MODUL 6

PARABOLA

A. Kompetensi Dasar

Dapat memahami konsep parabola serta menggunakannya dalam memecahkan masalah yang berkaitan.

B. Indikator

1. Menentukan persamaan parabola yang fokus dan garis arahnya diketahui.
2. Menentukan persamaan garis singgung parabola bila gradient garis singgung diketahui, titik singgungnya diketahui dan bila melalui suatu titik di luar parabola.
3. Membuktikan sifat utama yang dimiliki oleh garis singgung pada parabola.
4. Mendefinisi parabola berdasarkan eksentrisitas dan garis arahnya.
5. Menentukan tempat kedudukan titik-titik dengan syarat tertentu yang berkaitan dengan parabola.

C. Uraian Materi

1. Persamaan Bola
2. Garis Singgung pada Parabola
3. Sifat Utama Garis Singgung pada Parabola
4. Tempat Kedudukan Titik-titik dengan Syarat Tertentu

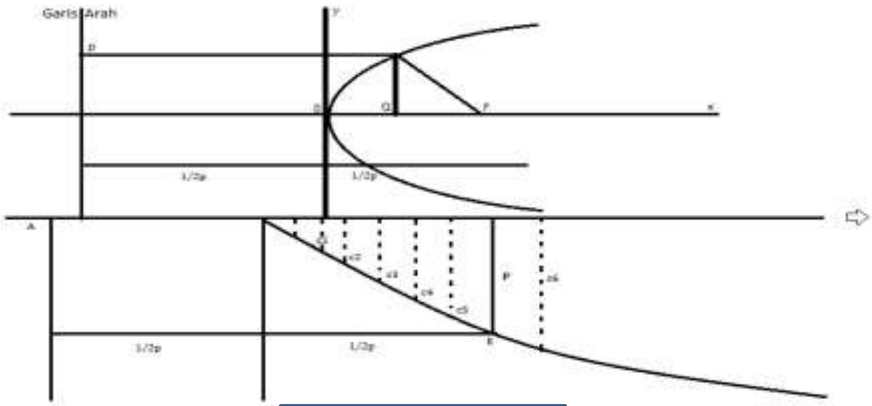
MODUL 6

PARABOLA

6.1. Kegiatan Pembelajaran 1. Persamaan Para Bola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu. Selanjutnya titik itu disebut titik fokus parabola, sedangkan garis itu disebut garis arah atau direktris.

Persamaan parabola dengan fokus $F(\frac{1}{2}p, 0)$ dan dengan garis arah $x = -\frac{1}{2}p$ serta sumbu simetri sumbu x adalah sebagai berikut.



Gambar 6.1.1

Ambil sebarang titik pada parabola missal T(x_i, y_i) dan titik O(0,0) sebagai puncak parabola. Tarik garis melalui T tegak lurus garis arah yang diketahui missal di P. Hubungkan garis melalui titik T dan F. Berdasarkan definisi parabola : TF = TP

Pandang ∆ TQF, ∆ TQF merupakan segitiga siku-siku, dimana membentuk sudut siku siku di titik Q. Sehingga berlaku teorema phytagoras :

$$QT^2 + QF^2 = TF^2$$

$\sqrt{QT^2 + QF^2} = TF^2$

Karena TF = TP maka $\sqrt{QT^2 + QF^2} = TP$

$\sqrt{QT^2 + QF^2} = TP \Leftrightarrow \sqrt{QT^2 + QF^2} = (x_i + \frac{1}{2}p)$

$\Leftrightarrow QT^2 + QF^2 = (x_i + \frac{1}{2}p)^2$

$\Leftrightarrow y_i^2 + (\frac{1}{2}p - x_i)^2 = (x_i + \frac{1}{2}p)^2$

$\Leftrightarrow y_i^2 + \frac{1}{4}p^2 - px_i + x_i^2 = x_i^2 + px_i + \frac{1}{4}p^2$

$\Leftrightarrow y_i^2 = 2px$

Titik T $(x_{i,}y_i)$ berada pada parabola. Sehingga rumus $y_i^2 = 2px_i$ akan berlaku untuk semua titik (x, y) yang berada pada parabola.

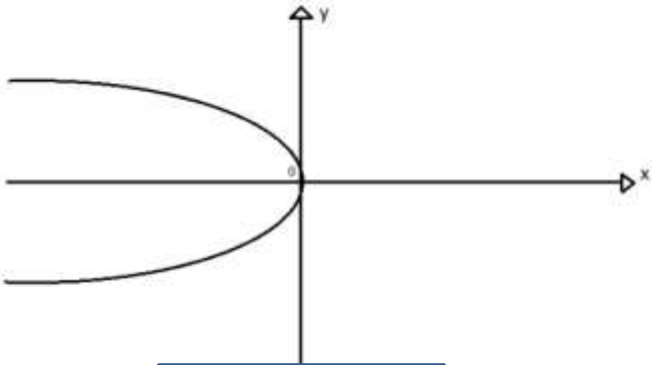
Jadi, persamaan parabola dengan puncak (0,0) dan sumbu simetri sumbu x adalah $y^2 = 2px$.

Unsur-unsur yang dimiliki parabola $y^2 = 2px$ yaitu :

a) Titik api atau titik focus, $F\left(\frac{1}{2}p, 0\right)$
b) Puncak parabola (titik O), yaitu titik potong parabola dengan sumbu simetri
c) Garis arah/direktris (garis x = - $\frac{1}{2}$ p)
d) Sumbu simetri, yaitu garis yang melalui F dan tegak lurus dengan garis arah (sumbu x)
e) Parameter parabola (p)
f) Ekksentrisitas parabola (e = 1)
g) Latus rectum parabola (DE) adalah tali busur yang melalui fokus dan tegak lurus sumbu parabola yang panjangnya |2p|

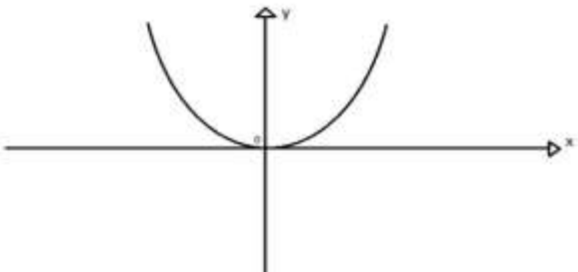
Selanjutnya dengan meakukan pergeseran sumbu maka akan diperoleh persamaan parabola dengan puncak P(α,β) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x adalah $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$

Jika sumbu simetrinya berimpit dengan sumbu x, titik puncak parabola berimpit dengan titik asal tetapi parabolanya terletak di setengah bidang sebelah kiri (Gambar 6.2) maka persamaan parabolanya $y^2 = -2px$



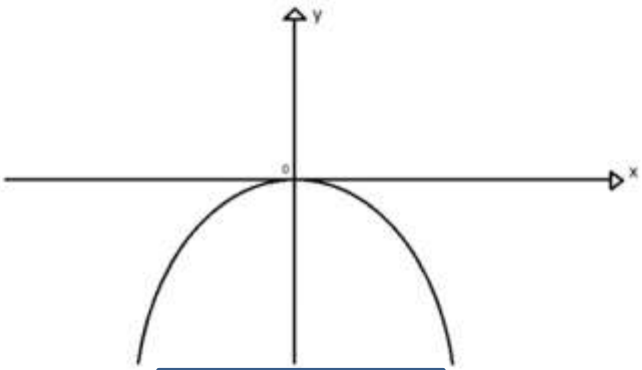
Gambar 6.1.2

Jika sumbu simetri berimpit dengan sumbu y, titik puncak parabola berimpit dengan titik O dan parabolanya terletak di setengah bidang sebelah atas (Gambar 6.1.3), maka persamaan parabolanya adalah $x^2 = 2py$



Gambar 6.1.3

Jika sumbu simetri berimpit dengan sumbu y, titik puncak parabola berimpit dengan titik O dan parabolanya terletak di setengah bidang sebelah bawah (Gambar 6.4), maka persamaan parabolanya adalah $x^2 = -2py$



Gambar 6.1.4

Contoh 1:

Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di O, sumbu simetrinya berimpit dengan sumbu x dan parabolanya terletak di setengah bidang bagian kiri dan melalui titik (2,4)

Penyelesaian:

Misalkan persamaan parabolanya $y^2 = 2px$

Karena titik (2,4) pada parabola maka 16 = 4p sehingga diperoleh p = 4

Jadi persamaan parabola yang dinyatakan adalah $y^2 = 8x$

6.2. Kegiatan Pembelajaran 2. Garis Singgung pada Parabola

Persamaan garis singgung parabola dapat ditentukan bila gradiennya diketahui, atau bila titik singgungnya diberikan atau garus tersebut melalui suatu titik di luar parabola.

(i) Gradien Garis Singgung Diketahui

Misalkan persamaan parabolanya $y^2 = 2px$ dan persamaan garis singgungnya yang bergradien m adalah y = mx + n, n parameter. Abis titik – titik potong garis dan parabola tersebut diperoleh dari persamaan $(mx + n)^2 = 2px$ atau m^2x^2+(2mn – 2p)x + $n^2 = 0$. Garis akan menyinggung parabola jika kedua titik potongnya berhimpit atau absis kedua titik potongnya sama yaitu terjadi bila diskriminannya persamaan kuadrat sama dengan nol, $4(mn - p)^2 - 4m^2n^2 = 0$. Kemudian jabarkan persamaan tersebut, sehingga didapat:

$$4(m^2n^2 - 8mnp + 4p^2) - 4m^2n^2 = 0$$

$$-8mnp + \ 4p^2 = 0$$

$$n = \frac{-4p^2}{-8mnp}$$

Diperoleh : $n = \frac{p}{2m}$

Jadi, persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ dengan gradien m adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$. Dengan cara yang sama dapat diturunkan persamaan parabolanya (y – β) = m(x – α) + $\frac{p}{2m}$. Jika persamaan parabolanya $(\mathrm{x} - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$, maka persamaan garis singgung dengan gradien m adalah (y – β) = m(x – α) - $\frac{pm^2}{2}$

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $(x - 3)^2 = -6(y + 1)$ dengan gradien 2 dan tentukan pula titik singgungnya!

Penyelesaian :

Persamaan garis singgung dengan m = 2 pada parabola $(x - 3)^2 = -6(y + 1)$ adalah sebagai berikut :

$$y - b = m(x - a) - \frac{pm^2}{2}$$

$$y + 1 = 2(x - 3) - \frac{-3.2^2}{2}$$

$$y + 1 = 2x - 6 + 6$$

$$y + 1 = 2x \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

Titik singgungnya didapat dengan mensubsitusikan persamaan garis singgung ke persamaan parabola.

$$(x - 3)^2 = -6(2x - 1 + 1)$$

$$x^2 - 6x + 9 = -12x$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0$$

$$x_{1,2} = -3$$

Untuk x = -3, y = 2(- 3) – 1= -7. Jadi titik singgungnya di (-3, -7)

(ii) Melalui Titik Pada Parabola

Misalkan persamaan garis singgung y = mx + n. Maka, abis titik singgungnya dapat diperoleh dari persamaan $(mx + n)^2$ = 2px atau $m^2x^2 + (2mn - 2p)x + n^2 = 0$

Karena hanya ada satu titik singgung maka absis nya adalah :

$$x_1 = \frac{-(2mn - 2p)}{2m^2} = \frac{p - mn}{m^2} \text{ ....(i)}$$

Dan ordinatnya adalah

$$y_1 = m\left(\frac{p - mn}{m^2}\right) + n = \frac{p}{m} \text{ ....(ii)}$$

Jadi, gradien garis singgungnya adalah $m = \frac{p}{y_1}$

Dari persamaan (i) dan (ii) dan ${y_1}^2 = 2px$, kita memperoleh $n = \frac{y_1}{2}$

Jadi, persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ di $T(x_1 y_{1)}$ adalah

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2} \; atau \; y_1 y = px + \frac{{y_1}^2}{2} \; atau \; y_1 y = p(x + x_1)$$

Jika persamaan parabolanya (y – β) = 2p(x – α), maka persamaan garis singgung di $T(x_1 y_1)$ adalah $(y_1 - \beta)(y - \beta) = p(x + x_1 - 2\alpha)$.

Contoh 3

Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$ di titik yang mempunyai ordinat 6.

Penyelesaian :

Kita nyatakan parabola dalam bentuk

$y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y = 8x - 28$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 8x - 28 + 4$

$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = 8x - 24$

$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = 2.4(x - 3)$

Dari persamaan terakhir diperoleh (α,β)=(3,2) dan p=4

Untuk menentukan koordinat titik yang terletak pada parabola dengan ordinat 6, kita subsitusikan y = 6 pada parabola maka diperoleh absis yaitu :

$$(6 - 2)^2 = 4.2(x - 3) \Leftrightarrow x = 5$$

Jadi titik singgung yang dimaksud adalah (5,6). Dengan mempergunakan persamaan garis singgung di titik T(5,6) akan diperoleh

$(6-2)(y-2) = 4(x+5-2.3)$

$\Leftrightarrow 3(y-2) = 4(x+5-6)$

$\Leftrightarrow 3y-6 = 4x-4$

$\Leftrightarrow 3y-4x-2 = 0$ Jadi, persamaan garis singgung yang dimaksud adalah 3y - 4x - 2 = 0

(iii) Melalui titik di luar parabola

Berikut merupakan langkah – langkah untuk mencari persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ yang melalui titik $T(x_1, y_1)$ di luar parabola.

Misalkan titik singgungnya $S(x_0, y_0)$. Maka, persamaan garis singgung di S adalah $y_0 y = p(x + x_0)$.

Karena garis singgung ini melalui titik $T(x_1, y_1)$, maka harus memenuhi $y_0 y_1 = p(x_1 + x_0)$………..(i)

Karena (x_0, y_0) pada parabola, maka ${y_0}^2 = 2px_0$……….. (ii).

Dari persamaan (i) dan (ii) dapat dicari (x_0, y_0), sehingga diperoleh persamaan garis singgung yang melalui T di luar parabola.

Contoh 4

Tentukan persmaaan garis singgung melalui titik T(4,6) pada parabola $y^2 = 8x$.

Penyelesaian :

Dari $y^2 = 8x$ didapat p = 4

Ttitik T (4,6) tidak terletak pada parabola $y^2 = 8x$

Misalkan titik singgungnya $S(x_0, y_0)$

Maka, persamaan garis singgung melalui S adalah $y_0y = 4(x + x_0)$

Titik T(4,6) terletak pada garis singgung, maka titik T akan memenuhi persamaan berikut, yaitu $6y_0 = 4(4 + x_0)$ atau

$4x_0 - 6y_0 + 16 = 0$ (i)

Karena S pada parabola, maka $y_0^2 = 8x_0\ atau\ x_0 = \frac{1}{8}y_0^2$ (ii)

Subtitusi persamaan (ii) pada persamaan (i) didapatkan sebagi berikut :

$$4\left(\frac{1}{8}y_0^2\right) - 6y_0 + 16 = 0$$

$$\frac{1}{2}y_0^2 - 6y_0 + 16 = 0$$

$$y_0^2 - 12y_0 + 32 = 0$$

$$(y_0 - 8)(y_0 - 4) = 0$$

$$y_0 = 8 \qquad y_0 = 4$$

Untuk $y_0 = 8\ dan\ untuk\ y_0 = 4\ didapat\ x_0 = 2$

jadi, persamaan garis singgung melalui $(8,8)$ adalah

$$8y = 4(x + 8) \Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0$$

Persamaan garis singgung melalui (2,4) adalah

$$4y = 4(x + 2) \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$$

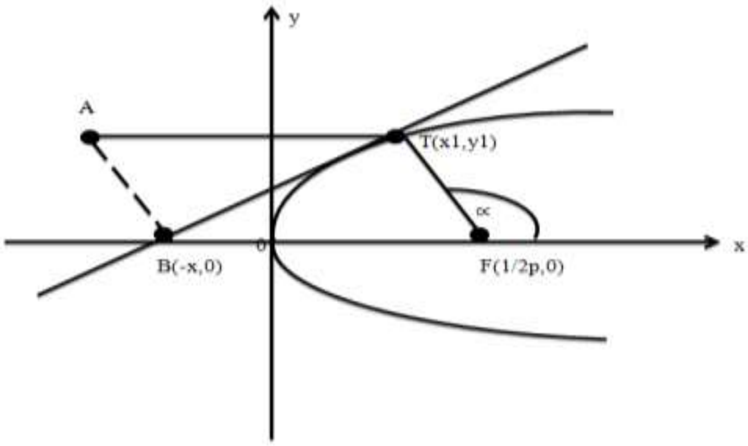
6.3 . Kegiatan Pembelajaran 3. Sifat Utama Garis Singgung Pada Parabola

Garis singgung disuatu titik ada parabola membagi dua sama besar sudut antara garis yang menghubungkan titik singgung dengan titik api dan garis yang melalui titik singgung sejajar dengan sumbu x.

Bukti :

Misalkan persamaan parabola $y^2 = 2px \; dan \; titik \; singgungnya \; T(x_1, y_1)$

Persamaan garis singgung di T adalah $y_1 y = p(x + x_1). jadi, tg = \frac{p}{\ }$



Gambar 6.3.1

Perhatika

$$tg\ \alpha = \frac{y_1}{x_1 - \frac{1}{2}p} = \frac{2y_1}{2x_1 - p}$$

Perhatikan $\angle BTF = \alpha - \varphi$ sehingga nilai tangenya adalah

$$tg(\alpha -) = \frac{tg\alpha - tg}{1 + tg\alpha tg} = \frac{\frac{2y_1}{2x_1 - p} - \frac{p}{y_1}}{1 + \frac{2y_1}{2x_1 - p}\frac{p}{y_1}} = \frac{p(2x_1 + p)}{y_1(2x_1 + p)}$$

$$= \frac{p}{y_1}$$

Dengan demikian

$tg = tg(\alpha -)$

Berarti, $\varphi = \alpha - a1\ atau\ \angle TBF = \angle BTF$ karena, AT $//$ BF maka $\angle BTF = \angle BTA$

Jadi, $\angle ATB = \angle BTF$ atau garis singgung disuatu titik pada parabola membagi dua sama besar sudut antara garis yang menghubungkan titik singgung dengan titik api dan garis yang melalui titik singgung sejajar dengan sumbu x.

6.4. Kegiatan Pembelajaran. Tempat Kedudukan Titik-titik dengan syarat tertentu

a. Garis tengah sekawan

Misalkan diberikan garis tengah $y = rm$ dari parabola $y^2 = 2px$ maka persamaan garis yang melalui tali busur yang sejajar garis tengah $y = rm$ adalah $y = mx + n, n$ parameter. Perpotongan antara $y = mx + n$ dengan parabola $y^2 = 2px$ adalah

$(mx + n)^2 = 2px$

$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 2px$

$m^2x^2 + 2mnx - 2px + n^2 = 0$

$m^2x^2 + (2mn - 2p)x + n^2 = 0$

Absis dari titik tengah tali busurnya adalah

$$x_r = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - mm}{m^2}$$

Dan $y_r = mx_r + n \rightarrow b = y_r - mx_r$ sehingga diperoleh

$$x_r = \frac{p - (y_r - mx_r)}{m^2} \rightarrow m^2 x_r = p - my_r + m^2 x_i$$

$$p - my_r = 0 \rightarrow y_r = \frac{p}{m}$$

Dengan menjalankan coordinator titik T dapat diperoleh persamaan tempat kedudukan titik-titik tengah talibusur-talibusur yang sejajar dengan garis yang gradiennya m adalah $y = \frac{p}{m}$ Persamaan ini adalah garis tengah sekawan yang sejajar sumbu x.

Contoh 5

Diketahui parabola $y^2 = 2x$ dan garis tengah sekawan $y = -1$, jika tali busurnya memotong sumbu x dan membentuk sudut α, hitunglah besar sudut α

Penyelesaian

$$y^2 = 2x \rightarrow p = 1$$

$$y = -1, y = \frac{p}{m} \Leftrightarrow -1 = \frac{1}{m}$$

$$m = -1$$

$$tg\alpha = -1$$

$$tg\alpha = tg135^0 \Leftrightarrow \alpha = 135^0$$

Jadi besarnya sudut α adalah 135^0

Contoh 6

Tentukan persamaan tali busur suatu parabola $y^2 = 4x$, maka dperoleh

$$y = mx + c \Leftrightarrow x = \frac{y-c}{m}$$

$y^2 = 4\left(\frac{y-c}{m}\right)$

$my^2 - 4y + 4c = 0$

$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow y_1 + y_2 = -\frac{-4}{m} = \frac{4}{m}$

$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$-2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y_1 + y_2 = -4$

$y_1 + y_2 = \frac{4}{m}$

$-4 = \frac{4}{m} \Leftrightarrow m = -1$

Tali busur melalui $(3, -2)$,maka

$y = mx + c$

$-2 = (-1)(3) + c$

$-2 = -3 + c \rightarrow c = 1$

Persamaan talibusur yang dimaksud adalah

$y = mx + c$

$y = -1x + 1$

$y = -x + 1$

a. Garis Orthoptis atau Garis Monge

Garis orthoptis atau garis monge adalah tempat kedudukan titik potong garis-garis singgung pada parabola yang tegak lurus sesamanya. Berikut ini adalah penjelasanya mengenai persamaan tempat kedudukan titik potong garis-garis singgung pada parabola yang tegak lurus sesamanya.

Misalkan persamaan parabola $y^2 = 2px$,persamaan garis singgung dengan gradien m adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$, persamaan garis singgung yang tegak lurus garis singgung diatas adalah $y = -\frac{1}{m}x - \frac{mp}{2}$

Absis titik potong kedua garis singgung diatas harus memenuhi

$$mx + \frac{p}{2m} == -\frac{1}{m}x - \frac{mp}{2} \; atau \left(m + \frac{1}{m}\right)x$$
$$= -\left(m + \frac{1}{m}\right)\frac{p}{2}$$

Berarti $x = -\frac{1}{2}p$

Jadi persamaan tempat kedudukan titik potong garis-garis singgung pada hiperbola yang tegak lurus sesamanya adalah garis $x = -\frac{1}{2}p$. Persamaan ini merupakan persamaan garis arah parabola disebut juga garis orthoptis dari monge

Contoh 7

Diketahui puncak parabola adalah A (6,-3) dan persamaan garis arahnya 3x-5y+1=0 tentukan titik api dari parabola.

Peyelesaian :

Titik api terletak pada garis yang melalui puncak parabola tegak lurus garis arah dan jarak puncak ke titik api sama dengan jarak puncak ke garis arah.

Jarak A ke garis adalah $d = \left|\frac{18+15+1}{\sqrt{9+25}}\right| = \sqrt{34}$

Persamaan garis melalui A dan tegak lurus gais arah adalah

$y + 3 = -\frac{5}{3}(x - 6)$ atau $= -\frac{5}{3}x + 7$

Misalkan F $(x_1 y_1)$ titik api parabola, maka

$y_1 = -\frac{5}{3}x_1 + 7$ dan $AF = \sqrt{(x_1 - 6)^2 + (y_1 + 3)^2} = \sqrt{34}$

Berarti, $\sqrt{(x_1 - 6)^2 + \left(-\frac{5}{3}x_1 + 7 + 3\right)^2} = \sqrt{34}$

Kuadratkan kedua ruas dan jabarkan maka diperoleh :

$$(x_1 - 6)^2 + \left(-\frac{5}{3}x_1 + 7 + 3\right)^2 = 34$$

$$(x_1 - 6)^2 + \left(-\frac{5}{3}x_1 + 10\right)^2 = 34$$

$$x_1^2 - 12x_1 + 36 + \frac{25}{9}x_1^2 - \frac{100}{3}x_1 + 100 = 34$$

$$\frac{34}{9}x_1^2 - \frac{136}{3}x_1 + 102 = 0$$

$$x_1^2 - 12x_1 + 27 = 0$$

Jadi, $x_1 = 3$ diperoleh $y_1 = 2$

untuk, $x_1 = 9$ diperoleh $y_1 = -8$

jadi, C(9,-8)

untuk, $x_1 = 3$ diperoleh $y_1 = 2$

jadi, D(3,2)

karena titik D(3,2) terletak pada garis arah 3x-5y+1=0, maka titik apinya F(9,-8)

b. Garis titik kaki

garis titik kaki adalah tempat kedudukan titik-titik potong garis-garis yang melalui titik api dan tegak lurus garis-garis singgung pada parabola.berikut adalah penjelasan persamaan tempat kedudukan titik-tiik potong garis-garis yang melalui titik api dan tegak lurus garis-garis singgung pada parabola.

Misalkan persamaan parabola $y^2 = 2px$ maka titikapinya F$\left(\frac{1}{2}p, 0\right)$

Persmaan garis singgung yang gradiennya m adalah

$y = mx + \frac{p}{2m}$ (i)

Persaman garis melalui F dan tegak lurus garis singgung diatas adalah $y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{1}{2}p\right)$(ii)

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh

$mx + \frac{p}{2m} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{1}{2}p\right)$

$mx + \frac{p}{2m} = -\frac{1}{m}x + \frac{p}{2m} \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{m}\right)x = 0$

Berarti x= 0

Jadi,tempat kedudukan titik-titik potong garis-garis singgung yang melalui titik-titik api dan tegak lurus gais-garis singgung pada parabola adalah garis x = 0 atau sumbu y. garis ini disebut juga garis titik kaki.

Contoh 8 :

Suatu parabola dengan persamaan $y^2 = 8x$ dan garis $y = 2x + 1$. Tentukan titik apinya sehingga garis-garis singgung yang melalui titik api dan tegak lurus dengan garis-garis pada parabola tersebut menghasilkan persaman dengan x = 0

Penyelesaian :

Dari persamaan $y^2 = 8x$ diperoleh nilai p= 4 dari persamaan y=2x+1 diperoleh m=2. Menurut pembuktian diatas saat gari x=0 maka garis ini disebut garis titik kaki. Sehingga titik ainya F$\left(-\frac{1}{2}p, 0\right)$. Jadi titik api yang dinyatakan adalah f(-2,0)

6.5. Rangkuman

1. Persaman parabola dengan focus $F\left(\frac{1}{2}p, 0\right)$ dan dengan garis arah $x = -\frac{1}{2}p$ serta sumbu sismetri sumbu x adalah $y^2 = 2px$.
2. Persaman garis singgung parabola $y^2 = 2px$ yang gradiennya m adalah $= mx + \frac{p}{2m}$.
3. Persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ yang melalui titik $(x_2 y_1)$ pada parabola adalah $y_1 y = p(x + x_1)$.
4. Persamaan garis yang melalui titik singgung dari garis singgung parabola $y^2 = 2px$ yang melalui titik $(x_2 y_1)$ diluar parabola adalah $y_1 y = p(x + x_1)$. Persamaan garis ini disebut garis kutub.
5. Garis singgung disuatu titik pada parabola membagi dua sama besar sudut antara garis yang menghubungkan titik singgung titik dengan titik api dang garis yang melalui titik singgung sejajar dengan sumbu x.
6. Tempat kedudukan titik-tiitk tegah talbusur-talibusur yang sejajar dengan garis yang gradiennya m adalah berupa garis dengan persamaan $y = \frac{p}{m}$. persamaan ini adalah persamaan garis tengah sekawan yang sejajar sumbu x.
7. Tempat kedudukan titik potong garis-garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ yang tegak lurus sesamanya adalah berupa garis dengan persamaan $x = -\frac{1}{2}p$. Garis ini disebut garis orthoptis dari monge
8. Tempat kedudukan titik-titik potong garis-garis dengan persamaan x=0 atau sumbu y garis ini disebut juga garis titik kaki

6.6. Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Diskusi Kelompok

1. Tentukan persamaan parabola jika titik puncak $(0, -4)$ dan titik fokus $(2, -4)$ adalah ?

   Penyelesaian:

   Titik puncak $(0, -4)$ maka $a = 0$ dan $b = -4$

   Titik fokus $(2, -4)$ maka $a + p = 2$ atau

   $p \ = \cdots - \cdots$

   $\quad = \cdots - \cdots$

   $\quad = 2$

   $(y - b)^2 = 4p\ (x - a)$

   $\left(y - (\cdots)\right)^2 = 4 \cdot \cdots\ (x - 0)$

   $(y + \cdots)^2 \quad = 8x$

2. Tentukan persamaan parabola dengan puncak $(0, 0)$, sumbu x sebagai sumbu simetri dan melalui titik $(6, -2)$?

   Penyelesaian:

   Titik puncak : $(0, 0)$ dan sumbu x sebagai sumbu simetrinya

   $y^2 = 4px$

   Melalui titik $(6, -2)$, $x = 6$ dan $y = -2$

   $y^2 \qquad = 4px$

   $(\cdots)^2 \quad = 4p(\cdots)$

   $\cdots \qquad = \cdots p$

$p \quad = \frac{\cdots}{\cdots}$

$p \quad = \cdots$

Jadi persamaan parabola tersebut adalah

$y^2 = 4px$

$y^2 = \cdots x$

3. Tentukan persamaan parabola dengan puncak $(0, 0)$, sumbu x sebagai sumbu simetri dan melalui titik $(8, -16)$?

   Penyelesaian:

   Titik puncak : $(0, 0)$ dan sumbu x sebagai sumbu simetrinya

   $y^2 = 4px$

   Melalui titik $(8, -16)$, $x = 8$ dan $y = -16$

   $y^2 \quad = 4px$

   $(\cdots)^2 \quad = 4p(\cdots)$

   $\cdots \quad = \cdots p$

   $p \quad = \frac{\cdots}{\cdots}$

   $p \quad = 8$

   Jadi persamaan parabola tersebut adalah

   $y^2 = 4px$

   $y^2 = \cdots x$

4. Tentukan persamaan parabola dengan titik puncak $P(0{,}0)$ dan garis direktris $y + 10 = 0$

   Penyelesaian:

   Garis Direktris $y + 10 = 0$

   $y = \cdots = p$

   Jadi persamaan parabolanya adalah $y = 4px = \cdots x$

5. Tentukan persamaan garis singgung parabola dari $(y - 8)^2 = 4(x - 2)$ di titik $(11{,}2)$?

   Penyelesaian:

   $p = 1$

   $a = 2$

   $b = 8$

   $y_1 = 2$

   $x_1 = 11$

   $(y - b)(y_1 - b) = 2 \cdot p(x + x_1 - 2a)$

   $(y - \cdots)(\cdots - \cdots) = 2 \cdot \cdots (x + \cdots - 2 \cdot \cdots)$

   $6(y - \cdots) \qquad = 8(x + \cdots)$

   $6y - \cdots \qquad = \cdots + \cdots$

   $8x - 6y + 104 = 0$

   Jadi persamaan garis singgung parabolanya adalah $8x - 6y + 104 = 0$

6. Tentukan titik puncak dari persamaan parabola $(y+2)^2 = 8(x-4)$?

   Penyelesaian:

   $4p = 8$

   $p \ = \dfrac{\cdots}{\cdots}$

   $p \ = \cdots$

   $b \ = -2$

   $a \ = 4$

   Titik puncak $(a,b) = (4,-2)$

7. Tentukan titik puncak dan titik fokus persamaan parabola $y^2 + 8x - 8y + 24 = 0$?

   Penyelesaian:

   $y^2 + 8x - 8y + 24 = 0$

   $(y-4)^2 = -8(x+1)$

   Jadi:

   $4p = 8$

   $p \ = \dfrac{\cdots}{\cdots}$

   $p \ = \cdots$

   $a \ = -1$ dan $b = 4$

   Titik puncak $(a,b) = (\cdots, \cdots)$

   Titik fokus $(a-p,b) = (\cdots - \cdots, \cdots) = (\cdots, \cdots)$

8. Tentukan titik puncak dan titik fokus persamaan parabola $y^2 + 12x - 4y + 16 = 0$?

   Penyelesaian:

   $y^2 + 12x - 4y + 16 = 0$

   $(y-2)^2 = -12(x+1)$

   Jadi:

   $4p = 12$

   $p \quad = \frac{\cdots}{\cdots}$

   $p \quad = \cdots$

   $a \quad = -1$ dan $b = 2$

   Titik puncak $(a, b) = (-1{,}2)$

   Titik fokus $(a - p, b) = (-1 - 3, 2) = (-4, 2)$

9. Tentukan persamaan parabola dengan puncak di titik asal yang melalui (-3, 6) dan terbuka ke kiri ?

   Penyelesaian:

   Bentuk umum persamaan parabola : $y^2 = -4px$

   $x = -3$ dan $y = 6$

   $6^2 = (-4)p(-3)$

   $\cdots = \cdots p$

   $p = \cdots$

   Jadi: $y^2 = -4px$

   $y^2 \qquad = -4(\cdots)x$

   $y^2 \qquad = \cdots x$

10. Carilah persamaan garis singgung di titik $(3, 9)$ pada parabola $y^2 = 12x$?

Penyelesaian:

$x_1 = 3$

$y_1 = 9$

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$

$4p = 12$

$p \;\; = \frac{\cdots}{\cdots}$

$p \;\; = 3$

Persamaan garis singgung

$y_1 \cdot y = 2p(x + x_1)$

$\cdots y = 2(\cdots)(x + \cdots)$

$\cdots y = 6(x + \cdots)$

$y = \frac{6x + 18}{\cdots}$

$y = 6x - 9$ atau $y = x + 2$

11. Tentukan persamaan parabola dengan titik puncak $P(0,0)$ dan garis direktris $y + 5 = 0$

Penyelesaian:

Garis Direktris $y + 5 = 0$

$y = \cdots = p$

Jadi persamaan parabolanya adalah $y = 4px = \cdots x$

12. Tentukan persamaan garis normal yang sejajar dengan garis $x - y = 0$ terhadap parabola $y^2 = 8x$.

    Penyelesaian:

    Misalkan garis $g = x - y = 0$ maka $m_g = 1$

    Garis normal sejajar garis g maka $m_n = m_g = 1$

    Garis normal tegak lurus dengan garis singgung parabola maka $m_g = \frac{1}{m_g} = 1$

    Persamaan garis singgung parabola $y^2 = 8x$ dengan gradien -1 adalah

    $y = -x + \frac{2}{-1} = -x - 2$ ....(1)

    Substitusi (1) ke $y^2 = 8x$ maka

    $(-x - 2)^2 \quad = 8x$

    $x^2 + 4x + \cdots \ = 8x$

    $x^2 - \cdots x + \cdots = 0$

    $(x - \cdots)^2 = 0$

    $x_1 = x_2 = 2$ ....(2)

    Substitusikan (2) ke (1) maka $y = -2 - 2 = 4$

    Sehingga diperoleh koordinat titik singgung $A(2, -4)$

Jadi persamaan garis normal yag melalui titik $A(2, -4)$ dengan gradien 1 adalah

$y + 4 = x - 2$

$y = x - \cdots$

13. Agar kurva parabola $y = ax^2 + 2x$ dan garis $y = x - a$ berpotongan di dua titik yang berbeda, maka tentukan nilai a yang memenuhi!

    Penyelesaian

    Syarat berpotongan di dua titik adalah diskriminan hasil substitusi kedua persamaan yang bernilai positif

    $ax^2 + 2x \quad = x - a$

    $ax^2 + x + a = 0$

    $D = b^2 - 4ac$, karena $D = 0$

    $D = \cdots - 4 \cdots > 0$

    $(\cdots - \cdots)(\cdots + \cdots) > 0$

    $\therefore -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

14. Jika garis $y = 7x - 3$ menyinggung parabola $y = 4x^2 + ax + b$ di $(1, 4)$, a dan b konstanta, maka tentukan $a - b$!

    Penyelesaian

    Substitusikan $(1, 4)$ ke

$y = 4x^2 + ax + b$

$4 = 4 + a + b$

Substitusikan $a = -b$

$4x^2 + ax + b = 7x - 3$

$\cdots + (a - \cdots)x + b + 3 = 0$

$D = 0 \rightarrow (a - \cdots)^2 - 4(\cdots)(b + \cdots) = 0$

$(a^2 - \cdots a + \cdots) - \cdots b - \cdots = 0$

Substitusikan $a = -b$

$a^2 + 2a + 1 = 0$

$a = \cdots$ dan $b = \cdots$

$\therefore a - b = -2$

15. Jika garis $x + y = p$ menyinggung parabola $y = x^2 - x - 3$, maka tentukan nilai konstanta p!

Penyelesaian

Substitusikan $x + y = p$ dan $y = x^2 - x - 3$

$x + y = p$

$y = p - x$

$p - x = x^2 - x - 3$

$-\cdots^2 + \cdots + \cdots = 0$

$x^2 - \cdots - \cdots = 0$

$D = 0 \rightarrow 0^2 - 4(\cdots)(-p - \cdots) = 0$

$4p + 12 = 0$

$\therefore p = -\cdots$

16. Tentukan gradien dan persamaan garis singgung parabola $y = x^2 + 1$ di titik $(2, 5)$!

Penyelesaian

$y = x^2 + 1$

$y' = 2x$

Substitusikan $x = 2$

$y' = 4$

Karena $y' = m$, maka $m = 4$

Persamaan garis singgungnya dapat dicari sebagai berikut.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \cdots = 4(x - \cdots)$

$y = 4x - \cdots + \cdots$

$y = 4x - \cdots$

$\therefore y = 4x - 3$ atau $4x - y - 3 = 0$

17. Tentukan kedudukan garis dititik $(1,2)$ terhadap parabola $(x + 1)^2 = -4(y - 2)$?

Penyelesaian:

Melihat kedudukan titiknya $(1,2)$ terhadap parabola$(x + 1)^2 = -4(y - 2)$

$(x, y) \quad = (1,2)$

$(x + 1)^2 = -4(y - 2)$

$(\cdots + 1)^2 \ldots - 4(\cdots - 2)$

$(\cdots)^2 \qquad \ldots - 4(\cdots)$

$4 \qquad\quad > 0$

Karena ruas kanan > ruas kiri, maka titik $(1,2)$ ada diluar parabola.

18. Tentukan kedudukan garis dititik $(2,4)$ terhadap parabola $(x+1)^2 = 8(y-2)$?

Penyelesaian:

Melihat kedudukan titiknya $(2,4)$ terhadap parabola$(x+1)^2 = 8y(y-4)$

$(x, y) = (2,4)$

$(x+1)^2 = 8(y-2)$

$(\cdots + 1)^2 \ldots 4(\cdots - 2)$

$(\cdots)^2 \qquad \ldots 4(\cdots)$

$4 \qquad\quad < \ 8$

Karena ruas kanan < ruas kiri, maka titik $(2,4)$ ada di dalam parabola.

19. Jika garis lurus $y = 2x + 1$ menyinggung parabola $y = mx^2 + (m-5)x + 10$ maka nilai m sama dengan

Penyelesaian:

Kedua kurva bersinggungan ketika

$y_2 = y_1 \rightarrow mx^2 + (m-5)x + 10 = 2x + 1$

$mx^2 + (m-7)x + 9 = 0$

Syarat bersinggungan:

$D = 0$

$(m-7)^2 - 4(m)(9) = 0$

$m^2 - \cdots m + \cdots \qquad = 0$

$(m - \cdots)(m - \cdots) \qquad = 0$

$m = 1$ atau $m = 49$

20. Garis $y = -x - 3$ menyinggung parabola $y^2 - 2y + px = 15$. Absis puncak parabola adalah

Penyelesaian

Jika $y = -x - 3$ distribusi ke parabola $y^2 - 2y + px = 15$

$(-x-3)^2 - 2(-x-3) + px - 15 = 0$

$x^2 + \cdots x + \cdots + \cdots x + \cdots + px - 15 \quad = 0$

$x^2 + (\cdots + p)x = 0$

Syarat menyinggung:

$D = 0$

$(8+p)^2 = 0 \rightarrow p = -8$

Untuk $p = -8$

$y^2 - 2y - 8x - 15 = 0$

$(y - \cdots)^2 = 8(x + \cdots)$

Absis puncak parabola tersebut $x = -2$