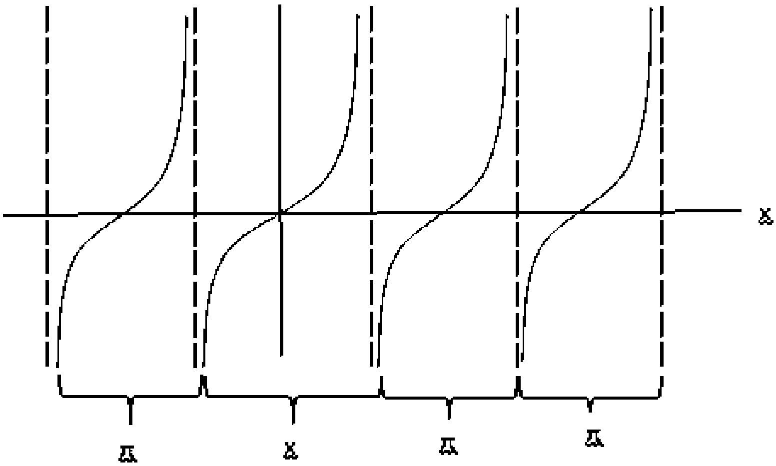
$$\ldots = \cos\ (x - 4\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos\ x =$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos\ (x + 4\pi) = \ldots$$



Gambar 5.4. Fungsi Periodik dengan Periode 2π

4. $f\ (x) = tg\ x$, fungsi periodik dengan periode π

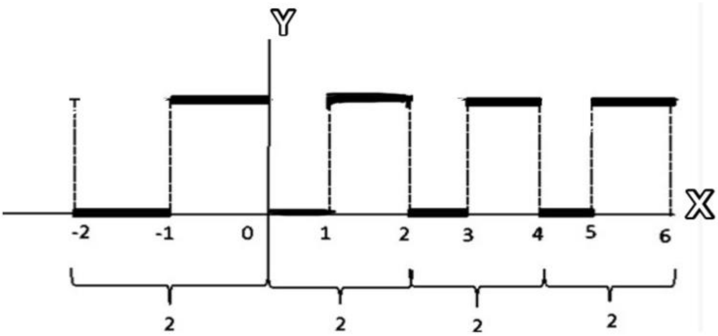
$$\ldots = \mathrm{tg}(\mathrm{x} - \pi) = tg\ x = \mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\ (x + 2\pi) = \ldots$$



Gambar 5.5. Fungsi Periodik dengan Periode π

5. $f\ (x)$ periodik dengan periode-periode yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f\ (x) = \begin{cases} 0 \ \ untuk\ 0 < x < 1 \\ 1\ untuk\ 1 < x < 2 \end{cases}$$



Gambar 5.6. Fungsi Periodik dengan Periode 2

C. Deret Fourier

Perderetkan dari fungsi $f\ (x)$ yang periodik, jika fungsi f(x) terdefinisi pada interval (-L,L) dan diluar interval tersebut f(x) periodik dengan periode 2L. Bentuk umum deret Fourier dari fungsi $f\ (x)$ dengan periode 2L (yang terdefinisi/didefinisikan pada interval (-L,L))

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n\ cos \frac{n\pi}{L} x + b_n\ sin \frac{n\pi}{L} x\right\}\ (*)$$

Secara panjang dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \left\{ \begin{matrix} a_1 \cos\frac{\pi}{L}x + b_1 \sin\frac{\pi}{L}x + a_2 \cos\frac{2\pi}{L}x + \\ b_2 \sin\frac{2\pi}{L}x + a_3 \cos\frac{3\pi}{L}x + b_3 \sin\frac{3\pi}{L}x + \cdots \end{matrix} \right\} (**)$$

$a_o, a_{n,} b_n$ dinamakan <u>Koefisien Fourier</u> yang dicari dengan rumus-rumus sebagai berikut:

$$\boxed{a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}$$

(**)

Fungsi $f(x)$ disebut fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap x. Fungsi $f(x)$ disebut fungsi ganjil jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap x.

Jika $f(x)$ fungsi genap maka $bn = 0$ sehingga yang muncul hanya suku-suku yang mengandung cosinus (suku-suku dari an).

Jika $f(x)$ fungsi ganjil maka $an = 0$, sehingga yang muncul hanya suku-suku yang mengandung sinus (suku-suku dari bn).

Perhatikan:

(*) dan (**) diatas untuk $f(x)$ dengan periode $2L$

(*)Jika $f(x)$ mempunyai periode 2π → artinya $2L$ diganti 2π atau L diganti π

maka (*) dan (**) diatas menjadi lebih sederhana (dengan cara mengganti L dengan π) sehingga didapat (*) dan (**) baru yang lebih sederhana sebagai berikut:

Untuk periode 2π ($f(x)$ terdefinisi pada interval $(-\pi, \pi)$):

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \, cos \frac{n\pi}{\pi} x + b_n sin \frac{n\pi}{\pi} x \right\}$$

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{n} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \text{ (*)}$$

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; \sin nx\, dx$$

(**)

Contoh 1

1) Diketahui fungsi periodik $f(x)$ dengan periode 4 terdefinisi / didefinisikan sebagai berikut:

$$f\ (x) = \begin{cases} 0 \;\; untuk -2 < x < 0 \\ \;\; 3\, untuk\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

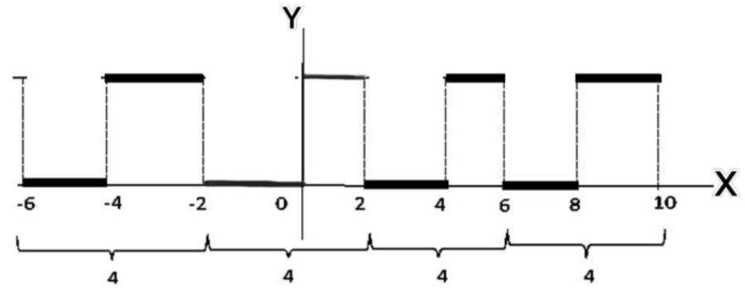
a. Gambarkan grafik $f(x)$

b. Carilah koefisien-koefisien Fouriernya

c. Tulisakan deret Fouriernya

Jawab:

a. Periode 2L= 4, maka L= 2



Gambar 5.7. Fungsi Periodik dengan Periode 2L

b. Mencari koefisien-koefisien Fourier $a_o,\ a_n, b_n$.
   Periode 4 = 2L, maka L =2

Rumus-rumus yang dipakai:

- $a_o = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$

$$a_o = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2} 3\, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3\, dx = \frac{1}{2}(3x)\Big|_{0}^{2}$$

$$a_o = \frac{1}{2}(3x)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}(6-0)$$

$$= 3 \rightarrow a_o = \mathbf{3}$$

- $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos \frac{n\pi}{2} x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} 0 \cos \frac{n\pi}{2} x \, dx + \int_{0}^{2} 3 \cos \frac{n\pi}{2} x \, dx\right\}$$

$$= \frac{3}{2} \int_{0}^{2} \cos \frac{n\pi}{2} x \, dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} x\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} x \Bigg|_0^2$$

$$= \frac{3}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0)$$

$$= \mathbf{0}$$

$$a_n = 0 \rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0 \ldots$$

- $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\ \sin\frac{n\pi}{2} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} 0\ sin\frac{n\pi}{2} x\ dx + \int_{0}^{2} 3\sin\frac{n\pi}{2} x\ dx\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{2} sin\frac{n\pi}{2} x\ dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\ cos\frac{n\pi}{2} x\right)\Big|_0^2$$

$$= -\frac{3}{n\pi}\ cos\frac{n\pi}{2} x\ \Big|_0^2$$

$$= -\frac{3}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos n\pi \rightarrow \begin{cases} n\ ganjil, \cos n\pi = -1 \\ n\ genap, \cos n\pi = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$b_n = -\frac{3}{n\pi}(\cos\ n\pi - \cos 0)$$

$$\to \begin{cases} n\ ganjil, & b_n = -\frac{3}{n\pi}(-1-1) = \frac{6}{n\pi} \to b_{1=}\frac{6}{\pi},\ b_{3=}\frac{6}{3\pi}, \dots \\ n\ genap, & b_n = -\frac{3}{n\pi}(1-1) = 0 \to b_{2=}0,\ b_{4=}0, \dots \end{cases}$$

c. Deret Fouriernya:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \begin{Bmatrix} a_1\, cos\frac{\pi}{L}x + b_1\, sin\frac{\pi}{L}x + a_2\, cos\frac{2\pi}{L}x \\ +b_2\, sin\frac{2\pi}{L}x + a_3\, cos\frac{3\pi}{L}x + b_3\, sin\frac{3\pi}{L}x + \cdots \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} + \left\{0 + \frac{6}{\pi}\ sin\frac{\pi}{2}x + 0 + 0 + 0 + \frac{6}{3\pi}\ sin\frac{3\pi}{2}x + \cdots\right\}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\ sin\frac{\pi}{2}x + \frac{6}{3\pi}\ sin\frac{3\pi}{2}x + \cdots$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3}\ sin\frac{3\pi}{2}x + \cdots\right)$$

2) Perderetkan ke dalam deret Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x\,, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(Periode $2\pi,\ L = \pi$)

- $a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\lfloor -\cos x \rfloor \begin{matrix}\pi \\ 0\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}$$

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cos(nx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x \,.\cos(nx)\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\lfloor \frac{\sin x \,.\sin(nx)}{n} + \frac{\cos x \,.\cos(nx)}{n^2} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2}\int_{0}^{\pi} \sin x \,.\cos(nx)\ dx \right\rfloor$$

$$= \frac{n^2}{(n^2-1)\pi}\left(\frac{\sin x\,.\sin(nx)}{n} + \frac{\cos x\,.\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$cara\ lain{:}\ \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\int_0^\pi \sin x\,.\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x\,.\sin(nx)}{n} + \frac{\cos x\,.\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$jadi\int_0^\pi \sin x\,.\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{n^2}{(n^2-1)}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x\,.\sin(nx)}{n} + \frac{\cos x\,.\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{lcc} \sin x & & \cos(nx) \\ & \searrow & \\ \cos x & & \frac{\sin(nx)}{n} \\ & \searrow & \\ -\sin x & & \frac{-\cos nx}{n^2} \end{array}}$$

$$= \frac{1+\cos(n\pi)}{(n^2-1)\pi} = \frac{-2}{(4n^2-1)\pi}\,(= 0\ untuk\ n\ ganjil)$$

- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 0 \sin(nx)\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \sin(nx)\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\sin x \,.\cos(nx)}{n} + \frac{\cos x \,.\sin(nx)}{n^2} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2} \int_{0}^{\pi} \sin x \,.\cos(nx)\ dx \right]$$

$$= \frac{n^2}{(n^2-1)\pi} \left(\frac{-\sin x \,.\sin(nx)}{n} + \frac{\cos x \,.\sin(nx)}{n^2} \right)_0^{\pi} \ ($$

$$= 0\ untuk\ n > 1$$

$$= \frac{\cos \pi \,.\sin(n\pi)}{(n^2-1)\pi} = \frac{-1\ \sin(n\pi)}{(n^2-1)\pi}$$

$$= \frac{-1\ \pi \cos \pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Deret Fourier yang ditanyakan:

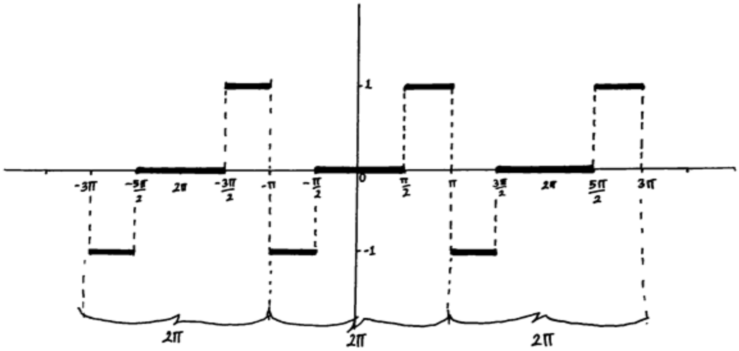
$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(nx)}{((2n)^2 - 1)}$$

$$atau\ f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \cdots\right)$$

3) Perderetkan menjadi Deret Fourier

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

(periode $2\pi,\ L = \pi$)



Gambar 5.8. Contoh Soal Fungsi Periodik untuk Periode 2π

- $a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -1\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\lfloor -x\rfloor_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} + \lfloor x\rfloor_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \pi + \pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \mathbf{0}$$

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -1.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 0.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -1.\cos(\mathrm{nx})\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1.\cos(\mathrm{nx})\ dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} + \left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\right] - \left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\right] \quad (\sin(n\pi) = 0)$$

$$= \mathbf{0}$$

- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -1.\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1.\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} - \left[\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi}(cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi)\right] - \left[\frac{1}{\pi}(\cos n\pi - cos\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}(cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi)\right]$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}$$

$$b_2 = -\frac{2}{\pi}$$

$$b_3 = \frac{2}{3\pi}$$

$$b_4 = -\frac{2}{5\pi}$$

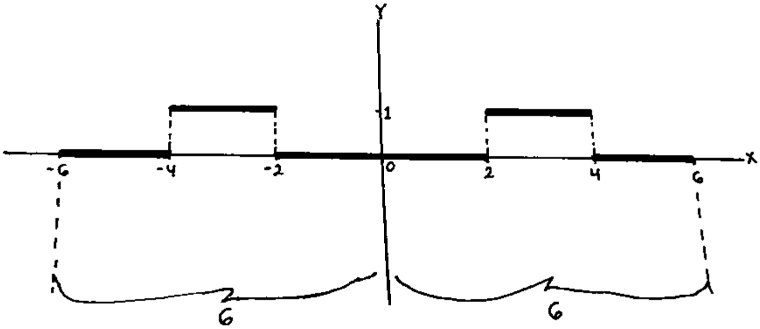
$$dst \ldots$$

$$jadi\ f(x) = \tfrac{1}{\pi}(2\sin x - 2\sin 2x + \tfrac{2}{3}\sin 3x - \tfrac{2}{5}\sin 5x + \cdots$$

4) Perderetkan

$$f(x) = \begin{cases} 0 \rightarrow 0 < x < 2 \\ 1 \rightarrow 2 < x < 4 \\ 0 \rightarrow 4 < x < 6 \end{cases}$$

(Periode $6, L = 3$)



Gambar 5.9. Contoh Soal Fungsi Periodik untuk Periode $3L$

- $a_o = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)dx$

$$a_o = \frac{1}{3}(\int_0^2 0\,dx + \int_2^4 2\,dx + \int_4^6 0\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^4 2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\lfloor 2x \rfloor \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}(8 - 4)$$

$$= \mathbf{\frac{4}{3}}$$

- $a_n = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\int_0^2 0\ \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_2^4 2\ \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_4^6 0\ \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^4 2\ \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left[2\,\frac{3}{n\pi}\,sin\frac{n\pi x}{3}\right]\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{4n\pi}{3} - \sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{n\pi}(\sin\frac{2n\pi}{3})$$

$$(\sin\frac{4n\pi}{3} = -\sin\frac{2n\pi}{3})$$

- $b_n = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x) \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$

$$b_n = \frac{1}{3}\left(\int_0^2 0\ \sin\frac{n\pi x}{3}dx + \int_2^4 2\ \sin\frac{n\pi x}{3}dx + \int_4^6 0\ \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^4 2\ \sin\frac{n\pi x}{3}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left[2\frac{-3}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{3}\right]_2^4\right\}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left(\cos\frac{4n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right) = \mathbf{0}$$

$$(\cos\frac{4n\pi}{3} = \cos\frac{2n\pi}{3})$$

Jadi:

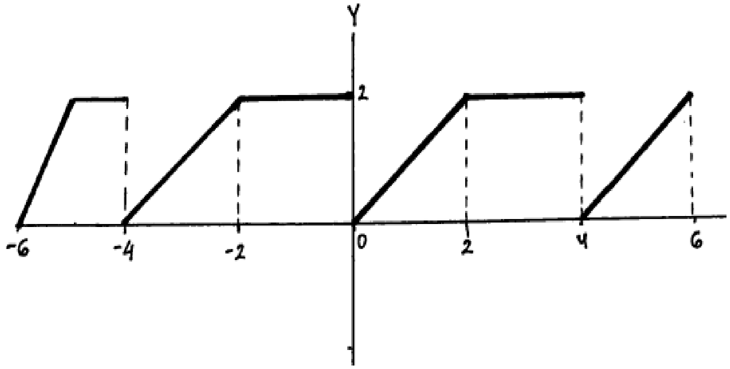
$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi}\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}(sin\frac{2n\pi}{3}cos\frac{n\pi x}{3})$$

5) Perderetkan menjadi deret Fourier:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

(Periode 4, $L = 2$)

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n cos \frac{n\pi}{\pi} x + b_n sin \frac{n\pi}{\pi} x \right\}$$



Gambar 5.10. Contoh Soal Fungsi Periodik untuk Periode 4

- $a_o = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx$

$$a_o = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\, dx$$

$$= x \Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{4}x^2 \Big|_{0}^{2}$$

$$= 2 + 1$$

$$= \mathbf{3}$$

- $a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \cos\frac{n\pi x}{2}\, dx$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2.\cos\frac{n\pi x}{2}\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x.\cos\frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} cos\frac{n\pi x}{2})\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\right] \quad (\cos n\pi = 0, untuk\ n\ genap)$$

$$= -\frac{4}{(2m-1)^2\pi^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{X} & cos\frac{n\pi x}{2} \\ 1 & \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \\ 0 & \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{array}}$$

- $b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2.\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x.\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\,sin\frac{n\pi x}{2}\Big)\Big]_{0}^{2}$$

$$= \frac{-2}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{-2}{n\pi}}$$

X	$sin\frac{n\pi x}{2}$
1	$\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}$
0	$\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}$

Jadi:

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$
$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi x}{2}$$

Atau dapat ditulis:

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

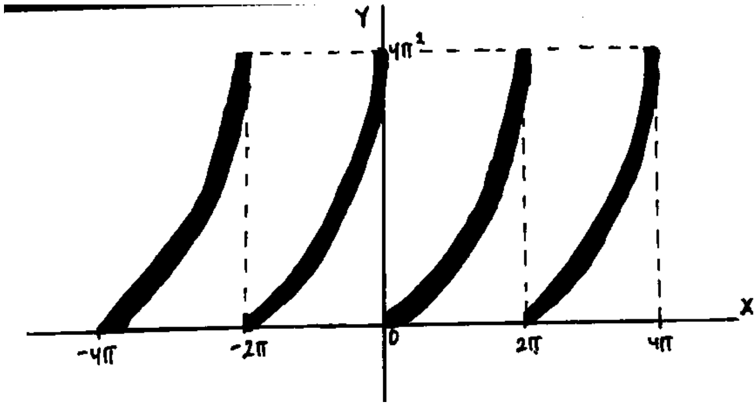
$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1} sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2} sin\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3} sin\frac{3\pi}{2}x + \cdots\right)$$

6) Perderetkan

$$f(x) = x^2, \qquad 0 < x < 2\pi$$

(Periode $2\pi, L = \pi$)

Penyelesaian:



Gambar 5.11. Contoh Soal Fungsi Periodik untuk Periode 2π

- $a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3\pi} x^3 \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{3\pi}(8\pi^3)$$

$$= \boldsymbol{\frac{8\pi^2}{3}}$$

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2.\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2.\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{4\pi}{n^2} + 0\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{4\pi}{n^2}}$$

x^2	$\cos nx$
$2x$	$\frac{1}{n}\sin\ nx$
2	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$

0	$\frac{-1}{n^3}\sin nx$

- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2.\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2.\sin \mathrm{nx}\ \ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-4\pi^2}{n} + 0 + 0\right)$$

$$= -\frac{4\pi}{n}$$

x^2	$\sin nx$
$2x$	$-\frac{1}{n}\cos\ nx$
2	$\frac{-1}{n^2}\sin nx$
0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

Jadi:

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx)$$

7) Perderetkan menjadi deret Fourier:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(Periode $2\pi,\ L = \pi$)

Penyelesaian:

- $a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\pi)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{2}(x - 2\pi)^2\right|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(-\pi)^2\right]$$

$$= \mathbf{0}$$

$-x-2\pi$	$\cos nx$
1	$\frac{\sin nx}{n}$
0	$\frac{-\cos nx}{n^2}$

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-2\pi)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x-2\pi}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right]$$

$$= \mathbf{0}$$

- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \ \sin nx \ dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\pi) \ \sin nx \ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Big|_0^{\pi}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x - 2\pi}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos n\pi\right]$$

$$= \frac{-2}{n}\cos n\pi$$

Deret Fourier yang ditanyakan:

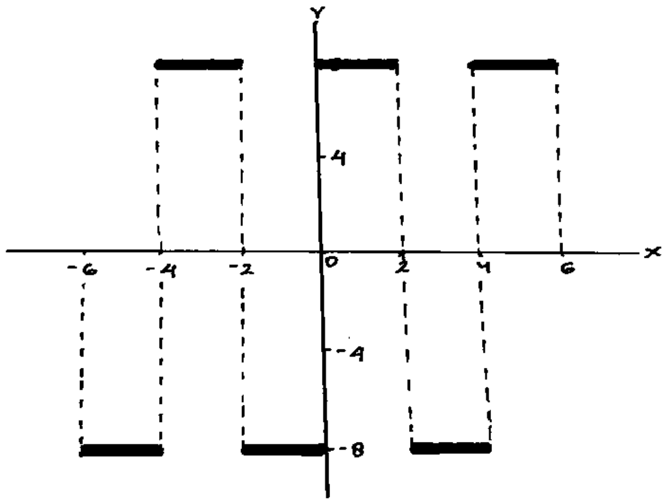
$$f(x) = 2(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots)$$

8) Perderetkan

$$f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x < 2 \\ -8, & 2 < x < 4 \end{cases}$$

(Periode 4, $L = 2$)

Penyelesaian:



Gambar 5.12. Contoh Soal Fungsi Periodik untuk Periode 4

- $a_o = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx$

$$a_o = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 8\,dx - \int_2^4 8\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lfloor 8x \rfloor \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} - \lfloor 8x \rfloor \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(16 - 32 + 16)$$

$$= \mathbf{0}$$

- $a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 8.\ \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_2^4 8.\ \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)$$

$$= 4\left\{\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_2^4\right\}$$

$$= \mathbf{0}\ (\sin n\pi = 0)$$

- $b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 8.\ \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_2^4 8.\ \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)$$

$$= 4\left\{\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_2^4\right\}$$

$$= \frac{8}{n\pi}(-\cos n\pi + 1 + 1 - \cos n\pi)$$

$$= \frac{16}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \frac{32}{n\pi} \ (n \ ganjil, \ \cos n\pi = (-1)^n)$$

Jadi:

$$f(x) = \frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)}$$

Atau dapat ditulis:

$$f(x) = \frac{32}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{1} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{2}}{3} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{2}}{5} + \cdots \right)$$

9) Perderetkan menurut deret Fourier

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & 0 \leq x \leq \pi \\ -x - \pi, & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

periode $2\pi, L = \pi$

Penyelesaian:

- $a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x-\pi)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x+\pi)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|-\frac{1}{2}x^2 - \pi x\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{2}x^2 + \pi x\right|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2 - \pi^2\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2 + \pi^2\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2} - 1\right] + \pi\left[\frac{1}{2} + 1\right]$$

$$= \boldsymbol{\pi}$$

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x-\pi)\cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x+\pi)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(-x-\pi)\frac{\sin nx}{n} - (-1)\frac{-\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}((x+\pi)\frac{\sin nx}{n} - (1)\frac{-\cos nx}{n^2})\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\lfloor -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right\rfloor + \frac{1}{\pi}\left\lfloor -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right\rfloor$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\lfloor(-1)^n - 1\rfloor$$

$$= \boldsymbol{\frac{-4}{n^2\pi}} \text{ Untuk } n \text{ ganjil}$$

dan sama dengan 0, untuk n genap.

$-x-\pi$	$\cos nx$
-1	$\frac{1}{\mathrm{n}}\sin nx$
0	$\frac{1}{n^2}\cos nx$

- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x-\pi)\ \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+\pi)\ \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(-x-\pi)\frac{-\cos nx}{n}$$

$$- (-1)\frac{-\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}((x+\pi)\frac{-\cos nx}{n}$$

$$- (1)\frac{-\sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\lfloor\frac{\pi}{n}\right\rfloor + \frac{1}{\pi}\left\lfloor-\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{\pi}{n}\right\rfloor$$

$$= \frac{1}{n}\lfloor(-1) - 2(-1)^n + 1\rfloor$$

$$= \frac{2}{n}(1-(-1)^n)$$

$$= \frac{4}{n}, untuk\ n\ ganjil$$

$$= 0, untuk\ n\ genap$$

Deret Fourier yang ditanyakan:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) + 4(\frac{\sin x}{1}$$

$$+ \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots)$$

D. Umpan Balik

1) Deret Fourier

Diketahui: Fungsi Periodik $f(x)$ dengan periode 2π didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; untuk \; -\pi < x < 0 \\ 3 \; untuk \; 0 < x < \pi \end{cases}$$

a. Gambar grafiknya
b. Carilah deret Fouriernya

2) Perderetkan

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Kedalam Deret Fourier

Periode 2π, L= π

a. Gambar grafiknya
b. Carilah deret Fouriernya

3) Perderetkan

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Periode 2π, $L = \pi$

a. Gambar grafiknya
b. Carilah deret Fouriernya

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB VI
FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA

A. Pendahuluan

Fungsi gamma dan beta merupakan fungsi-fungsi istimewa yang sering muncul dalam pemecahan persamaan differensial, proses fisika, perpindahan panas, gesekan sumber bunyi, rambatan gelombang, potensial gaya, persamaan gelombang, mekanika kuantum dan lainnya. Fungsi gamma dan beta merupakan fungsi dalam bentuk pernyataan integral dan mudah untuk dipelajari. Kedua fungsi ini biasanya dibahas secara rinci dalam fungsi bilangan kompleks. Dalam Bab ini hanya dibahas secara definisi dan sifat-sifat sederhana yang dimiliki fungsi tersebut. Banyak masalah integral yang dapat diselesaikan dalam bentuk fungsi gamma atau beta.

B. Fungsi Gamma (τ)

Fungsi gamma sering digunakan untuk menyelesaikan bentuk integral yang cukup rumit. Untuk menyelesaikan soal-soal integral dengan menggunakan fungsi gamma kita harus membandingkan kembali dengan definisi fungsi gamma. Dua hal yang harus diperhatikan adalah batas integrasinya dan integralnya. Integral-integral ini harus diolah sedemikian rupa sehingga menjadi bentuk definisi fungsi gamma. **Fungsi gamma dikenal sebagai** integral Euler jenis kedua. Fungsi Gamma

Definisinya:

$$\tau(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

- $n = 1 \rightarrow \ \tau(1)$

$$\tau(1) = \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\, dx$$

$$= -e^{-x} \Big|_0^\infty$$

atau

$$= -\frac{1}{e^x}\Big|_0^\infty$$

$$= -\left(\frac{1}{e^\infty} - \frac{1}{e^0}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right)$$

$$= -(0 - 1)$$

$$\boldsymbol{\tau(1) = 1}$$

- $n = 2 \rightarrow \tau(2)$

$$= \int_0^\infty x^{2-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty x e^{-x}\, dx$$

dicari dengan integral parsial

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= (-xe^{-x})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\ dx$$

$$= -\frac{x}{e^x}\Big|_0^\infty + 1$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

$$\boldsymbol{\tau(2) = 1}$$

- $n = 3 \rightarrow \tau(3)$

$$= \int_0^\infty x^{3-1}e^{-x}dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 e^{-x}\ dx$$

diintegral parsial:

$$\tau(3) = -x^2e^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}\ dx$$

$$= 0 + 2\,\tau(2)$$

$$\tau(3) = 2$$

$$\boldsymbol{\tau(3) = 2\tau(2)}$$

- $n = 4 \rightarrow \tau(4)$

$$= \int_0^{\infty} x^{4-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\, dx$$

diintegral parsial

$$\tau(4) = -x^3 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + 3 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx$$

$$= 0 + 3\,\tau(3)$$

$$\tau(4) = 6$$

$$\boldsymbol{\tau(4) = 3\tau(3)}$$

Dengan cara serupa didapat $\tau(5) = 4\tau(4)$, dan seterusnya. Secara umum diperoleh rumus-rumus:

$$\tau(n+1) = n\,\tau(n)$$

atau

$$\tau(n) = \frac{\tau(n+1)}{n}$$

$$\tau(1) = 1$$

- $\tau(2) = \tau(1+1)$

$$= 1\ \tau(1)$$

$$= 1$$

- $\tau(3) = \tau(2 + 1)$

$$= 2\ \tau(2)$$

$$= 2.1$$

$$= 2!$$

- $\tau(4) = \tau(3 + 1)$

$$= 3\ \tau(3)$$

$$= 3.2.1$$

$$= 3!$$

-

-

-

$$dst$$

Secara umum didapat rumus

$$\tau(n) = (n - 1)!$$

atau

$$\tau(n + 1) = n!$$

$\tau(n)$ disebut juga fungsi faktorial, yaitu perkalian berlanjut, dimana n = 1, 2, 3, … Jadi fungsi Gamma tidak terdefinisi pada nol dan bilangan bulat negatif. Nilai fungsi gamma untuk α bulat positif sangat mudah dihitung dengan menggunakan bentuk faktorial.

Contoh 1

1) Hitung

$$\frac{\tau(3)\tau(4)}{\tau(5)}$$

Jawab:

- $\tau(3) = 2!$

$$= 2.1$$

$$= \mathbf{2}$$

- $\tau(4) = 3!$

$$= 3.2.1$$

$$= \mathbf{6}$$

- $\tau(5) = 4!$

$$= 4.3.2.1$$

$$= \mathbf{24}$$

$$\frac{\tau(3)\tau(4)}{\tau(5)} = \frac{(2)(6)}{24} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Beberapa Rumus lain

$$\tau(p)\tau(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1$$

Khusus untuk

$$p = \frac{1}{2} \rightarrow \ \tau\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right)\tau\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{1} = \pi$$

$$\left(\tau\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \ \pi$$

atau

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Berdasarkan Rumus-rumus diatas dapat dipecahkan soal-soal berikut:

2) Hitung:

a. $\tau\left(\frac{3}{2}\right)$

b. $\tau\left(\frac{5}{2}\right)$

Jawab:
Menggunakan rumus $\tau(n + 1) = n\ \tau(n)$

a. $\tau\left(\frac{3}{2}\right)$

$$= \tau\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ \tau\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

b. $\tau\left(\frac{5}{2}\right)$

$$= \tau\left(\frac{3}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{3}{2}\ \tau\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$

3) Hitung:

a. $\tau\left(-\frac{1}{2}\right)$

b. b. $\tau\left(-\frac{3}{2}\right)$

c. c. $\tau\left(-\frac{5}{2}\right)$

Jawab menggunakan rumus:

$$\tau(n) = \frac{\tau(n+1)}{n}$$

a. $\tau\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\tau\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\tau\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \boldsymbol{-2\sqrt{\pi}}$$

b. $\tau\left(-\frac{3}{2}\right)$

$$= \frac{\tau\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\tau\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(-2\sqrt{\pi}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{\pi}}$$

c) $\tau\left(-\frac{5}{2}\right)$

$$= \frac{\tau\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{\tau\left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{5}{2}\right)}$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right)$$

$$= -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}\sqrt{\boldsymbol{\pi}}$$

4) Hitung:

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\sqrt[3]{x}}\, dx$$

Misalkan $\sqrt[3]{x} = y$

$$x = y^3$$

$$dx = 3y^2 dy$$

$$\int_0^\infty y^{3/2}\, e^{-y}\, 3y^2 dy$$

$$= 3\int_0^\infty y^{7/2}\, e^{-y} dy$$

$$= 3\ \tau\left(\frac{9}{2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{7}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{315}\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}{\mathbf{16}}$$

5) Hitunglah:

$$\int_0^\infty 2^{-4x^2} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-4x^2 \ln 2} \, dx$$

Misalkan

$$4x^2 \ln 2 = y$$

$$x = \left(\frac{y}{4 \ln 2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{\ln 2}} dy$$

$$\int_0^\infty 2^{-4x^2} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{\ln 2}} dy$$

$$= \frac{\tau\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{\ln 2}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\sqrt{\pi}}}{\mathbf{4\sqrt{\ln 2}}}$$

6) Hitunglah

$$\int_0^1 (x \ln x)^4 dx$$

Misalkan

$$\ln x = -y$$

$$x = e^{-y}$$

atau

$$dx = -e^{-y} dy$$

$$\int_0^1 x^4 \, (\ln x)^4 \, dx$$

Untuk x = 0 didapat y = ∞ , dan untuk x = 1 didapat y = 0

$$= -\int_\infty^0 e^{-4y} (-y)^4 \, e^{-y} \, dy$$

$$= \int_0^\infty y^4 e^{-5y} \, dy$$

$$= \frac{1}{5^5} \int_0^\infty (5y)^4 \, e^{-5y} \, d(5y)$$

$$= \frac{1}{3125} \, \tau(5)$$

$$= \mathbf{\frac{24}{3125}}$$

7) Hitunglah:

$$\int_0^\infty x^2 \, e^{-4x^2} dx$$

Misalkan

$$4x^2 = y$$

$$x^2 = \frac{1}{4} y$$

$$x = \frac{1}{2} \, y^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} \, dy$$

$$\frac{1}{4} \int_0^\infty y \, e^{-y} \, \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} \, dy$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} e^{-y} \, dy$$

$$= \frac{1}{16} \, \tau \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \, \frac{1}{2} \tau \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}} \sqrt{\boldsymbol{\pi}}$$

C. Fungsi Beta ($\boldsymbol{\beta}$)

Bila ada jenis kedua fungsi Gamma, tentu ada jenis pertama. Integral Euler jenis pertama **adalah** fungsi Beta. Karena fungsi beta merupakan fungsi dua variabel maka dalam pengerjaannya lebih sedikit sulit daripada fungsi gamma. Sama seperti pada fungsi gamma, fungsi beta juga banyak digunakan untuk menyelesaikan bentuk integral yang cukup rumit.

Fungsi Beta Definisinya:

a. Konvergen untuk $n \; dan \; m > 0$

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1} \, dx,$$

b. Mempunyai sifat $\beta(m,n) = \beta(n,m)$

Buktinya

$$\beta(n,m) = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$$

Menggunakan **<u>substitusi:</u>**

$$x = 1 - y$$
$$y = 1 - x$$

Untuk x = 0 , y = 1 dan untuk x = 1, y = 0

$$dx = -dy$$

$$\int_{x=0}^{x=1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= \int_{y=1}^{y=0} (1-y)^{m-1}\,y^{n-1}\,(-dy)$$

$$= -\int_{y=1}^{y=0} y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy$$

$$= \beta(n,m)$$

c. Rumus Beta berikutnya

$$\int_{0}^{\frac{n}{2}} (sin^{2n-1}\varphi)(cos^{2n-1}\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\, \beta(m,n)$$

d. Rumus Beta selanjutnya

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$$

$$= \tau(p)\, \tau(1-p)$$

$$= \frac{\pi}{\sin p\pi}\ (0 < p < 1)$$

e. Hubungan antara Fungsi Beta dengan Fungsi Gamma:

$$\beta(m,n) = \frac{\tau(m)\, \tau(n)}{\tau(m+n)}$$

Jadi menghitung fungsi beta diubah menjadi fungsi gamma.

Contoh 2

1) Hitung

$$\int_0^1 x^8(1-x)^4\,dx = \beta(9,5)$$

$$= \frac{\tau(9)\,\tau(5)}{\tau(14)}$$

$$= \frac{8!\;\,4!}{13!}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6435}}$$

2) Hitung $\beta(3,2)$

$$\beta(3,2) = \frac{\tau(3)\,\tau(2)}{\tau(3+2)}$$

$$= \frac{\tau(3)\,\tau(2)}{\tau(5)}$$

$$= \frac{(2!)(1!)}{(4!)}$$

$$= \frac{(2.1)(1)}{(4.3.2.1)} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

3) Hitung

$$\int_0^1 x^5 \, (1-\sqrt{x})^8 \, dx$$

Misalkan

$$\sqrt{x} = y$$

$$x = y^2$$

$$dx = 2y \, dy$$

$$\int_0^1 y^{10} \, (1-y)^8 \, 2y \, dy$$

$$= 2 \int_0^1 y^{11} \, (1-y)^8 \; dy$$

Maka,

$$2 \, \beta(12, 9)$$

$$= \frac{2 \, \tau(12) \, \tau(9)}{\tau(21)}$$

$$= \frac{2 \, (11! \, 8!)}{20!}$$

Jadi jawabnya:

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5290740}}$$

4) Hitung $\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\tau\left(\frac{3}{2}\right)\tau\left(\frac{1}{2}\right)}{\tau\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\tau\left(\frac{3}{2}\right)\tau(\frac{1}{2})}{\tau(2)},$$

Karena

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

dan

$$\tau\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)}{(1!)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi}$$

5) Hitung

$$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx$$

$$= \beta(3,4)$$

$$= \frac{\tau(3)\,\tau(4)}{\tau(7)}$$

$$= \frac{2!\,3!}{6!}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{60}}$$

6) Hitung

$$\int_0^1 x^2(1-x)\,dx$$

Cara I: $\int_0^1 x^2(1-x)\,dx$

$$= \int_0^1 (\,x^2 - x^3)\,dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1$$

$$= \mathbf{\frac{1}{12}}$$

Cara II: (Dengan fungsi Beta):

$$\int_0^1 x^2\,(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{3-1} (1-x)^{2-1} \, dx$$

$$= \beta(3,2)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{12}}$$

7) Hitung:

$$\int_0^1 x^8 (1-x)^4 \, dx$$

$$= \int_0^1 x^{9-1} (1-x)^{5-1} \, dx$$

$$\beta(9,5) = \frac{\tau(9)\,\tau(5)}{\tau(14)}$$

$$= \frac{(8!)(4!)}{(13!)}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{6435}}$$

Contoh dengan cara substitusi:

8) $\int_0^1 x^4 (1-\sqrt{x})^5 \, dx$,

Substitusinya

$$y = \sqrt{x}$$

atau

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

atau

$$dx = 2\, x^{\frac{1}{2}}\, dy \rightarrow dx = 2y\, dy$$

$$x = y^2 \rightarrow dx = 2y\, dy$$

$$untuk\ x = 0, y = 0$$

$$untuk\ x = 1, y = 1$$

$$\int_{x=0}^{x=1} x^4\, (1 - \sqrt{x})^5\, dx$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} (y^2)^4\, (1 - y)^5\, 2y\, dy$$

$$= 2 \int_0^1 y^9 (1 - y)^5\, dy$$

$$= 2\, \beta(10{,}6)$$

$$= 2\, \frac{\tau(10)\tau(6)}{\tau(16)}$$

$$= \frac{2\,(9!\,.5!)}{15!}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15015}}$$

9) Hitung

$$\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

substitusinya

$$x = 2y \rightarrow dx = 2\,dy$$

$$untuk\ x = 0, y = 0$$

$$untuk\ x = 2, y = 1$$

$$\int_{x=0}^{x=2} \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \frac{4y^2}{\sqrt{2-2y}}\,2\,dy$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{8y^2}{\sqrt{2}\sqrt{1-y}}\ dy$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{0}^{1} \frac{y^2}{(1-y)^{\frac{1}{2}}}\ dy$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{0}^{1} y^{2}\,(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{0}^{1} y^{3-1}\,(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy$$

$$= 4\sqrt{2}\,\beta\left(3,\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\;\frac{\tau(3)\;\tau(\frac{1}{2})}{\tau\left(3\,\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}.\,2\sqrt{\pi}}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}$$

$$= \mathbf{\frac{64\sqrt{2}}{15}}$$

10) Hitung

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{3x-x^{2}}}\,dx$$

substitusinya

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{3-x}}\,dx$$

Misalkan

$$x = 3y \rightarrow dx = 3\,dy$$

$$untuk\ x = 0, y = 0$$

$$untuk\ x = 3, y = 1$$

$$\int_{x=0}^{x=3} \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{3-x}}\,dx$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{\sqrt{3y}\sqrt{3-3y}}\,3\,dy$$

$$= \int_0^1 (3y)^{-\frac{1}{2}}\,(3-3y)^{-\frac{1}{2}}\ 3\,dy$$

$$= \int_0^1 3^{-\frac{1}{2}}.\,y^{-\frac{1}{2}}.\,3^{-\frac{1}{2}}\,(1-y)^{-\frac{1}{2}}.\,3\,dy$$

$$= \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,(1-y)^{-\frac{1}{2}}\ dy$$

$$= \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\tau\left(\frac{1}{2}\right)\tau\left(\frac{1}{2}\right)}{\tau(1)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{1}$$

$$= \boldsymbol{\pi}$$

11) Hitunglah

$$\int_0^1 x^4 \left(1-\sqrt{x}\right)^5 dx$$

Misalkan

$$\sqrt{x} = y$$

$$x = y^2$$

$$dx = 2y\,dy$$

$$\int_0^1 y^8\,(1-y)^5\,2y\,dy$$

$$= 2\int_0^1 y^9(1-y)^5\,dy$$

$$= 2\,\beta(10,6)$$

$$= \frac{2\,\tau(10)\tau(6)}{\tau(16)}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15015}}$$

12) Hitunglah

$$\int_3^7 \sqrt[4]{(x-3)(7-x)}\,dx$$

Misalkan

$$x = 4y + 3$$

$$untuk\ x = 3, y = 0$$
$$untuk\ x = 7, y = 1$$

$$dx = 4\,dy$$

Jawab:

$$\int_0^1 (4y+3-3)^{\frac{1}{4}}\,(7-4y-3)^{\frac{1}{4}}\ 4\,dy$$

$$= 4\int_0^1 (4y)^{\frac{1}{4}}\,(4-4y)^{\frac{1}{4}}\ dy$$

$$4\int_0^1 (4)^{\frac{1}{4}}\,(y)^{\frac{1}{4}}\,(4)^{\frac{1}{4}}\,(1-y)^{\frac{1}{4}}\ dy$$

$$= 8\,\beta\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)$$

$$= 8.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{\tau\left(\frac{1}{4}\right)\tau\left(\frac{1}{4}\right)}{\tau\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\tau\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

13) Hitunglah

$$\int_0^{10} \sqrt{100 - x^2}\, dx$$

Misalkan

$$x^2 = 100y$$

$$2x\, dx = 100\, dy$$

$$dx = \frac{50}{x}\, dy$$

$$dx = \frac{5}{\sqrt{y}}\, dy$$

Dengan:

$$untuk\ x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$untuk\ x = 10 \rightarrow y = 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{100-100y}\,.\,5y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= 50\int_0^1 \sqrt{1-y}\,.\,y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= 50\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}.\,(1-y)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= 50\int_0^1 y^{\frac{1}{2}-1}.\,(1-y)^{\frac{3}{2}-1}\,dy$$

$$= 50\;\beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= 50\,\frac{\tau\left(\frac{1}{2}\right)\tau\left(\frac{3}{2}\right)}{\tau(2)}$$

$$= 50\,\frac{\sqrt{\pi}\;.\;\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1}$$

$$= \boldsymbol{25\pi}$$

Atau dengan perhitungan lain:
Misalkan

$$x = 10y^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = 5y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= 10\int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2}}\;\; 5y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= 50\int_0^1 \; y^{-\frac{1}{2}}\,(1-y)^{\frac{1}{2}}\;dy$$

Jadi

$$50\,\beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{50}{2}\,\frac{\tau\left(\frac{1}{2}\right)\tau\left(\frac{1}{2}\right)}{\tau(2)}$$

$$= 25\,\frac{\sqrt{\pi}\,.\sqrt{\pi}}{1} = \boldsymbol{25\pi}$$

D. Umpan Balik

1) Dengan Fungsi Gamma hitunglah
   a. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$

2) Dengan Fungsi Beta hitunglah
   a. $\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^3}\;dx$
   b. $\int_0^1 (1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\;dx$
   c. $\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)^5\;dx$

REFERENSI

Erwin Kreyszig, (2006), *Advanced Engineering Mathematics, Student Solutions Manual and Study Guide, 9th* Ed. Wiley.

James Stewart, (2012) *Calculus, ed.7, Brooks/cole-Cengage Learning,* Canada.

Kaplan, (1987), *Advanced Calculus*, Mc Graw-Hill, Inc.

Kreyzic, (1985), *Advanced Calculus*, Mc Graw-Hill, Inc.

Kreyzig, E, (2011) *Advanced Engineering Mathematics, 10-th edition,* John Wiley & Sons, Singapore.

Lois A., Harviil Pipes, (1983), *Apllied Mathematics for Engineer and Fhysicits,* Mc Graw – Hill, Inc.

Piskunov N., *Differential and Integral Calculus,* Peace Publisher.

Purcell, J, E, Rigdon, S., E. (2006), *Calculus, 9-th edition,* Prentice-Hall, New Jersey.

Spiegel Murray, R. Koko Martono, (1989), *Matematika Lanjutan Untuk Insinyur dan Ilmuwan,* Erlangga.

BIOGRAFI PENULIS

Stepanus, ST., MT.

Lahir tanggal 10 September 1980 di Jakarta.
Sejak 1 Mei 2017 menjadi Dosen Tetap Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia, Jakarta.
Pengalaman kerja sejak 1997 s/d sekarang sebagai Guru Les Private Matematika & Fisika untuk anak didik SD-SMP-SMA, pada tahun 2001 - 2004 menjadi Guru Matematika SD Pelita Hati, dan sejak 21 Mei 2007 s/d sekarang sebagai Konsultan Keuangan Prudential.
Menyelesaikan pendidikan gelar Sarjana Teknik, Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia di Jakarta pada tanggal 13 Februari 2008. Selanjutnya, mendapatkan gelar Magister Teknik Elektro, Prodi Teknik Elektro, Pascasarjana Universitas Kristen Indonesia di Jakarta pada tanggal 24 Agustus 2018.
Bidang peminatan adalah Kalkulus, dan Energi.

ukipressdigital.uki.ac.id

UKI PRESS
Pusat Penerbit dan Pencetakan
Universitas Kristen Indonesia
Jl. Mayjen Sutoyo No. 2, Cawang
Jakarta Timur 13630

ISBN 978-623-8737-15-4