

MODUL 7

TRANSFORMASI SUSUNAN SUMBU

A. Capaian Pembelajaran

Pembaca dapat memahami konsep translasi sumbu serta menggunakannya dalam memecahkan masalah yang berkaitan.

B. Bahan Kajian

Pembaca dapat:

- i. Menentukan persamaan irisan kerucut setelah dilakukan translasi susunan sumbu ke suatu titik asal yang baru.
- ii. Menentukan rumus translasi untuk menyederhanakan persamaan irisan kerucut.
- iii. Menentukan jenis irisan kerucut dari suatu persamaan kuadrat dalam x, y yang tidak memuat suku campuran xy
- iv. Menentukan persamaan irisan kerucut setelah dilakukan rotasi susunan sumbu.
- v. Menentukan persamaan suatu irisan kerucut setelah dilakukan rotasi susunan sumbu.
- vi. Menentukan rotasi untuk menyederhanakan persamaan suatu irisan kerucut.
- vii. Menentukan jenis irisan kerucut dari suatu persamaan kuadrat yang mengandung suku campuran.

C. Uraian Materi

1. Pengertian Translasi Susunan Sumbu
2. Penyederhanaan Persamaan Konik dengan Translasi Sumbu
3. Pengertian Rotasi Sumbu
4. Penyederhaan Persamaan Konik dengan Rotasi Sumbu

MODUL 7

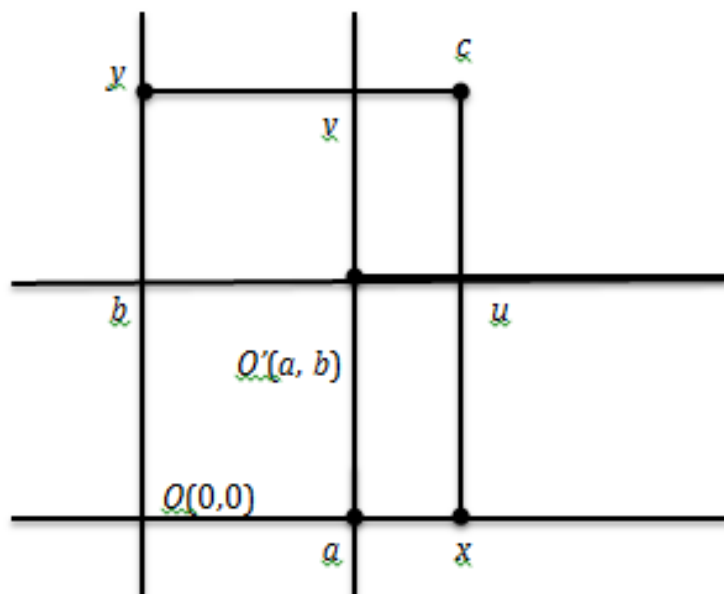
TRANSFORMASI SUSUNAN SUMBU

7.1. Kegiatan Pembelajaran 1. Pengertian Translasi Susunan Sumbu

Definisi

Translasi adalah perpindahan tempat semua titik dalam suatu bidang atau ruang menurut besar/jarak dan arah yang sama.

Translasi atau perpindahan sumbu lama ke susunan baru dari titik asal $O(0,0)$ ke $O'(a,b)$ dapat diilustrasikan pada gambar 7.1 di bawah ini.



Gambar 7.1.1

Titik C akan memiliki dua titik koordinat yaitu terhadap susunan sumbu lama (x,y) dan terhadap

susunan sumbu yang baru (u, v) . Hubungan antar kedua koordinat tersebut adalah

$$\begin{aligned}x &= a + u \\y &= b + v\end{aligned}$$

Contoh 1

Misalkan sumbu-sumbu lama ditranslasikan ke titik asal yang baru dalam koordinat lama yaitu $(2, -2)$. Tentukanlah koordinat titik $A(3,5)$ dalam susunan koordinat yang baru.

Penyelesaian

Hubungan koordinat lama dan baru dapat dituliskan

$$\begin{aligned}x &= 2 + u \\y &= -2 + v\end{aligned}$$

dengan demikian koordinat titik $A(3,5)$ dalam susunan koordinat yang baru adalah $(1,6)$

$$\begin{aligned}3 &= 2 + u \\u &= 1 \\5 &= -1 + v \\v &= 6\end{aligned}$$

Contoh 2

Misalkan sumbu-sumbu lama ditranslasikan ke titik asal yang baru dalam koordinat lama yaitu $(3, -2)$. Tentukanlah koordinat titik $A(1,4)$ dalam susunan koordinat yang baru.

Penyelesaian

Hubungan koordinat lama dan baru dapat dituliskan

$$\begin{aligned}x &= 3 + u \\y &= -2 + v\end{aligned}$$

dengan demikian koordinat titik $A(1,4)$ dalam susunan koordinat yang baru adalah $(-2,5)$

$$1 = 3 + u$$

$$u = -2$$

$$4 = -1 + v$$

$$v = 5$$

Contoh 3

Tentukan persamaan garis

$$2x + y = 5$$

Terhadap koordinat baru setelah diadakan translasi sumbu sehingga koordinat titik asal yang baru dalam koordinat lama adalah $(-4,2)$

Penyelesaian:

Hubungan antara koordinat lama dan baru adalah

$$x = -4 + u$$

$$y = 2 + v$$

Substitusikan ke persamaan garis

$$2x + y = 5$$

$$2(-4 + u) + 1(2 + v) = 5$$

$$2u + v - 8 + 2 = 5$$

$$2u + v = 11$$

Jadi persamaan garis dalam susunan sumbu yang baru adalah

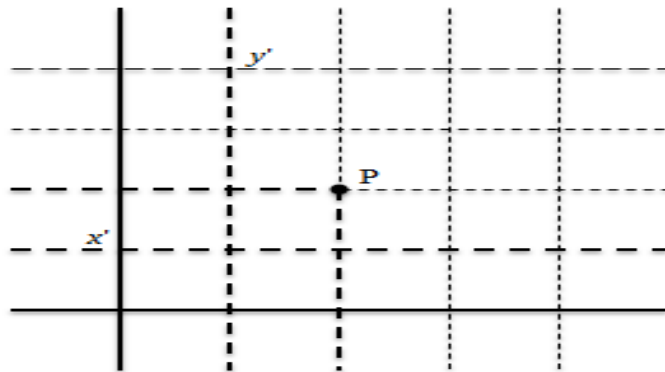
$$2u + v = 11$$

7.2. Kegiatan Pembelajaran 2 Penyederhanaan Persamaan Konik dengan Translasi Sumbu

Misalnya titik awal baru O' yang berkoordinat (p_1, p_2) terhadap system koordinat lama. Suatu titik $P(x, y)$ terhadap koordinat lama, akan mempunyai koordinat

(x', y') terhadap syste, koordinat baru, dengan hubungan

$$\begin{aligned}x &= x' + p_1 \\ y &= y' + p_2\end{aligned}$$



Gambar 7.2.1

Dengan translasi ini kita dapat menghilangkan bagian linier dari persamaan

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{11}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Titik awal koordinat baru akan menjadi pusat irisan kerucut tersebut.

Contoh 4

Kita hendak menentukan jenis garis lengkung $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y = 4$ bila titik awal di translasikan ke $(1, -1)$.

Penyelesaian

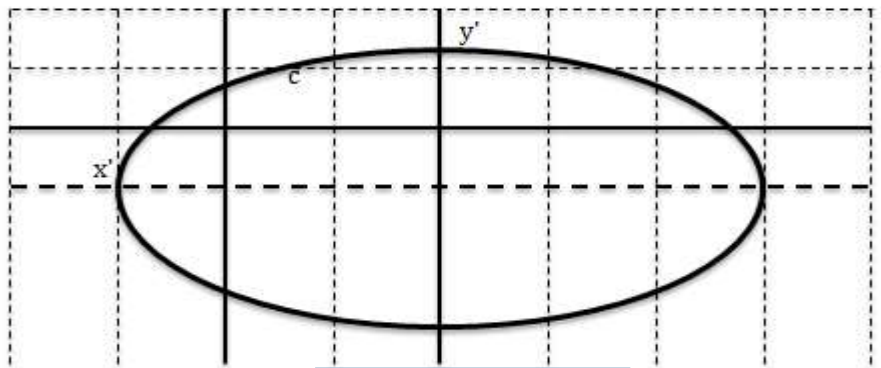
Rumus translasi: $x = x' + 1$
 $y = y' - 1$

Kita substitusikan :

$$2(x' + 1)^2 + 3(y' - 1)^2 - 4(x' + 1) + 6(y' - 1) = 4$$

$$\text{Atau } 2x'^2 + 3y'^2 = 12$$

Kita sesuaikan dengan persamaan standar, menjadi $\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{4} = 1$, suatu elips bertitik pusat di titik awal system koordinat baru yaitu $(1, -1)$, dengan setengah sumbu panjang $\sqrt{6}$ dan setengah sumbu pendek 2.



Gambar 7.2.2

Contoh 5

Tentukan suatu translasi sumbu koordinat yang mentransformasikan persamaan $3x^2 - 4y^2 + 6x - 24y = 100$ ke suatu bentuk standar (menghilangkan bagian linier)

Penyelesaian

Misalkan kita melakukan translasi $x = x' + p_1$
 $y = y' + p_2$

Maka $:x' + p_1y' + p_2$

$$3(x' + p_1)^2 - 4(y' + p_2)^2 + 6(x' + p_2) - 24(y' + p_2) = 100$$

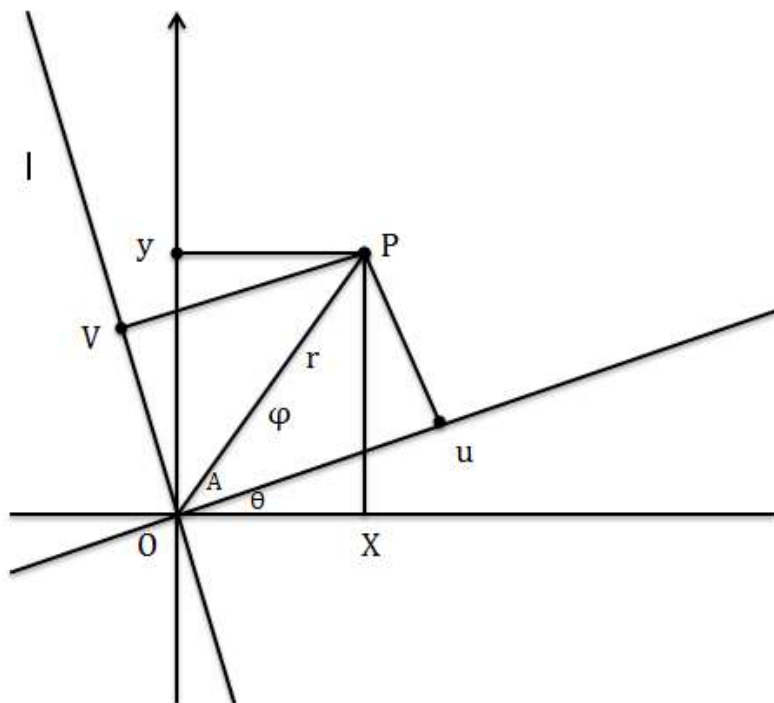
$$3x'^2 - 4y'^2 + x'(4 + 4p_1) + y'(-8 - 8p_2) + p_1^2 - p_2^2 + 4p_1 - 8p_2 = 100$$

Maka haruslah $(4 + 4p_1) = 0$ dan $(-8 - 8p_2) = 0$ atau $p_1 = -1$ dan $p_2 = -1$
 Persamaan menjadi $3x'^2 - 4y'^2 = 94$

7.3. Kegiatan Pembelajaran 3 Pengertian Rotasi Sumbu

Dalam menentukan rumus rotasi untuk menyederhanakan persamaan irisan kerucut kita misalkan susunan sumbu koordinat dirotasikan sejauh θ . Untuk melihat hubungan antar koordinat baru (u, v) dengan koordinat lama (x, y) .

Pada segitiga siku-siku OPC berlaku,



Gambar 7.3.1

$$\cos(\theta + \varphi) = \frac{x}{r}$$

Atau

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \varphi) \\ &= r \cos \varphi \cos \theta - (r \sin \varphi) \sin \theta \end{aligned}$$

Karena, $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ maka $x = u \cos \theta - v \sin \theta$

Dengan cara serupa kita memperoleh,

$$y = u \sin \theta + v \cos \theta$$

Jadi setelah susunan sumbu koordinat dirotasikan sejauh θ maka hubungan antara (u, v) dan (x, y) adalah:

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned}$$

Contoh 6

Tentukan persamaan garis $y = 3x - 8$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian

Dengan rumus rotasi kita mempunyai

$$\begin{aligned} x &= u \cos \frac{\pi}{6} - v \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v \\ y &= u \sin \frac{\pi}{6} + v \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v \end{aligned}$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v &= 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right) - 8 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v &= \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}u - \frac{3}{2}\sqrt{2}v\right) - 8 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v - \frac{3}{2}\sqrt{2}u - \frac{3}{2}\sqrt{2}v + 8 &= 0 \\ \sqrt{2}u + \sqrt{2}v - \frac{3}{2}\sqrt{2}u - \frac{3}{2}\sqrt{2}v + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis $y = 3x - 8$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ adalah } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)u + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)v + 16 = 0$$

Contoh 7

Tentukan persamaan garis $y = 5x + 6$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$

Penyelesaian

Dengan rumus rotasi kita mempunyai

$$x = u \cos \frac{\pi}{6} - v \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}u - \frac{1}{2}v$$

$$y = u \sin \frac{\pi}{6} + v \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{3}v$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{3}v = 5\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}u - \frac{1}{2}v\right) + 6$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{3}v = \frac{5}{2}\sqrt{3}u - \frac{5}{2}v + 6$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{3}v - \frac{5}{2}\sqrt{3}u - \frac{5}{2}v - 6 = 0$$

$$u + \sqrt{3}v - 5\sqrt{3}u - 5v - 12 = 0$$

Jadi persamaan garis $y = 5x + 6$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$ adalah $(1 - 5\sqrt{3})u + (5\sqrt{3})v - 12 = 0$

Contoh 8

Tentukan persamaan kurva $4x^2 - 3xy = 18$ jika susunan koordinat di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian

Dari rumus rotasi kita mempunyai

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v$$

Dengan mensubstitusikan (x, y) di atas ke dalam persamaan $4x^2 - 3xy = 18$ kita memperoleh

$$4\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right) = 18$$

$$4\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right) - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right) = 18$$

$$(2u^2 - 2uv - 2uv + 2v^2) - \left(\frac{3}{4}2u^2 + \frac{3}{4}2uv - \frac{3}{4}2uv - \frac{3}{4}2v^2\right) = 18$$

$$(2u^2 - 4uv + 2v^2) - \left(\frac{3}{4}2u^2 - \frac{3}{4}2v^2\right) = 18$$

$$\left(\frac{4}{2} - \frac{3}{2}\right)u^2 - 4uv + \left(\frac{4}{2} - \frac{3}{2}\right)v^2 = 18$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)u^2 - 4uv + \left(\frac{1}{2}\right)v^2 = 18$$

$$\frac{1}{2}u^2 - 4uv + \frac{1}{2}v^2 - 18 = 0$$

$$u^2 - 8uv + v^2 - 36 = 0$$

7.4. Kegiatan Pembelajaran 4 Penyederhanaan Persamaan Konik dengan Rotasi Sumbu

Perhatikan persamaan $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Dengan mensubstitusikan $x = u \cos \theta - v \sin \theta$
 $y = u \sin \theta - v \cos \theta$

Dan dengan sedikit penjabaran, bentuk persamaan kuadrat di atas menjadi

$$au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0$$

$$a = A \cos^2 \theta + \frac{1}{2} B \sin 2\theta + C \sin^2 \theta$$

$$b = -A \sin 2\theta + \frac{1}{2} B \sin 2\theta + C \sin 2\theta$$

$$\text{Dengan } c = A \sin^2 \theta + \frac{1}{2} B \sin 2\theta + C \cos^2 \theta$$

$$d = D \cos \theta + E \sin \theta$$

$$e = -D \sin \theta + E \cos \theta$$

$$f = F$$

Agar persamaan ini tidak memuat suku campuran uv maka haruslah $b = 0$
 atau $B \cos 2\theta - (A - C) \sin 2\theta = 0$

$$\text{Berarti } \cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$$

Jadi untuk melenyapkan suku campuran, kita harus memilih θ sedemikian sehingga $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$ dengan demikian $0 \leq 2\theta \leq \pi$.

Contoh 9 :

Gunakan rotasi susunan sumbu untuk tidak memuat suku campuran pada persamaan $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10\sqrt{3}x + 10y^2 = 5$

Penyelesaian :

Pada persamaan $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10\sqrt{3}x + 10y^2 = 5$

kita mempunyai $A = 4, B = 2\sqrt{3}$ dan $C = 2$

Berarti $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{4-2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Rumus rotasinya adalah

$$x = u \frac{\sqrt{3}}{2} - v \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}u - v}{2}$$

$$y = u \frac{1}{2} + v \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{u + \sqrt{3}v}{2}$$

Maka substitusikan nilai x dan y ke $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10\sqrt{3}x + 10y^2 = 5$ persamaan menjadi

$$4 \frac{(\sqrt{3}u - v)^2}{4} + 2\sqrt{3} \left(\frac{(2\sqrt{3} - v)(u + \sqrt{3}v)}{4} \right) + 2 \left(\frac{u + \sqrt{3}v}{4} \right)^2$$

$$+ 10\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}u - v}{2} \right) + 10 \left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2} \right)^2 = 5$$

Dan setelah disederhanakan, menjadi $5u^2 + v^2 + 20u = 5$

Untuk membuat persamaan ini dalam bentuk kuadratnya.

$$5(u^2 + 4u + 4) + v^2 = 5 + 20$$

$$\frac{(u + 2)^2}{5} + \frac{v^2}{25} = 1$$

Contoh 10 :

Gunakan rotasi dan translasi susunan sumbu untuk menghilangkan suku-suku berderajat 1 $4x^2 + 9y^2 + 8x - 90y + 193 = 0$

Penyelesaian :

$$4(x^2 + 2x) + 9(y^2 + 10y) = -193$$

$$4(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 10y + 25) = -193 + 4 + 225$$

$$4(x + 1)^2 + 9(y - 5)^2 = 36$$

$$\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 5)^2}{4}$$

Translasi $u = x + 1$ dan $v = y -$

5 mentransormasikan ini menjadi

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} =$$

7.5. Rangkuman

1. Misalnya titik awal baru O' yang berkoordinat (p_1, p_2) terhadap sistem koordinat lama. Suatu titik $P(x, y)$ terhadap koordinat lama, akan mempunyai koordinata (x', y') terhadap sistem koordinat baru, dengan hubungan

$$\begin{aligned}x &= x' + p_1 \\y &= y' + p_2\end{aligned}$$

2. Translasi susunan sumbu dapat menghilangkan bagian linear dari persamaan

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Titik asal susunan sumbu baru akan menjadi pusat irisan kerucut tersebut.

3. Misalkan susunan sumbu lama dirotasikan sejauh θ maka hubungan antara koordinat suatu titik pada sumbu baru (u, v) dengan koordinat titik pada susunan sumbu lama (x, y) adalah

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\y &= u \sin \theta + v \cos \theta\end{aligned}$$

4. Rotasi susunan sumbu dapat menghilangkan suku campuran dari persamaan $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ dengan mengambil sudut rotasi memilih θ sedemikian sehingga $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$ dengan demikian $0 \leq 2\theta \leq \pi$.

7.6. Kegiatan Pembelajaran 5 Soal Diskusi Kelompok

1. Tentukanlah koordinat titik $A(1,2)$ dalam susunan koordinat yang baru jika koordinat lama yaitu $(2,1)$.

Penyelesaian

Hubungan koordinat lama dan baru

$$x = 2 + u$$

$$y = 1 + v$$

dengan demikian koordinat titik $A(1,2)$ dalam susunan koordinat yang baru adalah

$$\dots = \dots + u$$

$$u = -\dots$$

$$\dots = \dots + v$$

$$v = \dots$$

$$(-\dots, \dots)$$

2. Tentukanlah koordinat titik $A(3,3)$ dalam susunan koordinat yang baru jika koordinat lama yaitu $(-1,1)$.

Penyelesaian

Hubungan koordinat lama dan baru

$$x = -1 + u$$

$$y = 1 + v$$

dengan demikian koordinat titik $A(3,3)$ dalam susunan koordinat yang baru adalah

$$\dots = -\dots + u$$

$$u = \dots$$

$$\dots = 1 + v$$

$$v = \dots$$

$$(\dots, \dots)$$

3. Tentukanlah koordinat titik $A(-2,-3)$ dalam susunan koordinat yang baru jika koordinat lama yaitu $(1,1)$.

Penyelesaian

Hubungan koordinat lama dan baru

$$x = 1 + u$$

$$y = 1 + v$$

dengan demikian koordinat titik $A(-2,-3)$ dalam susunan koordinat yang baru adalah

$$\begin{aligned}
 -\dots &= -\dots + u \\
 u &= -\dots \\
 -\dots &= \dots + v \\
 v &= -\dots \\
 &(-\dots, -\dots)
 \end{aligned}$$

4. Tentukanlah koordinat titik $A(1, -3)$ dalam susunan koordinat yang baru jika koordinat lama yaitu $(-2, -4)$.

Penyelesaian

Hubungan koordinat lama dan baru

$$\begin{aligned}
 x &= -2 + u \\
 y &= -4 + v
 \end{aligned}$$

dengan demikian koordinat titik $A(-2, -3)$ dalam susunan koordinat yang baru adalah

$$\begin{aligned}
 \dots &= -\dots + u \\
 u &= \dots \\
 -\dots &= -4 + v \\
 v &= \dots \\
 &(\dots, \dots)
 \end{aligned}$$

5. Tentukan persamaan garis $2x - y = 4$ terhadap koordinat baru setelah diadakan translasi sumbu sehingga koordinat titik asal yang baru dalam koordinat lama adalah $(2,2)$

Penyelesaian:

Hubungan antara koordinat lama dan baru adalah

$$\begin{aligned}
 x &= 2 + u \\
 y &= 2 + v
 \end{aligned}$$

Substitusikan ke persamaan garis

$$\begin{aligned}
 \dots x - y &= \dots \\
 \dots (\dots + u) - \dots (\dots + v) &= \dots \\
 \dots u - v + \dots - \dots &= \dots \\
 \dots u - v &= \dots
 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis dalam susunan sumbu yang baru adalah

$$\dots u - v = \dots$$

6. Tentukan persamaan garis $4x - 2y = 21$ terhadap koordinat baru setelah diadakan translasi sumbu sehingga koordinat titik asal yang baru dalam koordinat lama adalah (5,7)

Penyelesaian:

Hubungan antara koordinat lama dan baru adalah

$$x = 5 + u$$

$$y = 7 + v$$

Substitusikan ke persamaan garis

$$\dots x - \dots y = \dots$$

$$\dots (\dots + u) - \dots (\dots + v) = \dots$$

$$\dots u - \dots v + \dots - \dots = \dots$$

$$\dots u - \dots v = \dots$$

Jadi persamaan garis dalam susunan sumbu yang baru adalah

$$\dots u - \dots v = \dots$$

7. Tentukan persamaan garis $10x - 2y = 80$ terhadap koordinat baru setelah diadakan translasi sumbu sehingga koordinat titik asal yang baru dalam koordinat lama adalah (7,2)

Penyelesaian:

Hubungan antara koordinat lama dan baru adalah

$$x = 7 + u$$

$$y = 2 + v$$

Substitusikan ke persamaan garis

$$\dots x - \dots y = \dots$$

$$\dots (7 + u) - \dots (2 + v) = \dots$$

$$\dots u - \dots v + \dots - \dots = \dots$$

$$\dots u - \dots v = \dots$$

Jadi persamaan garis dalam susunan sumbu yang baru adalah

$$\dots u - \dots v = \dots$$

8. Menentukan jenis garis lengkung $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y = 1$ bila titik awal di translasikan ke (1, -1).

PenyelesaianRumus translasi: $x = x' + 1$

$$y = y' - 1$$

Kita substitusikan :

$$\dots (x' + 1)^2 + \dots (y' - 1)^2 - \dots (x' + 1) + \dots (y' - 1) = \dots$$

$$\text{Atau } x'^2 + \dots y'^2 = \dots$$

Kita sesuaikan dengan persamaan standar, menjadi $\frac{x'^2}{\dots} + \frac{y'^2}{\dots} = \dots$, suatu elips bertitik pusat di titik awal system koordinat baru yaitu $(1, -1)$, dengan setengah sumbu panjang ... dan setengah sumbu pendek $\sqrt{\dots}$.

9. Tentukan jenis garis lengkung $4x^2 - y^2 - 8x + 4y = 16$ bila titik awal di translasikan ke $(1,2)$.

PenyelesaianRumus translasi: $x = x' + 1$

$$y = y' + 2$$

Kita substitusikan :

$$\dots (x' + 1)^2 - \dots (y' + 2)^2 - \dots (x' + 1) + \dots (y' + 2) = \dots$$

$$\text{Atau } \dots x'^2 - y'^2 = \dots$$

Kita sesuaikan dengan persamaan standar, menjadi $\frac{x'^2}{\dots} - \frac{y'^2}{\dots} = \dots$, suatu elips bertitik pusat di titik awal system koordinat baru yaitu $(1,2)$, dengan setengah sumbu panjang ... dan setengah sumbu pendek

10. Tentukan suatu translasi sumbu koordinat yang mentransformasikan persamaan $2x^2 - y^2 + 4x - 6y = 50$ ke suatu bentuk standar (menghilangkan bagian linier)

PenyelesaianKita melakukan translasi $x = x' + p_1$

$$y = y' + p_2$$

Maka $:x' + p_1 y' + p_2$

$$\dots (x' + p_1)^2 - \dots (y' + p_2)^2 + \dots (x' + p_1) - \dots (y' + p_2) = 50$$

$$\dots x'^2 - y'^2 + x'(\dots + \dots p_1) + y'(\dots + \dots p_2) + p_1^2 - p_2^2 + \dots p_1 - \dots p_2 = \dots$$

Maka haruslah $(\dots + \dots p_1) = \dots$ dan $(-\dots - \dots p_2) = \dots$ atau $p_1 = -\dots$ dan $p_2 = \dots$

Persamaan menjadi $\dots x'^2 - y'^2 = \dots$

11. Tentukan persamaan garis $y = 2x - 12$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \theta$ dan $v = r \sin \theta$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian :

Dengan rumus rotasi

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u - \frac{\sqrt{2}}{2} v \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2} v \end{aligned}$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2} v &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} u - \frac{\sqrt{2}}{2} v \right) - 12 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2} v &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} u - \frac{\sqrt{2}}{2} v \right) - 12 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2} v - \frac{\sqrt{2}}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2} v + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis $y = 2x - 12$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$ adalah $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) u + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) v + 12 = 0$

12. Tentukan persamaan garis $y = 8x + 20$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$

Penyelesaian

Dengan rumus rotasi kita mempunyai

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v \\y &= u \sin \theta + v \cos \theta \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} u + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v\end{aligned}$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v &= 8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v \right) + 20 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} u + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v - 20 &= 0 \\ \dots + \sqrt{2} v - \sqrt{2} u - v - 20 &= 0\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis $y = 5x + 6$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$ adalah $(\dots - \dots \sqrt{2})u + (\dots \sqrt{2})v - 20 = 0$

13. Tentukan persamaan garis $2y = x - 5$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \theta$ dan $v = r \sin \theta$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$

Penyelesaian

Dengan rumus rotasi kita mempunyai

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v \\y &= u \sin \theta + v \cos \theta \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} u + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v\end{aligned}$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\begin{aligned}2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v - 5 \\ 4(u - \sqrt{2} v) &= \sqrt{2} u - v - 5 \\ 4(u - 4\sqrt{2} v - \sqrt{2} u + v + 5) &= 0 \\ \text{Atau} \\ (4 - \sqrt{3})u + (4\sqrt{3} + 1)v + 5 &= 0\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis $2y = x - 5$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$ adalah $(4 - \sqrt{3})u + (4\sqrt{3} + 1)v + 5 = 0$

14. Tentukan persamaan garis $x = 3y - 1$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \theta$ dan $v = r \sin \theta$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian

Dengan rumus rotasi kita mempunyai

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v \end{aligned}$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v &= 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}v\right) - 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v - \frac{3}{2}\sqrt{2}u + \frac{3}{2}v + 1 &= 0 \\ \sqrt{2}u - \sqrt{2}v - 3\sqrt{2}u + 3v + 2 &= 0 \\ &\text{atau} \\ (\sqrt{2} - 3\sqrt{2})u + (-\sqrt{2} + 3v) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis $y = 3x - 1$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$ adalah $(\sqrt{2} - 3\sqrt{2})u + (-\sqrt{2} + 3\sqrt{2})v + 2 = 0$

15. Tentukan persamaan garis $2x + 2y = 5$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \theta$ dan $v = r \sin \theta$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{3}$

Penyelesaian :

Dengan rumus rotasi kita mempunyai

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v\end{aligned}$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\begin{aligned}2\left(-u - \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right) &= 5 \\ u - \frac{\sqrt{3}}{2}v + \frac{\sqrt{3}}{2}u - v - 5 &= 0 \\ \text{atau} \\ (\dots - \dots)u - (\dots v + v) - 5 &= 0\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis $2x + 2y = 5$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{3}$ adalah $(1 - 3)u - (\sqrt{3}v + v) - 5 = 0$

16. Tentukan persamaan garis $y^2 = x + 2$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \theta$ dan $v = r \sin \theta$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$

Penyelesaian:

Dengan rumus rotasi kita mempunyai

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\end{aligned}$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan garis sehingga menjadi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) + 2 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}2uv + \frac{1}{2}v^2\right) &= \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) + 2\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}uv + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v + 2$$

Atau

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)u + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)v - 2 = 0$$

Jadi persamaan garis $2y = x - 5$ setelah susunan sumbu dirotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$ adalah

17. Tentukan persamaan kurva $4x^2 - xy = 6$ jika susunan koordinat di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian :

Dari rumus rotasi kita mempunyai

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v$$

Dengan mensubstitusikan (x, y) di atas ke dalam persamaan

$3x^2 - 2xy = 9$ kita memperoleh

$$4\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right) = 6$$

$$4\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right) = 6$$

$$(2u^2 - 2uv - 2uv + 2v^2) - \left(\frac{1}{4}2u^2 + \frac{1}{4}2uv - \frac{1}{4}2uv - \frac{1}{4}2v^2\right) = 16$$

$$(2u^2 - 4uv + 2v^2) - \left(\frac{1}{4}2u^2 - \frac{1}{4}2v^2\right) = 6$$

$$\left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\right)u^2 - 4uv + \left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\right)v^2 = 6$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)u^2 - 4uv + \left(\frac{7}{4}\right)v^2 = 6$$

$$\frac{7}{4}u^2 - 4uv + \frac{7}{4}v^2 - 6 = 0$$

$$7u^2 - 16uv + 7v^2 - 24 = 0$$

18. Tentukan persamaan kurva $2x + y^2 = 12$ jika susunan koordinat di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{3}$

Penyelesaian :

Dari rumus rotasi kita mempunyai

$$x = \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v$$

Dengan mensubstitusikan (x, y) di atas ke dalam persamaan $2x + y^2 = 12$ kita memperoleh

$$2\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{3}v\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}u + \frac{1}{2}v\right)^2 = 12$$

$$2\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{3}v\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}u - \frac{1}{2}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}u + \frac{1}{2}v\right) = 12$$

$$(u - \sqrt{3}v) + \left(\frac{1}{4}3u^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}juv - \frac{1}{4}2uv - \frac{1}{4}2v^2\right) = 16$$

$$(2u^2 - 4uv + 2v^2) - \left(\frac{1}{4}2u^2 - \frac{1}{4}2v^2\right) = 6$$

$$\left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\right)u^2 - 4uv + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{4}\right)v^2 = 6$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)u^2 - 4uv + \left(\frac{0}{4}\right)v^2 = 6$$

$$\frac{7}{4}u^2 - 4uv + \frac{0}{4}v^2 - 6 = 0$$

$$7u^2 - 16uv + 7v^2 - 24 = 0$$

19. Tentukan persamaan kurva $8x^2 - 3y = 5$ jika susunan koordinat di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian

Dari rumus rotasi kita mempunyai

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

Dengan mensubstitusikan (x, y) di atas ke dalam persamaan

$$\begin{aligned}
 8x^2 - 3y &= 5 \text{ kita memperoleh} \\
 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dots}u - \frac{1}{2}\sqrt{2}v\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dots}u + \frac{1}{2}\sqrt{\dots}v\right) &= 5 \\
 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dots}u - \frac{1}{2}\sqrt{\dots}v\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dots}u - \frac{1}{2}\sqrt{\dots}v\right) & \\
 - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{\dots}u + \frac{1}{2}\sqrt{\dots}v\right) &= 5 \\
 (\dots u^2 - \dots uv - \dots uv + \dots v^2) - \left(\frac{\dots}{\dots}\sqrt{\dots}u + \frac{\dots}{\dots}\sqrt{\dots}u\right) &= 5 \\
 (2u^2 - 4uv + 2v^2) - \left(\frac{1}{4}2u^2 - \frac{1}{4}2v^2\right) &= 5 \\
 \left(\frac{\dots}{\dots}u^2 - \frac{\dots}{\dots}u\right) - 8uv + \left(\frac{\dots}{\dots}v^2 + \frac{\dots}{\dots}v\right) &= 5 \\
 \left(\frac{\dots}{\dots}\right)u - 8uv + \left(\frac{\dots}{\dots}\sqrt{\dots}\right)2v^2 &= 5 \\
 \frac{\dots}{\dots}u^2 - 4uv + \frac{\dots}{\dots}v^2 - 5 &= 0 \\
 5\sqrt{2}u - 16uv + 11\sqrt{2}2v^2 - 10 &= 0
 \end{aligned}$$

20. Gunakan rotasi susunan sumbu untuk tidak memuat suku campuran pada persamaan $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 15x = 10$

Penyelesaian :

Pada persamaan $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 15x = 10$

kita mempunyai $A = 5, B = 2\sqrt{3}$ dan $C = 3$

Berarti $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{5-3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Rumus rotasinya adalah

$$\begin{aligned}
 x &= u \frac{\dots}{\dots}\sqrt{\dots} - v \frac{\dots}{\dots} = \frac{\sqrt{\dots}u - v}{2} \\
 y &= u \frac{1}{2} + \frac{\dots}{\dots}\sqrt{\dots}v = \frac{\dots + \sqrt{\dots}v}{2}
 \end{aligned}$$

Maka substitusikan nilai x dan y ke $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 15x = 10$

persamaan menjadi

$$5 \frac{(\sqrt{\dots} u - v)^2}{4} + 2\sqrt{3} \left(\frac{(\sqrt{\dots} - v)(u + \sqrt{\dots} v)}{4} \right) + 3 \left(\frac{\dots + \sqrt{\dots} v}{4} \right)^2 + 10 \left(\frac{\sqrt{\dots} u - v}{2} \right) = 10$$

Dan setelah disederhanakan, menjadi $\dots u^2 + \dots + \dots = \dots$

Untuk membuat persamaan ini dalam bentuk kuadratnya.

$$\dots (\dots + \dots + \dots) + \dots = \dots + \dots$$

$$\frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

7.7. Kegiatan Pembelajaran 6 Latihan Soal Tambahan

1. Disediakan suatu persamaan garis lurus $y = 3x + 5$ tentukan persamaan garis lurus yang dihasilkan oleh translasi $T = (2,1)$
2. Tentukanlah koordinat titik $A(1,1)$ dalam susunan koordinat yang baru jika koordinat lama yaitu $(2,2)$.
3. Tentukanlah koordinat titik $A(2,4)$ dalam susunan koordinat yang baru jika koordinat lama yaitu $(1,2)$.
4. Tentukanlah koordinat titik $A(4,3)$ dalam susunan koordinat yang baru jika koordinat lama yaitu $(-4, -2)$.
5. Tentukan persamaan garis $5x + 2y = 35$ terhadap koordinat baru setelah diadakan translasi sumbu sehingga koordinat titik asal yang baru dalam koordinat lama adalah $(3,4)$
6. Tentukan persamaan garis $3x + 5y = 50$ terhadap koordinat baru setelah diadakan translasi sumbu sehingga koordinat titik asal yang baru dalam koordinat lama adalah $(5, -1)$
7. Tentukan persamaan garis $7x + 2y = 50$ terhadap koordinat baru setelah diadakan translasi sumbu sehingga koordinat titik asal yang baru dalam koordinat lama adalah $(-2,7)$
8. Tentukan jenis garis lengkung $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 40$ bila titik awal di translasikan ke $(2,2)$.
9. Tentukan jenis garis lengkung $x^2 + 2y^2 - 8x + 8y = 28$ bila titik awal di translasikan ke $(4,2)$.
10. Tentukan suatu translasi sumbu koordinat yang mentransformasikan persamaan $2x^2 - 4y^2 - 12x - 16y = 10$ ke suatu bentuk standar (menghilangkan bagian linier)
11. Tentukan persamaan garis $y = 7x - 12$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$
12. Tentukan persamaan garis $y = 3x - 5$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{3}$

13. Tentukan persamaan garis $2y = x - 9$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$
14. Tentukan persamaan garis $y^2 = 5x + 10$ setelah susunan sumbu dirotasikan $u = r \cos \varphi$ dan $v = r \sin \varphi$ di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{4}$
15. Tentukan persamaan kurva $x - 3y = 10$ jika susunan koordinat di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{6}$
16. Tentukan persamaan kurva $x^2 + 5y = 15$ jika susunan koordinat di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{3}$
17. Tentukan persamaan kurva $x^2 + y^2 = 18$ jika susunan koordinat di rotasikan sejauh $\theta = \frac{\pi}{3}$
18. Gunakan rotasi susunan sumbu untuk tidak memuat suku campuran pada persamaan $3x + xy + 2y^2 - 12 = 0$
19. Gunakan rotasi susunan sumbu untuk tidak memuat suku campuran pada persamaan $4x^2 + 6xy + 7y^2 - 32 = 0$
20. Gunakan rotasi susunan sumbu untuk tidak memuat suku campuran pada persamaan $2x^2 + 5xy + 8y^2 = 40$