BUKU AJAR
ALJABAR LINIER

STEPANUS, S.T., M.T.

BUKU AJAR
ALJABAR LINIER

Penulis:
Stepanus, S.T., M.T.

UKI PRESS
Pusat Penerbitan dan Pencetakan
Buku Perguruan Tinggi
Universitas Kristen Indonesia
Jakarta
2024

BUKU AJAR
ALJABAR LINIER

Penulis:
Stepanus, S.T., M.T.

Editor:
Stepanus, S.T., M.T.
Antonius Doddy Tyas Prasetyo

ISBN: 978-623-8737-13-0

Penerbit: UKI Press
Anggota APPTI
Anggota IKAPI

Redaksi: Jl. Mayjen Sutoyo No.2 Cawang Jakarta - 13630
Telp. (021) 8092425

Cetakan I Jakarta: UKI Press, 2024

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur hanya bagi Tuhan Yesus Kristus, oleh karena anugerah-Nya yang melimpah, kemurahan dan kasih setia yang besar akhirnya penyusun dapat menyelesaikan **BUKU AJAR "ALJABAR LINIER"**.

Buku Ajar ini disusun sebagai buku ajar matakuliah Aljabar Linier di Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia, Jakarta. Buku Ajar ini terdiri dari enam bab yang secara keseluruhan memiliki bobot 2 sks dimana masing-masing bab akan memperlihatkan pokok-pokok penting yang harus dipahami mahasiswa. Untuk membantu pembaca dalam memahami semua materi tersebut, Buku Ajar ini dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaiannya, serta latihan soal.

Penyusunan Buku Ajar ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penulis menyadari bahwa Buku Ajar ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan Buku Ajar ini. Semoga Buku Ajar ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya mahasiswa.

Akhir kata penulis mengucapkan terimakasih dan salam buat kita semua.

Jakarta, Juni 2024

Penulis,

Stepanus, ST., MT.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
Matriks dan Transformasi Elementer

A. Pendahuluan

Selain digunakan dalam matematika sendiri, matriks juga digunakan dalam hampir semua bidang ilmu dan teknologi, baik ilmu pengetahuan alam maupun ilmu pengetahuan sosial.

Meskipun beberapa pengertian dasar telah diajarkan di SMU/SMK, tetapi beberapa pengertian penting akan diulang dan dimantapkan, serta akan ditambah dengan pengertian-pengertian baru. Pentingnya matriks, antara lain terlihat dalam menganalisa sistem persamaan linier, yang hampir selalu muncul dalam penggunaan aljabar linier. Pemecahannya menjadi sangat dimudahkan dengan menggunakan matriks (akan dibahas pada modul-modul selanjutnya.)

Transformasi elementer atau operasi elementer merupakan alat yang ampuh untuk menganalisa dan mencari penyelesaian sistem persamaan linier. Mengingat Transformasi kolom elementer tidak dapat digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier, maka pembahasan tranformasi elementer hanya dikhususkan pada transformasi baris elementer saja.

Dengan mempelajari Bab I ini, mahasiswa diharapkan akan dapat memahami pengertian dasar matriks dan operasinya, jenis-jenis matriks, serta pengertian transformasi elementer, khususnya transformasi baris elementer.

B. Pengertian Matriks

1.1. Matriks

Matriks adalah bilangan-bilangan yang disusun dalam baris-baris dan kolom-kolom yang seluruhnya membentuk empat persegi yang dibatası oleh tanda kurung. Matriks diberi nama dengan huruf-huruf besar A, B, C dst. Contoh-contoh matriks:

Matriks A terdiri atas 3 baris dan 4 kolom

Matriks B terdiri atas 4 baris dan 3 kolom

Matriks C terdiri atas 3 baris dan 3 kolom

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 8 \\ 2 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Bentuk umum matriks A yang terdiri atas m baris dan n kolom dinamakan matriks tipe ukuran m x n dan ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dimana a_{ij} adalah elemen di baris ke-i, kolom ke-j.

1.2. Matriks Bujur Sangkar

Bila m = n, maka matriksnya dinamakan matriks bujur sangkar tipe atau ukuran n × n

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ukuran 2×2

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ukuran 3×3

1.3. Matriks Nol

Bila semua elemen-elemen dari suatu matriks adalah nol, maka matriksnya dinamakan matriks nol (diberi nama 0) misalkan:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$4 \times 4$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$2 \times 2$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$3 \times 1$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$1 \times 3$$

1.4. Dua Matriks yang Sama

Dua matriks A dan B dikatakan sama, ditulis dengan A = B, bila tipe A = tipe B dan untuk setiap i dan j berlaku $a_{ij} = b_{ij}$

1.5. Operasi-operasi pada Matriks

1.5.1. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Operasi penjumlahan dan pengurangan hanya didefinisikan pada matriks yang sama tipe atau ukurannya. Bila A dan B matriks yang setipe, maka C = A ± B didefinisikan dengan $c_{ij} = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right)$

Contoh 1:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} (1+3) & (3+2) & (5+1) \\ (2+1) & (4+0) & (6-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} (1-3) & (3-2) & (5-1) \\ (2-1) & (4-0) & (6+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} (3-1) & (2-3) & (1-5) \\ (1-2) & (0-4) & (-1-6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Catatan:
Bila beda ukurannya, tak dapat dijumlahkan.

Contoh 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix};$$

A dan B beda ukuran, A + B tidak dapat dijumlahkan.

1.5.2. Operasi Perkalian Skalar k dengan Matriks A

Bila k adalah bilangan (skalar) maka k A didefinisikan sebagai matriks dengan elemen umum k a_{ij}

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Bila $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, maka:

a) $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}$

c) $-1A = -1\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

$= -A$

1.5.3. Beberapa Sifat

Bila matriks A, B, C dan O setipe maka

a) A + B = B + A

b) A + (B + C) = (A + B) + C

c) A + O = O + A = A

d) A – A = A + (-A) = O

e) k (A +B) = k A + k B = (A + B) k   k skalar

f) $(k + \ell)A = k\,A + \ell\,A = A(k + \ell)$ k, ℓ scalar

1.5.4. Perkalian Antar Matriks

Sebelumnya perlu dikatakan bahwa pada umumnya perkalian antar matriks adalah tidak komutatif. Hal tersebut akan jelas dari definisi perkalian matriks sebagai berikut:

Bila A matriks tipe m x p dan B matriks tipe p x n maka hasil kali AB ialah matriks C tipe m x n dimana:

$$\mathrm{C_{ij}} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\,, (\mathrm{i} = 1, 2, \ldots \mathrm{m}; \mathrm{j} = 1, 2, \ldots \mathrm{n})$$

Dari definisi, terlihat bahwa perkalian AB hanya dapat terjadi bila banyaknya kolom matriks A = banyaknya baris matriks B, yaitu = p, sedangkan hasil kalinya akan bertipe m x n

$$\text{AB tipe m} \times \text{n} \begin{cases} A\ tipe\ m \times p \\ B\ tipe\ p \times n \end{cases}$$

Sedangkan BA tidak dapat terjadi (tidak dapat dikalikan) karena banyak kolom B, yaitu n, tidak sama dengan banyak baris A, yaitu m.

Contoh 3:

A = Matriks tipe 3×2

B = Matriks tipe 2×4

C = Matriks tipe 2×3

AB matriks tipe 3×4

BA tidak dapat dikalian $\therefore$ A B $\neq$ B A

BC tidak dapat dikalikan

CB tidak dapat dikalikan

AC matriks tipe 3×3

CA matriks tipe 2×2 $\therefore$ A C $\neq$ C A

Contoh 4:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23}\, b_{31} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23}\, b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \text{tipe } 3 \times 3$$

Kesimpulan: AB $\neq$ BA

Contoh 5:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(-1) + (3)(3) & (1)(0) + (3)(2) \\ (2)(-1) + (4)(3) & (2)(0) + (4)(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)(1) + (0)(2) & (-1)(3) + (0)(4) \\ (3)(1) + (2)(2) & (3)(3) + (2)(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$$

AB $\neq$ BA

Dari contoh ini terlihat meskipun AB dan BA bertipe sama tidak berarti bahwa AB = BA.

1.5.5. Beberapa Sifat

Dengan mengandaikan matriks A, B dan C memenuhi persyaratan dapat dilakukan perkalian dan penjumlahan, maka berlaku beberapa sifat berikut:

a) A (B + C) = AB + AC

b) (A + B) C = AC + BC

c) A (BC) = (AB) C

d) AB ≠ BA (pada umumnya)

e) AB = 0 belum berarti A = 0 atau B = 0 (lihat contoh 6)

f) AB = AC belum berarti B = C (lihat contoh 7)

Contoh 6:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2+1 & 2-4+2 & 3-6+3 \\ -3+4-1 & -6+8-2 & -9+12-3 \\ -2+2+0 & -4+4+0 & -6+6+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Terlihat A ≠ 0, B ≠ 0, tetapi AB = 0. Coba lihat apakah BA = 0.

Contoh 7:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad B \neq C$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1-6+2 & 4-3-4 & 1-3+2 \\ 2+2-3 & 8+1+6 & 2+1-3 \\ 4-6-1 & 16-3+2 & 4-3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 15 & 0 \\ -3 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2-9+4 & 1+6-10 & -1+3-2 \\ 4+3-6 & 2-2+15 & -2-1+3 \\ 8-9-2 & 4+6+5 & -4+3+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 15 & 0 \\ -3 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Terlihat B ≠ C tetapi AB = AC.

Contoh 8:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4+2-4 & -6-8+12 & -10-10+16 \\ -2-3+4 & 3+12-12 & 5+15-16 \\ 2+2-3 & -3-8+9 & -5-10+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4+3-5 & -4-9+10 & -8-12+15 \\ -2-4+5 & 2+12-10 & 4+16-15 \\ 2+3-4 & -2-9+8 & -4-12+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.5.6. Perkalian antar Matriks dengan Cara Sekatan

Misalkan diketahui matriks A tipe m x p dan matriks B tipe p x n. Untuk mencari AB dapat juga dilakukan dengan lebih dahulu membuat sekatan-sekatan, baik pada matriks A maupun matriks B. Sekatan-sekatan itu diadakan pada kolom-kolomnya dan/atau pada baris-barisnya. Syarat yang perlu diperhatikan ialah cara penyekatan pada kolom-kolom matriks A harus sama dengan cara penyekatan pada baris-baris B. Jadi, bila kolom-kolom A disekat menjadi 3 sekatan yang terdiri atas p_1 kolom, p_2 kolom dan p_3 kolom dimana $p_1 + p_2 + p_3 = p$, maka baris-baris B juga disekat menjadi 3 sekatan yang terdiri atas p_1 baris, p_2 baris dan p_3 baris.

Penyekatan pada baris-baris A dan atau pada kolom-kolom B tidak terikat pada syarat tertentu. Dengan adanya penyekatan-penyekatan tersebut, maka matriks A maupun matriks B tersekat menjadi beberapa matriks bagian.

Misal matriks A tipe m x p, baris-barisnya disekat menjadi m_1, m_2, m_3 dan m_4 dan kolom-kolomnya disekat menjadi p_1, p_2 dan p_3; matriks B tipe p x n, baris-barisnya disekat menjadi p_1, p_2 dan p_3, serta kolom-kolomnya disekat menjadi n_1 dan n_2.

$$A = \begin{pmatrix} m_1\, x\, p_1 & m_1\, x\, p_2 & m_1\, x\, p_3 \\ m_2\, x\, p_1 & m_2\, x\, p_2 & m_2\, x\, p_3 \\ m_3\, x\, p_1 & m_3\, x\, p_2 & m_3\, x\, p_3 \\ m_1\, x\, p_1 & m_4\, x\, p_2 & m_4\, x\, p_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} p_1\, x\, n_1 & p_1\, x\, n_2 \\ p_2\, x\, n_1 & p_2\, x\, n_2 \\ p_3\, x\, n_1 & p_3\, x\, n_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{gathered} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m \\ p_1 + p_2 + p_3 = p \\ n_1 + n_2 = n \end{gathered}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31} & A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32} \\ A_{41}B_{11} + A_{42}B_{21} + A_{43}B_{31} & A_{41}B_{12} + A_{42}B_{22} + A_{43}B_{32} \end{pmatrix}$$

Contoh 9:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \\ (A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21}) & (A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22}) \end{pmatrix}$$

dimana:

$$A_{11}B_{11} = (1\ 2)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (3+4 \quad 4+0)$$

$$= (7 \quad 4)$$

$$A_{12}B_{21} = (0)(1 \quad -1)$$

$$= (0 \quad 0)$$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = (7 \quad 4) + (0 \quad 0)$$

$$= (7+0 \quad 4+0)$$

$$= (7 \quad 4)$$

$$A_{11}B_{12} = (1 \quad 2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (2+2 \quad 3-2)$$

$$= (4 \quad 1)$$

$$A_{12}B_{22} = (0)(1 \quad 0)$$

$$= (0 \quad 0)$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = (4 \quad 1) + (0 \quad 0)$$

$$= (4 \quad 1)$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9-2 & 12+0 \\ 12+0 & 16+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad -1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{12} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-1 & 9+1 \\ 8+0 & 12+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A_{22}B_{22} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A_{31}B_{11} = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0+2 \quad 0+0)$$

$$= (2 \quad 0)$$

$$A_{32}B_{21} = (2)(1 \quad -1)$$

$$= (2 \quad -2)$$

$$A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} = (2 \quad 0) + (2 \quad -2)$$

$$= (4 \quad -2)$$

$$A_{31}B_{12} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 + 1 \quad 0 - 1)$$

$$= (1 \quad -1)$$

$$A_{32}B_{22} = (2)(1 \quad 0)$$

$$= (2 \quad 0)$$

$$A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} = (1 \quad -1) + (2 \quad 0)$$

$$= (3 \quad -1)$$

$$AB = \begin{pmatrix} (7 \quad 4) & (4 \quad 1) \\ \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \\ (4 \quad -2) & (3 \quad -1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & 7 & 10 \\ 13 & 15 & 9 & 12 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.5.7. Transpose dari Matriks

Bila dari matriks A tipe m x n diadakan pertukaran antara baris-baris dengan kolom-kolomnya, maka akan didapat matriks tipe n x m yang dinamakan transpose dari matriks A dan dinyatakan dengan A^t (dibaca A transpose).

Elemen A_{ij} yaitu elemen baris ke i dan kolom ke j dari A akan menjadi elemen baris ke j dan kolom ke i dan A^t, sehingga jika A tipe m x p maka A^t tipe p x m.

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

maka $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Beberapa sifat yang berlaku:

a) $(A^t)^t = A$

b) $(k\,A)^t = k\,A^t$ dengan k = skalar

c) $(A + B)^t = A^t + B^t$

d) $(A\,B)^t = B^t\,A^t$ (perhatikan perubahan urutan)

$(A\,B)^t \neq A^t\,B^t$

Bukti d) misal A tipe m x p dan B tipe p x n, maka C = A B tipe m x n

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

adalah elemen AB dibaris ke i dan kolom ke j sehingga merupakan elemen dibaris ke j dan kolom ke i dari $(A\,B)^t$.

Elemen baris ke j dari B^t adalah b_{1j}, b_{2j} … b_{pj} dan elemen kolom ke i dari A^t adalah $a_{i1},\ a_{i2}\ \ldots\ a_{ip}$, sehingga elemen baris ke j dan kolom ke i dari $B^t\,A^t$ adalah:

$$b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{pj}a_{ip} =$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} =$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = C_{ij}$$

yaitu elemen dibaris ke j dan kolom ke i dari $(A\ B)^t$.

1.6. Beberapa Matriks Spesial

1.6.1. Matriks Segitiga

Matriks bujur sangkar A yang elemen-elemen $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ dinamakan matriks segitiga atas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks segitiga atas

$$\text{Contoh: } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks bujur sangkar A yang elemen-elemen $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ dinamakan matriks segitiga bawah.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks segitiga bawah

$$\text{Contoh: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Matriks Diagonal

Matriks bujur sangkar D yang elemen-elemen $d_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dinamakan matriks diagonal.

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Contoh: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kadang-kadang ditulis dengan cara D = diag (d_{11}, d_{12}, …, d_{nn}.) Elemen-elemen d_{11}, d_{12}, …, d_{nn} dinamakan elemen-elemen pada diagonal utama.

1.6.3. Matriks Skalar

Matriks diagonal dimana $d_{11} = d_{12} = \dots = d_{nn} = k$ dinamakan matriks skalar.

$$\text{Contoh: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1.6.4. Matriks Identitas

Bila k = 1 maka dinamakan matriks identitas, ditulis dengan I atau In.

Contoh:

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pada perkalian antar matriks, matriks indentitas mempunyai sifat sebagai bilangan skalar 1. Jadi, bila A matriks tipe m × n, maka:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I_m A} &= \mathrm{AI_n} \\
&= \mathrm{I_m A I_n} \\
&= \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Contoh 10:

$$\text{Bila A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I_2 A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AI_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I_2 A I_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

1.6.5. Matriks Simetris

Matriks bujur sangkar A dimana $A^t = A$ dinamakan matriks simetris, sehingga bila A matriks simetris, maka $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Contoh 11:

Buktikan $(A + A^t)$ simetris bila A matriks bujur sangkar

Bukti:

$$\begin{aligned} (A + A^t)^t &= A^t + (A^t)^t \\ &= A^t + A \\ &= A + A^t \end{aligned}$$

Jadi, $(A + A^t)^t = (A + A^t)$

C. Transformasi Elementer

Transformasi elementer pada matriks adalah operasi sebagai berikut:

B_{ij} : pergantian baris ke i dengan baris ke j

K_{ij} : pergantian kolom ke i dengan kolom ke j

$B_{i(k)}$: elemen-elemen baris ke i masing-masing dikalikan dengan skalar k $\neq 0$

$K_{j(k)}$: elemen-elemen kolom ke j masing-masing dikalikan dengan skalar k $\neq 0$

$B_{ij(k)}$: elemen-elemen baris ke i masing-masing ditambah dengan k kali elemen-elemen yang sekolom dari baris ke j

$K_{ij(k)}$: elemen-elemen kolom ke i masing-masing ditambah dengan k kali elemen-elemen yang sebaris dari kolom ke j

Transformasi elementer B_{ij}; $B_{i(k)}$ dan $B_{ij(k)}$ dinamakan transformasi baris elementer, sedang transformasi elementer K_{ij}; $K_{j(k)}$ dan $K_{ij(k)}$ dinamakan transformasi kolom elementer. Jelas bahwa transformasi elementer tidak mengubah tipe matriks.

Contoh 12:

Transformasi B_{13} mengubah $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ menjadi $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Transformasi K_{12} mengubah $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ menjadi $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Transformasi $B_{1(2)}$ mengubah $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ menjadi $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Transformasi $K_{1(2)}$ mengubah $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ menjadi $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

Transformasi $B_{12(3)}$ mengubah $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ menjadi $\begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Transformasi $K_{21(2)}$ mengubah $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ menjadi $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

Catatan:

Untuk selanjutnya, hanya akan dibahas transformasi baris elementer saja yaitu B_{ij}; $B_{i(k)}$ dan $B_{ij(k)}$. Untuk penyederhanaan penulisan selanjutnya, kalau disebut atau ditulis transformasi elementer yang dimaksud adalah transformasi baris elementer.

D. Ekuivalen

Dua buah matriks A dan B dikatakan ekuivalen (atau ekuivalen baris) dan ditulis dengan A ~ B bila matriks yang satu dapat diturunkan dari matriks yang lain dengan serangkaian transformasi elementer (transformasi baris elementer).

Jelaslah bila A ~ B maka A dan B mempunyai tipe yang sama. Berdasarkan pengertian simbol ~ tersebut diatas, maka penulisan transformasi baris elementer menjadi:

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{ij}}\ ;\ \underset{\sim}{\mathrm{B}_{i(k)}}\ ;\ \underset{\sim}{\mathrm{B}_{\mathrm{ij(k)}}}$$

Contoh 13:

Misal diketahui matriks $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Dengan melakukan serangkaian transformasi elementer

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{12}}\ ;\ \underset{\sim}{\mathrm{B}_{3(-\frac{1}{2})}}\ ;\ \underset{\sim}{\mathrm{B}_{21(3)}}\ ;\ \underset{\sim}{\mathrm{B}_{31(-1)}}$$

pada A didapat

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{B}_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{3\left(-\frac{1}{2}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{21(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Relasi ekuivalen mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

A ~ A (sifat reflektif) ……………………………….... (I)

Jika A ~ B maka B ~ A (sifat simetris)………………. (II)

Jika A ~ B dan B ~ C maka A ~ C (sifat transitif) …..... (III)

E. Umpan Balik

Soal 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A + B =

B + A =

A – B =

B – A =

A . B =

B . A =

A^t =

B^t =

A^tB^t =

B^tA^t =

Soal 2

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} -\,{}^{1}\!/_{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\,{}^{3}\!/_{5} & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3\,{}^{1}\!/_{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Hitung A+B dan B+C

Soal 3

Jika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} {}^{1}\!/_{2} & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & {}^{1}\!/_{3} & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ {}^{1}\!/_{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Hitunglah:

a. BA

b. E^2

c. E^3

d. E^{10}

e. $(BC - D)^T$

f. $C^T B^T – D^T$

g. 3C(BA)

h. C(3B)A

i. (CB)(3A)

Soal 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Transformasikan matriks tersebut:

(1) B_{14} lanjut $B_2\left(\frac{1}{2}\right)$ lanjut $B_{23\,(-2)}$

(2) $B_{14\,(-1)}$ lanjut B_{24} lanjut $B_{4\,(-3)}$

BAB II
Matriks Eselon, Rank Matriks dan Sistem Persamaan Linier

A. Pendahuluan

Pada Bab I telah dibahas transformasi baris elementer. Pada Bab II ini, akan dibahas proses untuk mengubah suatu matriks menjadi matriks eselon / eselon tereduksi (metode Gauss / Gauss Jordan) dan untuk menentukan rank suatu matriks, serta akan dibahas proses mencari penyelesaian / jawab sistem persamaan linier $\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{H}}$ dengan metode Gauss / Gauss Jordan, yaitu dengan melakukan transformasi baris elementer pada matriks lengkap $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$ dengan sasaran mengubah matriks koefisien A menjadi matriks eselon tereduksi. Arti dari proses tersebut adalah mengubah sistem persamaan linier semula menjadi sistem persamaan linier yang lebih sederhana. Selain itu juga akan disimak hubungan rank (A) dengan rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$ yang dikaitkan dengan konsistensinya suatu persamaan linier.

Setelah mempelajari Bab II ini, mahasiswa diharapkan akan dapat menggunakan transformasi baris elementer untuk mengubah matriks menjadi matriks eselon dan matriks eselon terreduksi, serta dapat menggunakannya untuk mencari rank matriks. Selain itu, Sesudah mempelajari Bab II ini, mahasiswa diharapkan dapat memahami dan melakukan proses mencari penyelesaian sistem persamaan linier dengan metode Gauss / Gauss Jordan, serta dapat memahami hubungan rank matriks dengan konsisten / tak konsistennya suatu sistem persamaan linier.

B. Matriks Eselon dan Matriks Eselon Tereduksi

1.1. Matriks Eselon

Matriks eselon (matriks eselon baris) ialah matriks yang bukan matriks nol, yang memenuhi tiga syarat sebagai berikut:

a) Bila ada baris yang semua elemennya nol, maka baris tersebut tidak boleh terletak di atas baris yang mempunyai elemen tidak nol.
b) Pada baris yang mempunyai elemen tidak nol, elemen tidak nol terkiri pada baris tersebut adalah 1.

c) Bila ada lebih dari satu baris yang mempunyai elemen tidak nol, maka makin ke bawah letak barisnya makin ke kanan letak elemen tidak nol terkirinya.

Contoh 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriks A, B, C dan I adalah matriks eselon.

Matriks P bukan matriks eselon karena tidak memenuhi syarat (I) yaitu dibaris 2.

Matriks Q bukan matriks eselon karena tidak memenuhi syarat (II) yaitu dibaris 1 dan baris 3.

Matriks R bukan matriks eselon karena tidak memenuhi syarat (III) yaitu dibaris 3.

Matriks S bukan matriks eselon karena tidak memenuhi syarat (I), (II) dan (III).

Setiap matriks yang bukan matriks nol selalu dapat diubah menjadi matriks eselon dengan menggunakan transformasi elementer. Adapun tahapan dan langkah-langkahnya sebagai berikut:

Tahap 1

Langkah 1: Langkah ini dimulai dari kolom terkiri yang mempunyai elemen tidak nol. Perhatikan elemen yang teratas, kalau elemen teratas = 1, lanjutkan ke langkah 2. Kalau elemen teratas $\neq$ 1 lakukan transformasi elementer sehingga didapat elemen teratas = 1.

Langkah 2: Dengan memanfaatkan elemen teratas = 1 pada langkah 1, nolkan semua elemen sekolom yang terletak dibawahnya dengan menggunakan transformasi $B_{ij(k)}$.

Tahap 1 selesai.

Tahap 2

Dimulai dengan menutup baris ke 1 dan matriksnya kemudian pada submatriksnya yang tidak tertutup dilakukan ulang langkah 1 s/d langkah 2 seperti pada tahap 1 di atas, sampai tahap 2 selesai.

Tahap 3

Dimulai dengan menutup baris ke 1 dan baris ke 2 dari matriks semula. Selanjutnya langkah-langkahnya seperti tahapan di atas.

Demikian seterusnya dilakukan tahap demi tahap sampai tahap terakhir dimana submatriks yang tidak tertutup hanya terdiri satu baris. Dengan selesainya tahap terakhir akan diperoleh matriks eselon.

Dengan demikian, jika matriksnya mempunyai m baris maka akan memerlukan paling banyak m tahapan untuk mendapatkan matriks eselon.

Contoh 2:

Mengubah matriks $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ menjadi matriks eselon!

Tahap 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_{1\left(\frac{1}{3}\right)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_{31(2)} \\ \sim \\ B_{41(-2)} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tahap 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_{2\left(\frac{1}{2}\right)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_{32(1)} \\ \sim \\ B_{42(-3)} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Tahap 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{B_{3\left(\frac{1}{3}\right)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_{43(4)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} \end{pmatrix}$$

Tahap 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} \end{pmatrix} \overset{B_{4\left(\frac{3}{23}\right)}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Matriks Eselon Tereduksi

Matriks eselon tereduksi adalah matriks eselon yang memenuhi persyaratan tambahan, yaitu persyaratan (IV) sebagai berikut:

Elemen–elemen yang sekolom dengan setiap elemen tidak nol terkiri semuanya nol (kecuali elemen 1 terkirinya).

Contoh 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks A, B dan C adalah matriks eselon tereduksi.

Matriks P dan Q bukan matriks eselon tereduksi, karena kolom 3 tidak memenuhi syarat (IV).

Matriks R bukan matriks eselon tereduksi karena R bukan matriks eselon.

Setiap matriks eselon selalu dapat diubah menjadi matriks eselon tereduksi dengan serangkaian transformasi elementer sebagai berikut:

Tahap 1

Dimulai dari elemen 1 terkiri yang letaknya paling bawah. Kemudian dengan menggunakan transformasi elementer $B_{ij(k)}$, semua elemen yang sekolom dengannya dijadikan nol.

Tahap 2

Berpindah ke elemen 1 terkiri yang letaknya pada baris diatasnya. Kemudian dengan menggunakan transformasi elementer $B_{ij(k)}$, semua elemen yang sekolom dengannya dijadikan nol.

Tahap 3

Ulangi tahap 2 sampai dengan elemen 1 terkiri yang terletak dibaris 2.

Contoh 4:

Mengubah matriks eselon

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

menjadi eselon tereduksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} B_{14(-3)} \\ \sim \\ B_{24(-2)} \\ \sim \\ B_{34(1)} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_{13(1)} \\ \sim \\ B_{23(-5)} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_{12(-2)} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proses mengubah matriks menjadi matriks eselon disebut metode eliminasi Gauss, sedangkan proses mengubah matriks menjadi Catatan:

a) Mengingat setiap matriks tidak nol selalu dapat diubah menjadi matriks eselon dan setiap matriks eselon selalu dapat diubah menjadi eselon tereduksi, maka setiap matriks tidak nol selalu dapat diubah menjadi matriks eselon tereduksi.
b) matriks eselon tereduksi disebut metode eliminasi Gauss-Jordan.

Pada bab berikutnya, metode eliminasi Gauss-Jordan akan digunakan untuk mencari jawab sistem persamaan linier.

C. Rank Matriks

Setiap matriks yang bukan matriks nol, mempunyai rank. Rank matriks ditentukan oleh banyaknya elemen 1 terkiri pada matriks eselonnya. Jika matriksnya berbentuk matriks eselon, maka ranknya sudah langsung terlihat, yaitu tinggal menghitung berapa banyak elemen 1 terkiri.

Contoh 5:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ rank A} = 2$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ rank B} = 2$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{rank C} = 3$$

Jika matriksnya bukan matriks eselon, maka untuk mengetahui ranknya, matriksnya perlu diubah dulu menjadi matriks eselon.

Contoh 6:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\mathrm{B}_{21(-2)}}{\sim}} \underset{\mathrm{B}_{31(1)}}{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_{2\left(-\frac{1}{3}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_{32(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Eselon}$$

Jadi, Rank A = 3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} B_{21(-1)} \\ \sim \\ B_{31(1)} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, Rank B = 2

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} B_{21(3)} \\ \sim \\ B_{31(-2)} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, Rank C = 1

Dari contoh 5 dan contoh 6 terlihat bahwa matriks yang sama ranknya belum tentu sama tipenya dan matriks yang sama tipenya belum tentu sama ranknya.

Catatan: Matriks nol tidak mempunyai rank.

Matriks bentuk tangga

Matriks bentuk tangga adalah matriks yang memenuhi syarat (I) dan syarat (III) dari tiga persyaratan matriks eselon. Dengan sendirinya setiap matriks eselon pasti merupakan matriks bentuk tangga. Matriks bentuk tangga dapat dipakai untuk menentukan rank matriks, yaitu sama dengan banyaknya elemen terkiri yang tidak nol.

Contoh 7:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ Rank A} = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ Rank B} = 4$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{B_{21(-4)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{31(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank C = 2

D. Persamaan Linier

Persamaan linier mempunyai bentuk umum $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = h$, koefisien a_1, a_2, …, a_n dan h adalah konstan riil dan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut peubah, variabel, *unknowns*.

Sekumpulan harga dari variabel $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, …, $x_n = k_n$ merupakan jawab (penyelesaian) persamaan apabila memenuhi hubungan $a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = h$.

Suatu persamaan linier yang mempunyai lebih dari satu variabel akan mempunyai jawab tidak tunggal.

Contoh 8:

1) Persamaan linier $2x_1 + 3x_2 = 9$

   Diantara jawaban-jawaban yang memenuhinya antara lain:

   a) $x_1 = 3$ dan $x_2 = 1$, sebab $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$

   b) $x_1 = 0$ dan $x_2 = 3$, sebab $2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$

2) Persamaan linier $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$

Jawab-jawab yang memenuhi antara lain:

a) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, sebab $1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 +$

$5 \cdot 0 = 0$

b) $x_1 = 9, x_2 = 2, x_3 = 3$, sebab $1 \cdot 9 +$

$3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 0$

Catatan:

Persamaan $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = h$ dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$(a_1 a_2 \ldots \ldots \ldots \ldots . a_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = (h)$$

Jika h ≠ 0 disebut persamaan linier non homogen (tak homogen) sedang jika h = 0 disebut persamaan linier homogen.

1.1. Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier merupakan sekumpulan dari beberapa persamaan linier dan mempunyai bentuk umum yang terdiri atas m persamaan linier dengan n variabel:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2$

:

:

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = h_m$

Dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

disingkat $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{H}}$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matriks koefisien tipe $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$

$$\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{tipe n} \times 1 \text{ dan } \overline{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_m \end{pmatrix} \text{tipe m} \times 1$$

Tanda strip diatas X dan H menandakan bahwa $(\bar{X})$ dan $(\bar{H})$ berupa matriks satu kolom. Cara penulisan seperti diatas juga digunakan untuk menyatakan vektor, yang akan dibahas pada Modul 6.

Catatan:

Jika $\overline{\mathrm{H}} = \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, sistem persamaan linier menjadi $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{0}$ dan disebut sistem persamaan linier homogen, jika $\overline{\mathrm{H}} \neq \overline{0}$, sistem persamaan linier $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{H}}$ disebut sistem persamaan linier non homogen (tak homogen). Mencari penyelesaian / jawab sistem persamaan linier adalah mencari harga (nilai) $\overline{\mathrm{X}}$ atau harga-harga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang memenuhi sistemnya.

1.2. Persamaan Linier Non Homogen

Sebelum membahas metode umum proses mencapai jawab sistem persamaan linier, terlebih dahulu akan diberikan contoh sederhana sistem persamaan linier, yaitu masalah mencari titik potong (titik persekutuan) dua garis lurus pada suatu bidang datar xy.

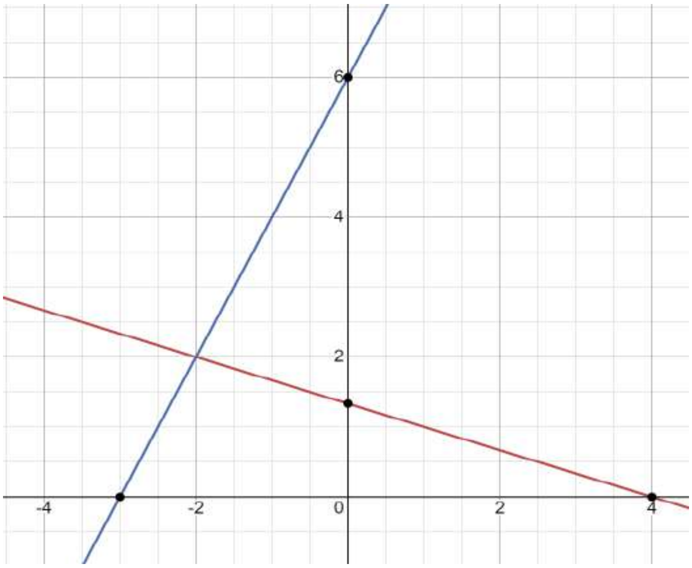
Contoh 9:

Carilah titik potong garis 2x + 6y = 8 dengan garis

2x – y = –6

Persoalan diatas adalah berupa sistem persamaan linier yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x - y = \ -6 \end{cases}$$



Gambar 2.1. Persamaan Garis $2x + 6y = 8$ dan $2x - y = -6$

Dalam bentuk matriks

$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ atau $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{H}}$.

Jika matriks $\overline{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ diletakkan sebagai kolom ke 3 pada matriks koefisien $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ akan diperoleh matriks $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & -6 \end{array}\right)$ yang dinamakan matriks lengkap (*augmented matrix*).

Catatan:

Matriks lengkap $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & -6 \end{array}\right)$ dapat dibaca sebagai

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 9 \\ 2x - y &= -6 \end{aligned}$$

Sebelum melanjutkan mencari jawab sistem persamaan linier diatas, perlu diingat bahwa sistem persamaan linier tidak akan berubah (tidak berbeda) jawabnya jika dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Persamaan linier yang terletak dibaris i bertukar tempat dengan persamaan linier yang terletak dibaris j (dalam matriks lengkapnya berarti transformasi elementer B_{ij}).
2) Semua koefisien dan konstanta pada persamaan linier dibaris i dikalikan dengan skalar k $\neq$ 0 (dalam matriks lengkapnya berarti diadakan transformasi elementer $B_{i(k)}$).
3) Persamaan dibaris i ditambah k kali persamaan dibaris j (dalam matriks lengkapnya berarti diadakan transformasi elementer $B_{ij(k)}$).

Dengan langkah-langkah tersebut diatas yaitu dengan transformasi baris elementer pada matriks lengkap akan diperoleh sistem persamaan linier yang lebih sederhana seperti contoh berikut:

$$(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & -6 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{B}_{1(\frac{1}{2})}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{21(-2)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{2(-\frac{1}{7})}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{12(-3)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

yang dapat dibaca / ditafsirkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x - y = -6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} \quad x + 3y = 4 \\ 0x - 7y = \ -14 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 0x + y = \ 2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 0y = -2 \\ \ 0x + y = \ 2 \end{cases}$$

Jadi jawabnya adalah x = -2 dan y = 2 atau:

$$\overline{\mathrm{X}} \ = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Arti geometrisnya adalah titik (x, y) = (-2, 2) merupakan titik potong garis 2x + 6y = 8 dengan garis 2x - y = -6.

Pada penyelesaian sistem persamaan linier diatas terlihat:

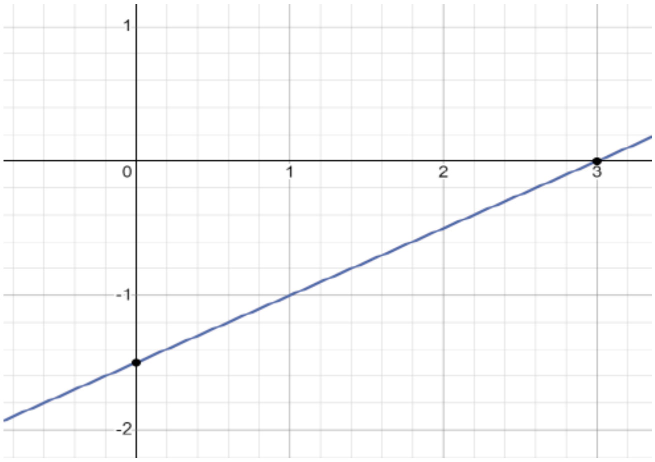
1) Transformasi baris elementer mengubah matriks koefisien A menjadi matriks eselon terreduksi.
2) Rank (A) = rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$ = 2 sama dengan banyak variabel.
3) Sistem persamaan linier mempunyai jawab tunggal (satu titik potong).

Contoh 10:

Carilah titik persekutuan garis –3x + 6y = –9 dengan x – 2y = 3

Menggunakan metode seperti pada contoh 2 diatas (metode Gauss Jordan)

$$\begin{cases} -3x + 6y = -9 \\ \quad x - 2y = 3 \end{cases}$$



Gambar 2.2. Persamaan Garis $-3x + 6y = -9$ dan $x - 2y = 3$

Dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ atau;

$\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{H}}$

$$(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{B}_{12}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{21(3)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

atau $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

Jadi sistem persamaan linier diatas dapat disederhanakan menjadi hanya satu persamaan linier x - 2y = 3. Karena persamaannya mempunyai 2 variabel (lebih dari satu variabel, maka jawabnya tidak tunggal. Salah satu variabelnya dibuat bebas. Kalau y yang dibuat bebas, misalkan y = t. Maka, x = 3 + 2t.

Jadi jawab sistem persamaan linier diatas adalah:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ t \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berlaku untuk setiap bilangan riil t.

Arti geometrisnya, garis -3x + 6y = -9 berimpit dengan garis x – 2y = 3.
Pada penyelesaian sistem persamaan linier diatas terlihat:

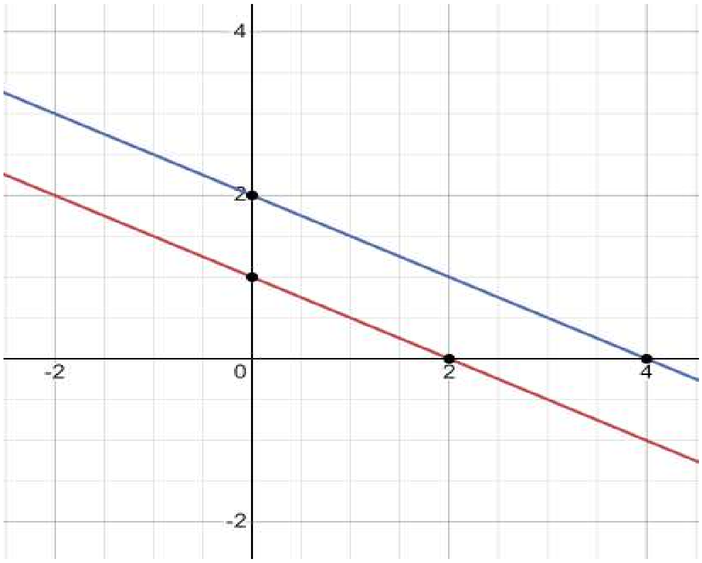
1) Matriks koefisien A diubah menjadi matriks eselon tereduksi.
2) Rank (A) = rank $(A|\overline{H})$ = 1 < 2 (banyak variabel).
3) Sistem persamaan linier mempunyai jawab tak tunggal (tak berhingga banyak jawab).

Contoh 11:

Carilah titik persekutuan garis x + 2y = 2

dengan 2x + 4y = 8

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$



Gambar 2.3. Persamaan Garis $x + 2y = 2$ dan $2x + 4y = 8$

Dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ atau $\mathrm{A\overline{X}} = \overline{\mathrm{H}}$

$$(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}) = \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 2\\2 & 4 & 8\end{array}\right) \overset{\mathrm{B}_{21(-2)}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 2\\0 & 0 & 4\end{array}\right)$$

atau $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$

Persamaan kedua 0x + 0y = 4 atau 0 = 4 tidak mungkin dapat dipenuhi oleh x dan y berapapun. Jadi, sistem persamaan linier diatas tidak mempunyai penyelesaian.

Arti geometrisnya, garis x + 2y = 2 sejajar garis 2x + 4t = 8 (tidak mempunyai titik persekutuan). Pada proses diatas terlihat:

1) Matriks koefisien A diubah menjadi matriks eselon tereduksi.
2) Rank (A) < rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$, (rank (A) = 1; rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$ = 2).
3) Sistem persamaan linier tak konsisten (tak punya jawab / tidak mempunyai titik persekutuan / titik potong).

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh mencari penyelesaian / jawab sistem persamaan linier non homogen dengan melakukan transformasi baris elementer pada matriks lengkap $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$. Adapun sasarannya adalah mengubah matriks koefisien A menjadi matriks eselon tereduksi. Sekaligus akan dapat diperoleh rank (A) dan rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$. Seperti pada contoh (2) sampai dengan contoh (4) diatas, pada contoh (5) sampai dengan contoh (7) berikut akan terlihat bahwa:

1) Pada rank (A) = rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$ = n (banyak variabel), sistem persamaan linier mempunyai jawab tunggal.
2) Pada rank (A) = rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$ < n (banyak variabel), sistem persamaan linier mempunyai jawab tak tunggal (mempunyai tak berhingga banyak jawab).
3) Pada rank (A) < rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$, sistem persamaan linier tidak mempunyai jawab.

Contoh 12:

Selesaikan sistem persamaan linier non homogen

$A\overline{X} = \overline{H}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \text{ atau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matriks lengkap $(A|\overline{H}) =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} B_{21(-3)} \\ \sim \\ B_{31(-4)} \\ \sim \\ B_{41(-2)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{2\left(-\frac{1}{5}\right)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{12(-2)} \\ \sim \\ B_{32(11)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{3\left(\frac{1}{6}\right)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{13(1)} \\ \sim \\ B_{23(-1)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rank (A) = rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}) = 3$ (banyak variabel). Matriks lengkap diatas menyatakan:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \text{ atau } \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga penyelesaian $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jawabnya tunggal.

Contoh 13:

Selesaikan sistem persamaan linier non homogen

$\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{H}}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$$

Dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matriks lengkap $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}) =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\mathrm{B}_{21(-1)}}{\sim}} \underset{\sim}{\mathrm{B}_{31(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\overset{\mathrm{B}_{12(-2)}}{\sim}} \underset{\sim}{\mathrm{B}_{32(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{23(-2)} \\ \sim \\ B_{13(8)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Rank (A) = rank $(A|\overline{H}) = 3 < 4$ (banyak variabel)

Matriks lengkap ini menyatakan:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - 11x_3 - 0x_4 = 10 \\ 0x_1 + x_2 + 4x_3 + 0x_4 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} x_1 - 11x_3 = 10 \\ x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \text{ atau}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 + 11x_3 \\ x_2 = -2 - 4x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \text{ dengan variabel } x_3 \text{ bebas}$$

Misal x_3 = t (sembarang bilangan rill). Jawab umum sistem persamaan linier menjadi sebagai berikut:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 11t \\ -2 - 4t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \text{atau} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jawabnya tidak tunggal (berlaku untuk setiap bilangan rill t)

Contoh 14:

Selesaikan sistem persamaan linier non homogen

$A\overline{X} = \overline{H}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

Dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Matriks lengkap $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}) =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} B_{21(-2)} \\ \sim \\ \mathrm{B}_{31(-4)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{12(-1)} \\ \sim \\ \mathrm{B}_{32(-1)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Matriks lengkap ini menyatakan:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 13 \\ 0x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -8 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0x_3 + 0x_4 = -5 \end{cases}$$

Perhatikan baris ke-3 yaitu $0x_1 + 0x_2 - 0x_3 + 0x_4 = -5$ tidak akan ada harga x yang dapat memenuhi. Sehingga, sistem persamaan tersebut tidak mempunyai penyelesaian (tidak konsisten).

Dari contoh-contoh terlihat bahwa suatu sistem persamaan linier non homogen dapat:

1) Mempunyai penyelesaian tunggal (contoh 9 dan contoh 12).
2) Mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian (contoh 10 dan contoh 13).
3) Tidak mempunyai penyelesaian (contoh 11 dan contoh 14).

Suatu sistem persamaan yang mempunyai penyelesaian dinamakan Konsisten. Tidak konsistennya suatu sistem persamaan linier non homogen (contoh 4 dan 7) disebabkan dalam matriks lengkap terdapat baris yang pada bagian A (matriks koefisien) semua elemennya nol sedang pada bagian $\overline{\mathrm{H}}$ elemennya tidak nol, sehingga rank (A) < rank $(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}})$.

Dari kasus-kasus contoh 2 sampai dengan contoh 7 diatas dapat dibuat skema sistem persamaan linier non homogen $A\overline{X} = \overline{H}$ sebagai berikut:

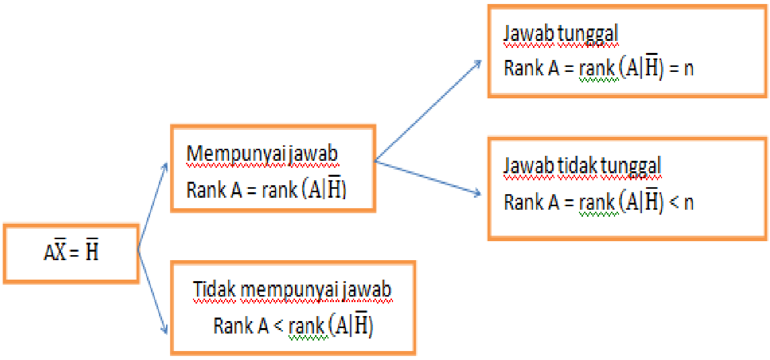
Misal diketahui sistem persamaan linier non homogen $A\overline{X} = \overline{H}$ yang terdiri atas m persamaan linier dengan n variabel.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

A tipe m x n

$\overline{X}$ tipe n x 1

$\overline{H}$ tipe m x 1



Gambar 2.4. Skema Sistem Persamaan Linier Non Homogen

1.3. Persamaan Linier Homogen

Apabila $\overline{H} = \overline{0}$ maka sistem persamaan linier $A\overline{X} = \overline{H}$ berubah menjadi $A\overline{X} = \overline{0}$ yang disebut sistem persamaan linier homogen.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau $A\overline{X} = \overline{0}$ dimana A tipe m x n, $\overline{X}$ tipe n x 1, $\overline{0}$ tipe m x 1. Karena matriks lengkapnya adalah $(A|\overline{0})$, maka akan selalu berlaku rank (A) = rank $(A|\overline{0})$, sehingga sistem persamaan linier homogen selalu konsisten (mempunyai penyelesaian). Setidaknya sistem persamaan $A\overline{X} = \overline{0}$ mempunyai penyelesaian atau dipenuhi oleh $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ atau secara singkat dipenuhi oleh $\overline{A} = \overline{0}$. Penyelesaian ini dinamakan penyelesaian nol atau penyelesaian trivial, sehingga:

Bila $A\overline{X} = \overline{0}$ mempunyai penyelesaian tunggal (bila rank (A) = n) maka penyelesaiannya trivial, yaitu $\bar{X} = \overline{0}$.

Bila $A\overline{X} = \overline{0}$ mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian / tidak tunggal (bila rank (A) = r < n), maka selain penyelesaian trivial ($\overline{X} = \overline{0}$), juga mempunyai penyelesaian non trivial ($\overline{X} \neq \overline{0}$).

Contoh 15:

Selesaikan sistem persamaan linier homogen

$A\overline{X} = \overline{0}$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Dalam bentuk matriks $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Disini banyak persamaan = 3, banyak variabel = 4. Jadi sistem persamaan diatas pasti mempunyai penyelesaian non trivial, sebab rank (A) ≤ 3 < 4 (banyak variabel).

$$(A|\overline{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{B_{21(-1)}}{\sim}} \underset{B_{31(-2)}}{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{32(1)}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{2\left(\frac{1}{2}\right)}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{12(-1)}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Matriks ini menyatakan:

$$\begin{cases} X_1 + \ 0X_2 + \frac{1}{2}X_3 - \ \frac{1}{2}X_4 = 0 \\ 0X_1 + \ X_2 + \frac{1}{2}X_3 + \ \frac{3}{2}X_4 = 0 \end{cases}$$

atau $\begin{cases} X_1 = -\frac{1}{2}X_3 + \frac{1}{2}X_4 \\ X_2 = -\frac{1}{2}X_3 - \frac{3}{2}X_4 \end{cases}$ dengan X_3 dan X_4 bebas

Untuk X_3 = a dan X_4 = b didapat:

$X_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ dan $X_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$

Sehingga $\overline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a & + & \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}a & - & \frac{3}{2}b \\ a & & \\ b & & \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berlaku untuk setiap bilangan riil a dan b.

Contoh 16:

Selesaikan:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{A}|\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{B}_{21(-1)}}{\sim} \overset{\mathrm{B}_{31(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{B}_{23}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{B}_{12(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

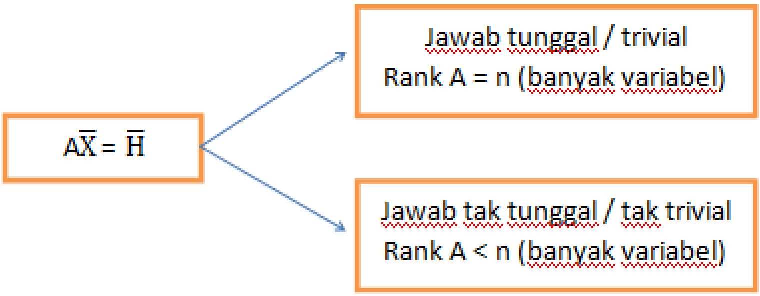
$$\overset{\mathrm{B}_{13(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Matriks lengkap ini menyatakan:

$$\begin{aligned} X_1 \quad\quad\quad\quad &= 0 \\ X_2 \quad\quad &= 0 \\ X_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga sebagai penyelesaian $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ yaitu penyelesaian trivial atau $\overline{\mathrm{X}} = \overline{0}$. Dalam contoh 9 ini rank (A) = 3 = banyak variabel, jadi jawabnya tunggal.

Mengingat sistem persamaan linier homogen $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{0}$ selalu konsisten, maka skemanya menjadi sebagai berikut:



Gambar 2.5. Skema Sistem Persamaan Linier Homogen

E. Umpan Balik

1) $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

   Transformasikan matriks B menjadi matriks Eselon

2) Ubah Matriks di bawah ini menjadi matriks Eselon terduksi

   $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

   $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 6 & 7 \\ -1 & 7 & -3 & -5 \\ 8 & -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

3) Selesaikan persamaan berikut dengan matriks Eselon tereduksi $AX = H$

a) $2x + 3y = 8$

$3x + y = 5$

b) $2x + y + z = 12$

$x + 2y - z = 3$

$3x - y + z = 11$

4) Carilah jawaban dari sistem persamaan linier berikut dengan cara matriks Esselon tereduksi

a) $-x - 4y + 3z = 0$

$3x + 8y - 5z = 0$

b) $-3x + 7y = 5$

$x - 4y = 1$

$2x - 8y = 6$

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB III
Determinan dan Matriks Non-singular

A. Pendahuluan

Bahasan determinan pada Bab III ini ditekankan pada cara mencari nilai skalar dari determinan yang merupakan fungsi dari matriks bujur sangkar. Selain itu juga akan dibahas cara mencari A^{-1} dan mencari jawab dari sistem persamaan linier $A\,\bar{X} = \bar{H}$ jika $|A| \neq 0$.

Setelah mempelajari Bab III ini, mahasiswa diharapkan dapat:

1) Membedakan matriks dengan determinan.
2) Memahami pengertian minor dan kofaktor, serta dapat menggunakannya untuk menghitung determinan.
3) Memahami sifat-sifat determinan dan dapat memanfaatkannya untuk menghitung determinan.
4) Memahami pengertian-pengertian matriks non-singular.

B. Determinan

Setiap matriks bujur sangkar A tipe n x n dapat dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut determinan matriks tersebut dan ditulis dengan det (A) atau |A|.

Untuk membedakan matriks dengan determinan perlu dibedakan tanda kurungnya. Matriks menggunakan tanda ( ) atau [ ], sedangkan determinan menggunakan tanda | |.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{matriks tipe } n \times n$$

maka

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

disebut determinan ordo n dari matriks A

Sebelum membahas cara umum menghitung determinan ordo n, lebih dahulu akan diberikan cara menghitung determinan ordo 1 dan determinan ordo 2, sebagai berikut:

1) Jika A = (a) matriks tipe 1 x 1, maka

   det (A) = |A|

   = |a|

   = a (bukan harga mutlak)

Contoh 1:

a) A = (2) maka det (A)

   det (A) = |A|

   = |2|

   = 2

b) B = (-3) maka det (B)

   det (B) = |B|

   = $|-3|$

   = -3

2) Jika A $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matriks tipe 2 x 2, maka det (A) =

   $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

   $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Untuk memudahkan mengingat biasa ditulis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \searrow & \swarrow \\ \ominus & \oplus \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Contoh 2:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

det (A) = |A|

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

= (1x4) – (2x3)

= 4 – 6

= -2

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

det (B) = |B|

$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

= (3x5) – (4x2)

= 15 – 8

= 7

1.1. Minor dan Kofaktor

Untuk keperluan menghitung determinan ordo n, dengan n ≥ 3, perlu terlebih dahulu didefinisikan pengertian minor dan kofaktor sebagai berikut:

Misal diketahui determinan ordo n:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Minor dari elemen a_{ij} ditulis $|M_{ij}|$ adalah determinan ordo n–1 yang diperoleh dari |A| dengan cara menghapus baris ke-i dan kolom ke-j.

Kofaktor dari elemen a_{ij} ditulis α_{ij} didefinisikan sebagai berikut:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Jika (i + j) genap maka $\alpha_{ij} = +|M_{ij}|$

Jika (i + j) ganjil maka $\alpha_{ij} = -|M_{ij}|$

Contoh 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

a) $$|M_{11}| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 35$$

$$= -35$$

$$\alpha_{11} = |M_{11}|$$

$$= -35$$

b) $$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-3} & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -36 - 40$$

$$= -76$$

$$\alpha_{12} = -|M_{12}|$$

$$= -(-76)$$

$$= 76$$

c) $$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 7 - (-24)$$

$$= 31$$

$$\alpha_{12} = -|M_{23}|$$

$$= -31$$

1.2. Ekspansi Minor / Kofaktor

Untuk menghitung determinan ordo n, dengan $n \geq 3$, dapat menggunakan Theorema Laplace sebagai berikut:

Determinan dari suatu matriks bujur sangkar = jumlah perkalian elemen-elemen dari seberang baris / kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Jadi jika |A| ordo n, maka:

a) Jika diekspansikan menurut baris ke-i

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$$

$$= a_{i1}\alpha_{i1}+a_{i2}\alpha_{i2}+\ldots+a_{in}\alpha_{in}$$

b) Jika diekspansikan menurut kolom ke-j

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$$

$$= a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

dimana $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$

Contoh 4:

Hitung $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 6 & -7 \end{vmatrix}$

a) Jika diekspansikan menurut baris ke-1

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

$$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0 - 30) + 1(-28 - 40) + 3(24 - 0)$$

$$= -60 - 68 + 72 = -56$$

b) Jika diekspansikan menurut kolom ke-3

$$|A| = a_{13}\alpha_{13} + a_{23}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33}$$

$$= a_{13}|M_{13}| - a_{23}|M_{23}| + a_{33}|M_{33}|$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(24 - 0) - 5(12 + 8) - 7(0 + 4)$$

$$= 72 - 100 - 28 = -56$$

c) Jika diekspansikan menurut baris ke-2

$$|A| = a_{21}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22} + a_{23}\alpha_{23}$$

$$= -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}|$$

$$= -4|M_{21}| + 0 - 5|M_{23}|$$

$$= -4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -4(7 - 18) - 5(12 + 8)$$

$$= -4(-11) - 5(20) = -56$$

Contoh c) lebih menguntungkan daripada contoh a) atau b) sebab di baris 2 ada satu elemen nol, sehingga hanya perlu menghitung dua minor / kofaktor saja.

Contoh 5:

Hitung $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

Pilihan terbaik adalah diekspansikan menurut baris ke-3

$$\begin{aligned} |A| &= 0\alpha_{31} + 6\alpha_{32} + 0\alpha_{33} \\ &= 6\alpha_{32} \\ &= -6|M_{32}| \end{aligned}$$

Dihitung terlebih dahulu

$$\begin{aligned} |M_{32}| &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 12 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Jadi $|A| = -6(-10) = 60$

1.3. Metode Sarrus

Khusus untuk determinan ordo 3 selain dapat dihitung dengan cara minor / kofaktor, ada cara lain yang disebut dengan cara Sarrus sebagai berikut:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ \searrow & \searrow & \swarrow\searrow & \swarrow & \swarrow \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & \swarrow\searrow & \swarrow\searrow & \swarrow\searrow & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow\searrow & \searrow & \searrow \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\ominus} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\oplus}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Contoh 6:

Hitung $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ dengan cara Sarrus!

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 8 \end{matrix}\right|$$

= (1)(5)(7) + (-3)(-6)(0) + (2)(4)(8) - (2)(5)(0)

- (1)(-6)(8) - (-3)(4)(7)

= 35 + 0 + 64 – 0 + 48 + 84

= 231

1.4. Menghitung Determinan Ordo 4

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Jika diekspansikan menurut baris ke-i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\alpha_{ij}$$

$$= a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} + a_{i4}\alpha_{i4}$$

Jika diekspansikan menurut kolom ke-j:

$$|A| = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\alpha_{ij}$$

$$= a_{1j}\alpha_{1j}+a_{2j}\alpha_{2j}+a_{3j}\alpha_{3j}+a_{4j}\alpha_{4j}$$

Contoh 7:

Hitung $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Pilihan terbaik diekspansikan menurut baris ke-3:

$|A| = 0\alpha_{31} + (-3)\alpha_{32} + 0\alpha_{33} + 0\alpha_{34}$

$= -3\alpha_{32}$

$= 3|M_{32}|$

Menghitung $|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{-1} & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ determinan ordo 3

yang dapat dihitung dengan cara Sarrus atau dengan minor / kofaktor. Jika dihitung dengan cara Sarrus:

$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 5 & -2 \end{matrix}$

$= 0 + 15 - 40 - 0 + 4 - 36 = -57$

Jadi $|A| = 3(-57) = -171$

1.5. Menghitung Determinan Ordo 5

Contoh 8:

$$\text{Hitung } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Pilihan terbaik diekspansikan menurut baris ke-2:

$$|A| = 0\alpha_{21} + 5\alpha_{22} + 0\alpha_{23} + 0\alpha_{24} + 0\alpha_{25}$$

$$= 5\alpha_{22}$$

$$= 5|M_{22}|$$

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Berupa determinan ordo 4 yang sudah tahu cara menghitungnya dengan minor / kofaktor, didapat $|M_{22}| = -171$ (lihat contoh 7). Jadi, $|A| = 5(-171) = -855$.

Pada contoh 8 diatas, kebetulan ada baris yang memuat empat elemen 0, sehingga hanya perlu menghitung satu minor ordo 4. Seandainya ordo determinan ordo 5 yang tidak mempunyai elemen nol dan dihitung langsung dengan minor, berarti harus menghitung lima determinan ordo 4 yang kesemuanya tidak mempunyai elemen 0. Jadi, berarti harus menghitung 20 determinan ordo 3 tanpa elemen 0. Tentu saja hal itu tidak mengenakkan. Salah satu cara untuk menghindari hal tersebut yaitu dengan membuat / menimbulkan elemen-elemen 0 dengan menggunakan sifat-sifat determinan.

1.6. Sifat-sifat Determinan

Berikut akan diberikan beberapa sifat determinan yang penting untuk diketahui, tanpa disertai bukti. Bagi yang menginginkan buktinya, dapat dilihat ataupun ditinjau dari buku teks lain.

<u>Sifat 1</u>

Jika A matriks bujur sangkar, maka $|A| = |A^t|$

<u>Penjelasan</u>:

Untuk determinan ordo 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= ad - bc$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$$= ad - cb$$

Jadi $|A| = |A^t|$

Untuk determinan ordo $n \geq 2$, kebenaran sifat tersebut adalah sesuai dengan ketentuan bahwa harga determinan dapat dihitung dengan cara mengekspansikan menurut baris ataupun menurut kolom, sehingga perubahan baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris tidak akan mengubah harga determinan.

<u>Sifat 2</u>

Jika salah satu baris atau kolom semua elemen-elemennya adalah nol, maka harga determinannya sama dengan nol.

<u>Penjelasan</u>:

Jika elemen-elemen pada baris ke-i adalah 0, maka:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 0\alpha_{ij}$$

$$= 0$$

Jika elemen-elemen pada kolom ke j adalah nol, maka:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 0\alpha_{ij}$$

$$= 0$$

Contoh 9:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0\alpha_{21} + 0\alpha_{22} + 0\alpha_{23}$$

$$= 0$$

<u>Sifat 3</u>

Jika elemen-elemen dari salah satu baris / kolom matriks A digandakan dengan skalar k, maka determinan menjadi k $|A|$.

Penjelasan:

Misal $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ dan

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & ka_{12} & b_{13} \\ b_{21} & ka_{22} & b_{23} \\ b_{31} & ka_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

|B| didapat dari |A| dengan mengalikan kolom ke-2 dengan k. Jika masing-masing diuraikan menurut kolom ke-2, didapat:

$$|A| = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$- a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|B| = -ka_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + ka_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$- ka_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= k\left\{-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right\}$$

$$= k|A|$$

Jadi, $|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= k|A|$$

Contoh 10:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 12 \\ -5 & 10 & 15 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -480$$

$$= 4\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad 3} \\ -5 \quad 10 \quad 15 \\ 0 \quad 4 \quad 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5.4\begin{vmatrix} 1 \quad -2 \quad 3 \\ \boxed{-1 \quad 2 \quad 3} \\ 0 \quad 4 \quad 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2.5.4\begin{vmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & & \end{vmatrix}$$

$$= 3.2.5.4\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

$$= 120\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 120 \times (-4)$$

$$= -480$$

Sifat 4

Jika $|B|$ didapat dari $|A|$ dengan mempertukarkan kedua barisnya / kolomnya yang berdampingan maka $|B| = -|A|$.

Contoh 11:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 19$$

Jika kolom 1 bertukar tempat dengan kolom 2 didapat:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -19$$

$$= -|A|$$

Penjelasan secara umum mengacu ke sifat $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$.

<u>Sifat 5</u>

Sebagai akibat dari sifat 4, jika $|B|$ didapat dari $|A|$ dengan mempertukarkan sembarang kedua barisnya / kedua kolomnya, maka $|B| = -|A|$.

Contoh 12:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -107$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} \underset{\sim}{B_{12}}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} \underset{\sim}{B_{13}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \underset{\sim}{K_{13}}$$

$$= -\begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -107$$

Jadi, jika dilakukan transformasi B_{ij} dan K_{ij}, maka tandanya harus berganti (dari positif menjadi negatif atau dari negatif menjadi positif).

Sifat 6

Suatu determinan yang mengandung dua baris (kolom) yang sama akan berharga nol.

Penjelasan:

Misalkan baris ke i dan ke j dari $|A|$ adalah sama, sehingga jika baris ke i dan ke j saling ditukar, maka $|A|$ tidak berubah. Tetapi menurut sifat (5), harganya akan berlawanan tanda. Sehingga akan didapat hubungan $|A| = -|A|$. Hal tersebut hanya mungkin jika $|A| = 0$.

Contoh 13:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 6 & 0 & 8 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

(baris ke 1 sama dengan baris ke 3)

Sifat 7

Suatu determinan yang mengandung dua baris (kolom) yang sebanding, akan berharga nol.

Penjelasan:

Hal tersebut adalah sebagai akibat dari sifat (3) dan sifat (6).

Contoh 14:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(1) & 1 & 3(1) \\ 2(2) & 3 & 3(2) \\ 2(3) & 2 & 3(3) \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)(0)$$

$$= 0$$

<u>Sifat 8</u>

Jika elemen-elemen pada baris ke i (kolom ke j) dari $|A|$ ditulis menjadi jumlahan 2 buah suku ($a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$), maka:

$$|A| = |B| + |C|$$

dimana $|B|$ didapat dari $|A|$ dengan mengganti seluruh elemen-elemen a_{ij} dari baris ke i (kolom ke j) dengan elemen-elemen b_{ij} dan $|C|$ didapat dari $|A|$ dengan mengganti seluruh elemen-elemen a_{ij} dari baris ke i (kolom ke j) dengan elemen-elemen c_{ij}.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j}+c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j}+c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj}+c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \dots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \dots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Penjelasan: Uraikan menurut kolom j

Contoh 15:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1+1) & 2 \\ 2 & (2+2) & 0 \\ 3 & (3+2) & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

<u>Sifat 9</u>

Determinan tidak akan berubah harganya jika elemen-elemen pada salah satu barisnya (kolomnya) ditambah dengan k kali elemen-elemen yang bersesuaian dari salah satu baris (kolom) yang lain (transformasi $B_{ij(k)}$ atau $K_{ij(k)}$). Misal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{K_{13(k)}}{\sim} \begin{vmatrix} (a_{11}+ka_{13}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+ka_{23}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}+ka_{33}) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{B_{12(k)}}{\sim} \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sifat ini dapat digunakan untuk menghasilkan elemen 0. Adapun caranya adalah sebagai berikut:

Langkah 1:

Jika sudah ada elemen 1 atau -1 langsung ke langkah 2. Jika belum ada elemen 1 atau -1, buatlah elemen 1 atau elemen -1 dengan menggunakan $B_{ij(k)}$ atau $K_{ij(k)}$.

Langkah 2:

Dengan menggunakan elemen 1 atau -1 tersebut dan transformasi $B_{ij(k)}$ atau $K_{ij(k)}$, ubahlah elemen-elemen yang sebaris atau sekolom menjadi 0 semua.

Contoh 16:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -7 & 2 \\ 3 & -4 & 8 & -5 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & -5 & 8 & 2 \end{vmatrix} \underset{\sim}{B_{23(1)}} \begin{vmatrix} -3 & 3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & -5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_{12(3)}} \; \underset{\sim}{B_{32(2)}} \; \underset{\sim}{B_{42(-4)}} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

Diekspansikan menurut kolom ke-1:

$|A| = 1\alpha_{21}$

$= -|M_{21}|$

$$= - \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} \underset{\sim}{B_{12(-2)}} \; \underset{\sim}{B_{32(4)}}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

Diekspansikan menurut kolom ke-2:

$|A| = -(1\alpha_{22})$

$= -|M_{22}|$

$= -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 14 \end{vmatrix}$

$= -(14 - 25)$

$= 11$

Contoh lain penggunaan sifat-sifat determinan:

Contoh 17:

Buktikan $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c & a & b \\ d & d & d \end{vmatrix} = 0$

Jawab:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c & a & b \\ d & d & d \end{vmatrix} \underset{\sim}{B_{12(1)}} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ d & d & d \end{vmatrix}$$

$$(a+b+c)(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(d)(0) = 0$$

<u>Sifat 10</u>

Jika A dan B matriks bujur sangkar dengan tipe yang sama, maka $|BA|=|AB|=|A||B|=|B||A|$

Contoh 18:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 6$$

$$= -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 18 - 10$$

$$= 8$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 26 & 27 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 26 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= 270 - 286$$

$$= -16$$

$$BA = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 21 & 32 \\ 11 & 16 \end{vmatrix}$$

$$|BA| = \begin{vmatrix} 21 & 32 \\ 11 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 336 - 352$$

$$= -16$$

Terlihat meskipun AB $\neq$ BA, tetapi $|AB| = |BA| = |A||B| = |B||A| = -16$

C. Matriks Non-singular (Tak Singular)

Matriks bujur sangkar A tipe n x n disebut matriks non-singular jika rank (A) = n. Oleh karena itu, A ~ I (matriks identitas) yang merupakan bentuk eselon tereduksi dari A. Sebaliknya, jika rank (A) < n, maka A disebut matriks singular yang bentuk eselon tereduksinya bukan I. Jadi, jika A $\nsim$ I maka A matriks singular.

Contoh 19:

a) $$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{B_{21(1)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{31(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{B_{12(-3)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{32(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{B_{23(-3)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{13(9)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Jadi, A matriks non-singular.

b) $$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{B_{21(1)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{31(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{B_{12(-3)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{32(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I$$

Jadi, B matriks singular.

D. Umpan Balik

1. Tentukan matriks kofaktor dan matrik adjoin dari matriks berikut:

    a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

    b. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

    c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

    d. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

    e. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

    f. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

    g. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

    h. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

    i. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

    j. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

2. Tentukan minor dari semua entri, dari matriks di bawah ini:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Tentukan kofaktor dari setiap entri pada matriks soal nomor 2 di atas

4. Tentukan determinan dari setiap matriks pada soal nomor 2 di atas

5. Carilah determinan matriks berikut dengan cara Sarrus

$$x = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

6. Carilah determinan dari matriks berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot -158$$

7. Hitung determinan matriks di bawah ini menggunakan metode ekspansi kofaktor

   a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   e. $\begin{bmatrix} -7 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

   f. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

8. Jika:

   $$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

   $$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

hitunglah:

a. $\det(A)$

b. $\det(B)$

c. $\det(AB)$

d. $\det(A)\det(B)$

e. $\det(3A^{-1})$

f. $\det(B^T)$

g. $\det((A\,B)^{-1})$

h. $\det((AB)^T)$

i. $\det(B^2)$

9. Matriks yang berbentuk:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{c} & 0 & 0 \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} & \mathrm{g} \\ 0 & 0 & \mathrm{f} & \mathrm{h} \end{bmatrix}$$

disebut sebagai matriks blok diagonal, karena matriks tersebut dapat dibentuk oleh blok-blok sub matriks yang memenuhi pola diagonal.

Jika:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{g} \\ \mathrm{f} & \mathrm{h} \end{bmatrix}$$

tunjukkan bahwa bahwa $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{B}) \cdot \det(\mathrm{C})$

10. Diketahui matriks A dan B berordo 4×4, $\det(A) = -12$ dan $\det(A) = 3/4$, hitunglah:

$$\det(A2BA^{-1}B^{3}B^{-3})$$

11. Tanpa menghitung determinan secara langsung, tunjukkan bahwa

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

BAB IV
Invers Matriks dan Vektor

A. Pendahuluan

Pada BAB II telah dibahas sistem persamaan linier. Pada BAB IV ini, sistem persamaan linier akan digunakan untuk mencari invers suatu matriks bujur sangkar tipe n x n yang non-singular. Mencari invers dari matriks non-singular A tipe n x n tidak lain adalah mencari matriks non-singular B sehingga AB = I, yang dapat diterjemahkan menjadi mencari penyelesaian n sistem persamaan linier $A\overline{X}_i = \overline{H}_i$ (i = 1, 2, … n) dimana $B = (\overline{X}_1\ \overline{X}_2\ \ldots.\ \overline{X}_n)$ dan $I = (\overline{H}_1 \overline{H}_2\ \ldots.\ \overline{H}_n)$. Selain itu, akan dibahas cara mencari invers matriks dengan determinan.

Setelah mempelajari Modul 4 ini, mahasiswa diharapkan dapat memahami invers dari matriks non-singular, vektor, serta dapat mencari invers matriks non-singular dengan transformasi baris elementer, atau dengan determinan.

B. Invers Matriks

Misal diketahui matriks non-singular A tipe n x n. Suatu matriks non-singular B tipe n x n, yang memenuhi hubungan AB = I, disebut invers dari A. Selanjutnya akan diperlihatkan jika AB = I maka juga BA = I. Dimisalkan AB = I dan CA = I.

Dari satu pihak CAB = C(AB) = CI = C, dari lain pihak CAB = (CA)B = IB = B. Jadi C = B. Sehingga jika A dan B matriks non-singular sedemikian hingga BA = AB = I, maka B disebut invers dari A dan ditulis B = A-1. Jadi A-1 A = A A-1 = I.

Contoh 1:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

matriks non singular

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= I$

$BA = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= I$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -8 & -11 \\ -13 & -17 \end{bmatrix} \neq I,$

C bukan inversnya A

$BC = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \neq I,$

C bukan inversnya B

Karena AB = BA = I, maka A-1 = B.

1.1. Beberapa Sifat Invers Matriks

Sifat invers matriks sebagai berikut:

1) Jika $A^{-1} = B$, maka $B^{-1} = A$. Cukup jelas.
2) $(A^{-1})^{-1} = A$. Cukup jelas.
3) $(AB)^{-1} = (B^{-1}\,A^{-1})$.

<u>Penjelasan</u>:

Sebelumnya perlu diingat bahwa

$$
\begin{aligned}
(AB)^{-1}\,(AB) &= (AB)(AB)^{-1} \\
&= I
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dengan menggunakan sifat asosiatif pada perkalian matriks dapat diperlihatkan:

a) $$
\begin{aligned}
(B^{-1}A^{-1})\,(AB) &= B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B \\
&= B^{-1}IB \\
&= B^{-1}B \\
&= I
\end{aligned}
$$

b) $$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})\,A^{-1} \\
&= AIA^{-1} \\
&= AA^{-1} \\
&= I
\end{aligned}
$$

Terlihat:

$$
\begin{aligned}
(B^{-1}A^{-1})\,(AB) &= (AB)\,(B^{-1}A^{-1}) \\
&= I
\end{aligned}
$$

Jadi $(B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}$

4) Hanya matriks non-singular yang mempunyai invers.

Penjelasannya akan dapat ditemukan pada pembahasan cara mencari invers matriks di bawah ini.

1.2. Cara Mencari Invers Matriks

Misal diketahui matriks non-singular A tipe n x n. Mencari A^{-1} tidak lain mencari matriks bujur sangkar B tipe n x n sehingga AB = I.

Misal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ akan dicari}$$

$$B = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan di atas dapat diterjemahkan menjadi n sistem persamaan linier non homogen sebagai berikut:

Sistem persamaan ke-1:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A\overline{X}_1 = \overline{H}_1$ dengan $\overline{H}_1 \neq \overline{0}$

Sistem persamaan ke-2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A\overline{X}_2 = \overline{H}_2$ dengan $\overline{H}_2 \neq \overline{0}$

Sistem persamaan ke-n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A\overline{X}_n = \overline{H}_n$ dengan $\overline{H}_n \neq \overline{0}$

Karena rank (A) = n, pastilah rank (A) = rank $(A|\overline{H}_i) = n$. Sehingga setiap sistem persamaan linier non homogen diatas pasti mempunyai jawab tunggal yang bukan $\overline{0}$. Jika jawab dari masing-masing sistem persamaan linier diatas adalah:

$$\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}; \ \overline{X}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}; \dots \ \overline{X}_n = \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $A^{-1} = B$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika A matriks singular, yaitu jika rank (A) < n, maka diantara n sistem persamaan linier non homogen akan terjadi rank (A) < rank (AH_i). Sebagai akibatnya AB = I tidak mempunyai jawaban. Jadi A tidak mempunyai invers.

Contoh 2:

Carilah A^{-1} jika A= $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

Jawab:

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$; $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan linier non homogen ke-1

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ atau } A\,\overline{X}_1 = \overline{H}_1 \qquad (*)$$

$$(A|\overline{H}_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{B_{21(-2)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{12(3)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ \underbrace{0 \quad 1}_{I} & & -2 \end{array}\right)$$

$$X_{11} = -5$$
$$X_{21} = -2$$

Diperoleh jawab tunggal: $\begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

Sistem persamaan linier non homogen ke-2

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ atau } A\,\overline{X}_2 = \overline{H}_2 \qquad (**)$$

Karena A pada sistem persamaan ke-2 sama dengan A pada sistem persamaan ke-1, maka transformasi elementer pada sistem persamaan ke-2 dapat dibuat persis sama seperti pada sistem persamaan ke-1.

$$(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}_2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{B_{21(-2)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{12(3)}} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathrm{I}} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$X_{12} = 3$
$X_{22} = 1$

Diperoleh jawab tunggal: $\begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dari (*) dan (**) didapat

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan: Karena transformasi elementer (*) persis sama dengan transformasi elementer pada (**), maka dapat dilakukan efisiensi dengan penggabungan (*) dan (**) sebagai berikut:

$$(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{H}}_1\overline{\mathrm{H}}_2) = (\mathrm{A}|\mathrm{I}) \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{matrix}}_{\mathrm{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathrm{I}} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{21(-2)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{12(3)}} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathrm{I}} & \underbrace{\begin{matrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{matrix}}_{\mathrm{A}^{-1}} \end{array}\right)$$

Terlihat ketika matriks koefisien A berubah menjadi matriks eselon terreduksi I, pada saat yang sama matriks I berubah menjadi A^{-1}.

Berdasarkan uraian dan contoh diatas, cara mencari A^{-1} dari matriks non-singular A adalah sebagai berikut:

1) Buatlah matriks lengkap $(A|I)$.

2) Lakukanlah transformasi baris elementer pada $(A|I)$ dengan sasaran matriks A menjadi matriks eselon tereduksi.

3) Saat matriks A menjadi matriks I, maka matriks I menjadi matriks A^{-1}.

$$(A|I) \sim \ldots\ldots\ldots\ldots \sim (I|A^{-1})$$

Contoh 3:

Carilah A^{-1} dari $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{21(1)}} \; \underset{\sim}{B_{31(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{12(-3)}} \; \underset{\sim}{B_{32(1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{13(9)}} \; \underset{\sim}{B_{23(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Jadi, $A^{-1}=\begin{bmatrix} -11 & 6 & 9 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 4:

Carilah A^{-1} dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{21(1)} \\ \sim \\ B_{31(-2)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} B_{12(-3)} \\ \sim \\ B_{32(1)} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0} & & & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Eselon tereduksi

Karena bentuk eselon terreduksi dari A tidak sama dengan I, maka matriks A adalah matriks singular, sehingga A tidak mempunyai invers.

1.3. Mencari Invers Matriks dengan Determinan

Misal A matriks bujur sangkar tipe n x n dan α_{ij} adalah kofaktor dari elemen a_{ij}.

Matriks $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ disebut matriks kofaktor dari A

Transpose dari matriks kofaktor disebut matriks adjoint dan ditulis adj A.

$$adj\ A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika matriks A dikalikan adj A, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$= |A|\ I$

atau

A (adj A) = (adj A) A

$= |A|\ I$

Jika $|A| \neq 0$ maka:

$$\frac{A(\text{adj } A)}{|A|} = \frac{(\text{adj } A)A}{|A|} = I$$

atau $A \left[\frac{\text{adj } A}{|A|}\right] = \left[\frac{\text{adj } A}{|A|}\right] A = I$

Mengingat A A^{-1} = A^{-1} A = I, maka diperoleh rumus mencari A^{-1} sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

Langkah-langkah mencari A^{-1} :

Langkah 1: Hitung |A|

Jika |A|=0, maka A tidak mempunyai invers

Jika |A|≠0 diteruskan ke langkah 2

Langkah 2: Mencari adj A

Langkah 3: $A^{-1} = \frac{\text{adj A}}{|A|}$

Contoh 5:

Carilah A^{-1} dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Langkah 1: Mencari determinan A

$|A| = 1\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 3\alpha_{13}$

$= |M_{11}| - 2|M_{12}| + 3|M_{13}|$

$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= 1$

$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

$= 10$

$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 7$

$$|A| = 1 - 2(10) + 3(7)$$

$$= 2 \neq 0$$

Langkah 2: Mencari adj A

$\alpha_{11} = |M_{11}|$

$= 1$

$\alpha_{12} = -|M_{12}|$

$= -10$

$\alpha_{13} = |M_{13}|$

$= 7$

$\alpha_{21} = -|M_{21}|$

$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= 1$

$\alpha_{22} = |M_{22}|$

$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

$= 4$

$\alpha_{23} = -|M_{23}|$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= -3$

$$\alpha_{31} = |M_{31}|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1$$

$$\alpha_{32} = -|M_{32}|$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2$$

$$\alpha_{33} = |M_{33}|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 3:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Contoh 6:

Carilah A^{-1} dari $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Langkah 1:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \neq 0$$

Langkah 2:

$$\alpha_{11} = |M_{11}|$$

$$= |8|$$

$$= 8$$

$$\alpha_{12} = -|M_{12}|$$

$$= -|7|$$

$$= -7$$

$$\alpha_{21} = -|M_{21}|$$

$$= -|6|$$

$$= -6$$

$$\alpha_{22} = |M_{22}|$$

$$= |5|$$

$$= 5$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Langkah 3:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}}{-2}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

Contoh 7:

Cari A^{-1} dari $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Langkah 1:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Jadi, A tidak punya invers.

C. Mencari Jawaban Sistem Persamaan Linier Non Homogen jika $\mathbf{A\overline{X} = \overline{H}}$ A Matriks Bujur Sangkar dan $\mathbf{|A| \neq 0}$

Selain cara umum yang telah dibahas pada Modul 3 sebelumnya, jika $|A| \neq 0$, maka $A\overline{X} = \overline{H}$ dapat pula diselesaikan dengan aturan Cramer, atau dengan menggunakan A^{-1}.

1.1. Aturan Cramer

Misal $A\overline{X} = \overline{H}$, dimana A tipe n x n dan $|A| \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Menurut aturan Cramer, jawaban dicari sebagai berikut:

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \; ; \; X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \; ; \; \ldots ; \; X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

dimana $|A_i|$ didapat dari |A| dengan mengganti kolom ke-i dengan $\overline{H}$.

Contoh 8:

Dengan aturan Cramer, carilah jawaban sistem persamaan linier

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_3 = -2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$$X_1 = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \; ; \; X_2 = \frac{3}{-3} = -1 \; ; \; X_3 = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

Contoh 9:

Dengan aturan Cramer, carilah jawab sistem persamaan linier!

$$
\begin{aligned}
2X_1 - 3X_2 + X_3 &= 5 \\
-X_1 + 2X_2 - 3X_3 &= 2 \\
3X_1 - 5X_2 + 4X_3 &= 3
\end{aligned}
$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Aturan Cramer tidak dapat digunakan. Jawaban sistem persamaan linier tersebut dapat dicari dengan cara umum pada modul 3.

1.2. Menggunakan Invers

Jika $|A| \neq 0$, maka A mempunyai A^{-1}

$A\overline{X} = \overline{H}$ dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$A^{-1}A\overline{X} = A^{-1}\overline{H}$$

$$I\,\overline{X} = A^{-1}\overline{H}$$

$$\text{Jadi, } \overline{X} = A^{-1}\overline{H}$$

Contoh 10:

Dengan menggunakan invers matriks non-singular, carilah jawaban sistem persamaan linier!

$$2X_1 + 3X_2 = 5$$

$$-3X_1 + 4X_2 = -6$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix};\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17 \neq 0\ ;$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$= \begin{bmatrix} 4/17 & -3/17 \\ 3/17 & 2/17 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$= A^{-1}\overline{H}$$

$$= \begin{bmatrix} 4/17 & -3/17 \\ 3/17 & 2/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38/17 \\ 3/17 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{38}{17};\ X_2 = \frac{3}{17}$$

Contoh 11:

Diketahui matriks A mempunyai invers. Buktikan $|A| \neq 0$

Bukti: A mempunyai invers, jadi $AA^{-1} = I$

$$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}|$$

$$= |I|$$

$|A||A^{-1}| = 1$, jadi $|A| \neq 0$

Sebab jika $|A| = 0$ maka $|A||A^{-1}| = 0 \neq 1$

D. Vektor

1.1. Operasi Dasar

a) Operasi penjumlahan vektor
Sama seperti operasi penjumlahan matriks, sehingga penjumlahan vektor hanya untuk vektor-vektor yang sama banyak komponennya/sama ukurannya.

b) Operasi perkalian skalar dengan vektor
Sama seperti perkalian skalar dengan matriks.

Contoh 12:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ditanya: (1) $2\bar{X} + 3\bar{Y}$, (2) $2\bar{X} + 3\bar{Z}$

Jawab:

$$(1)\ 2\bar{X} + 3\bar{Y} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ 2\bar{X} + 3\bar{Z} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Beberapa sifat:

Jika $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ sama tipenya, maka:

(1) $\bar{X} + \bar{Y} = \bar{Y} + \bar{X}$ sifat komutatif

(2) $(\bar{X} + \bar{Y}) + \bar{Z} = \bar{X} + (\bar{Y} + \bar{Z})$ sifat asosiatif

(3) $k(\bar{X} + \bar{Y}) = k\bar{X} + k\bar{Y}$ sifat distributif

(4) $(k + m)\bar{X} = k\bar{X} + m\bar{X}$

(5) $k(m\bar{X}) = m(k\bar{X}) = mk\bar{X}$

(6) $\bar{X} + \bar{O} = \bar{X}$

(7) $\bar{X} + (-\bar{X}) = \bar{O}$

1.2. Inner Product / Dot Product (Perkalian titik)

Misal $\bar{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dan $\bar{Y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Perkalian titik dari $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$ disajikan sebagai $\bar{X} \cdot \bar{Y}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

hasilnya berupa skalar bilangan rill.

Contoh 13:

Diketahui:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hitunglah:

a) $\overline{X} \cdot \overline{Y}$

b) $\overline{X} \cdot \overline{X}$

c) $\overline{X} \cdot \overline{Z}$

Jawab:

a) $\overline{X} \cdot \overline{Y} = (2)(5) + (-1)(4) + (3)(0) + (0)(1)$

$= 6$

b) $\overline{X} \cdot \overline{X} = (2)(2) + (-1)(-1) + (3)(3) + (0)(0)$

$= 14$

c) $\overline{X} \cdot \overline{Z} = (2)(2) + (-1)(8) + (3)(0) + (0)(5)$

$= -4$

1.3. Orthogonal

Vektor $\bar{X}$ dikatakan orthogonal dengan vektor $\bar{Y}$ jika dan hanya jika $\bar{X} \cdot \bar{Y} = 0$

Contoh 14:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = (4)(2) + (-5)(1) + (1)(-3)$$

$$= 0 \rightarrow \bar{X} \text{ orthogonal dengan } \bar{Y}$$

Vektor-vektor $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n}$ dikatakan saling orthogonal jika untuk setiap i ≠ j maka $\overline{X_\imath} \cdot \overline{X_\jmath} = 0$

Contoh 15:

$$\overline{X_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \overline{X_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \overline{X_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$\overline{X_1}\ dengan\ \overline{X_2}$, $\overline{X_1}\ \boldsymbol{dengan}\ \overline{X_3}$, $\overline{X_2}\ \boldsymbol{dengan}\ \overline{X_3}$ saling orthogonal

1.4. Panjang Vektor / Besar Vektor

Misal $\bar{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}$ panjang dari vektor $\bar{X}$ disajikan sebagai $\|\bar{X}\|$

$$\|\bar{X}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 \dots + a_n{}^2}$$

dan $\|\bar{X}\| = \sqrt{\bar{X}.\bar{X}}$

Contoh 16:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix};$$

$$\|\bar{X}\| = \sqrt{4+1+0+9}$$

$$= \sqrt{14}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

$$\|\bar{0}\| = \sqrt{0+0+0}$$

$$= \sqrt{0} = 0$$

1.5. Vektor Satuan (*Unit Vector*)

Jika $\|\bar{X}\| = 1$ maka $\bar{X}$ disebut vektor satuan.

Contoh 17:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

$$\|\bar{X}\| = \sqrt{0+1+0}$$

$$= \sqrt{1}$$

$$= 1$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/3} \\ \mathbf{-2/3} \\ \mathbf{2/3} \end{pmatrix};$$

$$\|\bar{Y}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}$$

$$= \sqrt{1}$$

$$= 1$$

$\bar{X}$ dan $\bar{Y}$ vektor satuan.

Untuk setiap $\bar{X} \neq \bar{O}$ maka $\left|\frac{\bar{X}}{\|\bar{X}\|}\right|$ adalah vektor satuan

Contoh 18:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \neq \bar{O}$$

$$\|\bar{X}\| = \sqrt{1 + 1 + 4}$$

$$= \sqrt{6} \neq 0$$

$$\frac{\bar{X}}{\|\bar{X}\|} = \frac{\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{6}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{\bar{X}}{\|\bar{X}\|}\right| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}}$$

$$= 1$$

E. Umpan Balik

1. Selesaikanlah persamaan matriks berikut:

   a. $X\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 5\end{bmatrix}$

   b. $X_{1\times 2}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix} + [-3]X_{1\times 2} = [-2 \quad 4]$

   c. $X_{2\times 3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & 2\\ -4 & 2 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}X_{2\times 3} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

   d. $X_{2\times 3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} + X_{2\times 3}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$

2. Tentukan invers dari matriks berikut:

   $A = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

   $B = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

   $C = \begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

   $D = \begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

   $E = \begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$

   $F = \begin{bmatrix}-4 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

   $G = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -3 & 5 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$$H = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 \\ 15 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 & 0 \\ 24 & 8 & 4 & 0 \\ 48 & 16 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Carilah invers matriks A dengan menggunakan Eselon tereduksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan matriks elementer yang menyebabkan matrik elementer di bawah ini menjadi matriks satuan (invers matriks elementer):

   a. $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c. $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Tentukan solusi dari sistem persamaan linier berikut:

   12x + 6y + z = 3

   -6x – 3y – z = 2

   8x + 3y = -1

6. Carilah jawaban dari sistem persamaan linier berikut dengan aturan Cramer:

   2a +3b +c +d =12

   a + b + 5c – d =15

   3a + 2b + 2c + 4d = 9

   4a – b + 3c + 2d = 5

[Halaman Ini Sengaja Dikosongkan]

BAB V
Kombinasi Linier Vektor dan Transformasi Linier

A. Pendahuluan

Vektor disajikan dalam bentuk matriks satu kolom dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}$$

dimana elemen-elemen $a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ ,\ a_n$ yang disebut komponen-komponen vektor adalah bilangan rill, dan vektornya disebut sebagai vektor rill.

Vektor-vektor yang akan dibahas pada umumnya adalah vektor rill. Oleh karena itu jika tidak ada penjelasan lebih rinci, maka setiap kali disebut vektor, dianggap vektor rill.

Pada Bab V ini juga akan dibahas fungsi vektor $\overrightarrow{y} = A\,\overrightarrow{x}$ yang dinamakan transformasi linier, dimana variabel bebas x dan variabel tak bebas y berupa vektor dan A adalah matriks. Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa juga diharapkan mampu:

1) Memahami pengertian transformasi linier $\overrightarrow{y} = A\,\overrightarrow{x}$ serta dapat mencari peta dari vektor x maupun mencari vektor-vektor yang dipetakan ke vektor y.
2) Memahami dan dapat melakukan transformasi linier non-singular.
3) Mencari transformasi linier pergantian basis.

Contoh 1:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \text{ vektor 3 komponen}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ vektor 4 komponen}$$

B. Kombinasi Linier Vektor

1.1. Linier Dependen (Lin Dep) dan Linier Independen (Lin Indep)

1) Misal diketahui himpunan m vektor dengan n kompoen (bilangan Rill)

$$\overline{\boldsymbol{X_1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} \end{pmatrix} \quad \overline{\boldsymbol{X_2}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{22}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n2}} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \overline{\boldsymbol{X_m}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1m}} \\ \boldsymbol{a_{2m}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{nm}} \end{pmatrix}$$

Bila dapat ditemukan skalar-skalar $k_1, k_2, \dots, k_m$ yang tidak semuanya nol sedemikian hingga $k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_m\overline{X_m} = \overline{0}$, maka vektor-vektor $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_m}$ dikatakan saling bergantungan linier atau linier dependen (lin dep).

Dari:

$$k_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{22}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n2}} \end{pmatrix} + \cdots + k_m \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1m}} \\ \boldsymbol{a_{2m}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{nm}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

dapat ditulis dengan

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1m}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2m}} \\ & & \vdots & \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \dots & \boldsymbol{a_{nm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{k_1} \\ \boldsymbol{k_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{k_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} (*)$$

atau $(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_m})\overline{k} = \overline{0}$ SPL Homogen.

Bila $k_1, k_2, \dots, k_m$ tidak semuanya nol, artinya sistem persamaan linier homogen di atas mempunyai penyelesaian non trivial. Seperti telah dipelajari dalam modul 3, maka syarat adanya penyelesaian non trivial adalah rank dari matriks A = rank $(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_m})$ < m (banyak vektor). Jadi, syarat agar $\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}$ saling linier dependen ialah rank $(\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}) < m$. Bila m > n, maka $\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}$ pasti linier dependen, dan bila m ≤ n belum tentu $\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}$ linier dependen.

2) Himpunan vektor-vektor yang tidak linier dependen dikatakan linier independen atau bebas linier (lin indep). Jadi, syarat agar $\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}$ linier independen ialah rank $(\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}) = \boldsymbol{m}$ (banyak vektor). Bila $\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}$ saling linier independen maka sistem persamaan linier homogen (*) hanya mempunyai peyelesaian trival, yaitu hanya dipenuhi oleh harga-harga $k_1 = k_2 = \cdots k_m = 0$. Jadi, menyelidiki apakah vektor $\overline{\boldsymbol{X_1}}, \overline{\boldsymbol{X_2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{X_m}}$ linier dependen atau linier independen adalah sama saja dengan menyelidiki apakah sistem persamaan linier homogen (*) mempunyai penyelesaian non trivial atau trival.

Contoh 2:

Selidikilah himpunan vektor-vektor berikut, linier dependen atau linier independen:

a) $\overline{\boldsymbol{X_1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \ \overline{\boldsymbol{X_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \overline{\boldsymbol{X_3}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

b) $\overline{\boldsymbol{X_1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \ \overline{\boldsymbol{X_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}, \overline{\boldsymbol{X_3}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}$

c) $\overline{\boldsymbol{X_1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}, \ \overline{\boldsymbol{X_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}, \overline{\boldsymbol{X_3}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Jawab:

Dicari rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_3})$

a) $$(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{B_{21(1)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{31(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_{32(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_3}) = 3$ (banyak vektor) SPL Homogen jawabannya trivial. Jadi, $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}$ linier independen.

b) $$(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{B_{21(1)}}{\sim}} \underset{\sim}{B_{31(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_{32(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_3}) = 2 < 3$ (banyak vektor) SPL Homogen jawabannya non trivial. Jadi, $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}$ linier dependen.

c) Karena vektor-vektornya hanya mempunyai 2 komponen, maka rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_3}) \leq 2 < 3$ (banyak vektor). Jadi, $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}$ linier dependen

Contoh 3:

Suatu himpunan vektor-vektor yang memuat vektor $\bar{O}$ pasti linier dependen. Misal diketahui himpunan $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$ dengan salah satu diantaranya adalah $\bar{O}$, misalkan $\overline{X_\iota} = \bar{O}$, maka dengan mengambil $k_i \neq 0$ dan k yang lainnya nol akan didapat:

$0\overline{X_1} \pm 0\overline{X_2} + \cdots + k_i\bar{O} + \cdots + 0\overline{X_m} = \bar{O}$

(ada $k_i \neq 0$)

Sehingga $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \bar{O}, \overline{X_m}$ linier dependen.

1.2. Kombinasi Linier (Kom Lin)

1) Vektor $\bar{X}$ dikatakan dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vetor-vektor $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$ bila dapat ditemukan skalar $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sehingga

$$\bar{X} = k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_m\overline{X_m}$$

Catatan:

Tidak dipersyaratkan ada k ≠ 0. Jadi boleh saja $k_1, k_2, \ldots, k_m$ nol semua. Dengan perkataan lain:

Jika sistem persamaan linier $k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_m\overline{X_m} = \bar{X}$ atau $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \ldots \quad \overline{X_m})\bar{k} = \bar{X}$ mempunyai penyelesaian jawaban, yaitu jika rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \ldots \quad \overline{X_m})$ = rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \ldots \quad \overline{X_m}|\bar{X})$, maka $\bar{X}$ kombinasi linier dari $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$.

Jika sistem persamaan linier $k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_m\overline{X_m} = \bar{X}$ tidak mempunyai jawaban, yaitu jika rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \ldots \quad \overline{X_m})$ < rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \ldots \quad \overline{X_m}|\bar{X})$, maka $\bar{X}$ bukan kombinasi linier dari $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$.

Contoh 4:

Selidiki apakah vektor $\bar{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ kombinasi linier dari vektor–vektor berikut:

a) $\overline{X_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \overline{X_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}, \ \overline{X_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}$

b) $\overline{X_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \overline{X_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix},\ \overline{X_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

c) $\overline{X_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \overline{X_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix},\ \overline{X_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Jika kombinasi linier, sebutkan kombinasi liniernya

Jawab:

Sistem persamaan linier, $k_1\overline{X}_1 + k_2\overline{X}_2 + k_3\overline{X}_3 = \overline{X}$ atau $(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \overline{X}$

a) $k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{SPL Non Homogen}$$

$$(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3|\overline{X}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{21}(1)} \ \underset{\sim}{B_{31}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{32}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_3(\tfrac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rank $(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3) = 2 <$ Rank $(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3|\overline{X}) = 3$

Jadi, $\overline{X}$ bukan kombinasi linier $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$.

b) $k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3 | \overline{X}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{B31(-2)}{\overset{B21(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{B32(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Rank $(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3)$ = Rank $(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3 | \overline{X}) = 3$

(banyak vektor = $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$)

$\therefore$ Punya jawaban tunggal

$$\underset{B23(1)}{\overset{B13(2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to k_1 = -9 \\ \to k_2 = -2 \\ \to k_3 = -5 \end{array} \Bigg] \to \text{jawabannya tunggal}$$

Jadi, $\overline{X}$ kombinasi linier $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$

Satu-satunya kombinasinya adalah:

$-9\overline{X}_1 - 2\overline{X}_2 - 5\overline{X}_3 = \overline{X}$

c) $k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$(\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \overline{X}_3 | \overline{X}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{B21(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}B32(-1)\\ \sim\\ B12(-2)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\therefore \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\rightarrow \mathrm{k}_1 + 2\mathrm{k}_3 = -5\\ \rightarrow \quad \mathrm{k}_2 + \mathrm{k}_3 = 3\end{array}$$

Rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_m})$ = rank $(\overline{X_1} \quad \overline{X_2} \quad \overline{X_m}|\bar{X})$ = 2 < 3 (banyak vektor). Jadi persamaan linier mempunyai jawaban tidak tunggal, sehingga $\bar{X}$ kombinasi linier $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}$. Kombinasi liniernya tidak tunggal. Kombinasi liniernya dicari sebagai berikut:

$$\begin{cases}k_1 + 2k_3 = -5 \rightarrow k_1 = -5 - 2k_3\\ \quad k_2 + k_3 = 3 \rightarrow k_2 = 3 - k_3\end{cases} \qquad k_3 \text{ bebas}$$

Jadi, kombinasi liniernya:

$(-5 - 2k_3)\overline{X_1} + (3 - k_3)\overline{X_2} + k_3\overline{X_3} = \bar{X}$

Misal:

$k_3 = 0 \rightarrow$ kombinasi liniernya:

$-5\overline{X_1} + 3\overline{X_2} + 0\overline{X_3} = \bar{X}$

$k_3 = 1 \rightarrow$ kombinasi liniernya:

$-7\overline{X_1} + 2\overline{X_2} + \overline{X_3} = \bar{X}$

⋮

dan seterusnya

2) Bila $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$ linier dependen, maka salah satu darinya pasti dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari yang lainnya. Ada $k \neq 0$ sehingga

$$k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_s\overline{X_s} + \cdots + k_m\overline{X_m} = \bar{O}$$

Misalkan $k_s \neq 0$, maka

$$k_s\overline{X_s} = -k_1\overline{X_1} - k_2\overline{X_2} - \cdots - k_{s-1}\overline{X_{s-1}}$$

$$-k_{s+1}\overline{X_{s+1}} \ldots - k_m\overline{X_m}$$

$$\overline{X_s} = -\frac{1}{k_s}(k_1\overline{X_1} - k_2\overline{X_2} - \cdots + k_{s-1}\overline{X_{s-1}}$$

$$+k_{s+1}\overline{X_{s+1}} \ldots + k_m\overline{X_m})$$

$$\overline{X_s} = h_1\overline{X_1} + h_2\overline{X_2} + \cdots + h_{s-1}\overline{X_{s-1}}$$

$$+h_{s+1}\overline{X_{s+1}} + \cdots + h_m\overline{X_m}$$

dengan $h_i = \frac{-k_i}{k_s}$

$\overline{X_s}$ komlin vektor-vektor lainnya.

3) Bila $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$ linier independen sedang $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}, \overline{X_{m+1}}$ linier dependen, maka $\overline{X_{m+1}}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$

Bukti:

Karena $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}, \overline{X_{m+1}}$ linier dependen, maka dapat ditemukan $k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}$ yang tidak semuanya nol, sehingga:

$$k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_m\overline{X_m} + k_{m+1}\overline{X_{m+1}} = \bar{O}$$

Seandainya $k_{m+1} = 0$, maka artinya dapat ditemukan $k_1, k_2, \ldots, k_m$ yang tidak semua nol, sehingga:

$$k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_m\overline{X_m} + 0\overline{X_{m+1}} = \bar{O}$$

atau

$k_1\overline{X_1} + k_2\overline{X_2} + \cdots + k_m\overline{X_m} = \bar{O}$

yang berakibat $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$ linier dependen, bertentangan dengan yang diketahui. Jadi, haruslah $k_{m+1} \neq 0$. Namun, jika $k_{m+1} \neq 0$ maka menurut (B) di atas $\overline{X_{m+1}}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$

C. Pengertian Transformasi Linier

Misal dalam ruang vektor V ada vektor-vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \in V$$

yang mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Disingkat $\overrightarrow{y} = A\,\overrightarrow{x}$

Hubungan $\overrightarrow{y} = A\,\overrightarrow{x}$ tersebut merupakan suatu pemetaan atau transformasi yang memetakan atau membawa vektor $\overrightarrow{x}$ ke vektor $\overrightarrow{y}$, vektor $\overrightarrow{y}$ disebut peta atau bayangan dari vektor $\overrightarrow{x}$. Matriks A disebut matriks transformasi. Transformasi $\overrightarrow{y} = A\,\overrightarrow{x}$ yang memenuhi sifat atau syarat bahwa jika $\overrightarrow{x_1}$ dipetakan ke $\overrightarrow{y_1}$ dan $\overrightarrow{x_2}$ dipetakan ke $\overrightarrow{y_2}$ maka:

1) $(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2})$ dipetakan ke $(\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2})$.

2) $k\overrightarrow{x_1}$ dipetakan ke $k\overrightarrow{y_1}$ disebut transformasi linier.

Contoh 5:

Diketahui transformasi linier $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}$

a) Vektor $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

dipetakan ke $\overrightarrow{y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}$

Vektor $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

dipetakan ke $\overrightarrow{y_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$

Vektor $(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

dipetakan ke $(\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}) = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$

Vektor $2\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

dipetakan ke $2\vec{y} = \begin{pmatrix} 14 \\ 34 \end{pmatrix}$

b) Carilah vektor $\vec{x}$ yang dipetakan ke:

vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Misal $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dipetakan ke $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{B_{21(-3)}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{2\left(-\frac{1}{2}\right)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{12(-2)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} a = -7 \\ b = \ \ 6 \end{array}$$

Jadi, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ dipetakan ke $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Misalkan diketahui transformasi linier

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \vec{x} \; atau \; \vec{y} = A\,\vec{x}$$

Pada transformasi tersebut vektor $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$

dipetakan ke

$$\vec{y1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

yang tidak lain adalah kolom ke-1 dari A.

Dengan penjelasan serupa diatas akan didapat:

Vektor $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ dipetakan ke $\vec{y_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$

kolom ke-2 dari A.

Vector $\overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ dipetakan ke $\overrightarrow{y_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

kolom ke-n dari A.

Jadi, suatu transformasi linier $\vec{y} = A\,\vec{x}$ lengkap terdefinisi jika sudah diketahui peta dari vektor-vektor basis E.

Contoh 6:

Tentukan transformasi linier pada R^3 yang memetakan:

$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ke $\overrightarrow{y_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ke $\overrightarrow{y_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ke $\overrightarrow{y_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

kemudian carilah peta dari vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jawab:

Transformasi $\vec{y} = A\,\vec{x}$ dengan:

$$A = (\overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{y_3})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Peta dari $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1.1. Transformasi Linier Non-singular

1) Jika A matriks non-singular, maka sistem persamaan linier $\overrightarrow{y} = A\,\overrightarrow{x}$ akan mempunyai jawaban tunggal. Sehingga untuk setiap vektor $\vec{y}$ ada tepat satu vektor $\vec{x}$ yang dipetakan ke $\vec{y}$. Jika $\overrightarrow{x_1} \neq \overrightarrow{x_2}$, petanya $\overrightarrow{y_1} \neq \overrightarrow{y_2}$.

2) Pada transformasi linier non-singular $\overrightarrow{y} = A\,\overrightarrow{x}$ jika $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots \overrightarrow{x_n}$ linier independen maka petanya $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \ldots, \overrightarrow{y_n}$ juga linier independen.

   Bukti: $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \ldots, \overrightarrow{x_n}$ linier independen.

   Diandaikan petanya $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \ldots, \overrightarrow{y_n}$ linier dependen, maka akan ada skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots k_n$ yang tidak semuanya 0 (ada k ≠ 0) sedemikian sehingga:

   $k_1\overrightarrow{y_1} + k_2\overrightarrow{y_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{y_n} = \bar{0}$

   $k_1A\overrightarrow{x_1} + k_2A\overrightarrow{x_2} + \ldots + k_nA\overrightarrow{x_n} = \bar{0}$

   $A(k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{x_n}) = \bar{0}$ (*)

   Karena A non-singular, maka hasil jawaban sistem persamaan linier (*) diatas adalah trivial yaitu:

   $(k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{x_n}) = 0$

   dengan ada k≠0

Jadi $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots \overrightarrow{x_n}$ linier dependen, bertentangan dengan yang diketahui bahwa $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots \overrightarrow{x_3}$ linier independen, sehingga pengandaian $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \dots, \overrightarrow{y_n}$ linier dependen adalah tidak benar. Jadi, haruslah $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \dots, \overrightarrow{y_n}$ linier independen.

Berdasarkan hal tersebut diatas, transformasi linier non-singular tidak mengubah dimensi ruang vektor. Peta ruang vektor yang berdimensi n adalah ruang vektor berdimensi n.

3) Dari transformasi linier non-singular $\vec{y} = A\,\vec{x}$, karena A mempunyai invers A^{-1} akan dapat dibuat transformasi linier baru $A^{-1}\bar{y} = A^{-1}A\,\vec{x}$ atau $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$ yang juga berupa transformasi linier non-singular yang disebut transformasi kebalikan (invers) dari transformasi $\vec{y} = A\,\vec{x}$. Kalau $\vec{y} = A\,\vec{x}$ memetakan vektor-vektor basis E: $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots \overline{e_n}$ ke kolom-kolomnya A, maka transformasi $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$ akan memetakan kolom-kolomnya A ke vektor-vektor basis E: $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots \overline{e_n}$.

Contoh 7:

Dalam ruang vektor R^2 carilah transformasi linier yang memetakan: Basis $W = \overline{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{w_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ke basis E $= \overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jawab:

$$W = (\overline{w_1}, \overline{w_2})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$w^{-1} = \frac{adj\,W}{\|W\|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Transformasi yang ditanyakan:

$\bar{y} = w^{-1}\bar{x}$

$\bar{y} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\bar{x}$ memetakan $\overline{w_1}$ ke $\overline{e_1}$ dan memetakan $\overline{w_2}$ ke $\overline{e_2}$.

1.2. Transformasi Linier dalam Ruang Vektor V

Misal dalam ruang vektor V terjadi transformasi linier sebagai berikut:

Transformasi $\bar{y} = A\bar{x}$ memetakan $\bar{x}$ ke $\bar{y}$

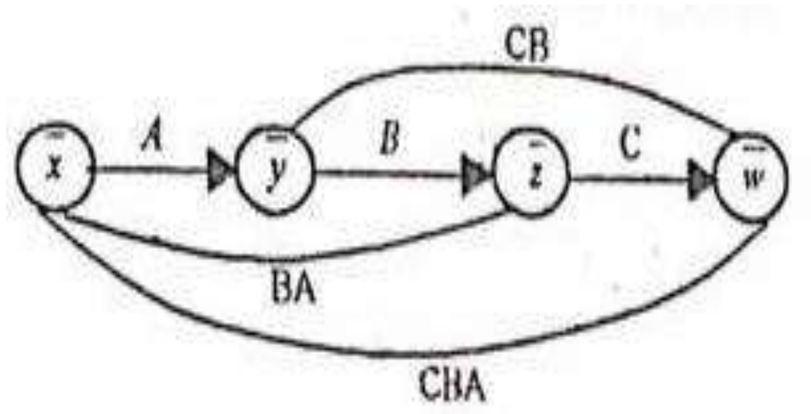
Transformasi $\bar{z} = B\bar{y}$ memetakan $\bar{y}$ ke $\bar{z}$

Transformasi $\bar{w} = C\bar{z}$ memetakan $\bar{z}$ ke $\bar{w}$

Maka: Transformasi $\bar{z} = BA\bar{x}$ memetakan $\bar{x}$ ke $\bar{z}$

Transformasi $\bar{w} = CB\bar{y}$ memetakan $\bar{y}$ ke $\bar{w}$

Transformasi $\bar{w} = CBA\bar{x}$ memetakan $\bar{x}$ ke $\bar{w}$

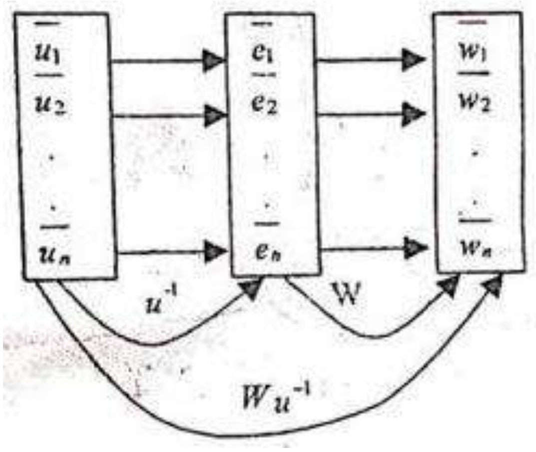


Gambar 5.1. Transformasi Linier

Berdasarkan hal tersebut diatas, selalu mungkin membuat / mencari transformasi linier non-singular yang memetakan basis:

$U: \overline{u_1},\ \overline{u_2}, \dots \overline{u_n}$ ke basis $W: \overline{w_1},\ \overline{w_2}, \dots \overline{w_n}$

Caranya dengan menggunakan n bantuan / melewati basis E sebagai berikut:



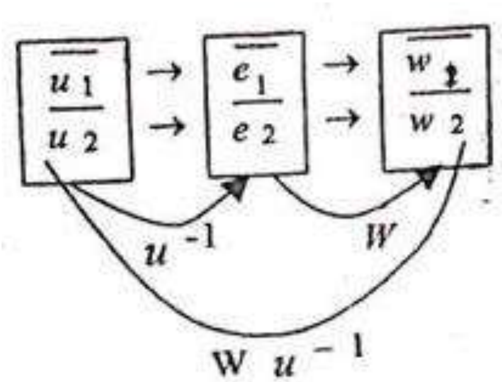
Gambar 5.2. Transformasi Linier yang Memetakan Basis U ke Basis W

Jadi, transformasi linier $\bar{y} = Wu^{-1}\bar{x}$ akan memetakan basis $U: \overline{u_1}$, $\overline{u_2}, \ldots \overline{u_n}$ ke basis $W: \overline{w_1},\ \overline{w_2}, \ldots \overline{w_n}$

Contoh 8:

Carilah transformasi linier non-singular yang memetakan basis $U: \overline{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ke basis $W: \overline{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Jawab:



Gambar 5.3. Transformasi Linier Non-singular yang Memetakan Basis U ke Basis W

$$U \;= (\overline{u_1}\;\overline{u_2})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W \;= (\overline{w_1}\;\overline{w_2})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

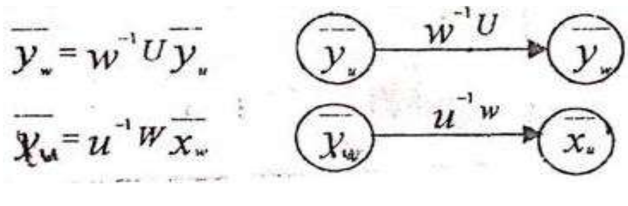
$$WU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Jadi, transformasi $\bar{y} = Wu^{-1}\bar{x}$ atau $\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\bar{x}$ memetakan basis U: $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$ ke basis W: $\overline{w_1}$, $\overline{w_2}$.

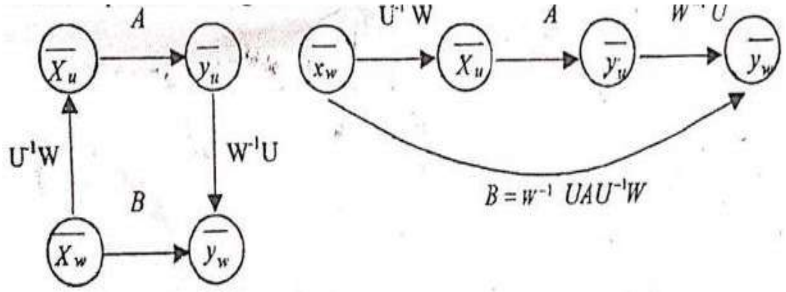
1.3. Transformasi Linier dan Pergantian Koordinat

Misal dalam ruang vektor V terjadi transformasi linier dalam koordinat relatif terhadap basis U sebagai berikut $\overline{y_u} = A\overline{x_u}$. Sekarang jika koordinat-koordinatnya diubah menjadi relatif terhadap basis W, maka $\overline{x_u}$ berubah menjadi $\overline{x_w}$ dan $\overline{y_u}$ berubah menjadi $\overline{y_w}$. Tentu saja matriks transformasi A juga akan mengalami perubahan, misalkan berubah menjadi matriks B, sehingga bentuk transformasi $\overline{y_u} = A\overline{x_u}$ berubah menjadi $\overline{y_w} = B\overline{x_w}$. Adapun matriks transformasi B dapat dicari dengan memperhatikan hubungan pergantian koordinat sebagai berikut



Gambar 5.4. Hubungan Pergantian Koordinat

Kemudian perhatikan gambar berikut:



Gambar 5.5. Hubungan Transformasi Linier dengan Pergantian Koordinat

Jadi dalam koordinat relatif terhadap basis W transformasinya menjadi $\overline{Y_w} = W^{-1}UAU^{-1}W\overline{X_w}$

<u>Catatan</u>:

1) Matriks $B = W^{-1}UAU^{-1}W$
   Matiks B dan A dikatakan serupa
   Matriks B serupa dengan matriks A jika dapat ditemukan matriks non-singular P, sehingga $B = P^{-1}AP$
   Pada bahasan diatas $P = U^{-1}W$ dan $P^{-1} = (U^{-1}W)^{-1} = W^{-1}U$.

2) Vektor $\overline{x_u}$ dan $\overline{x_w}$ adalah vektor yang sama, hanya berbeda sistem koordinatnya. Demikian pula vektor $\overline{y_u}$ dan $\overline{y_w}$.

3) Transformasi $\overline{y_u} = A\overline{x_u}$ dan $\overline{y_w} = B\overline{x_w}$ adalah transformasi linier yang sama, hanya beda sistem koordinatnya.

Contoh 9:

Dalam ruang vektor R^2 terjadi transformasi linier

$$\overline{y_u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{x_u}$$

dengan kordinat relatif terhadap basis

$$U: \overline{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

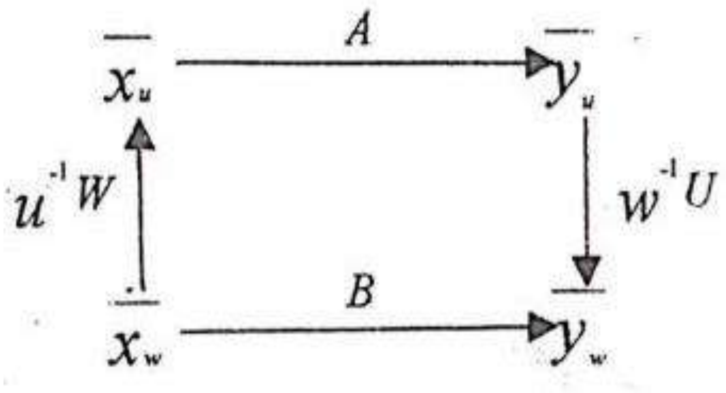
Nyatakan transformasi tersebut dalam koordinat relatif terhadap basis

$W: \overline{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{w_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Jawab</u>:

Misalkan transformasinya dalam koordinat relatif terhadap basis w adalah

$\overline{y_w} = B\overline{x_w}$



Gambar 5.6. Transformasi Linier dalam Koordinat Relatif

$B \ = W^{-1}UAU^{-1}W$

$\overline{y_w} = W^{-1}UAU^{-1}W\overline{x_w}$

$U \ = (\overline{u_1}, \overline{u_2})$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$

$u^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$W \ = (\overline{w_1}, \overline{w_2})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$w^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}U = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1}W = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y_w} = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\overline{x_w}$$

Jadi, $\overline{y_w} = \begin{pmatrix} 232 & -543 \\ 97 & -227 \end{pmatrix}\overline{x_w}$

D. Umpan Balik

Soal 1

Tunjukkan u = (2, 3, -1) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari W = $\{a_1 = (1,0,1), a_2 = (0,1,-1), a_3 = (1,1,-1)\}$

Soal 2

Nyatakan $q = 2 + 3x - 4x^2$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $B = \{a = 1 + 2x - 3x^2, b = 3x + 4x^2, c = 2 + x + 5x^2\}$

Soal 3

Jika $S = \left\{u_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right\}$, apakah $a = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S?

Soal 4

Apakah a = (2, -1, 3) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $S = \{u_1 = (2,-2,4), u_2 = (0,1,2), u_3 = (1,0,4)\}$?

Soal 5

Diketahui:

Vektor-vektor $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

dan $\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ditanya:

1) Apakah $\overline{x}$ kom lin $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$?
2) Apakah $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ lin dep atau lin indep?

Soal 6

Jika terdapat vektor:

u = (-1,1,2)

dan

v = (2,-3,0)

pada ruang R^3, tentukan apakah vektor-vektor berikut ini adalah kombinasi linier dari u dan v :

a) (-4,5,4)
b) (1,-2,0)

Soal 7

Manakah vektor-vektor di bawah ini yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $S = \{a_1 = (1, -1, 0), a_2 = (0, 2, 1), a_3 = (1, 1, 1), a_4 = (1, 3, 2)\}$

a. u = (2, 0, 1)

b. u = (-1, 1, 1)

c. u = (0, 2, 3)

d. u = (4, 3, -1)

e. u = (2, 1, -1)

f. u = (0, 0, 1)

Soal 8

Nyatakan vektor-vektor di bawah ini, sebagai kombinasi linier dari:

$$S = \left\{ m_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, m_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, m_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Soal 9

Apakah vektor-vektor $\underline{v}_1$ = (1,0,1), $\underline{v}_2$ = (2,-1,3) dan $\underline{v}_3$ = (-3,1,-4) saling bebas atau bergantung linier?

Soal 10

Tunjukkan apakah fungsi-fungsi di bawah ini merupakan transformasi linier? Berikan contoh penyangkal, jika bukan transformasi linier.

a. $T(a + bx + cx^2) = b + cx + ax^2$

b. $T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2$

c. $T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (a + 2c)x + (a - 2b)x^2 + (2b + c)x^3$

d. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ab \\ b^2 \end{bmatrix}$

e. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b \\ a - 2b \\ a + b + 3c \end{bmatrix}$

f. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b + 3 \\ b + c - 2 \end{bmatrix}$

g. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$

h. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

i. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b & b + c \\ c + d & d + a \end{bmatrix}$

BAB VI
Vektor Karakteristik, Diagonalisasi dan Matriks Singular

A. Pendahuluan

Pada Bab V telah dibahas tentang transformasi linier $\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x}$. Dalam penggunaannya, sering diminta untuk mencari skalar λ riil sedemikian hingga persamaan $\mathrm{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$ mempunyai jawaban $\bar{x} \neq \bar{0}$ yang disebut vektor karakteristik dari matriks A.

Pada Bab VI ini, akan dibahas permasalahan tersebut di atas dan penggunaannya untuk mendiagonalkan matriks bujur sangkar A. Setelah mempelajari Bab VI ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1) Memahami pengertian persamaan karakteristik, akar karakteristik, vektor karakteristik dan ruang vektor karakteristik.
2) Mencari akar-akar karakteristik, vektor-vektor karakteristik serta dimensi dan basis ruang vektor karakteristik.
3) Mengenal beberapa teori yang berkaitan dengan akar karakteristik dan vektor karakteristik.
4) Memahami pengertian diagonalisasi.
5) Mengenal persyaratan agar matriks A dapat didiagonalkan.
6) Mencari matriks non-singular P yang mendiagonalkan A.

Pada Bab VI ini juga akan dibahas fungsi vektor $\vec{y} = A\,\vec{x}$ yang dinamakan transformasi linier, dimana variabel bebas x dan variabel tak bebas y berupa vektor dan A adalah matriks.

B. Matriks Singular

Jika A matriks singular (jika |A|=0) maka sistem persamaan linier $A\bar{x} = \bar{y}$ tidak mungkin berjawab tunggal:

1) Jika rank (A) < rank $(A|y)$ maka sistem persamaan linier $A\bar{x} = \bar{y}$ tidak mempunyai jawab. Dalam pengertian transformasi linier $\bar{y} = A\bar{x}$ ada vektor $\bar{y}$ yang bukan merupakan peta dari vektor $\bar{x}$ yang manapun, jadi tidak ada vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke vektor $\bar{y}$ tersebut.

2) Jika rank (A) = rank $(A|y)$ maka sistem persamaan linier $A\bar{x} = \bar{y}$ mempunyai jawab tidak tunggal. Dalam pengertian transformasi linier $\bar{y} = A\bar{x}$, ada vektor $\bar{y}$ yang merupakan peta lebih dari satu vektor $\bar{x}$. Ada tak berhingga banyak vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke vektor $\bar{y}$.
3) Himpunan vektor-vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke vektor $\bar{0}$ pada transformasi linier $\bar{y} = A\bar{x}$, disebut Kernel dan membentuk ruang vektor yang diberi nama Nullspace. Jadi Kernel adalah himpunan vektor-vektor jawab dari sistem persamaan linier homogen $A\bar{x} = \bar{0}$.

Contoh 1:

Diketahui transformasi linier

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}$$

a) Carilah vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke vektor:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Carilah vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke vektor:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) Carilah Kernel-nya

d)

Jawab:

a) Misal $\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dipetakan ke $\bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sistem persamaan linier non homogen

$$(A|\bar{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{B}_{21(1)}}{\sim}\ \overset{\mathrm{B}_{31(-2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{B}_{32(1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Rank (A) = 2 < rank $(A|\bar{y}) = 3$.

Jadi tidak mempunyai jawaban.

Artinya tidak ada vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Misal $\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dipetakan ke $\bar{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sistem persamaan linier non homogen

$$(A|\bar{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{B}_{21(1)}\\ \sim \\ \mathrm{B}_{31(-2)}\\ \sim\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{32(1)}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Rank (A) = rank $(A|\bar{y}) = 2$. Jadi jawab tidak tunggal.

Ada tak berhingga banyak vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix}4\\ -5\\ 9\end{pmatrix}$$

Jika transformasi basis elementer dilanjutkan didapat

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{2(-1)}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}_{12(-2)}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Eselon tereduksi

$\rightarrow a + 2c = 2 \quad \rightarrow a = 2 - 2c$
$\rightarrow b - c = 1 \quad \rightarrow b = 1 + c$

Didapat $\bar{x} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}2 - 2c\\ 1 + c\\ c\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

c bebas, dipetakan ke $\bar{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

Misal:

Untuk C = 0,

vektor $\overline{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

dipetakan ke $\bar{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

Untuk C = 1,

vektor $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

dipetakan ke $\bar{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) Kernel adalah vektor-vektor jawab sistem persamaan linier $A\bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{B_{21(1)}}{\sim}} \underset{B_{31(-2)}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\overset{B_{12(2)}}{\sim}} \underset{B_{32(1)}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{B_{2(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow a + 2c = 0 \rightarrow a = -2c$
$\rightarrow\ b - c = 0\ \rightarrow\ \ b = c$

Jadi, $\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c bebas

$\bar{x}$ kombinasi linier dari $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jadi kernel dari berupa ruang vektor yang berdimensi 1 dengan vektor $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sebagai basisnya.

Jika matriks A tipe m×n maka transformasi $\bar{y} = A\bar{x}$ akan memetakan / mengubah vektor n-komponen $\bar{x}$ menjadi vektor m-komponen $\bar{y}$.

Contoh 2:

Transformasi linier $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}$

Vektor $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dipetakan ke:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ 23 \end{pmatrix}$$

C. Vektor Karakteristik

Pada transformasi linier $\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x}$ dalam ruang vektor V lewat *field* F, mungkin saja ada vektor-vektor $\bar{x}$ yang dipetakan ke $\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$ dengan λ riil. Vektor-vektor $\bar{x} \neq \bar{0}$ yang dipetakan ke $\lambda\bar{x}$ seperti tersebut diatas, disebut vektor-vektor karakteristik (vektor invariant atau vektor eigen). Perhatikan bahwa mencari vektor karakteristik tidak lain mencari jawab sistem persamaan $\mathrm{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

Bentuk $\mathrm{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$ dapat diubah menjadi $\mathrm{A}\bar{x} - \lambda\bar{x} = \bar{0}$ atau $(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})\,\bar{x} = \bar{0}$ yang tidak lain adalah suatu sistem persamaan linier homogen. Mencari vektor karakteristik $\bar{x} \neq \bar{0}$ tidak lain mencari jawab non trivial dari $(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})\,\bar{x} = \bar{0}$. Agar mempunyai jawab non trivial haruslah det (A - λI) = 0 atau |A - λI| = 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

Merupakan persamaan pangkat n dalam λ

$a_0\,\lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} + a_n = 0$ disebut persamaan karakteristik. Akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut, namakan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ disebut akar-akar karakteristik (nilai eigen).

Hanya λ_i riil yang disebut akar karakteristik. Untuk setiap akar karakteristik λ_i sistem persamaan linier $(\mathrm{A} - \lambda_i\,\mathrm{I})\,\bar{x} = \bar{0}$ mempunyai jawab non trivial yang adalah vektor-vektor karakteristik $\bar{x}$ yang bersesuaian (terkait) dengan akar karakteristik λ_i, dan membentuk ruang vektor yang disebut ruang vektor karakteristik.

Urutan langkah-langkah mencari vektor-vektor karakteristik dari matriks A (dari transformasi linier $\mathrm{y} = \mathrm{A}\bar{x}$) adalah sebagai berikut:

1) Menentukan persamaan karakteristik |A - λI| = 0 yang berupa persamaan pangkat n dalam λ.
2) Mencari akar-akar karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
3) Untuk setiap $\lambda_i \epsilon$ *field* R dibuat sistem persamaan linier homogen $(A - \lambda_i\, I)\,\bar{x} = \bar{0}$
4) Mencari jawaban hasil non trivial dari $(A - \lambda_i\, I)\,\bar{x} = \bar{0}$, yang adalah vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ_i.
5) Dimensi dan basis ruang vektor karakteristik, dapat dicari dengan menentukan vektor-vektor linier independen yang menyusun ruang vektornya.

Contoh 3:

Diketahui transformasi linier $\bar{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \bar{x}$ dalam ruang vektor R^3, ditanyakan:

1) Persaman karakteristik
2) Akar-akar karakteristik
3) Vektor-vektor karakteristik
4) Dimensi dan basis ruang vektor karakteristik

Jawab:

1) Persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau $(2-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) = 0$

2) Akar-akar karakteristiknya $\lambda_1 = 2\,;\ \ \lambda_2 = 2\,;\ \ \lambda_3 = 5$

3) Untuk akar karakteristik $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Sitem persamaan linier homogen

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 3 & 2-2 & 0 \\ 0 & 3 & 5-2 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapat $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan akar karakteristik $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Untuk akar karakteristik $\lambda_3 = 5$:

Sistem persamaan linier homogen

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 3 & 2-5 & 0 \\ 0 & 3 & 5-5 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapat $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan akar karakteristik $\lambda_3 = 5$

4) Vektor-vektor karakteristik $\bar{x} = a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ akan membentuk ruang vektor karakteristik berdimensi 1 dengan basis $\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor-vekor karakteristik $\bar{x} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ akan membentuk ruang vektor karakteristik berdimensi 1 dengan basis $\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Contoh 4:

Carilah basis dan dimensi ruang vektor karakteristik dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Jawab:

Persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^3 - 1\ \mathrm{I}\lambda^2 + 35\lambda - 25 = 0$ atau

$(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 5) = 0$

akar-akar karakteristik $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 5$; $\lambda_3 = 5$

untuk $\lambda_1 = 1$ sistem persamaan linier homogennya

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

didapat vektor-vektor karakteristiknya

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ruang vektor karakteristiknya berdimensi 1 dengan basis $\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ sistem persamaan linier homogennya:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

didapat vektor-vektor karakteristiknya $\bar{x} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ b \end{pmatrix}$

$\bar{X} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ merupakan kombinasi linier dari $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ yang linier independen.

Jadi, ruang vektor karakteristiknya berdimensi 2 dengan $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ basisnya.

Contoh 5:

Pada ruang vektor R^2 ada tranformasi linier:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \bar{x}$$

persamaan karakteristiknya

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \; atau \; \lambda^2 + 1 = 0$$

Didapat $\lambda_1 = i$ dan $\lambda_2 = -i$, karena λ_1 dan λ_2 bukan anggota bilangan riil R, maka persamaan karakteristik tersebut tidak mempunyai akar karakteristik (yang riil) sehingga pada transformasi linier tersebut diatas tidak mempunyain vektor-vektor karakteristik (yang riil.)

<u>Beberapa Theorem umum</u>:

Berikut diberikan beberapa theorema tanpa disertai buktinya:

1) Jika λ_i adalah akar karakteristik tunggal (lipat satu) maka ruang vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ_i akan berdimensi 1. Sebagai contoh, lihatlah $\lambda_3 = 5$ pada contoh 3 dan $\lambda_1 = 1$ pada contoh 4 di atas, masing–masing akar karakteristik lipat satu, dan ruang vektor karakteristiknya berdimensi.
2) Jika λ_i adalah akar karakteristik lipat s maka ruang vektor karakteristik yang bersesuaian akan berdimensi r ≤ s. Sebagai contoh lihatlah $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ pada contoh 3 diatas adalah akar lipat dua, ruang vektor karakteristiknya berdimensi 1 < 2. Tetapi untuk $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ pada contoh 4 diatas ruang vektor karakteristiknya berdimensi 2.
3) Jika $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_t$ adalah vektor-vektor karakteristik tidak nol, yang bersesuaian dengan akar-akar karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ yang berbeda, maka $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_t$ linier independen. Sebagai contoh, lihatlah vektor karakteristik $\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ yang bersesuaian dengan akar karakteristik $\lambda_1 = 1$ dan $\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ yang bersesuaian dengan akar karakteristik $\lambda_2 = 5$. Akar karakteristik λ_1 berbeda dengan $\lambda_1, \bar{X}_1, \bar{X}_2$ linier independen.
4) Akar–akar karakteristik dari A^{-1} sama dengan akar–akar karakteristik dari A.
5) Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ adalah akar–akar karakteristik dari A dan k skalar (anggota *field* R) maka $k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_t$ adalah akar-akar karakteristik dari kA dan $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \dots, \lambda_t - k$ adalah akar-akar karakteristik dari (A – k I).

D. Diagonalisasi

Permasalahan diagonalisasi adalah sebagai berikut:

Misal diketahui matriks bujur sangkar A Adalah matriks non-singular P sedemikian hingga $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{D}$, dimana D adalah matriks diagonal.

Masalah tersebut membawa ke definisi sebagai berikut:
Matriks bujur sangkar A dapat didiagonalkan (dapat dibawa ke bentuk diagonal) jika ada matriks non-singular P, sehingga $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{D}$.

Theorema Pertama:

Matriks A tipe n x n dapat didiagonalkan jika dan hanya jika A mempunyai n vektor–vektor karakteristik yang linier independen (bebas linier.)

Bukti:

1) Diketahui matriks A tipe $n \times n$ dapat didiagonalkan. Akan dibuktikan A mempunyai n vektor-vektor karakteristik yang linier independen sebagai berikut:

   Karena A dapat didiagonalkan, maka ada matriks non-singular P sehingga $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{D}$.

   Namakan $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & . & . & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & . & . & P_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ P_{n1} & P_{n2} & . & . & P_{nn} \end{pmatrix}$

   $= (\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$ dengan $\overline{P_n} \neq \overline{0}$

   dan $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}$

   Dari $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{D}$, didapat AP = PD

   $\mathrm{AP} = \mathrm{A}(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$

   $= (\mathrm{A}\overline{P_1} \quad \mathrm{A}\overline{P_2} \quad \ldots \quad \mathrm{A}\overline{P_n}) \qquad (*)$

$$PD = (\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1\overline{P_1} \quad \lambda_2\overline{P_2} \quad \ldots \quad \lambda_n\overline{P_n})$$

Didapat

$$(A\overline{P_1} \quad A\overline{P_2} \quad \ldots \quad A\overline{P_n}) = (\lambda_1\overline{P_1} \quad \lambda_2\overline{P_2} \quad \ldots \quad \lambda_n\overline{P_n})$$

Jadi, $A\overline{P_1} = \lambda_1\overline{P_1}$; $A\overline{P_2} = \lambda_2\overline{P_2}$; …; $A\overline{P_n} = \lambda_n\overline{P_n}$ dengan $\overline{P_n} \neq \overline{0}$, sehingga $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ akar-akar karakteristik dari A dan $(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$ vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Karena P matriks non-singular, maka rank P = rank $(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$ = n (banyak vektor.) Terbukti $(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$ linier independen.

2) Diketahui matriks A tipe n x n mempunyai n vektor-vektor karakteristik yang linier independen

$$(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$$

Akan dibuktikan A dapat didiagonalkan sebagai berikut:

Buatlah matriks P $= (\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$

$$AP = A(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$$

$$= (A\overline{P_1} \quad A\overline{P_2} \quad \ldots \quad A\overline{P_n})$$

$$= (\lambda_1\overline{P_1} \quad \lambda_2\overline{P_2} \quad \ldots \quad \lambda_n\overline{P_n})$$

$$= (\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{PD}$$

Jadi, AP = PD.

Karena $(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$ linier independen, maka $\mathrm{P} = (\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$ mempunyai invers P^{-1}, sehingga:

$$\mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{AP} = \mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{PD}$$

$$\mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{AP} = \mathrm{D}$$

Terbukti A dapat didiagonalkan.

Berdasarkan theorema diatas, prosedur mendiagonalkan matriks A tipe n x n adalah sebagai berikut:

Langkah 1. Mencari n vektor–vektor karakteristik $(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$ yang linier independen

Langkah 2. Buatlah matriks $\mathrm{P} = (\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$

Langkah 3. $\mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{AP} = \mathrm{D}$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah akar–akar karakteristik yang bersesuaian dengan vektor–vektor karakteristik $(\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \ldots \quad \overline{P_n})$

Theorema kedua:
Jika matriks A tipe n x n mempunyai akar–akar karakteristik berlainan, maka A dapat didiagonalkan.

Penjelasan: Karena mempunyai n akar-akar karakteristik yang berlainan, maka mempunyai n vektor–vektor karakteristik yang linier independen.

Catatan:
Kebalikan theorema diatas tidak berlaku. Lihat contoh 5 di bawah.

Contoh 6:

Diketahui matriks A $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Selidiki apakah A dapat didiagonalkan. Jika dapat, carilah matriks P yang mendiagonalkan. A

Jawab:

Persamaan karakteristik

$|A - \lambda I| = 0$ atau $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ atau $(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$

Akar-akar karakteristik $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 4$.

Misalkan $\overline{P_1}$ vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ_1 dan $\overline{P_2}$. Vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ_2. Karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka $\overline{P_1}, \overline{P_2}$ linier independen.
Terlihat matriks A 2 x 2 mempunyai 2 vektor karakteristik $\overline{P_1}, \overline{P_2}$ yang linier independen. Jadi, matriks A dapar didiagonalkan.
Adapun matriks P yang mendiagonalkan A adalah P $= (\overline{P_1} \quad \overline{P_2})$. Akan dicari $\overline{P_1}$ dan $\overline{P_2}$.

(I) Untuk $\lambda_1 = -1$, sistem persamaan linier homogennya

$(A - \lambda_1 I)\overline{x} = \overline{0}$, misalkan $\overline{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, didapat:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} b \\ b \end{pmatrix}$$

$$= b\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Salah satu vektor karakteristiknya $= \overline{P_1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(II) Untuk $\lambda_2 = 4$, sistem persamaan linier homogennya

$(A - \lambda_2 I)\overline{x} = \overline{0}$, misalkan $\overline{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, didapat:

$$\bar{x} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Salah satu vektor karakteristiknya $= \overline{P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore P = (\overline{P_1} \quad \overline{P_2})$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{-1} AP = D$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Catatan</u>:

Jika P $= (\overline{P_1} \quad \overline{P_2})$, maka

$$\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Contoh 7:

Carilah matriks P yang mendiagonalkan

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Jawab:

Lihat contoh 4 diatas.

Akar–akar karakteristiknya $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = \lambda_3 = 5.$ Vektor–vektor karakteristik yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $\bar{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Salah satu diantaranya $a\,\overline{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan:

$\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ adalah $\bar{x} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Karena ruang vektor karakteristiknya berdimensi 2, maka ada dua vektor karakteristik yang linier independen.

Dapat dipilih $\overline{P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ yang linier independen.

Akan mudah dipelihatkan bahwa $\overline{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linier independen.

Karena ada tiga vektor karakteristik yang linier independen, maka A dapat didiagonalkan. Matriks P yang mendiagonalkan A adalah P $= (\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \overline{P_3})$

$$\text{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Catatan:

Jika dipilih P $= (\overline{P_2} \quad \overline{P_1} \quad \overline{P_3})$, maka D $= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Contoh 8:

Carilah matriks P yang mendiagonalkan matriks

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Jawab:

Lihat contoh 3 diatas.

Akar-akar karakteristiknya $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 5$.

Untuk $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian $\bar{x} = a\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ yang membentuk ruang vektor berdimensi 1. Jadi, hanya ada satu vektor linier independen. Misalkan $\overline{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untuk $\lambda_3 = 5$ juga hanya ada satu vektor yang linier independen, misalkan $\overline{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jadi, matriks A yang bertipe 3 x 3 hanya mempunyai dua vektor linier independen $\overline{P_1}$ $\overline{P_3}$, sehingga matriks A tidak dapat didiagonalkan. Dengan kata lain, tidak ada matriks non-singular P yang dapat mendiagonalkan A.
Ruang vektor R^n ada transformasi linier $\bar{y} = \text{A}\,\bar{x}$ yang koordinat-koordinatnya terhadap basis E: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$. Akan diselidiki ataupun dicari adakah basis lain dari R^n, misalkan basis P: $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ sedemikian hingga $\bar{y} = \text{A}\,\bar{x}$ berubah menjadi $\bar{y}_{\text{p}} = \text{D}\,\bar{x}_{\text{p}}$ koordinatnya relatif terhadap basis P.

<u>Perhatikan</u>:

Mencari basis P tersebut diatas tidak lain adalah mencari n vektor-vektor karakteristik $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ yang linier independen dari matriks A.

Contoh 9:

Dalam ruang vektor R^2 ada transformasi linier $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}$ (koordinatnya relatif terhadap basis E.) Selidiki adakah basis lain dari R^2, misal dinamakan basis P $= \bar{P}_1, \bar{P}_2$ sedemikian hingga transformasi $\bar{y} = \text{A}\,\bar{x}$ menjadi $\bar{y}_{\text{p}} = \text{D}\,\bar{x}_{\text{p}}$

Jawab:

Lihat contoh 6 diatas.

Akar-akar karakteristiknya $\lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 4$

$\bar{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ salah satu vektor karakteristik untuk:

$$\lambda_1 = -1$$

$\bar{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ salah satu vektor karakteristik untuk:

$$\lambda_2 = 4$$

Basis P : $\bar{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \bar{P}_2$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{P}^{-1}\ \mathrm{A}\ \mathrm{P} = \mathrm{D}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Sehingga, jika koordinat-koordinatnya diubah menjadi relatif terhadap basis P, maka:

transformasi linier $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}$

berubah menjadi $\bar{y}_\mathrm{p} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \bar{x}_\mathrm{p}$.

E. Umpan Balik

1) Diketahui transformasi $\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \overline{x}$

   Ditanya:

   a) Vektor $\overline{x}$ yang dipetakan ke $\overline{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

   b) Vektor $\overline{x}$ yang dipetakan ke $\overline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2) Diketahui tiga transformasi

   $\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \overline{x}$

   $\overline{z} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \overline{y}$

   $\overline{w} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overline{z}$

   Ditanya:

   a) Transformasi yang memetakan $\overline{x}$ ke $\overline{z}$

   b) Transformasi yang memetakan $\overline{y}$ ke $\overline{w}$

   c) Transformasi yang memetakan $\overline{x}$ ke $\overline{w}$

3) $\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \overline{x}$

   $\overline{z} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \overline{y}$

   $\overline{w} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overline{z}$

Carilah Transformasi yang memetakan

a) $\overline{z}$ ke $\overline{x}$

b) $\overline{w}$ ke $\overline{y}$

c) $\overline{w}$ ke $\overline{x}$

4) Diketahui: Transformasi linier $\overline{y} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \overline{x}$

Ditanya:

a) Persamaan karakteristiknya

b) Nilai-nilai karakteristiknya

c) Vektor-vektor karakteristiknya

d) Peta dari $\overline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) Vektor $\overline{x}$ yang dipetakan ke vektor $\overline{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) Cari matriks $\overline{B}$ sehingga $\overline{x} = \overline{B} \cdot \overline{y}$

g) Carilah transformasi yang memetakan $\overline{x}$ ke $\overline{z}$, jika $\overline{z} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \overline{y}$

5) Apakah matriks di bawah ini dapat didiagonalisasi? Jika dapat, tentukan matriks P dan matriks diagonalnya:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6) Apakah matriks di bawah ini dapat didiagonalisasi? Jika dapat, tentukan P dan matriks diagonal $P^{-1}AP$

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

e. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

f. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

g. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

h. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

i. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

j. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

k. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

7) Tentukan syarat untuk b, sehingga $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ dapat didiagonalisasi, tentukan pula matrik P dan matriks diagonalnya.

8) Apakah matriks $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ dengan a sembarang bilangan riil dapat didiagonalisasi? Jika dapat, tentukan matriks P dan matriks diagonalnya.

9) Tentukan syarat agar matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat didiagonalisasi.

REFERENSI

1. **Cullen Charles G.,** (1988), *Linier Algebra with Aplication*, Scott, Foresman and Company.

2. **Howard Anton**, *Aljabar Linier*, Erlangga.

3. **Goult J. dkk**., (1974), *Computational Methods in Linier Algebra*, Stanley Thomas (Publisher) Ltd.

4. **Howard Anton and Chris Rorres,** (2010), *Elementary Linear Algebra with Applications*, Student Solutions Manual, 9th Ed., Wiley.

BIOGRAFI PENULIS

Stepanus, ST., MT.

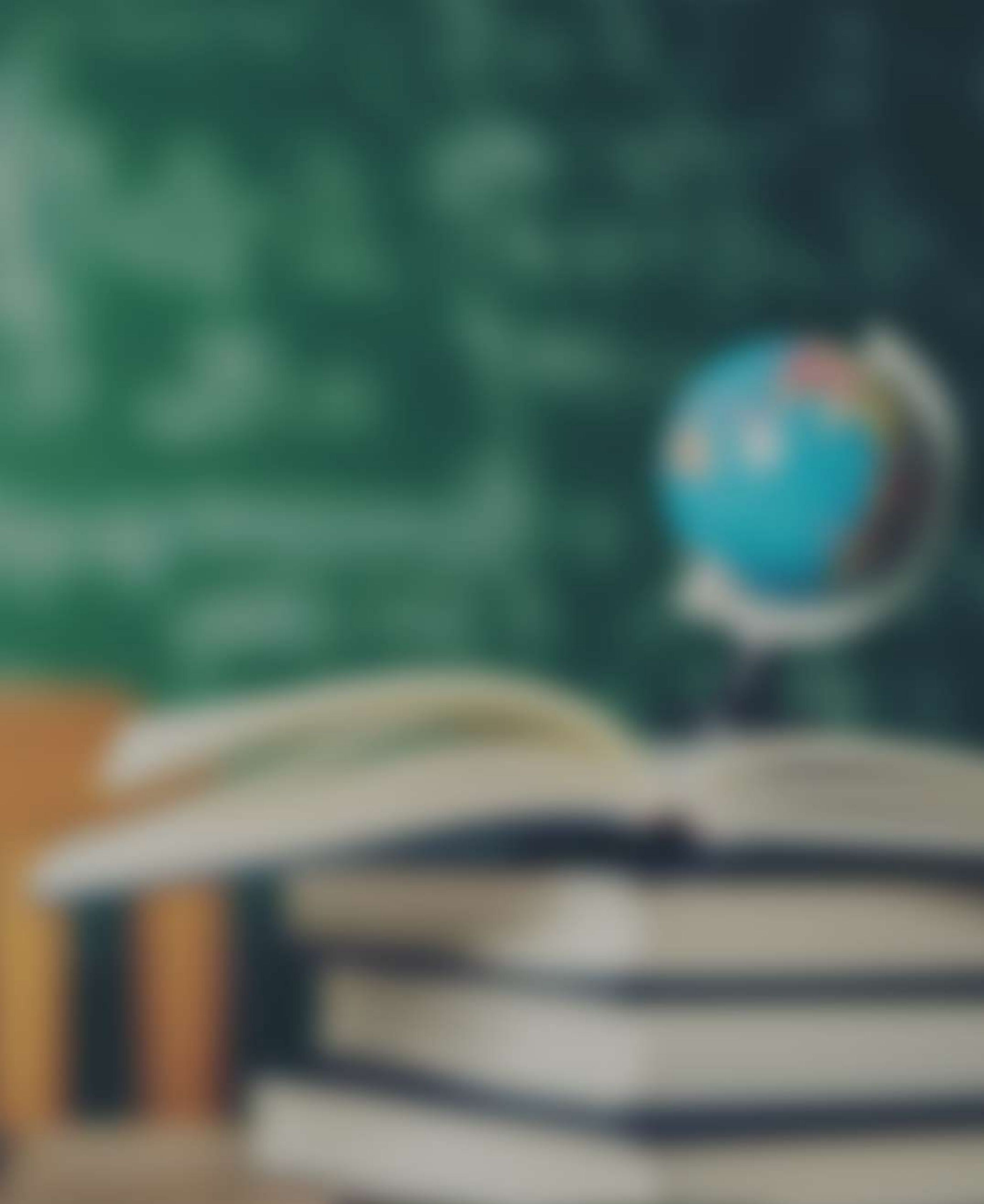
Lahir tanggal 10 September 1980 di Jakarta.

Sejak 1 Mei 2017 menjadi Dosen Tetap Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia, Jakarta.

Pengalaman kerja sejak 1997 s/d sekarang sebagai Guru Les Private Matematika & Fisika untuk anak didik SD- SMP-SMA, pada tahun 2001 - 2004 menjadi Guru Matematika SD Pelita Hati,dan sejak 21 Mei 2007 s/d sekarang sebagai Konsultan Keuangan Prudential.

Menyelesaikan pendidikan gelar Sarjana Teknik, Prodi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Kristen Indonesia di Jakarta pada tanggal 13 Februari 2008. Selanjutnya, mendapatkan gelar Magister Teknik Elektro, Prodi Teknik Elektro, Pascasarjana Universitas Kristen Indonesia di Jakarta pada tanggal 24 Agustus 2018.

Bidang peminatan adalah Kalkulus, dan Energi.



UKI PRESS
Pusat Penerbit dan Pencetakan
Universitas Kristen Indonesia
Jl. Mayjen Sutoyo No. 2, Cawang
Jakarta Timur 13630

ukipressdigital.uki.ac.id

ISBN 978-623-8737-13-0