MODUL 1

LINGKARAN

A. Capaian Pembelajaran

Dapat memahami konsep lingkaran serta menggunakannya dalam memecahkan masalah yang berkaitan.

B. Bahan Kajian

1. Menentukan persamaan lingkaran yang pusat dan jari-jarinya diketahui.
2. Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran apabila persamaan kanoniknya diketahui.
3. Menentukan persamaan lingkaran bila tiga titik yang dilalui diketahui.
4. Menentukan persamaan garis singgung lingkaran bila gradient garis singgung diketahui, titik singgungnya diketahui, dan bila melalui suatu titik di luar lingkaran.
5. Menentukan sudut antara 2 lingkaran.

C. Uraian Materi

1. Persamaan Lingkaran
2. Garis Singgung
3. Sudut Antara Dua Lingkaran

MODUL 1

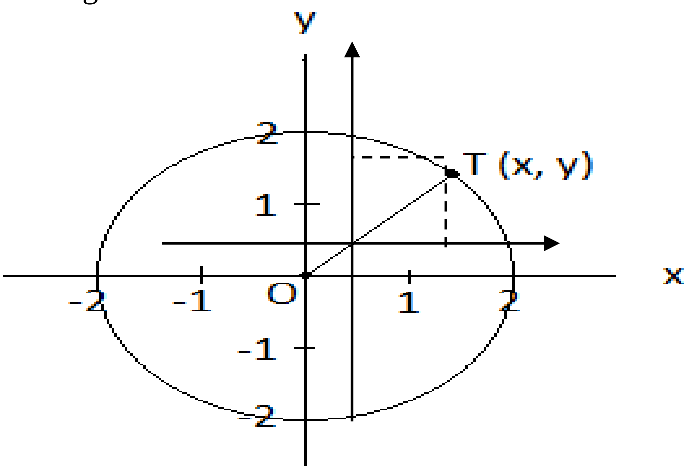
LINGKARAN

1.1. Kegiatan Pembelajaran 1. Persamaan Lingkaran

a. Defenisi lingkaran:

Lingkaran ialah tempat kedudukan titik-titik (pada bidang datar) yang jaraknya dari suatu titik tertentu sama panjang. Selanjutnya titik tertentuitu dinamakan titik pusat lingkaran dan jarak yang sama tersebut dinamakan jari-jari lingkaran.

Persamaan lingkaran yang berpusat di (0,0) dengan jari-jari r dapat diturunkan sebagai berikut.



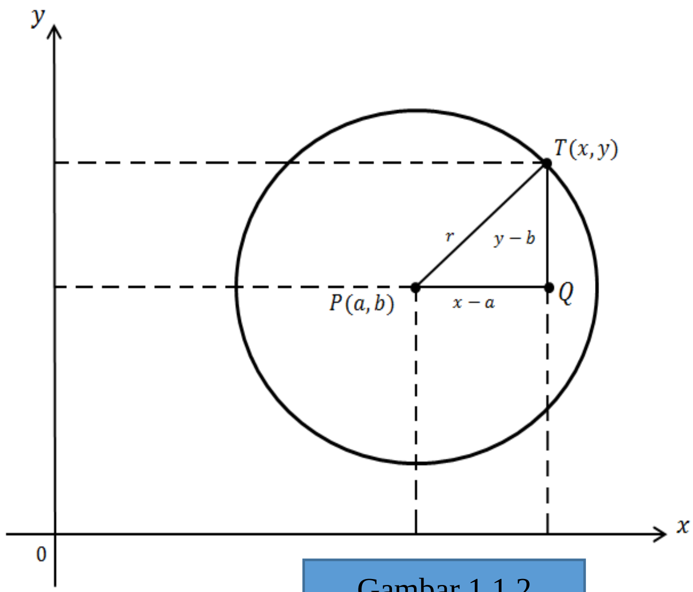
Gambar 1.1.1

Pada gambar 1.1 nampak lingkaran dengan titik pusat di $\mathrm{O}(0,0)$dan jari-jari rsatuan panjang. Untuk menentukan persamaan lingkaran, ambil sembarang titik pada lingkaran, misalnya $\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Jarak titik T dan titik O adalah $\sqrt{x^2+y^2}$. Padahal jarak titik-titikO dan T adalah jari-jari lingkaran yaitu r, maka diperoleh hubungan bahwa:

$$\sqrt{x^2+y^2}=r$$

$$x^2+y^2=r$$

Untuk persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r dapat diturunkan sebagai berikut:



Gambar 1.1.2

Pada Gambar 1.2 nampak sebuah lingkaran dengan pusat $\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ dan jari-jari r satuan. Untuk menentukan persamaan ini, ambil sembarang titik pada lingkaran, misalnya $\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Pada segitiga siku-siku PQT didapat jarak titik-titik T dan P adalah $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Padahal jarak titik-titik T dan P adalah jari-jari lingkaran, yaitu r, maka diperoleh hubungan bahwa:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Karena $\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ adalah sembarang titik pada lingkaran itu, maka setiap titik pada lingkaran itu memenuhi hubungan tersebut. Ini berarti bahwa persamaan lingkaran yang berpusat di titik $\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ dengan jari-jarir satuan adalah

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Persamaan lingkaran$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ dapat diubah ke bentuk lain yaitu $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ yang disebut sebagai persamaan kanonik lingkaran. Apabila diketahui persamaan kanonik atau persamaan bentuk umum suatu lingkaran, yaitu $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, maka dapat dicari koordinat-koordinat titik pusat dan jari-jarinya. Persamaan bentuk umum tersebut diubah menjadi :

$$x^2 + Ax + \frac{1}{4}A^2 + y^2 + By + \frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}A\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}B\right)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

Dari persamaan terakhir ini, dapat disimpulkanbahwa titik pusat lingkaran adalah $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dari jari-jari ialah $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.

Memperhatikan jari-jarinya tersebut, dapat disimpulkan 3 kemungkinan, yaitu:

a. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C > 0$, persamaan bentuk umum itu menyatakan lingkaran nyata.

b. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C = 0$, persamaan bentuk umum itu menyatakan lingkaran dengan jari-jari nol, berarti berupa sebuah titik.

c. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C < 0$, persamaan bentuk umum itu menunjukan lingkaran imajiner.

Contoh 1:

Tentukan koordinat-koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$

Penyelesaian:

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + 4y - \frac{19}{4} = 0$$

$$x^2 - x\frac{1}{4} + y^2 = 4y + 4 = \frac{1}{4}4 + \frac{19}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Jadi, lingkaran itu mempunyai pusat $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$dan jari-jari 3.

Apabila dua buah titik diketahui maka melalui kedua titik tersebut dapat ditentukan persamaan garis yang melaluinya. Demikian halnya pula pada lingkaran, apabila tiga titik tak segaris diketahui maka persamaan lingkaraan yang melalui ketiga titik tersebut dapat ditentukan.

Misalkan akan ditentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik yaitu $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, dan $R(x_3, y_3)$. Andaikan persamaan lingkaran yang dicari adalah

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Karena titik-titik P, Q, dan Rpada lingkaran ini,maka koordinat-koordinatnya masing-masing memenuhi persamaan tersebut. Dengan substitusi koordinat-koordinat dari titik tersebut diperoleh

$$P(x_1, y_1)(x_1{}^2 + y_1{}^2) + x_1A + y_1B + C = 0$$

$$Q(x_2, y_2)(x_2{}^2 + y_2{}^2) + x_2A + y_2B + C = 0$$

$$R(x_3, y_3)(x_3{}^2 + y_3{}^2) + x_3A + y_3B + C = 0$$

Sehingga memperoleh sistep persamaan linear yang terdiri atas 3 persamaan dengan 3 variabel A, B, dan C. Dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan cara eliminasi dan substitusi maka akan didapat nilai A, B, dan C.

Selanjutnya substitusi nilai A, B, dan C yang didapat ke persamaan (i) sehingga diperoleh persamaan lingkaran yang dicari.

b. Cara Lain (menggunakan determinan):

Misalkan akan ditentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik yaitu $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ dan $R(x_3, y_3)$. Andaikan persamaan lingkaran yang dicari adalah

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Ambil sembarang titik $T(x, y)$ pada lingkaran. Jadi titik T, P, Q dan$R$ tersebut pada lingkaran, maka koordinat-koordinatnya memenuhi persamaan lingkaran yang dicari. Sehingga didapat

$$T(x, y)(x^2 + y^2) + xA + yB + C = 0$$

$$P(x_1, y_1)(x_1{}^2 + y_1{}^2) + x_1A + y_1B + C = 0$$

$$Q(x_2, y_2)(x_2{}^2 + y_2{}^2) + x_2A + y_2B + C = 0$$

$$R(x_3, y_3)(x_3{}^2 + y_3{}^2) + x_3A + y_3B + C = 0$$

Sehingga memperoleh sistem persamaan linear dalam A, B dan C (3 variabel) dengan 4 persamaan. Sistem persamaan ini akan mempunyai penyelesaian untuk variabel-variabel A, B dan C, apabila determinan dari koefisien-koefisien dari A, B dan C dan konstantanya sama dengan nol, yaitu

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Karena $\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ adalah titik sebarang pada lingkaran, maka setiap titik pada lingkaran akan memenuhi hubungan/persamaan determinan itu. Jadi persamaan determinan itu merupakan persamaan lingkaran yang dicari.

Contoh 2:

Tentukan pesamaan lingkaran yang melalui tiga titik P(1,0), Q(0,1), dan R(2,2).

Penyelesaian:

Cara 1:

Misalkan persamaan lingkaran yang dicari :$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Karena titiitk P, Q dan R pada lingkaran ini, maka koordinat-koordinatnya masing-masing memenuhi pesamaan tersebut. Sehingga dengan substitusi koordinat-koordinat dari titik tersebut diperoleh:

$P(1,0)$ $1 + 0 + A + 0B + C = 0$atau $A + C = -1$..............................(1)

$Q(0,1)$ $0 + 1 + 0A + B + C = 0$atau $B + C = -1$..............................(2)

$R(2,2)$ $4 + 4 + 2A + 2B + C = 0$atau $2A + 2B + C = -8$................(3)

Sehingga diperoleh sistem persamaan linear yang terdiri atas 3 persamaan dengan 3 variabel A, B dan C.

Eliminasi C (persamaan (1) dan persamaan (2))

$$\begin{array}{r} A + C = -1 \\ \underline{B + C = -1} \; - \\ \\ A - B = 0 \\ A = B \end{array}$$

Eliminasi C (persamaan (3) dan Persamaan (2))

$$\begin{array}{r} 2A + 2B + C = -8 \\ \underline{B + C = -1} \; - \\ 2A + B = -7 \end{array}$$ ....(4)

Subtitusi $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ ke persamaan (4) sehingga didapat

$$2A + A = -7$$

$$3A = -7$$

$$A = -\frac{7}{3} = B$$

Subtitusi $\mathrm{A} = -\frac{7}{3}$ kepersamaan (1) sehingga diperoleh

$$-\frac{7}{3} + C = -1$$

$$C = \frac{4}{3}$$

Subtitusi $\mathrm{A} = -\frac{7}{3}$, $\mathrm{B} = -\frac{7}{3}$, $\mathrm{C} = \frac{4}{3}$ ke persamaan awal sehingga didapat persamaan lingkaran yang dicari adalah:

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$$

Cara 2 (menggunakan determinan):
Misalkan persamaan lingkaran yang dicari adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Ambil sembarang titik $\mathrm{K(x, y)}$ pada lingkaran ini. Sehingga lingkaran yang dicari melalui titik $\mathrm{K, P, Q}$, dan R. Dengan substitusi koordinat-koordinat titik-titik pada x dan y dari persamaan tersebut diperoleh

$$K(x,y)(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0$$

$$P(1,0) \quad 1 + 1A + 0B + C = 0$$

$$Q(0,1) \quad 1 + 0A + 1B + C = 0$$

$$R(2,2) \quad 8 + 2A + 2B + C = 0$$

Sehingga memperoleh sistem persamaan linear yang terdiri atas 4 persamaan dengan 3 variabel A, B dan C. Sistem persamaan ini akan mempunyai penyelesaian untuk A, B dan C apabila determinan koefiisen-koefisien A, B dan C dan konstantanya sama dengan nol, yaitu

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mengekspansikan deteminan ini menurut kofaktor-kofaktor pada baris pertama, maka diperoleh persamaan lingkaran yang dicari adalah:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}(x^2+y^2) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3(x^2+y^2)+7x+7y-4=0$$

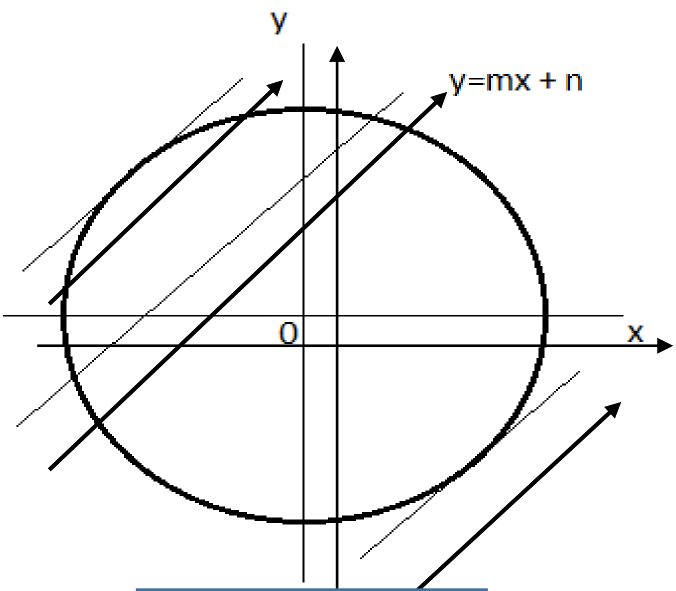
$$3x^2+3y^2-7x-7y+4=0$$

1.2. Kegiatan Pembelajaran 2. Garis Singgung

Garis singgung lingkaran adalah aris yang memotong/beringgungan dengan lingkaran hanya di sebuah titik. Selanjutnya titiknya disebut titik singgung. Persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan bila gradien garis singgung diketahui, titik singgungnya diketahui, dapat pula ditentukan bila garis tersebut melalui suatu titik di luar lingkaran.

(i) Persamaan garis singgung lingkaran bila gradien garis singgung diketahui

Pada gambar 3.3 dibawah ini diberikan garis $y = mx + n$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ akan dicari persamaan garis singgung pada lingkaran yang sejajar dengan garis $y = mx + n$.



Gambar 1.2.1

Karena garis singgung yang dicari harus sejajar dengan garis $y = mx + n$, maka dapat dimisalkan garis singgung itu adalah $y = mx + k$.

Karena garis $y = mx + k$ menyinggung lingkaran, maka ada sebuah titik (titik singgung) yang koordinat-koorinatnya memenuhi persamaan lingkaran sehingga diperoleh :

$$x^2 + (mx + k)^2 = r^2$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$$

Persamaan ini dipandang sebagai kuadrat dalam x. Karena garis singgung dan lingkaran hanya mempunyai satu titik persekutuan, maka persamaan kuadrat hanya mempunyai satu harga x, syaratnya adalah diskriminan dari persamaan tu harus sama dengan nol, yaitu:

$$D = 4m^2k^2 - 4(1 + m^2)(k^2 - r^2) = 0$$

$$4m^2k^2 - 4k^2 + 4r^2 - 4m^2k^2 + 4m^2r^2 = 0$$

$$-4k^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$

$$-4(k^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$$

$$k^2 - r^2 - m^2r^2 = 0$$

$$k^2 = r^2 + m^2r^2$$

$$\mathrm{k} = \pm\sqrt{r^2 + m^2r^2}$$

$$\mathrm{k} = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ bila gradien garis singgung diketahui adalah

$$y = mx + r\sqrt{1 + m^2} \text{ dan } \mathrm{y} = mx - r\sqrt{1 + m^2}$$

Dengan cara yang sama dapat diturunkan bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yang sejajar dengan garis $y = mx + n$ (gradient garis singgung diketahui) adalah

$y - b = m(x - a) + r\sqrt{1 + m^2}$ dan $y - b = m(x - a) - r\sqrt{1 + m^2}$

Contoh 3:

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran berikut dan yang mengapit sudut 60° dengan sumbu x arah positif:

a. $x^2 + y^2 = 16$

b. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

Penyelesaian:

Gradien garis singgung adalah $m = \text{tg}60° = \sqrt{3}$

a. Persamaan garis singgung dengan tanjakan $m = \sqrt{3}$ adalah

$y = \sqrt{3x} \pm 4\sqrt{1+3}$, yaitu

$y = \sqrt{3x} + 8$ dan $y = \sqrt{3x} - 8$

b. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

Persamaan garis singgung dengan tanjakan $m = \sqrt{3}$ adalah

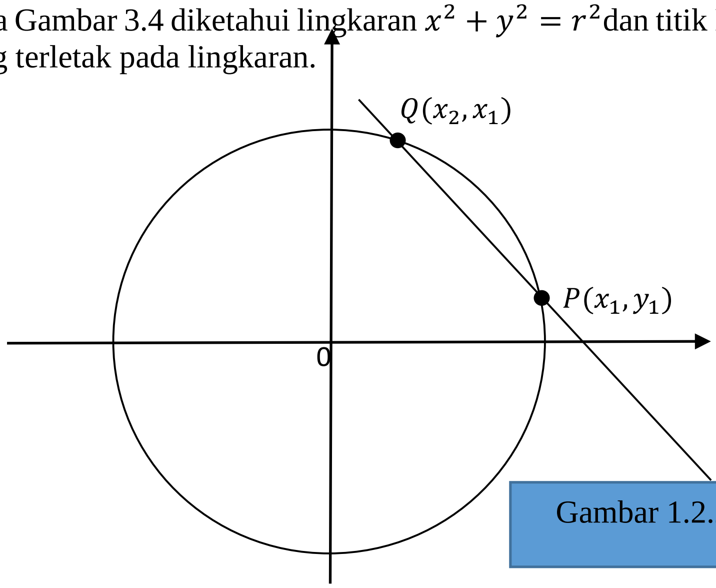
$y - 3 = \sqrt{3}(x-2) + 4\sqrt{1+3}$dan $y - 3 = \sqrt{3}(x-2) - 4\sqrt{1+3}$

$y - 3 = \sqrt{3x} - 2\sqrt{3} + 8$dan $y - 3 = \sqrt{3x} - 2\sqrt{3} - 8$

$y = \sqrt{3x} + 11 - 2\sqrt{3}$dan $y = \sqrt{3x} - 5 - 2\sqrt{3}$

(ii) Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik pada lingkaran.

Pada Gambar 3.4 diketahui lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$dan titik P(x_i, y_i) yang terletak pada lingkaran.



Gambar 1.2.2

Akan dicari persamaan garis singgung pada lingkaran di titik P. Ambil titik Q(x_2, y_2) pada lingkaran pula, maka persamaan garis PG adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{atau}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Karena titik-titik P dan Q pada lingkaran, maka berlaku
${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2$ dan ${x_2}^2 + {y_2}^2 = r^2$.

Apabila kedua persamaan ini dikurangkan,maka diperoleh:

$${x_1}^2 - {x_2}^2 = {y_2}^2 - {y_1}^2$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

Dengan kesamaan ini, persamaan garis PQ di atas dapat ditulis menjadi

$$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Jika Q mendekati P sehingga hamper $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$, maka garis PQ berubah menjadi garis singgung lingkaran di titik P, yaitu

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1 y - {y_1}^2 = -x_1 x + {x_1}^2$$

$$y_1 y + x_1 x = {x_1}^2 + {y_1}^2$$

$$y_1 y + x_1 x = r^2$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik (x_1, y_1) adalah $x_1 x + y_1 y = r^2$.

Dengancara yang sama dapat diturunkan bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ dengan titik singgung (x_1, y_1) adalah $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$.

Contoh 4:

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran berikut:

a. $x^2+y^2=25$ di titik $(4,-3)$.

b. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ di titik $(-1,7)$.

Penyelesaian:

a. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2+y^2=25$ di titik $(4,-3)$ adalah $4x-3y=25$.

b. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

$x^2-4x+4+y^2-6y+9=25$

$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ di titik $(-1,7)$ adalah

$(-1-2)(x-2)+(7-3)(y-3)=25$

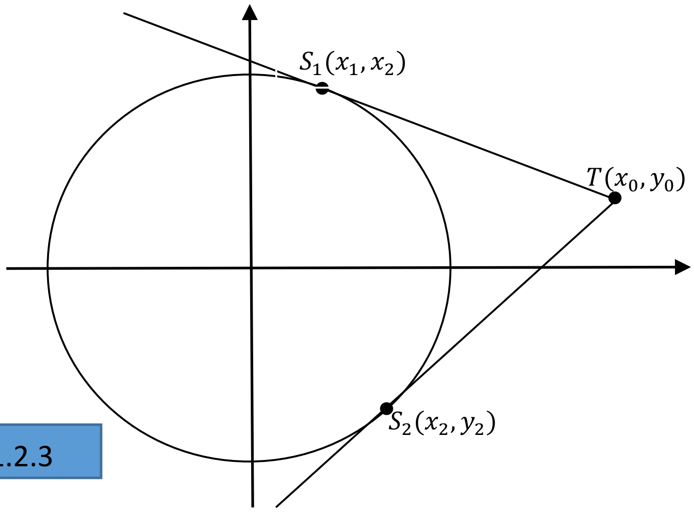
$-3(x-2)+4(y-3)=25$

$-3x+6+4y-12-25=0$

$-3x+4y-31=0$

(iii) Persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran

Pada gambar 3.5 diketahui lingkaran $x^2+y^2=r^2$ dan titik $T(x_0, y_0)$ yang terletak di luar lingkaran.



Gambar 1.2.3

Dari titik T dibuat garis-garis singgung pada lingkaran dan titik-titik singgungnya $S_1(x_1, y_1)$ dan $S_2(x_2, y_2)$ maka persamaan garis singgungnya adalah $x_1x + y_1y = r^2$ dan $x_2x + y_2y = r^2$.
Garis-garis singgung ini melalui titik $\mathrm{T}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ maka berlaku bahwa$x_1x_0 + y_1y_0 = r^2$dan$x_2x_0 + y_2y_0 = r^2$.

Dari dua persamaan ini dapat disimpulkan bahwa koordinat-koordinat titik-titik S_1 dan S_2 memenuhi persamaan garis

$x_0x + y_0y = r^2$

Bentuk yang terakhir ini merupakan persamaan garis yang melalui titik singgung dari garis singgung yang melalui $\mathrm{T}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$. Selanjutnya garis ini dinamakan garis kutub.
Dengan cara (langkah-langkah) yang sama dapat ditentukan pula persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yang melalui titik di luar lingkaran.

Contoh 5:
Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran berikut:

a. $x^2 + y^2 = 5$ yang melalui titik P (3, -1)

b. $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ yang melalui titik Q (1, 6)

Penyelesaian:

a. Misalkan garis yang melalui titik P (3, -1) menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 5$ di titik $S_1(x_1, y_1)$, maka persamaan garis singgung itu adalah

$x_1x + y_1y = 5$ ....(i)

Garis singgung ini melalui titik P (3, -1), sehingga berlaku

$3x_1 - y_1 = 5$ ....(ii)

Karena $S_1(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 5$, maka dipenuhi

${x_1}^2 + {y_1}^2 = 5$ ....(iii)

Persamaan (ii)

$3x_1 - y_1 = 5$

$y_1 = 3x_1 + 5$

Substitusikan$y_1 = 3x_1 + 5$ ke persamaan (iii) sehingga diperoleh

$x_1{}^2 + (3x_1 + 5\,)^2 = 5$

$x_1{}^2 + 9x_1{}^2 + 30x_1 + 25 = 5$

$10x_1{}^2 + 30x_1 + 20 = 0$

$x_1{}^2 + 3x_1 + 2 = 0$

$(x_1 + 2)(x_1 + 1) = 0$

$x_1 = -2$ atau $x_1 = -1$

Jika $x_1 = -2$, maka $y_1 = 3(-2) + 5 = -1$

Jika $x_1 = -1$, maka $y_1 = 3(-1) + 5 = 2$

Sehingga diperoleh titik $S_1(-2, -1)$ dan $S_2(-1, 2)$
Substitusikan $S_1(-2, -1)$ dan $S_2(-1, 2)$ ke persamaan (i) sehingga diperoleh persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 5$ yang melalui titik P (3, -1) adalah

$-2x - y - 5 = 0$ dan $-x + 2y - 5 = 0$

b. $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 20$

$(x + 1)^2 + y^2 = 20$

Misalkan garis yang melalui titik $\mathrm{Q}(1, 6)$ menyinggung lingkaran $(x + 1)^2 + y^2 = 20$ di titik $S_1(x_1, y_1)$, maka persamaan garis singgung itu adalah

$(x_1 + 1)(1 + 1) + y_1 y = 20$ ....(i)

Garis singgung ini melalui titik $\mathrm{Q}(1, 6)$, sehingga berlaku

$(x_1 + 1)(1 + 1) + 6y_1 = 20$

$2x_1 + 6y_1 = 18$ ....(ii)

Karena $S_1(x_1, y_1)$, terletak pada lingkaran $(x + 1)^2 + y^2 = 20$, maka dipenuhi

$(x + 1)^2 + y_1{}^2 = 20$ ....(iii)

Persamaan (ii)

$2x_1 + 6y_1 = 18$

$2x_1 = 18 - 6y_1$

$x_1 = 9 - 3y_1$

Substitusikan $x_1 = 9 - 3y_1$ke persamaan (iii) sehingga diperoleh

$(9 - 3y_1 + 1)^2 + {y_1}^2 = 20$

$(10 - 3y_1)^2 + {y_1}^2 = 20$

$100 - 60y_1 + 9{y_1}^2 + {y_1}^2 = 20$

$10{y_1}^2 - 60y_1 + 80 = 0$

${y_1}^2 - 6y_1 + 8 = 0$

$(y_1 - 2)(y_1 - 4) = 0$

$y_1 = 2$ atau $y_1 = 4$

Jika $y_1 = 2$, maka $x_1 = 9 - 3(2) = 3$

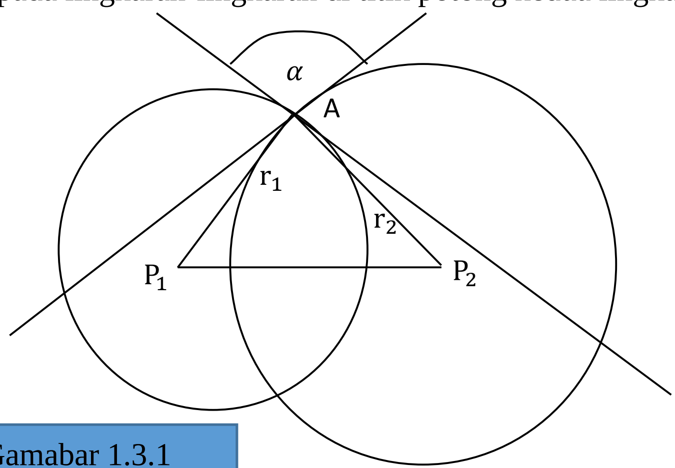
Jika $y_1 = 4$, maka $y_1 = 9 - 3(4) = -3$

Sehingga diperoleh titik $S_1(3, 2)$ dan $S_2(-3, 4)$
Substitusi titik $S_1(3, 2)$ dan $S_2(-3, 4)$ ke persamaan (i) sehingga diperoleh persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ yang melalui titik Q$(1, 6)$ adalah

$x - 2y + 11 = 0$ dan $2x + y - 8 = 0$

1.3. Kegiatan Pembelajaran Sudut Antara Dua Lingkaran

Defenisi:
Sudut antara dua lingkaran adalah sudut yang diapit oleh garis-garis singgung pada lingkaran-lingkaran di titik potong kedua lingkaran itu.



Gamabar 1.3.1

Pada Gambar 1.6, α adalah sudut antara lingkaran-lingkaran dengan pusat P_1 dan P_2.

Langkah-langkah untuk menentukan besar α adalah sebagai berikut:

1. Tentukan titik potong antara lingkaran-lingkaran dengan pusat P_1 dan P_2 (ada dua titik potong). Misalkan salah satunya adalah $A(x_0, y_0)$
2. Tentukan persamaan-persamaan garis singgung pada masing-masing lingkaran pada salah satu titik potongnya.

   Misal lingkaran L_1 garis singgungnya di titik A adalah $g_1: y = m_1x + n_1$ dan lingkaran L_2 garis singgungnya di titik A adalah $g_2: y = m_2x + n_2$
3. Tentukan sudut apit kedua garis singgung (α) dengan menggunakan rumus sudut apit antara dua garis yaitu

$$\tan\alpha = \frac{m_1 + m_2}{1 + m_1m_2}$$

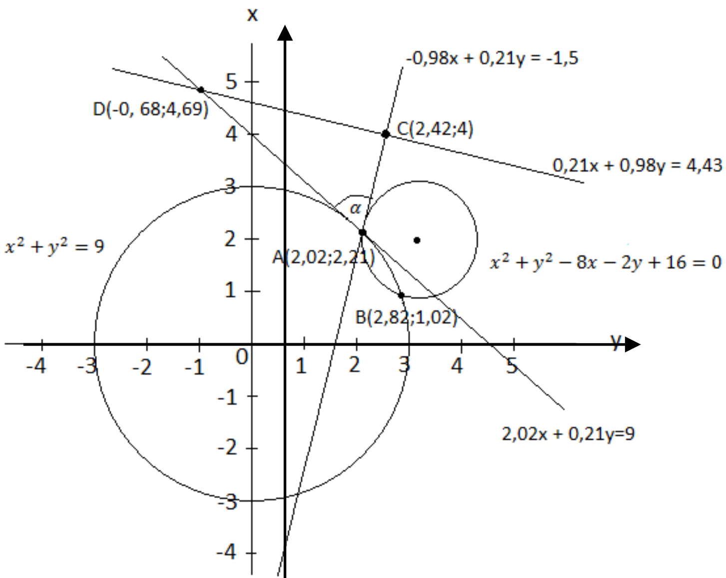
Jika $\alpha = 90°$ atau kedua lingkaran saling tegak lurus, maka akan berlaku bahwa ΔP_1P_2A siku-siku, sehingga $|P_1P_2|^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2$

Contoh 6:

Tentukan sudut antara dua lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dan $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$

Penyelesaian:

Pada gambar 3.7, misalkan α adalah sudut antara dua lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dan $x^2 + y^2 - 8x - 2x + 16 = 0$



Gambar 1.3.2

Titik potong antara dua lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dan $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$ adalah A$(2,02\ ; 2{,}21)$ dan B$(2,82\ ; 1,02)$

$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2x + 1 = 1$

$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dan $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$ pada salah satu titik potong, ambil titik A$(2,02; 2,21)$ adalah

$2{,}02x + 2{,}21y = 9$ dan $-0{,}98x + 0{,}21y = -0{,}5$

Dengan demikian

$$\tan \alpha = \frac{\frac{-2{,}02\ 0{,}98}{2{,}21\ 0{,}21}}{1 - \frac{2{,}02\ 0{,}98}{2{,}21\ 0{,}21}} = 17$$

1.4. Rangkuman

2. Persamaan lingkaran yang berpusat $(0{,}0)$ dengan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$ dan persamaan lingkaran yang berpusat di P(a, b) dan jari-jari $r$satuan adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

3. Persamaan lingkaran yang melalui tiga titik yaitu P(x_1, y_1), $Q(x_2, y_2)$, dan R(x_3, y_3) dapat ditentukan menggunakan rumus determinan

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2 + {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 + {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 + {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m adalah $y = mx + r\sqrt{1 + m^2}$ dan $y = mx - r\sqrt{1 + m^2}$
5. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik (x_1, y_1) adalah $x_1 x + y_1 y = r^2$

6. Bila $T(x_0, y_0)$ berada di luar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ garis yang melalui titik singgung dari garis-garis singgung yang melalui $\mathrm{T}(x_0, y_0)$ dinamakan garis kutub. Adapun persamaan garis kutubnya adalah $x_0x + y_0y = r^2$.
   Sudut antara dua lingkaran adalah sudut yang diapit oleh garis-garis singgung pada lingkaran-lingkaran di titik potong kedua lingkaran itu. Misalkan sudut apitnya adalah α maka $\tan\alpha = \frac{m_1+m_2}{1+m_1m_2}$. Jika $\alpha = 90°$ atau kedua lingkaran saling tegak lurus, maka akan berlaku bahwa $\Delta \mathrm{P_1P_2A}$ siku-siku, sehingga $|\mathrm{P_1P_2}|^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2$

1.5. Kegiatan Pembelajaran 4 Soal Diskusi Kelompok

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 2ax - 2by - 2ab = 0$

   Penyelesaian:

   Dari persamaan tersebut di peroleh $A = 2 \ldots$, $B = \cdots$, $C = \cdots$

   Jadi:

   a. Pusat:

   $$= \left(-\frac{1}{2}\ldots, -\frac{1}{2}\ldots\right)$$

   $$= -\cdots, \ldots$$

   b. Jari-jari:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\ldots\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\ldots\right)^2 - \cdots}$$

$$= \sqrt{(\ldots)^2 + (\ldots)^2 + \cdots ab}$$

$$= \sqrt{(\ldots + \cdots)^2}$$

$$= (a+b)^2$$

2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $4x^2 + 4y^2 + 8x + 24y - 156 = 0$

   Penyelesaian:

   $= 4x^2 + 4y^2 + 8x + 24y - 156 = 0$

   $= \ldots \quad + y^2 + \cdots x + 6\ldots - 39 = 0$

   $= \ldots \quad + \cdots x + y^2 + 6y = 39$

   $= \ldots \quad + \cdots x + 1 + y^2 + 6y + \cdots = 39 + 1 + \cdots$

   $= (x+1)^2 + (y + \cdots)^3 = 49$

   $r^2 = 49$

   $r = 7$

   Jadi pusat $(- \cdots, \ldots)$ dan jari-jari $r = 7$

3. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$

   Penyelesaian:

   Dari persamaan diatas diperoleh: $A = \cdots$, $B = \cdots$, $C = -8$

   a. Pusat:

      $= \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$

      $= (\ldots, \ldots)$

   b. Jari-jari

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\ldots\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\ldots\right)^2 - \cdots}$$

$= \sqrt{(\ldots)^2 + (\ldots)^2 - \cdots}$

$= \sqrt{49}$

$= 7$

4. Diketahui $P(x, y)$, $A(2,0)$, dan $B(8,0)$. Kurva yang mempunyai tempat kedudukan $PA = 2PB$ akan terbentuk lingkaran. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran tersebut!

Penyelesaian:

a. $PA = 2PB$

$\sqrt{(x - \cdots)^2 + (y - \cdots)^2} = 2\sqrt{(x - \cdots)^2 + (y - \cdots)^2}$

Dikuadratkan di kedua ruasnya:

$x^2 - \cdots + \cdots + y^2 = 4(x^2 - \cdots + \cdots + y^2)$

Pindah ke ruas kanan:

$0 = \cdots x^2 + 3\ldots^{\cdots} - \cdots x + 252$

Dibagi 3:

$0 = x^2 + y^3 - \cdots x + \cdots$

Jadi:

$A = \cdots, B = \cdots, C = \cdots$

b. Pusat:

$= \left(-\frac{1}{2}\ldots, -\frac{1}{2}\ldots\right)$

$= \cdots, \ldots$

c. Jari-jari:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\ldots\right)^2 - \cdots}$$

$= \sqrt{\ldots^{\cdots} + \ldots^{\cdots} - \cdots}$

$= \sqrt{16}$

$= 4$

5. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik A(3,-1) , B(5,3) dan C(6,2) kemudian tentukan pusat dan jari-jari lingkaran!

Penyelesaian:

Misalkan persamaan lingkaran yang dicari adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Maka:

$(3, -1) \quad = ...^2 + ...^2 + a(...) + b(...) + \cdots = 0$

$= \cdots - b + c + 10 = 0$..........................(1)

$(5,3) \quad = ...^2 + ...^2 + a(...) + b(...) + c = 0$

$= \cdots a + \cdots b + c + 34 = 0$ ....(2)

$(6,2) \quad = ...^2 + ...^2 + a(...) + b(...) + c = 0$

$= \cdots a + \cdots b + c + 40 = 0$ ....(3)

Subtitusi persamaan (1) dan (2)

$... - b + c + 10 = 0$

$... a + \cdots b + c + 34 = 0$ —

$... a - \cdots b + 0 - \cdots = 0$

$a + .. b + 12 = 0$.....................(4)

Subtitusi persamaan (2) dan (3)

$... a + \cdots b + c + 34 = 0$

$... a + \cdots b + c + 40 = 0$

$... + b - 6 = 0$

$a - b + 6 = 0$ ....(5)

Subtitusi persamaan (4) dan (5)

$a + .. b + 12 = 0$

$a - b + 6 = 0$

$3b + 6 = 0$

$b = -2$

Subtitusi b ke persamaan (5)

$a - b + 6 = 0$

$a + 2 + 6 = 0$

$$a + 8 = 0$$
$$a = -8$$
Subtitusikan a dan b ke persamaan (1)
$$\ldots - b + c + 10 = 0$$
$$3(-8) - (-2) + c + 10 = 0$$
$$c = 12$$
Jadi persamaan lingkaranya adalah:
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik berikut K(2,1), L(1,2) dan M(1,0)

Penyelesaian:

$J(x, y) \qquad (x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0$

$K(2,1) \qquad \ldots + \cdots A + B + C = 0$

$L(1,2) \qquad 5 + A + \cdots B + C = 0$

$M(1,0) \qquad \ldots + A + 0B + C = 0$

Ubah kebentuk matriks
$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \ldots & 2 & \ldots & 1 \\ \ldots & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
Mengekpetasikan determinan ini menurut kofaktor-kofaktor pada baris pertama, maka diperoleh persamaan lingkaran yang dicari adalah
$$\begin{vmatrix} \ldots & 1 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} (x^2 + y^2) - \begin{vmatrix} 5 & \ldots & 1 \\ \ldots & 2 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \ldots & 2 & 1 \\ \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} y$$
$$- \begin{vmatrix} 5 & 2 & \ldots \\ 5 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$\ldots (x^2 + y^2) - 4x + (\ldots) - 12 = 0$$
$$8x^2 + 8y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 - x - y - 3 = 0$$

7. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(-3,-5)$, $(-2{,}2)$, dan $(5{,}1)$

Penyelesaian :

Misalkan persamaan lingkaran yang dicari adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Maka:

$(-3,-5)$ $\quad -3A\ - \cdots\ +\ C\ = \cdots$.....................(1)

$(-2,-2)$ $\quad$ ... $+\ 2B\ +\ C\ =\ -8$ ....(2)

$(5, 1)$ $\quad$ ... $+\ B\ +\ C\ = \cdots$ ....(3)

Subtitusi persamaan (1) dan (2)

$-3A\ - \cdots B\ +\ C\ = \cdots$

... $+\ 2B\ +\ C\ =\ -8$

$-A - 7B = -26$ ....(4)

Subtitusi persamaan (2) dan (3)

... $+\ 2B\ +\ C\ =\ -8$

... $+\ B\ +\ C\ = \cdots$

$-8A - 6B = -8$ ....(5)

Subtitusi persamaan (4) dan (5)

$-8A - 56B = -208$

$-8A - 6B = -8$

$-50B = -200$

$B = 4$

Subtitusi nilai B ke persamaan (5)

$-8A - 6(4) = -8$

$A = -2$

Subtitusi nilai A dan B Ke persamaan (1)

$3(-2) - 5(4) + C = 34$

Maka :

Persamaa Lingkaran:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

8. Tentukan persamaan garis singgung$(\boldsymbol{x+2})^{\boldsymbol{2}} + (\boldsymbol{y-4})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{45}$ dititik $(\boldsymbol{4}, \boldsymbol{1})$.

   Penyelesaian:

   Dari persamaan lingkaran pada soal diperoleh pusat lingkaran $\dots, \dots$ sehingga persamaan garis singgung menjadi :

   $(\boldsymbol{x-a})(\boldsymbol{x_1-a}) + (\boldsymbol{y-b})(\boldsymbol{y_1-b}) = \boldsymbol{r^2}$

   $(\dots - \cdots)(\dots - \cdots) + (\dots - \cdots)(\dots - \cdots) = \boldsymbol{r^2}$

   $\dots + \cdots - \cdots + \cdots = \cdots$

   $\boldsymbol{6x - 3y = 9}$

9. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ dengan titik singgung pada (5,1)

   Penyelesaian:

   $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

   $(\dots - \cdots)(\dots - \cdots) + (\dots . - \cdots)(\dots - \cdots) = r^2$

   $(\dots - \cdots)^2 + (\dots + \cdots)^2 = 25$

   Dengan $a = 2$ dan $b = -3$ dan $r = 5$

   Maka persamaan garisnya

   $(x_1 - a)(x-a) + (y_1 - b)(y-b) = r^2$

   $(\dots - \cdots)(\dots - \cdots) + (\dots + \cdots)(\dots + \cdots) = \cdots$

   $3(\dots - \cdots) + 4(\dots + \cdots) = \cdots$

   $\dots - \cdots + \cdots + 12 = \cdots$

   $\dots + \cdots + \cdots - \cdots - \cdots = 0$

   $3x + 4y - 19 = 0$

10. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ di titik (5,3)

    Penyelesaian:

    $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

    $\dots . + y_1 y + \frac{1}{2}A(\dots + \cdots) + \cdots (y_1 + y) + \cdots = 0$

    $\dots + \cdots - \cdots - \cdots + \cdots + \cdots - \cdots = 0$

$3x + 4y - 27 = 0$

11. Tentukan persamaan garis singgung dari titik $(0,0)$ pada lingkaran $(x-3)^2 + (y-4)^2 - 5$ adalah

    Penyelesaian:

    $y = mx$

    $(\ldots - \cdots)^2 - (mx - 4)^2 = \cdots$

    $\ldots - \cdots + \cdots + \cdots - 8mx + \cdots - \cdots = 0$

    $(1 + m^2)x^2 - (6 + 8m)x + 20 = 0$

    Syarat menyinggung $D = 0$

    $(6 + 8m)^2 - 4(\ldots + \cdots)(\ldots) = 0$

    $36 + \cdots + \cdots - 80 - \cdots = 0$

    $\ldots + \cdots - 44 = 0$

    $\ldots - \cdots + 11 = 0$

    $(\ldots - \cdots)(\ldots - \cdots) = 0$

    $m = \frac{\ldots}{\ldots} \ V \ m = \frac{\ldots}{\ldots}$

    Sehingga persamaan singgungnya adalah

    $y = \frac{\ldots}{\ldots}x,$ atau $x - 2y = 0$

    $y = \frac{\ldots}{\ldots}x$ atau $11x - 2y = 0$

12. Jarak terdekat antara titik $(-12,12)$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$ adalah

    Penyelesaian:

    Substitusikan titik $(-12,12)$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

    $(-12)^2 + \cdots - \cdots - \cdots - 11 = 0$

    $253 > 0$

    Berarti titik $(-12,12)$ berada di luar lingkaran

    Lingkaran tersebut berpusat di $(\ldots, \ldots) = (3,4)$

    Jari-jari lingkaran adalah $= \sqrt{\ldots + \cdots} = \sqrt{289} = \cdots$

    Jarak dari titik pusat ke $(-12,12) = \sqrt{(\ldots - \cdots)^2 + (\ldots - \cdots)^2} = \cdots$

    Jarak terdekat = jarak titik pusat ke$(-12,12)$ − jari jari lingkaran

$= \cdots - \cdots$

$= 11$

13. Jarak titik singgung dari titik (4,4) ditarik garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

    Penyelesaian:

    $x^2 + x^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ atau $(.. + \cdots)^2(... + \cdots)^2 = 5$

    Berpusat di $(... , ...)$ dan $r = \sqrt{...}$

    Persamaan garis singgungnya adalah

    $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 + b)(y + b) = r^2$

    (4,4) → $(... - \cdots)(... - \cdots) + (... + \cdots)(... + \cdots) = 5$

    Persamaan garis singgung adalah $x - 3y = 11$ → $x = 11 + 3y$ ... . (1)

    Persamaan (1) substitusikan ke persamaan lingkaran sehingga diperoleh

    $(... - \cdots)(... - \cdots) + (... + \cdots)(... + \cdots) = 5$

    $(3x + \cdots)^2 + (y + \cdots)^2 = 5$

    $9y^2 + \cdots + \cdots + y^2 + \cdots + ... - \cdots = 0$

    $... + 50y + \cdots = 0$

    $... + 5y + \cdots = 0$

    $(... + \cdots)(... + \cdots) = 0$

    $y = -2$ maka $x = \cdots$

    $y = \cdots$ maka $x = 2$

    Jadi, titik singgungnya adalah $(... , -2)$ dan $(2, ...)$

    Jaraknya= $\sqrt{(... - \cdots)^2 + (... - \cdots)^2} = \sqrt{10}$

14. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ dan titik singgungnya $A(-3,1)$

    Penyelesaian:

    $x_1 = -3, y_1 = 1$

    $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$

    $a = \cdots, b = \cdots, r^2 = \cdots$

Maka masukkan ke persamaan

$(\ldots - \cdots)(\ldots - \cdots) + (\ldots - \cdots)(\ldots - \cdots) = 25$

$(\ldots - \cdots) - 4 + (\ldots - \cdots) - 3 = 25$

$\ldots + \cdots - \cdots + 12 = 25$

$\ldots - \cdots + \cdots = \cdots$

$\ldots - \ldots + 16 - 25 = 0$

$-4x - 3y - 9 = 0$ atau $4x + 3y - 9 = 0$

15. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus dengan garis $-3x + 4y - 1 = 0$ pada lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

    Penyelesaian:

    Menentukan unsur-unsur lingkaran

    $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0 \rightarrow A = \cdots, B = \cdots, C = \cdots$

    Pusatnya $(a, b) = \left(-\frac{A}{\ldots}, -\frac{B}{\ldots}\right)$

    $= \left(-\frac{\ldots}{\ldots}, -\frac{\ldots}{\ldots}\right)$

    $= (-2, 1)$

    Jari-jari: $r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

    $= \sqrt{\ldots + \cdots - \cdots}$

    $= 2$

    Menentukan gradien garis singgungnya

    Garis $-3x + 4y - 1 = 0 \rightarrow m_1 = \frac{\ldots}{\ldots}$

    Karena tegak lurus maka $m.m_1 = -1 \rightarrow m = -\frac{4}{3}$

    Menentukan PGS dengan gradien $m = -\frac{4}{3}$

    $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$

    $y - \cdots = \cdots(x - \cdots) \pm 2\sqrt{1 + \cdots}$

    $y - \cdots = \frac{\ldots}{\ldots}x - \frac{\ldots}{\ldots} \pm 2\sqrt{1 + \cdots}$

    $y - \cdots = \frac{\ldots}{3}x - \frac{\ldots}{3} \pm \frac{\ldots}{3}$ (kali 3)

    $3y - \cdots = \cdots x - \cdots \pm \cdots$

    $3y = \cdots x - \cdots + \cdots \pm \cdots$

(PGS 1): $3y = -4x + 5$

(PGS 2): $4x + 3y = -15$

16. Persamaan lingkaran yang jaraknya $2\sqrt{5}$ dan menyinggung garis $2x + y = 7$ adalah $x^2 + y^2 + AX + By + C = 0$

Penyelesaian:

Garis $2x + y = 7$ mempunyai gradien $m = \cdots$

Garis yang tegak lurus dengan $2x + y = 7$ mempunyai gradien $m = \cdots$

Persamaan garis dengan $m = \cdots$ dan melalui $(2,3)$ adalah $y = \cdots x + 2$

Pusat lingkaran terletak di garis $y = \cdots x + 2$, maka kita pilih pusatnya $P(a, \frac{\cdots}{\cdots} a + 2)$

Kita hitung nilai a dengan menggunakan jarak $AP = 2\sqrt{5}$

$$\sqrt{(a - \cdots)^2 + \left(\frac{\cdots}{\cdots} a + 2 - \cdots\right)^2} = 2 = 2\sqrt{5}$$

$a^2 - .. + \cdots + \cdots . - \cdots + 1 = 20$

$\frac{5}{4} a^2 - \cdots - \cdots = 0$

$a^2 - \ldots - \cdots = 0$

$(a - 6)(a + 2) = 0$

Untuk $a = 6$ maka $P(6,5)$ persamaan lingkarannya

$(x - 6)^2 + (y + \cdots)^2 = 20$ atau $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 41 = 0$

Untuk $a = -2$ maka $P(-2,1)$ persamaan lingkarannya

$(x + 2)^2 + (y + \cdots)^2 = 20$ atau $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 15 = 0$

17. persamaan garis singgung melalui titik$A$ pada lingkaran adalah Titik $A(3, m)$ dengan $m > 0$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x + 3y = 25$ persamaan garis singgung melalui titik$A$ pada lingkaran adalah

Penyelesaian:

$A(3, m) \rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 3y = 25$

$\ldots^2 + \ldots^2 + 2(\ldots) + 3(\ldots) = 25$

$\ldots + \cdots + \cdots + \cdots - 25 = 0$

$... + \cdots - 10 = 0$

$(m + 5)(m - 2) = 0$

$m = -5$ atau $m = 2$

Karena $m > 0$ maka kita pilih $m = 2$ sehingga titik A adalah $A(3,2)$

Persamaan garis singgung melalui titik (3,2) pada $x^2 + y^2 + 2x + 3y = 25$

$$x_1 x + y_1 y + (x + x_1) + \frac{3}{2}(y + y_1) = 25$$

$A(3,2) \rightarrow 3x + 2y + \cdots + \cdots = 25$

$... + \cdots - 19 = 0$

$8x + 7y - 38 = 0$