BMP.UKI:JHS-O1-PML 1-PM-I-2020

BUKU MATERI PEMBELAJARAN
PEMOGRAMAN LINEAR

Disusun Oleh :
Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd

Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Indonesia
2020

KATA PENGANTAR

Mengucap syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena pertolongan-Nya saya dapat menyelesaikan Buku Materi Pembelajaran "Pemograman Linear". Meskipun banyak rintangan dan hambatan dalam proses pembuatan Buku Materi Pembelajaran ini, tetapi Puji Tuhan di dalam pembuatan Buku Materi Pembelajaran ini saya berhasil menyelesaikannya dengan baik.

Adapun tujuan penyusunan ini adalah untuk memenuhi kebutuhan dasar pembaca dan mahasiswa. Penyusunan Buku Materi Pembelajaran ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penulis menyadari bahwa Buku Materi Pembelajaran ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan Buku Materi Pembelajaran ini. Semoga Buku Materi Pembelajaran ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya mahasiswa. Akhir kata saya ucapkan terimakasih dan salam buat kita semua.

Jakarta, 20 Februari 2020

Jitu Halomoan Lumban toruan, S.Pd., M.Pd

Petunjuk Penggunaan Buku Materi Pembelajaran

Penjelasan Bagi Mahasiswa

1. Bacalah Buku Materi Pembelajaran ini dengan seksama mulai dari kata pengantar sampai dengan latihan soal, kemudian pahami seluruh materi yang termuat di dalamnya.
2. Bacalah dengan seksama tujuan akhir antara untuk mengetahui apa yang akan diperoleh setelah mempelajari materi ini.
3. Buku Materi Pembelajaran ini memuat informasi tentang apa yang harus Anda lakukan untuk mencapai tujuan antara pembelajaran.
4. Pelajari dengan seksama materi tiap kegiatan belajar, jika ada informasi yang kurang jelas atau mengalami kesulitan dalam mempelajari setiap materi, sebaiknya berkonsultasi pada pengajar.
5. Perhatikan langkah-langkah dalam melakukan pekerjaan dengan benar untuk mempermudah dalam memahami suatu proses pekerjaan.
6. Kerjakan soal-soal dalam cek kemampuan untuk mengukur sampai sejauh mana pengetahuan yang telah Anda miliki.
7. Selesaikan semua latihan soal yang terdapat di dalam modul ini agar pemahaman anda berkembang dengan baik.
8. Setiap mempelajari satu sub kompetensi, anda harus mulai dari menguasai pengertian-pengertian dalam uraian materi, melaksanakan tugas-tugas dan mengerjakan latihan soal.
9. Dalam menyelesaikan latihan soal, anda tidak diperkenankan berdiskusi dengan teman anda sebelum selesai mengerjakan latihan soal dan diskusi kelompok.
10. Membahas hasil pekerjaan anda dengan teman sekelas dalam bentuk kelompok dan kerjakan soal diskusi kelompok.

Kontrak Perkuliahan Pemograman Linear

Dengan ini kami bersepakat bahwa;

1. Batas keterlambatan masuk kuliah adalah 15 menit, jika **mahasiswa** terlambat maka mahasiswa diperkenankan masuk kelas namun **TIDAK** dapat mengisi presensi kuliah. Sebaliknya, jika **dosen** terlambat 15 menit maka seluruh mahasiswa boleh mengisi presensi kuliah. Selanjutnya, apabila keterlambatan lebih dari 15 menit maka dosen akan memberikan tugas mandiri dan mahasiswa mengisi presensi kuliah (presensi kuliah tidak berlaku bagi mahasiswa yang tidak hadir).
2. Apabila mahasiswa dan dosen tidak dapat hadir (karena sakit, ijin, atau keperluan tertentu), maka yang bersangkutan WAJIB memberikan informasi satu hari sebelumnya kepada dosen pengampu mata kuliah (Jitu Halomoan Lumbantoruan, M.Pd (081219553697))

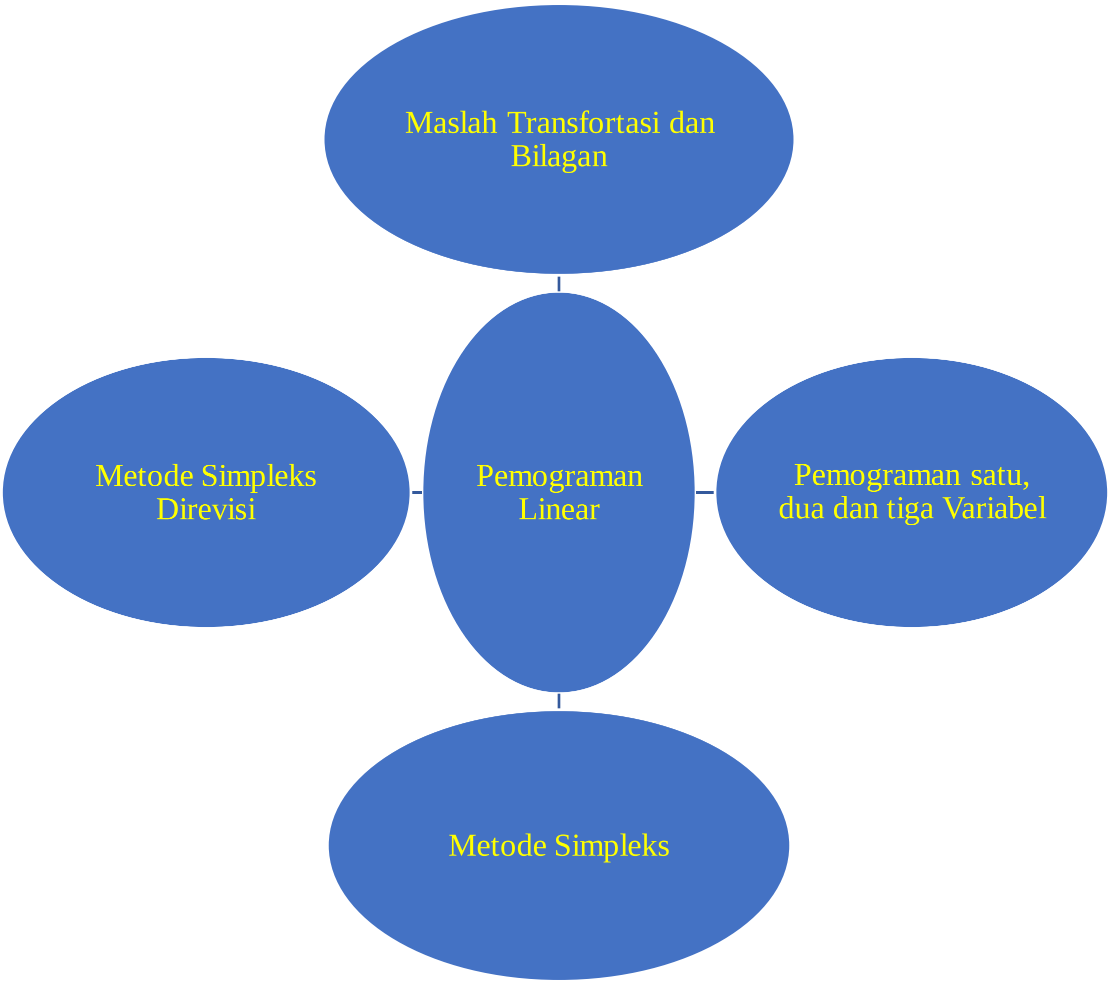
   Catatan: apabila sakit (sertakan surat dari dokter) dan jika izin (sertakan surat dari orangtua/lembaga).

   1) Mahasiswa **TIDAK DIPERKENANKAN** untuk memakai kaos dan blus (oblong atau berkerah) dan harus menggunakan kemeja dan celana bahan/rok (untuk wanita).
   2) Pengumpulan tugas harus tepat waktu sesuai dengan arahan dosen. Apabila ada tugas mandiri dan kelompok yang diberikan dosen kepada mahasiswa, maka dosen ybs akan mengirimkannya kepada ketua kelas *(Kaleb,Yemima@gmail.com* kesepakatan ini kami buat, semoga kami melakukannya dengan baik tanpa ada paksaan dari pihak manapun. Tuhan memberkati.

Mengetahui,	Jakarta, 03 Maret 2020
Kaprodi Pendidikan Matematika	Dosen Pengampu,
Stevi Natalia, M.Pd.	Jitu Halomoan L, M.Pd

Peta Kompetensi Mata Pemograman Linear

Pemograman Linear



DAFTAR ISI

Kata Pengantar i
Petunjuk Penggunaan Buku Pembelajaran (BMP) ii
Kontrak Perkuliah Teori Peluang...................................... iii
Peta Konsep iv
Daftar Isi v
Capaian Perkuliahan... viii
Rencana Pembelajaran (RPS) xi

MODUL 1 PENDAHULUAN PEMOGRAMAN LINEAR....1
1.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Sejarah dan Perkembangan 1
1.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Diskripsi Pemograman Linear ..6
1.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Karesteristik 10
1.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Contoh Pemograman Linear ...12
1.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Rangkuman 23
1.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Diskusi Kelompok 24
1.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Soal Latihan 33

MODUL 2 SISTEM PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAN
2.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Persamaan Linear....................37
2.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Sistem Persamaan 37
2.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Persamaan satu Variabel 44
2.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Persamaan Dua Variabel 44
2.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Persamaan Tiga Variabel 45
2.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Pertidaksamaan Linear 46
2.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Pertidaksaman Satu Variabel...47
2.8 Kegiatan Pembelajaran 8. Pertidaksaman Dua Variabel ...48
2.9 Kegiatan Pembelajaran 9. Pertidaksaman Satu Variabel…49
2.10 Kegiatan Pembelajaran 10. Rangkuman.......................….50
2.11 Kegiatan Pembelajaran 11. Soal Diskusi Kelompok.........52
2.12 Kegiatan Pembelajaran 12. Soal Latihan Mandiri 55

MODUL 3 PROGRAM SATU, DUA DAN TIGA VARIABEL
3.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Defenisi Program linear 58
3.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Metode Aljabar dan Grafik 64
3.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Aplikasi Program Linear 77

3.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Rangkuman....81
3.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Diskusi....83
3.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Latihan Mandiri....97

MODUL 4 METODE SIMPLEKS
4.1 Kegiatan Pembelajaran 1.Defenisi Metode Simpleks....102
4.2 Kegiatan Pembelajaran 2.Jenis Metode Simpleks....103
4.3 Kegiatan Pembelajaran 3.Rangkuman....126
4.4 Kegiatan Pembelajaran 4.Saol Diskusi Kelompok....127
4.5 Kegiatan Pembelajaran 5.Soal Latihan Mandiri....146

MODUL 5 METODE SIMPLEKS REVISI
5.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Metode simpleks Revisi....149
5.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Prosedur kerja Simpleks....151
5.3 Kegiatan Pembelajaran 3 Metode Simpleks Dua Fase....164
5.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Rangkuman....204
5.5 Kegiatan Pembelajaran 5 Soal Diskusi Kelompok....207
5.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Mandiri....225

MODUL 6 MASLAH TRANSFORTASI
6.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Masalah Transfortasi....229
6.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Pengertian Transfortasi....233
6.3 Kegiatan Pembelajaran 3.Penyelesaian awal masalah....235
6.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Hasil Optimal....246
6.5 Kegiatan Pembelajaran 5 PQM-QM Transportasi....255
6.6 Kegiatan Pembelajaran 6 Excel Solver dalam Masalah....263
6.7 Kegiatan Pembelajaran 7 Rangkuman....274
6.8 Kegiatan Pembelajaran 8 Soal Latihan Mandiri....276

MODUL 7 PENUGASAN PLN
7.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Penugasan Pertama....283
7.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Seimbang Algoritma Hongaria....285
7.3 Kegiatan Pembelajaran 3.Penugasan kasus maksimal....289
7.4 Kegiatan Pembelajaran 4.Penugasan Tidak seimbang....295
7.5 Kegiatan Pembelajaran 5.Penugasan Excel....299
7.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Rangkuman....300
7.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Diskusi Kelompok....301
7.8 Kegiatan Pembelajaran 8 Soal Mandiri....307

MODUL 8 PROGRAM LINEAR BILAGAN BULAT

8.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Program Linier Bilangan Bulat . 322
8.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Metode Cutting Plane 322
8.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Metode Branch and Bound....... 332
8.4 Kegiatan Pembelajaran 4 Rangkuman 347
8.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Diskusi Kelompok 349
8.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Latihan Mandiri 372

Daftar pustaka. 378

Daftar Wirayat Hidup 379

MODUL 1
PENDAHULUAN PEMOGRAMAN LINEAR

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mahasiswa diharapkan Mampu memahami sejarah dan perkembangan pemograman linear secara berkelanjutan, serta mampu menjelaskan contoh yang linear dengan pemograman	1. Sejarah dan pengembangan program linear 2. Pengertian program linear 3. Karakteristik program linear 4. Pemecahan masalah program linear berdasarkan karakteristik program linear

Tujuan Pembelajaran

1. Mampu mengetahui sejarah dan pengembangan program linear
2. Mampu memahami pengertian program linear
3. Mampu mengetahui karakteristik program linear
4. Mampu memahami karakteristik program linear
5. Mampu memahami cara pemecahan masalah program linear berdasarkan karakteristiknya
6. Mampu menyelesaikan soal diskusi berdasarkan karakteristik program linear
7. Mampu menyelesaikan soal latihan mandiri berdasarkan karakteristik program linear

MODUL 1
PENDAHULUAN PEMOGRAMAN LINEAR

1.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Sejarah dan Perkembangan Program Linear

Pada masa Perang Dunia Kedua program linear mulai gencar dikembangkan untuk berbagai hal yang berkaitan dengan menemukan strategi yang paling optimal dalam usaha memimpin perang. Barulah setelah PD II usai, para ilmuan mencari penggunaan program linear yang lebih luas dalam dunia industri, komersial, dan pelayanan pembangunan, belakangan di pakai dalam level lokal ataupun nasional. Metode tersebut merupakan bagian dalam memformulasikan dan menyelesaikan beberapan masalah yang menyangkut penggunaan yang efisien dari sumber-sumber terbatas. Hingga kini penemu konsep program linear biasanya di sematkan pada Dantzing.

Awal ditemuannya program linear

Pada tahun 1947, saat itu masa perang dunia kedua, seorang penasehat kematematika di Angkatan Udara Amerika Serikat yang bernama George B. Dantzing, dimana beliau telah mengemukakan permasalahan program linear untuk pertama kalinya. Walaupun sebelumnya seorang ekonomi asal Uni Soviet yaitu L. V. Kantorovich pernah menyelesaikan dan memformulasikan permasalahan ekonomi di organisasinya pada tahun 1939, namun *paper* dan pekerjaan Kantorovich tidak pernah terungkap hingga 1959.

Dikarena Dantzing berasal dari angkatan udara yang seringkali dikaitkan dengan berbagai misi dan program, maka *paper* pertama Dantzing berjudul "*programming in a linear structure*" atau dapat diartikan dengan pemograman dalam struktur linear. Sebutan pemograman linear pertama kali diberikan oleh pihak ekonom sekaligus matematikawan T. C. Koopmans tahun 1948. Selanjutnya, tahun 1949 Dantzing mempublikasikan "metode simpleks" untuk menyelesaikan masalah program linear, dan sejak itulah berbagai kontribusi permasalahan program linear banyak bermuncul. Sejak ditemukan dimasa perang dunia kedua, penemuan dan pengembangan oleh beberapa para ilmuan matematika tersebut rata-rata di dasarkan karena adnya persoalan atau sebuah masalah yang sesdang berkembang saat itu, yaitu dalam sebuah industri dan peperangan. Adapun beberapa para ilmuan matematika tersebut yaitu V. Kantorovich, George B. Dantzing, Jhon von Neumann, Leonid Khachiyan, dan Naranda Karmarkar. Berikut ini adapun pemaparan sejarah para penemuan program linear oleh para ilmuan matematika antara lain:

1.1.1 Leonid Vitaliyevich Kantorovich

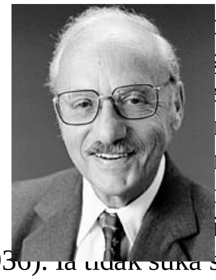
Leonid Vitaliyevich Kantorovich

Leonid Vitaliyevich Kantorovich lahir pada Januari tahun 1912 di kota Leningrand, Rusia. Leonid tumbuh menjadi seorang anak dengan rasa keingintahuan yang sangat besar, ia tertarik dengan politik dan sejarah modern. Pada usianya yang baru 14 tahun, ia sudah masuk ke Mathematical. Kantorovich Departement of the Leningrad University dan mulai menyadari bahwa ia berminat pada ilmu pengetahuan dan matematika. Pada tahun keduanya di universitas, Leonid sudah mengungguli teman-temannya di bidang matematika, bahkan ia sudah menguasai matematika kompleks dan absrak di usisannya yang ke 18 tahun ia sudah menjadi seorang penulis di bidang matematika.

Setelah lulus, Leonid terus melanjutkan penelitiannya di bidang matematika teoritis, tetapi seiring berjalannya waktu ia memindahkan konsentrasinya pada matematika terapan. Pada akhirnya kontribusi Leonid adalah pada matematika ekonomi. Pada masa itu Uni Soviet sedang menghadapi masa industrialisasi di bawah wewenang Joseph Stalin, dimana perekonomian yang semuka terpusat pada pertanian berubah menjadi berubah menjadi industri. Keadaan seperti inilah yang membuat Leonid menemukan masalah di tempat ia bekerja, yaitu sebagai konsultan laboratorium pemerintah. Persoalan tersebut berkaitan dengan kegiatan produksi. Pada awalnya masalah ini dinilai sederhana, hanya sebuah kasus diferensial, tetapi ternyata lebih rumit dari kelihatannya. Inilah hal yang menjadi awal keinginan Leonid untum menggunakan matematika sebagai aplikasi untuk ekonomi. Akhirnya pada tahun 1939, Leonid mengajukan sebuah hasil pemikirannya berdasarkan masalah yang ada dan perencanaan solusinya, ternyata hasil pemikirannya ini adalah yang kita kenal sekarang sebagai program linear. Pemikirannya tersebut pada awalnya di ragukan oleh banyak orang, tetapi dengan cepat terbukti ketika ia menghitung jumlah maksimum sebuah pabrik harus memakai baja agar biaya produksi tetap efisien, dan ternyata pemikirannya tersebut terbukti biaya produksi dapat diefisienkan secara signitifikan. Penemuan Leonid mengantarkan era baru bagi perekonomian bagi Uni Soviet. Hal ini menimbulkan minat yang besar bagi Uni Soviet dalam matematika terapan..

1.1.2 George Bernard Dantzing

George Bernard Dantzing



orge Bernard Dantzing lahir pada ggal 8 November 1914 di Porland, egon, Amerika Serikat. Ayahnya rang profesor matematika dan ibunya rang ahli bahasa Slavia. Dantzing ndapatkan gelar sarjananya di iversity of Maryland (1936). Ia tidak suka semua mata kuliah matematika yang ia ambil di sana karena ia tidak melihat aplikasi dari semua itu. Tahun berikutnya ia mengambil program pasca sarjana di Mathematics School of the Univerity Of Michigan. Selain mata kuliah *statistic*, ia tetap tidak melihat semua mata kuliah matematikanya terlalu abstrak maka ia meninggalkan sekolahnya dan mencari pekerjaan dan bekerja di Biro Tenaga Kerja, dua tahun kemudian ia berkuliah di Berkeley untuk mengambil doktor dalam bidang statistika dan mendapatkan gelar doctor (1947), kemudian bergabung di Angkatan udara Amerika Sebagai penasehat matematika untuk pusat kontrol angkatan udara.

Angkatan udara membutuhkan cara cepat untuk menghitung durasi tahapan program, latihan, dan distribusi logistik. Berasal dari sinilah pemikiran Dantzing tentang program linear.

Jhon Von Neuman, Leonid Khachiyan, dan Naranda Karmarkar mengembangkan program-program linear untuk masalah yang lebih rumit pada tahun-tahun berikutnya sampai di temukannya metode grafik.

Model program ini dikembangkan dalam tiga tahap yaitu pada tahun 1939-1947. Pertama kali telah dikembangkan oleh Leonid Vitaliyevich Kantorovich, ahli matematika Rusia yang memperoleh Soviet Government's Lenin Prize pada tahun 1965 dan The Order of Lenin pada tahun 1967; kedua, oleh Tjalling Charles Koopmans, ahli ekonomi dari belanda yang memulai karir intelektualnya sebagai fisikawan yamg melontarkan teori kuantum mekanik; dan yang ketiga, George Bernard yang mengembangkan algoritma simpleks.

Pada tahun 1930, Kantorovich dihadapkan pada kasus nyata optimisasi sumber-sumber yang tersedia di pabrik. Dia mengembangkan sebuah analisis baru yang akan dinamakan dengan program linear. Kemudian pada tahun 1939, Kantorovich menulis buku yang berjudul "*The Mathematical Method of Production Planning and Organization*", dimana Kantorovich menunjukkan bahwa seluruh masalah ekonomi dapat dilihat sebagai usaha untuk memaksimumkan suatu fungsi terhadap kendala-kendala. Pada saat kuliah Kantorovich menerima hadiah Nobel, 11 Desember 1975, adalah *Mathematics in Economic Achievenments, Difficulties, Perspectives*.

Di sisi lain juga Koopmans sejak awal sudah bergelut dengan ekonomi dan ekonometri. Dia mengembangkan teknik activity analysis yang sekarang dikenal dengan program linear. Namun demikian, juga ada nama-nama lain yang berperan dalam pengembangan model ini, yaitu Jhon Von Neuman. Bahkan dia mengembangkan "*activity analiysis of production set*" sebelum dilanjutkan oleh koopmans. Pada saat itu, teknik yang mereka kembangkan di kenal dengan istilah "*programming of interdependent activities in a linear structure*". Istilah linear diusulkan oleh Koopmans ketika mengunjungi Dantzing di RAND Corporation pada tahun 1948 sehingga sampai sekarang istilah ini menjadi populer.

1.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Deskripsi dan Pengertian Program Linear

Riset operasi merupakan beberapa metode ilmiah yang membantu memecahkan persoalan rumit yang muncul di dalam kehidupan sehari-hari kemudian diinterprestasikan dalam permodelan matematika berguna untuk mendapatkan informasi solusi yang optima. Riset opersi juga banyak digunakan untuk mengambil keputusan yang logis serta dapat dijelaskan secara kuantitatif. Pendekatan khusus ini bertujuan untuk membentuk suatu metode ilmiah dari sistem menggabungkan ukuran-ukuran faktor, seperti kesempatan dan risiko untuk meramalkan dan membandingkan hasil-hasil dari beberapa keputusan strategi, atau pengawasan. Karena keputusan dalam riset operasi dapat berkaitan dengan biaya yang relevan, dimana semua biaya yang terkait dengan keputusan itu harus dimasukkan, kualitas baik dipengaruhi oleh desain produk atau cara produk dibuat, kehandalan dalalm suplai barang dan jasa, kemampuan operasi untuk membuat perubahan dalam desain produk atau kapasitas produksi untuk menyesuaikan diri terhadap perubahan yang terjadi.

Program linear secara umum adalah salah satu teknik menyelesaikan riset operasi, dalam hal ini program linear digunakan untuk menyelesaikan masala-masalah khusus mengenai optimasi (memaksimalkan atau meminimumkan), tetapi hanya terbatas pada masalah-masalah yang dapat diubah menjadi fungsi linear. Secara khusus, persoalan program linear merupakan suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel, sehingga nilai fungsi tujuan atau objektif yang linier menjadi optimum (memaksimalkan atau meminimumkan) dengan memperhatikan adanya kendala yang ada, yaitu kendala yang harus dinyatakan dalam bentuk ketidaksamaan yang linier. Banyak sekali keputusan utama yang dihadapi oleh seorang meneger perusahaan untuk mencapai tujuan perusahaan dengan batasan situasi lingkungan operasi. Pembatasan tersebut meliputi sumber daya, misalnya waktu, tenaga kerja, energi, bahan baku, atau uang. Secara umum, tujuan umum perusahaan yang sering terjadi adalah sedapat mungkin untum memaksimalkan laba. Tujuan dari unit organisasi lain yang merupakan bagian dari suatu organisasi biasanya meminimalkan biaya. Saat meneger berusaha untuk menyelesaikan masalah dengan mencari tujuan yang dibatasi oleh batasan-batasan tersebut, teknik sains manajemen berupa program linear yang sering digunakan untuk permasalahan ini.

Pengertian Program Linear

Secara harfiah program linear adalah metode optimasi untuk menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan linier pada kondisi pembatasan-pembatasan (*constraints*) tertentu.

Persoalan program linear dapat ditemukan pada berbagai bidang dan dapat digunakan untuk membantu membuat keputusan, memilih suatu alternatif yang paling tepat. Aplikasi program linier misalnya untuk keperluan: perencanaan produksi, produksi campuran, penjadwalan, relokasi sumber daya, masalah trasnportasi, dan lain-lain.

Pengertian program linier menurut para ahli:

1. Menurut Jhannes Suprapto,1987 bahwa program linear merupakan Memilih keputusan berarti memilih alternatif, tetapi yang terpentig adalah mengambil alternatif terbaik (*the best alternative*)
2. Menurut Hari Purnomo, pokok pikiran utama dalam menggunakan program linear adalah merumuskan masalah dengan menggunakan sejumlah informasi yang tersedia, kemudian menerjemahkan maslah tersebut

dalam bentuk model matematika. Sifat linier mempunyai arti bahwa seluruh fungsi dalam model ini merupakan fungsi yang linier

3. Program linier merupakan pengembangan lebih lanjut dari konsep-konsep aljabar linier. Model ini dikembangka oleh George B. Dantzing (AS) pada tahun 1947
4. Menurut Wikipedia, *linear programming* merupakan suatu model umum yang dapat digunakan dalam mengalokasikan sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Masalah tersebut timbul apabila seseorang diharuskan untuk memilih atau menentukan tingkat setiap kegiatan yang akan dilakukan, di mana masing-masing kegiatan membutuhkan sumber yang sama sedangkan jumlahnya terbatas.
5. Menurut siringoringi, *linear programming* merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan, seperti memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan biaya. Program linier banyak ditemukan dalam masalah ekonomi, industri, militer, sosial, dan lain-lain. *Linear programming* berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematika yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier. Berdasarkan pendapat beberapa para ahli diatas, *program linear*/pemograman linear, disingkat dengan kata PL, merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan yaitu memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan biaya. Program linear banyak diterapkan dalam masalah ekonomi, industri, militer, sosial, dan lain-lain. Program linear berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematika yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linear dengan beberapa kendala linier.

Program linear sering digunakan dalam mengambil keputusan untuk memecahkan masalah mengalokasikan sumber daya yang terbatas diantara berbagai kepentingan seoptimal mungkin. Program linear merupakan salah satu metode riset operasi yang memungkinkan para menejer mengambil keputusan dengan menggunakan pendekatan analisis kuantitatif. Teknik ini telah diterapkan telah diterapkan secara luas pada berbagai persoalan dalam perusahaan, untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penugasan karyawan, penggunaan mesin, distribusi dan pengangkutan, penentuan kapasitas produk, ataupun dalam penentuan portofolio invastasi.

Metode penyelesaian dalam program linier dibentuk melalui variabel yang disusun sebagai persamaan linier. Oleh berbagai analisis, maka program linier di erjemahkan ke dalam Bahasa Indonesia menjadi "pemrograman linier", "program linier", "pemrograman garisnlurus", "pemogramisasi garis lurus" atau lainnya. Sebagai alat kuantitatif untuk melakukan pemrograman, maka metode program linear juga ada kelebihan dan kekurangannya. Oleh karena itu, pembaca atau penelitiharus mampu mengidentifikasi kapan alat ini di pergunakan dan kapan tidak dipergunakan.

Program linear telah terbukti sebagai teknik dalam penyelesaian masalah tertentu yang timbul dalam operational research. Kata program linier dalam konteks ini berarti perencanaan dan memberikan petunjuk dalam pengaplikasian. Ide ini pertama kali dikembangkan pada masa perang dunia kedua yang berkaitan dengan menemukan strategi yang palig optimal untuk usaha pemimpin perang. Sejak waku itu, mereka mencari aplikasi yang lebih luas dalam dunia industri, komersial, dan pelayanan pembangunan, belakangan di pakai dalam level lokal ataupun nasional. Metode tersebut merupakan bagian dalam memformulasikan dan menyelesaikan beberapa masalah yang menyangkut penggunaan yang efisien dari sumber-sumber terbatas.

Sebagian besar masalah penting yang dihadapi oleh para pembuat keputusan adalah hal yang menyangkut alokasi sumber-sumber terbatas untuk mendapatkan hasil yang paling menguntungkan dari sumber-sumber tersebut. Misalnya, seseorang kandidat politik harus mengalokasikan waktu dan uangnya secara efesien untuk mempengaruhi para pemilih dengan penampilan persoalan dan berbagai metode iklan. Program linear digunakan perusahaan atau organisasi untuk merencanakan strategi yang dapat mengoptimalkan hasil yang ingin dicapai, baik itu berupa keuntungan maksimal atau biaya minimal. Pada dasarnya, setiap perusahaan memiliki keterbatasan atas sumber dayanya, baik keterbatasan dalam jumlah bahan baku, mesin dan peralatan, ruang, tenaga, kerja, maupun model. Dengan keterbatasan ini, setiap perusahaan melakukan beberapa cara untuk melakukan optimasi dengan hasil yang dicapai, program linier juga dapat digunakan untuk usaha kecil maupun individu untuk mengetahuin suatu kesimpulan tertentu. Sebagai contoh, seorang pengusaha mungkin dapat memproduksi makanan ayam semurah mungkin dengan cara memilih campuran bahan murah yang menghasilkan suatu makanan yang sesuai dengan standar gizi, atau seorang pengusaha mungkin dapat menggunakan ketersedian tanaman dan tenaga kerjanya untuk menghasilkan campuran yang menguntungkan.

1.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Karakteristik Pemograman Linear

Masalah program linier sangat penting karena dua alasan berikut. Pertama, beberapa keputusan masalah yang penting dapat diformulasikan sebagai masalah program linier. Kedua, metode pehitungannya mungkin dapat menggunakan komputer untuk menyelesaikan masalah program linier dengan ribuan variabel dan yang memuat ratusan pembatasan. Sayangnya hal tersebut secara praktitik tidak memungkinkan untuk menyelesaikan masalah program linier dan mempunyai beberapa variabel dan pembatasan.

Dalam sebuah masalah program linier, kita diharapkan mengharapkan nilai-nilai non-negatif dari variabel-variabel yang maksimum atau minimum sebuah fungsi tujuan yang linier dibawah satu atau lebih pembatasan yang berupa persamaan atau pertidaksamaan. Sebelum membahas lebih lanjut lagi mengenai program linier, ada baiknya terlebih dahuu dibahas mengenai karakteristik program linier sebagai dasar-dasar pembahasan selanjutnya. Program linier memiliki sifat linieritas, proposionalitas, aditivitas, divisibilitas, dan kepastian.

Karakteristik Program Linear

a. Sifat linieritas

Sifat ini pada suatu kasus dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa cara. Secara statistik, kita dapat memeriksa kilinieran (diagram pencar) ataupun menggunakan uji hipotesis. Secara teknis, linieritas ditunjukkan oleh adanya sifat proporsionalitas, adivitas, divisibilitas, dan kepastian fungsi tujuan dan pembatasan.

b. Sifat proporsionalitas

Sifat ini dipenuhi jika kontribusi setiap variabel pada fungsi tujuan atau penggunaan sumber daya

yang membatasi proposional terhadap level nilai variabel. Jika harga perunit produk misalnya adalah sama berapapun jumlah yang dibeli, maka sifat proposional dipenuhi. Dengan kata lain, jika pembelian dalam jumlah besar mendapatkan diskon, maka sifat proposional tidak dipenuhi.

c. Sifat aditivitas

Mengasumsikan bahwa tidak ada bentuk perkalian silang di antara berbagai aktivitas, sehingga tidak akan ditemukan bentuk perkalian silang pada model, berlaku baik bagi fungsi. Jika penggunaan sumber daya perunitnya tergantung dari jumlah yang diproduksi, maka

sifat proposionalitas tidak dipenuhi. Tujuan maupun pembatas (kendala). Sifat aditivitas dipenuhi jika fungsi tujuan merupakan penambahan langsung kontribusi masing-masing variabel keputusan. Untuk fungsi kendala, sifat aditivitas dipenuhi jika nilai kanan merupakan total penggunaan masing-masing variabel keputusan.

sehingga nilai variabel keputusan non integerdi mungkinkan.
d. Sifat kepastian menunjukkan bahwa semua parameter model berupa konstanta. Artinya, koefisien fungsi tujuan maupun fungsi pembatasan merupakan suatu nilai pasti, bukan merupakan nilai dengan peluang tertentu.

Asumsi (sifat) ini dalam dunia nyata tidak selalu dapat dipenuhi. Untuk meyakinkan dipenuhinya asumsi ini, dalam pemrograman linier diperlukan analisis sensitivitas terhadap solusi optimal yang diperoleh.

1.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Contoh Masalah Program Linear

Berikut ini terdapat kasus dengan karakteristik berbeda yang sudah diselesaikan untuk memperkaya pembaca dalam ilmu dan seni pemodelan. Pahami dan perhatikan teknik pemodelannya dengan baik.

Contoh Soal 1.4.1

Seorang pengrajin mengasilkan satu tipe meja dan satu tipe kursi. Proses yang dikerjakan hanya merakit meja dan kursi. Dibutukan waktu 2 jam untuk merakit 1 unit meja dan 30 menit untuk merakit 1 unit kursi. Perakitan dilakukan oleh 4 orang karyawan dengan waktu kerja 8 jam perhari. Pelanggan pada umumnya membeli paling banyak 4 kursi untuk 1 meja. Oleh karena itu, pengrajinan harus memproduksi kursi paling banyak empat kali dari jumlah meja. Harga jual perunit meja sebesar Rp 2 juta dan per unit kursi sebesar Rp 1,2 juta.
Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan pendapatan!

Solusi contoh soal 1.4.1:
Hal pertama yang harus dilakukan adalah mengidentifikasi tujuan, alternatif keputusan, dan sumber daya yang

membatasi. Berdasarkan informasi yang diberikan pada soal, tujuan yang ingin dicapai adalah memaksimumkan pendapatan. Alternative keputusan adalah jumlah meja dan kursi yang akan diproduksi. Sumber daya yang mematasi adalah waktu kerja karyawan dan perbandingan jumlah kursi dan meja yang harus di produksi (pangsa pasar).
Langkah berikutnya adalah memeriksa sifat proposionalitas, aditivitas, pemberian diskon, sehingga harga jual permeja maupun kursi akan sama meskipun jumlah yang dibeli semakin banyak. Hal ini menginsyaratkan bahwa total pendapatan yang diperoleh pengrajin proposional terhadap jumlah produk yang terjual. Penggunaan sumber daya yang membatasi, dalam hal ini waktu kerja karyawan dan para pangsa pasar juga proposional tehadap jumlah meja dan kursi yang diproduksi. Dengan demikian, dapat ditarik kesimpulan proporsionalotas dipenuhi. Total pendapatan pengrajin merupakan jumlah pendapat dari keseluruhan meja dan kursi yang terjual. Penggunaan sumber daya (waktu kerja karyawan dan pangsa pasar) merupakan sebuah penjumlahan yang digunakan untuk mempproduksi meja dan kursi, maka dapat di nyatakan juga sifat aditivitas dipenuhi, sifat disivibilitas dan kepastian juga terpenuhi.
Ada dua variabel keputusan dan dua sumber daya yang membatasi. Fungsi tujuan merupakan maksimisasi, karena semakin besar pendapatan maka akan semakin besar di sukai oleh para pengrajin. Fungsi kendala pertama (Batasan waktu) menggunakan pertidaksamaan ≤, karena waktu yang tersedia dapat digunakan sepenuhnya atau tidak, tapi tidak mungkin melebihi waktu yang ada. Fungsi kendala yang kedua bisa menggunakan ≤ atau ≥ tergantung dari pendefenisian variabel.

Didefinisikan:
x_1= jumlah meja yang akan diproduksi
x_2= jumlah kursi yang akan diproduksi
Model umum pemrograman linier kasus diatas adalah:

- **Fungsi kendala**
  Memaksimumkan z = 2 x_1 + 1,2 x_2

- **Kendala**

  $2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 32$

  $\frac{x_1}{x_2} \geq \frac{1}{4}$ atau $4x_1 \geq x_2$ atau $4x_1 - x_2 \geq 0$

  $x_1, x_2 \geq 0$

Setelah pemodelan masalah tersebut ke dalam bentuk matematika, masalah tersebut selanjutnya dapat diselesaikan dengan prosedur tertentu yang akan di bahas pada bab selanjutnya.

Contoh Soal 1.4.2

Seorang peternak memiliki 200 kambing yang mengkonsumsi 90 kg pakan khusus setiap harinya. Pakan tersebut disiapkan menggunakan campuran jagung dan kedelai dengan komposisi sebagai berikut:
Bahan jagung membutuhkan 0,001 kg Kalsium, 0,090 kg Protein, 0,02 kg Serat dengan biaya Rp 2.000 setiap kgnya. Dan untuk kedelai membutuhkan 0,002 kg Kalsium, 0,060 kg Protein, 0,06 kg Serat dengan biaya Rp 5.500 setiap kgnya.

Kebutuhan pakan kambing setiap harinya adalah paling banyak 1% kalsium, paling sedikit 30% protein dan paling banyak 5% serat. Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk meminimalkan biaya pembelian bahan pakan!

Solusi contoh soal 1.4.2:
Hal pertama yang harus dilakukan adalah mengidentifikasi tujuan, alternatif keputusan dansumber daya yang membatasi. Berdasarkan informasi yang diberikan pada soal, tujuan yang ingin dicapai adalah meminimumkan biaya pembelian bahan pakan. Alternatif keputusan adalah jumlah jagung dan kedelai yang akan digunakan. Sumber daya yang membatasi adalah kandungan kalsium, protein dan serat pada jagung dan kedelai, serta kebutuhan jumlah pakan per hari.

Langkah berikutnya adalah memeriksa sifat proporsionalitas, aditivitas, divisibilitas dan kepastian. Informasi di atas tidak menunjukkan adanya pemberian diskon, sehingga harga pembelian jagung dan kedelai per kg tidak berbeda meskipun pembelian dalam jumlah besar. Hal ini mengisyaratkan bahwa total biaya yang harus dikeluarkan peternak proporsional terhadap jumlah jagung dan kedelai yang dibeli. Penggunaan sumber daya yang membatasi, dalam hal ini komposisi jagung dan bungkil kedelai akan serat, proteindan kalsium proporsional terhadap jumlah jagung dan bungkil. Dengan demikian dapat dinyatakan sifat proporsionalitas dipenuhi. Total pengeluaran pembelian bahan pakan merupakan penjumlahan pengeluaran untuk jagung dan kedelai. Jumlah masing-masing serat, protein dan kalsium yang ada di pakan khusus merupakan penjumlah serat, protein dan kalsium yang ada pada jagung dan bungkil kedelai. Jumlah pakan khusus yang dihasilkan merupakan penjumlahan jagung dan kedelai yang digunakan. Dengan demikian sifat aditivitas dipenuhi. Sifat divisibilitas dan kepastian juga dipenuhi.

Dari soal diatas, solusinya adalah:

a. Tujuan: meminimalkan biaya pembelian bahan pakan.
b. Sumberdaya yang dibatasi:
   - Jumlah pakan per hari adalah 90 kg
   - Kandungan kalsium: jagung = 0,001, bungkil kedelai = 0,002 dan jumlah paling banyak kalsium sebesar 1%
   - Kandungan protein: jagung = 0,09, bungkil kedelai = 0,60 dan jumlah paling sedikit adalah 30%
   - Kandungan serat: jagung = 0,02, bungkil kedelai = 0,06 dan jumlah paling banyak serat adalah 5%
c. Alternatif keputusan adalah jumlah jagung dan bungkil kedelai yang akan digunakan
d. Model matematika:

   Kita **definisikan:**

   x_1 = jumlah jagung yang akan digunakan

   x_2 = jumlah bungkil kedelai yang akan digunakan

   Fungsi tujuan: minimumkan z = 2000 x1 + 5500 x2

Kendala:

$x_1 + x_2 = 90$

$0.001\ x_1 + 0.002\ x_2 \leq 0.9$

$0.09\ x_1 + 0.6\ x_2 \geq 27$

$0.02\ x_1 + 0.06\ x_2 \leq 4.5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Setelah pemodelan masalah tersebut ke dalam bentuk matematika, masalah tersebut selanjutnya dapat diselesaikan dengan prosedur tertentu pada bab selanjutnya.

Contoh Soal 1.4.3

Suatu bank kecil mengalokasikan dana maksimum Rp 180 juta untuk pinjaman pribadi dan pembelian mobil satu bulan kedepan. Bank mengenakan biaya suku bunga per tahun 14% untuk pinjaman pribadi dan 12% untuk pinjaman pembelian mobil. Kedua tipe pinjaman itu dikembalikan bersama dengan bunganya satu tahun kemudian. Jumlah pinjaman pembelian mobil paling tidak dua kali lipat dibandingkan pinjaman pribadi. Pengalaman sebelumnya menunjukkan bahwa 1% pinjaman pribadi merupakan kredit macet.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan pendapatan bunga dan pengembalian pinjaman!

Solusi contoh soal 1.4.3:

Hal pertama yang harus dilakukan adalah mengidentifikasi tujuan, alternatif keputusan dan sumber daya yang membatasi. Berdasarkan informasi yang diberikan pada soal, tujuan yang ingin dicapai adalah memaksimumkan pendapatan bunga dan pengembalian pinjaman. Alternatif keputusan adalah jumlah alokasi pinjaman pribadi dan pinjaman mobil. Sumber daya yang membatasi adalah jumlah alokasi anggaran untuk kredit bulan depan dan perbandingan antara jumlah kredit pribadi dan pembelian mobil.

Sifat proporsionalitas, additivitas, divisibilitas dan kepastian dipenuhi.
Ada dua variabel keputusan yaitu jumlah anggaran untuk pinjaman pribadi dan pinjaman pembelian mobil, dan dua sumber daya yang membatasi. Fungsi tujuan merupakan maksimisasi, karena semakin besar pendapatan akan semakin disukai oleh manajemen bank.

Kita **definisikan:**
x_1= jumlah anggaran untuk pinjaman pribadi
x_2= jumlah anggaran untuk pinjaman pembelian mobil.
Model umum Pemrograman Linier kasus diatas adalah:
Fungsi tujuan: Maksimumkan z = (0.14 – 0.01) x_1+ 0.12 x_2
Kendala:
$x_1 + x_2 \leq 180$
$x_2 \geq 2x_1$ atau $-2x_1 + x_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \geq 0$
Setelah pemodelan masalah tersebut ke dalam bentuk matematika, masalah tersebut selanjutnya dapat diselesaikan dengan prosedur tertentu pada bab selanjutnya.

Contoh Soal 1.4.4

Suatu pabrik perakitan radio menghasilkan dua tipe radio, yaitu HiFi-1 dan HiFi-2 pada fasilitas perakitan yang sama. Lini perakitan terdiri dari 3 stasiun kerja. Waktu perakitan masing-masing tipe pada masing-masing stasiun kerja adalah sebagai berikut:
Perakitan hifi 1 memerlukan waktu 6 menit, 5 menit dan 4 menit yg terdiri dari 3 stasiun kerja sedangkan perakitan hifi 2 memerlukan waktu 6 menit, 4 menit dan 3 menit yg terdiri dari 3 stasiun kerja.

Waktu kerja masing-masing stasiun kerja adalah 8 jam per hari. Masing-masing stasiun kerja membutuhkan perawatan harian selama 10%, 14% dan 12% dari total waktu kerja (8 jam) secara berturut-turut untuk stasiun kerja 1,2 dan 3.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan jumlah radio HiFi-1 dan HiFi-2 yang diproduksi!

Solusi contoh soal 1.4.4:
Alternatif keputusan adalah: radio tipe HiFi-1 (x_1) dan radio tipe HiFi-2 (x_2). Tujuannya adalah memaksimumkan jumlah radio HiFi-1 dan HiFi-2 yang diproduksi. Sumber daya pembatas adalah: jam kerja masing-masing stasiun kerja dikurangi dengan waktu yang dibutuhkan untuk perawatan.
Waktu produktif masing-masing stasiun kerja oleh karenanya adalah:
Stasiun 1: 480 menit – 48 menit = 432 menit
Stasiun 2: 480 menit – 67.2 menit = 412.8 menit
Stasiun 3: 480 menit – 57.6 menit = 422.4 menit.
Model umum pemrograman linier:
Maksimumkan z = $x_1 + x_2$
Kendala :
$6x_1 + 4x_2 \leq 432$
$5x_1 + 5x_2 \leq 412.8$
$4x_1 + 6x_2 \leq 422.4$
$x_1, x_2 \geq 0$
Setelah pemodelan masalah tersebut ke dalam bentuk matematika, masalah tersebut selanjutnya dapat diselesaikan dengan prosedur tertentu pada bab selanjutnya.

Contoh Soal 1.4.5

Dua produk dihasilkan menggunakan tiga mesin. Waktu masing-masing mesin yang digunakan untuk menghasilkan kedua produk dibatasi hanya 10 jam per hari. Waktu produksi dan keuntungan per unit masing-masing produk ditunjukkan table di bawah ini:
Dua produk di hasilkan menggunakan 3 mesin yaiyu mesin 1, mesin2, Dan mesin 3. Waktu produksi Dan keuntungan yang di hasilkan oleh produk 1 yaitu 10 menit mesin 1, 6 menit mesin 2, Dan 8 menit mesin 3. Sedangkan waktu

produksi Dan keuntungan yang di hasilkan produk 2 yaitu 5 menit mesin 1, 20 menit mesin 2, Dan 15 menit mesin 3.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan keuntungan!

Solusi contoh soal 1.4.5:
Alternatif keputusan adalah: produk 1 (x_1) dan produk 2 (x_2). Tujuannya adalah memaksimumkan keuntungan Sumber daya pembatas adalah: jam kerja masing-masing mesin.
Model umum pemrograman linier:
Maksimumkan z = $2x_1 + 3x_2$
Kendala:
$10\,x_1 + 5x_2 \leq 600$
$6\,x_1 + 20x_2 \leq 600$
$8\,x_1 + 15x_2 \leq 600$
$x_1, x_2 \geq 0$
Setelah pemodelan masalah tersebut ke dalam bentuk matematika, masalah tersebut selanjutnya dapat diselesaikan dengan prosedur tertentu pada bab selanjutnya.

Contoh Soal 1.4.6

Empat produk diproses secara berurutan pada 2 mesin. Waktu pemrosesan dalam jam per unit produk pada kedua mesin ditunjukkan table di bawah ini :
Empat produk di proses secara berurutan pada 2 mesin yaitu mesin 1 Dan mesin 2. Waktu pemrosesa. Dalam jam perunit produk pada mesin 1 yaitu 2 menit produk 1, 3 menit produk 2, 4 menit produk 3, Dan 2 menit produk 4. Sedangkan waktu pemrosesan dalam jam perunit produk pada mesin 2 yaitu 3 menit produk 1, 2 menit produk 2, 1 menit produk 3 Dan 2 menit produk 4.

Biaya total untuk memproduksi setiap unit produk didasarkan secara langsung pada jam mesin. Asumsikan biaya operasional per jam mesin 1 dan 2 secara berturut-turut adalah \$10 dan \$5. Waktu yang disediakan untuk memproduksi keempat produk pada mesin 1 adalah 500 jam dan mesin 2 adalah 380 jam. Harga jual per unit keempat produk secara berturut-turut adalah \$65, \$70, \$55 dan \$45. Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan keuntungan dari produksi!

Solusi contoh soal 1.4.6:

Alternatif keputusan adalah: jumlah produk 1,2,3 dan 4 yang dihasilkan. Tujuannya adalah memaksimumkan keuntungan. Perhatikan, keuntungan diperoleh dengan mengurangkan biaya dari pendapatan.

Keuntungan per unit dari produk 1:

$65 - ((10\text{x}2) + (3\text{x}5)) = 30$

Keuntungan per unit dari produk 2:

$70 - ((10\text{x}3) + (2\text{x}5)) = 30$

Keuntungan per unit dari produk 3:

$55 - ((10\text{x}4) + (1\text{x}5)) = 10$

Keuntungan per unit dari produk 4:

$45 - ((10\text{x}2) + (2\text{x}5)) = 15$

Sumber daya pembatas adalah waktu kerja yang disediakan kedua mesin.

Definisikan :

x_1 : jumlah produk 1 yang dihasilkan

x_2 : jumlah produk 2 yang dihasilkan

x_3 : jumlah produk 3 yang dihasilkan

x_4 : jumlah produk 4 yang dihasilkan

Model umum pemrograman linier :

Maksimumkan z = 30 x1 + 30x2 + 10 x3 + 15 x4

Kendala :

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 500$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Setelah pemodelan masalah tersebut ke dalam bentuk matematika, masalah tersebut selanjutnya dapat diselesaikan pada bab selanjutnya.

Contoh Soal 1.4.7

Suatu perusahaan manufaktur menghentikan produksi salah satu produk yang tidak menguntungkan. Penghentian ini menghasilkan kapasitas produksi yang menganggur (berlebih). Kelebihan kapasitas produksi ini oleh manajemen sedang dipertimbangkan untuk dialokasikan ke salah satu atau ke semua produk yang dihasilkan (produk 1,2 dan 3). Kapasitas yang tersedia pada mesin yang mungkin akan membatasi output diringkaskan pada tabel berikut :
Kapasitas produk 1 yaitu 9 jam waktu yang dibutuhkan pada tipe mesin mailing, 5 jam waktu yg di butuhkan pada mesin lathe dan 3 jam waktu yg di butuhkan pada mesin grinder dgn waktu yg tersedia 500 jam/minggu. Kapasitas yang tersedia pada produk 2 yaitu 3 jam waktu yg dibutuhkan pada mesin mailing, 4 jam waktu yg di butuhkan pada mesin lathe dan mesin grinder tidak membutuhkan kapasitas waktu dengan 350 jam/minggu. Sedangkan kapasitas yang tersedia pada produk 3 yaitu 5 jam waktu yg dibutuhkan pada mesin mailing, mesin lathe tidak membutuhkan kapasitas waktu, Dan 2 jam waktu yg dibutuhkan pada mesin grinder dengan waktu yang tersedia 150 jam/minggu.

Bagian penjualan mengindikasikan bahwa penjualan potensial untuk produk 1 dan 2 tidak akan melebihi laju produksi maksimum dan penjualan potensial untuk produk 3 adalah 20 unit per minggu. Keuntungan per unit masing-masing produk secara berturut-turut adalah $50, $20 dan $25.Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan keuntungan!

Solusi untuk contoh soal 1.4.7:
Alternatif keputusan:
Jumlah produk 1 yang dihasilkan = x_1
Jumlah produk 2 yang dihasilkan = x_2
Jumlah produk 3 yang dihasilkan = x_3
Tujuannya adalah: memaksimumkan keuntungan

Sumber daya pembatas adalah:
Jam kerja mesin milling per minggu: 500 jam
Jam kerja mesin llathe per minggu: 350 jam
Jam kerja mesin grinder per minggu: 150 jam.

Model matematikanya adalah:

Maksimumkan z = 50 x_1+ 20 x_2+ 25 x_3

Kendala:

$9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500$
$5x_1 + 4x_2 \leq 350$
$3x_1 + 2x_3 \leq 150$
$x_3 \leq 20$
$x_1, x_2, \ x_3 \geq 0$

Setelah pemodelan masalah tersebut ke dalam bentuk matematika, masalah tersebut selanjutnya dapat diselesaikan dengan prosedur tertentu yang akan di bahas pada bab selanjutnya.

1.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Rangkuman

1. Penemu konsep program linear biasanya di sematkan pada Dantzing
2. Program linear adalah salah satu teknik menyelesaikan riset operasi, dalam hal ini program linier menyelesaikan masalah-masalah yang dapat di ubah menjadi fungsi
3. Program linier memiliki sifat linieritas, proposionalitas, aditivitas, divisibilitas, dan kepastian.
4. Sifat linearitas dapat diperiksa menggunakan grafik (diagram pencar) ataupun menggunakan uji hipotesis
5. Sifat proporsionalitas dipenuhi jika kontribusi setiap variabel pada fungsi tujuan atau penggunaan sumber daya yang membatasi proposional terhadap level nilai variabel.
6. Sifat aditivitas mengasumsikan bahwa tidak ada bentuk perkalian silang di antara berbagai aktivitas, sehingga tidak akan ditemukan bentuk perkalian silang pada model.
7. dalam sembarang level fraksional, sehingga nilai variabel keputusan non integerdi mungkinkan.
8. Sifat kepastian menunjukkan bahwa semua parameter model berupa konstanta. Artinya, koefisien fungsi tujuan maupun fungsi pembatasan merupakan suatu nilai pasti, bukan merupakan nilai dengan peluang tertentu.

1.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Diskusi Kelompok

1. Sebuah toko kue akan membuat sebuah adonan martabak dengan 5 kg tepung dan 3 kg gula. Selain itu akan dibuat juga sebuah adonan kue bakpao menggunakan 4 kg tepung dan 2 kg gula. Toko memiliki persediaan sebanyak 10 kg untuk bahan adonan martabak dan 6 kg bahan untuk adonan bakpao. Jika dalam satu jam dapat dibuat 5 martabak dan 4 bakpao, formulasikan permasalahan diatas ke dalam model matematika untuk memaksimalkan waktu pembuatan!
   Penyelesaian
   $x_1 = \ldots$
   $x_2 = \ldots$
   Model umum pemograman linear:
   Memaksimumkan $z = \ldots . x_1 + \ldots x_2$
   Kendala:
   $\ldots x_1 + \ldots x_2 \leq . . .$
   $4x_1 + \ldots x_2 \leq . . .$
   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2. Ibu Rini akan membeli baju kemeja dan celana untuk dijual lagi dengan harga pembelian baju kemeja Rp 70.000,00 perpotong dan harga celana Rp 50.000,00 perpotong. Jumlah kemeja dan celana yang dibeli paling banyak 60 potong dan modal yang dimiliki sebesar Rp 20.000.000,00. Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya!
   Penyelesaian:
   x = . . .
   y = . . .
   model umum program linear :
   Memaksimumkan z = … x + . . . y
   Kendala :

$70x + \ldots y \leq 20.000.000$
$x + y \leq \ldots$
$x \geq 0, y \geq 0$

3. Ibu Sinta memiliki sebuah butik dengan persediaan 7 m kain wol dan 5 m kain satin. Dari kain tersebut akan dibuat dua model baju. Baju pertama memerlukan 4 m kain wol dan 3 m kain satin, sedangkan baju kedua memerlukan 3 m kain wol dan 2 m kain satin. Baju pertama dijual dengan harga Rp 800.000,00 dan baju kedua seharga Rp 600.000,00. Formulasikan masalah tersebut agar dicapai penjualan maksimum dari penjualan kedua baju!
Penyelesaian:
a = . . .
b = . . .
model umum program linear :
memaksimumkan $z = 4a + 6b$
Kendala:
. . . .
. . . .
$x \geq 0, y \geq 0$

4. Sebuah area parkir dengan luas $2.650 m^2$, maksimal hanya dapat ditepati 100 kendaraan yang terdiri atas mobil dan motor. Jika luas parkir motor $6\ m^2$ dan mobil $17\ m^2$, tentukanlah formulasi matematikanya agar memaksimalkan penggunaan parkiran!
Penyelesaian :
$x_1 =$ banyaknya mobil
$x_2 =$ banyaknya motor
model umum program linear :
memaksimumkan $z =$. . . .
Kendala:

$x_1 + x_2 \leq 100$
$\ldots x_1 + \ldots x_2 \leq 2650$; dapat disederhanakan $x_1 + 3x_2 \leq \ldots$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

5. Sebuah pesawat udara berkapasitas bagasi tidak lebih dari 15 kg. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 6 kg dan kelas ekonomi hanya 10 kg. Pesawat hanya dapat menampung bagasi 640 kg. Harga tiket penumpang kelas utama Rp 500.000,00 dan kelas ekonomi Rp 400.000,00. Formulasikanlah masalah tersebut agar mendapat pendapatan maksimum!
Penyelesaian :
x = . . .
y = . . .
model umum program linear :
memaksimumkan $z = 6x + 10y$
Kendala:
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. Seorang tukang jahit membuat sebuah baju dengan 3 warna yang berbeda. Komposisi warna petama terdiri dari 100 gr, warna kedua terdiri dari 130 gr, dan warna ketiga terdiri dari 200 gr. Persediaan di gudang untuk warna pertama 82 kg, warna kedua 74 kg, dan warna ketiga 90 kg. Jika harga setiap satu kilogram bahan warna pertama Rp 600.000,- warna kedua Rp 500.000,- dan warna ketiga Rp 300.000,. setiap sehari minimal dibuat 12 baju, buatlah formulasi matematikanya agar didapat pendapatan maksimum!
Penyelesaian:
a = warna pertama

b = warna kedua
c = warna ketiga
model umum program linear
memaksimumkan $z =. ..$
Kendala:
. . . .
. . . .
. . . .

7. Sebuah took furniture memproduksi 3 jenis produk yaitu lemari baju, lemari celana, dan rak sepatu yang harus di proses melalui perakitan dan finishing. Proses perakitan memakan waktu 100 jam kerja sedangkan proses finishing 90 jam kerja. Untuk menghasilkan satu lemari baju dibutuhkan 4 jam perakitan dan 2 jam finishing. Sedangkan satu rak sepatu membutuhkan 2 jam perakitan dan 4 jam finishing. Dan untuk lemari celana diperlukan 5 jam waktu perakitan daan 3 jam waktu finishing. Tentukan formulasi matematika dari masalah tersebut!
   Penyelesaian:
   $x_1 = . . .$
   $x_2 =. . .$
   $x_3 =. . .$
   model umum program linear :
   memaksimumkan $z =\ldots x_1 + 8x_2$
   Kendala:
   . . . .
   . . . .
   . . . .

8. Perusahaan tas ransel membuat 2 macam tas yaitu merk LOIS dan merk VANS. Untuk membuat tas tersebut perusahaan memiliki 3 mesin. Mesin 1 khusus untuk

memberi logo LOIS. Mesin 2 khusus untuk logo VANS dan mesin 3 untuk menjahit tas dan membuat reslenting. Setiap lusin tas merk LOIS mula-mula dikerjakan di mesin 1 selama 3 jam, kemudian tanpa melalui mesin 2 dan dikerjakan di mesin 3 selama 8 jam. Sedangkan untuk tas merk VANS tidak di proses di mesin 1, tetapi pertama kali dikerjakan dimesin 2 selama 4 jam kemudian dimesin 3 selama 7 jam. Jam kerja maksimum tiap hari untuk mesin 1 adalah 10 jam, mesin 2 adalah 13 jam, sedangkan mesin 3 adalah 35 jam. Tentukan formulasi matematika dari masalah tersebut untuk memaksimalkan waktu pembuatan tas!

penyelesaian:

x = . . .

y = . . .

model umum program linear

memaksimumkan $z = 500x + \ldots y$

kendala:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. Untuk membuat satu bungkus donat pertama diperlukan 80 gr mentega dan 70 gr tepung, sedangkan untuk membuat donat kedua diperlukan 90 gr mentega dan 50 gr tepung. Jika tersedia 4,7 kg mentega dan 4,2kg tepung.

   Formulasikanlah masalah di atas agar mendapatkan pendapatan maksimum!

   Penyelesaian:

   $x_1 = \ldots$

   $x_2 = \ldots$

   model umum program linear :

memaksimumkan $z = 60x_1 + 80x_2$
Kendala:
. . . .
. . . .
. . . .

10. Sebuah tempat parkir memiliki luas daerah parkir 2.650 m^2, luas rata-rata untuk mobil kecil $10\ m^2$ dan mobil besar $25\ m^2$. Daya tamping maksimum parkiran hanya 150 kendaraan. Biaya parkir mobil kecil Rp 2.000,00/jam dan mobil besar Rp 3.000,00/jam. Tentukan formulasi matematika dari masalah tersebut!
penyelesaian:
x = Mobil kecil
y = Mobil besar
model umum program linear
memaksimumkan $z = 2.000x + \ldots y$
kendala:
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

11. Ibu Sesil memproduksi dua jenis keripik singkong, yaitu rasa pedas dan rasa manis. Setiap kilogram keripik rasa pedas membutuhkan modal Rp 13.000,00 sedangkan keripik rasa manis membutuhkan modal Rp 15.000,00/kg. modal yang dimiliki ibu Sesil Rp 600.000,00. Tiap hari hanya bisa di produksi paling banyak 60kg. Keuntungan maksimum tiap kilogram keripik singkong rasa pedas Rp 3.500.00 dan keripik rasa manis Rp 4.000,00/kg, Tentukan formulasi matematika dari masalah tersebut!
Penyelesaian:

$x_1 = ...$
$x_2 = ...$
model umum program linear :
memaksimumkan $z = 3.000x_1 + ... x_2$
Kendala:
. . . .
. . . .
. . . .

12. Suatu perusahaan memproduksi meja dengan 2 warna yang dikerjakan dengan dua mesin. Produksi meja warna merah dikerjakan dengan mesin pertama selama 4 jam dan mesin kedua selama 2 jam. Produksi meja warna biru dikerjakan dengan mesin pertama selama 5 jam dan mesin kedua selama 6 jam. Waktu kerja mesin pertama dan kedua berturut-turut adalah 15 jam/hari dan 16 jam/hari. Keuntungan maksimum penjualan produk meja warna merah sebesar Rp 50.000,00/unit dan meja warna biru Rp 10.000,00/unit Tentukan formulasi matematika dari masalah tersebut!
    penyelesaian:
    x = Meja warna merah
    y = Meja warna biru
    model umum program linear
    memaksimumkan $z = ... x + 30.000y$
    kendala:
    . . . .
    . . . .
    . . . .
    . . . .

13. Sebuah tokoh pakaian menjual dua jenis pakaian. Untuk pakaian pertama menghasilkan dua baju berwarna merah

dan hijau, sedangkan pakaian kedua menghasilkan baju warna biru dan kuning. Setiap warna mengandung campuran bahan kimia. Untuk pembuatan pertama memiliki 3 kg warna merah dan 5 kg warna hijau. Sedangkan pembuatan kedua memiliki 6 kg warna biru dan 4 kg warna kuning. Jadi keseluruhan dibutuhkan paling sedikit 18 kg untuk baju pembuatan pertama dan 22 kg untuk baju pembuatan kedua. Formulasikanlah masalah di atas agar mendapatkan pendapatan maksimum!

Penyelesaian:

$x_1 =...$

$x_2 =...$

model umum program linear :

memaksimumkan $z =\ldots x_1 + 20x_2$

Kendala:

$\ldots x_1 + 4x_2 \leq 198$

$6x_1 + \ldots x_2 \leq \ldots$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

14. Seorang pengrajin ukiran membuat dua warna hiasan dinding yaitu warna merah dan warna biru. Setiap harinya menghasilkan tidak lebih dari 50 buah. Harga bahan untuk sebuah hiasan dinding jenis pertama Rp 5.000,00 dan untuk sebuah hiasan dinding jenis kedua Rp 10.000,00 . Ia tidak akan berbelanja bahan lebih dari Rp 130.000,00 setiap harinya. Buatlah formulasi matematika dari permasalahan tersebut!

    penyelesaian:

    x = Hiasan warna merah

    y = Hiasan warna biru

    model umum program linear

    memaksimumkan $z =\ldots x + \ldots y$

    kendala:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

15. Seorang penjahit akan membuat 2 model pakaian, yaitu pakaian tipis dan tebal. Dia mempunyai persediaan untuk pembuatan model pertama 25 meter dan untuk pembuatan model kedua 35 meter. Model pertama memerlukan 10 meter kain tipis dan 15 meter kain tebal, sedangkan model kedua memerlukan 8 meter kain tipis dan 16 meter kain tebal. Formulasikanlah masalah di atas agar mendapatkan banyak pakaian yang maksimum!
    Penyelesaian:
    $x_1 =$ model pertama
    $x_2 =$model kedua
    model umum program linear :
    memaksimumkan $z =. ..$
    Kendala:
    . . . .
    . . . .
    . . . .
    . . . .

1.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Soal Latihan Mandiri

1. Luas daerah parkir 360 m^2. Luas rata-rata untuk sebuah sedan 6 m^2 dan untuk sebuah bus 24 m^2. Daerah parkir itu tidak dapat memuat lebih dari 30 kendaraan. Jika biaya parkir untuk sebuah sedan adalah Rp3.000 dan untuk bus Rp5.000, formulasikan masalah di atas agar mendapatkan keuntungan terbesar!

2. Sebuah pabrik menggunakan bahan A, B, dan C untuk memproduksi 2 jenis barang, yaitu barang jenis I dan barang jenis II. Sebuah barang jenis I memerlukan 1 kg bahan A, 3 kg bahan B, dan 2 kg bahan C. Sedangkan barang jenis II memerlukan 3 kg barang A, 4 kg bahan B, dan 1 kg bahan C. Harga jenis I adalah Rp40.000,00 dan harga barang jenis II adalah Rp60.000,00. Formulasikan masalah di atas agar mendapatkan pendapatan maksimum!

3. Seorang pedagang minuman memiliki modal Rp 200.000,00. Ia berencana membeli 2 jenis minuman. Minuman A dibeli dengan harga Rp 6.000,00 per botol dan dijual untung Rp 500,00 per botol. Minuman B dibeli dengan harga Rp 8.000,00 per botol dan dijual dengan untung Rp 1.000,00 per botol. Bila tempatnya hanya mampu menampung 30 botol, buatlah formulasi masalah tersebut agar mendapatkan keuntungan maksimum!

4. Seorang pedagang mempunyai gudang yang hanya dapat menampung paling banyak 60 peti barang. Setiap peti barang A dibeli dengan harga Rp 200.000,00 dan akan dijual dengan laba Rp 40.000,00. Setiap peti barang B dibeli dengan harga Rp 100.000,00 akan dijual dengan laba Rp 15.000,00. Jika modal yang tersedia Rp 13.000.000,00,

maka bagaimanakah formulasi matematika agar laba maksimum diperolah?

5. Sinta akan membuat kue untuk diberikan kepada adiknya yang berulang tahun. Jenis kue pertama akan di buat dengan bahan terigu 5kg, kue kedua membutuhkan terigu 8 kg, dan kue ketiga membutuhkan 12 kg terigu. Jika harga sebuah terigu Rp 5.000,00 setiap kilogramnya, buatlah formulasi matematikanya agar menghasilkan pendapatan minimum!

6. Hesti, Rini, dan Elen pergi ke toko untuk membeli ikat rambut. Hesti membeli ikat rambut berwarna merah 4 buah, berwarna biru 3 buah, dan berwarna kuning 6 buah dibeli dengan harga Rp. 30.000,00. Elen membeli ikat rambut berwarna merah 3 buah, berwarna biru 5 buah, dan berwarna kuning 7 buah dengan harga Rp. 40.000,00 sedangkan Rini membeli ikat rambut berwarna merah 2 buah, berwarna biru 4 buah dan berwarna kuning 5 buah dengan harga Rp.25.000,00. Jika x banyaknya ikat rambut warna pink, y menyatakan banyak ikat rambut warna biru dan z menyatakan banyaknya ikat rambut warna kuning, maka buatlah formulasi yang menyatakan hubungan ketiganya!

7. Sesil membeli 5 kg jeruk, 2 kg mangga, dan 4 kg buah naga dengan harga adalah Rp50.000,00 dan Bela membeli 3 kg jeruk, 4 kg mangga, dan 2 kg buah naga dengan harga adalah Rp40.000,00. Nima membeli 4 kg jeruk, 3 kg mangga, dan 5 kg buah naga dengan harga adalah Rp65.000,00. . Jika J menyatakan banyak buah jeruk, M menyatakan banyaknya buah mangga, dan N menyatakan

banyak buah naga, maka buatlah formulasi yang menyatakan hubungan ketiganya!

8. Pak Tono mempunyai uang pecahan sepuluh ribuan, duapuluh ribuan, dan lima ribuan. Jumlah uang tersebut adalah Rp180.000,00. Uang pecahan lima ribuan 15 lembar lebih banyak dari pada uang pecahan sepuluh ribuan. Banyak lembar uang pecahan dua puluh ribuan dua kali banyak lembar uang pecahan sepuluh ribuan. Jika a menyatakan banyak lembar uang lima ribuan, b menyatakan banyak lembar uang sepuluh ribuan, dan c menyatakan banyak lembar uang dua puluh ribuan, maka buatlah formulasi yang menyatakan hubungan ketiganya!

9. Seorang pemilik toko tas ingin mengisi tokonya dengan tas wanita paling sedikit 80 tas dan tas laki-laki paling sedikit 70 tas sedangkan tas umum paling sedikit 60 tas. Toko tersebut hanya dapat menampung 250 tas. Keuntungan setiap tas wanita adalah Rp 12.000,00 dan keuntungan setiap tas laki-laki adalah Rp 10.000,00 sedangkan keuntungan tas umum adalah Rp 8.000,00. Jika banyaknya tas wanita tidak boleh melebihi 50, maka buatlah formulasi matematika untuk menghasilkan keuntungan terbesar!

10. Raya, Ana, dan Farah pergi bersama-sama ke tokoh untuk membeli beberapa bahan. Raya membeli 3 kg gula, 4 kg tepung, 2 kg mentega dengan harga 70.000,00. Ana membeli 2 kg gula, 5 kg tepung, 4 kg mentega dengan harga 80.000,00. Farah membeli 4 kg gula, 5 kg tepung, 3 kg mentega dengan harga 75.000,00. Maka biaya yang harus dikeluarkan oleh ketiga nya dan buatlah model matematika dari masalah tersebut!

MODUL 2

SISTEM PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mahasiswa diharapkan mampu memahami konsep sistem persamaan dan pertidaksamaan linear dan mampu membuat soal serta menyelesaikan dengan mempersentasekan di depan kelas	1. Pengertian sistem persamaan dan pertidaksamaan linear 2. Jenis-jenis sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear 3. Sistem persamaan dan pertidaksamaan linear

Tujuan Pembelajaran
1. Memahami pengertian sistem persamaan dan pertidaksamaan linear **2. Memahami jenis-jenis sistem persamaan dan pertidaksamaan linear** **3. Memahami cara penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan linear** **4. Mampu menyelesaikan soal diskusi persamaan dan pertidaksamaan linear** **5. Mampu menyelesaikan soal latihan mandiri sistem persamaan dan pertidaksamaan linear**

MODUL 2

SISTEM PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

2.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Persamaan Linear

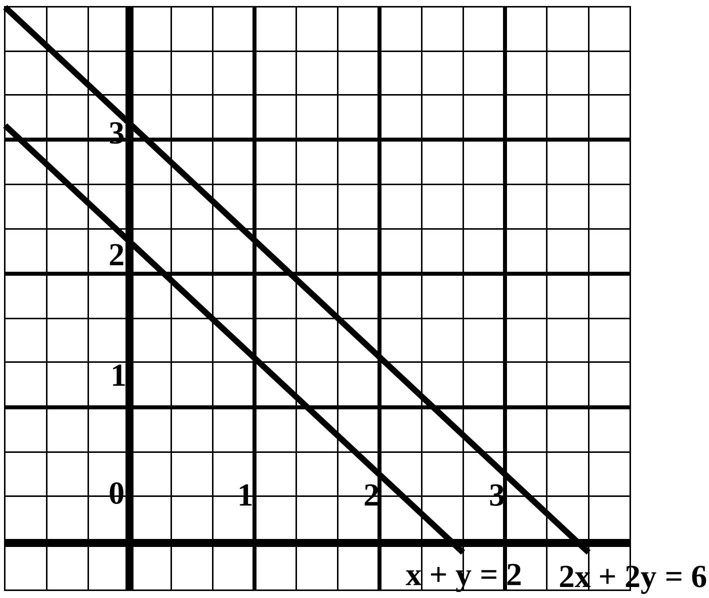
Persamaan linear adalah kalimat matematika terbuka yang variabel-variabelnya berpangkat tertinggi 1 dan ruas-ruasnya dihubungkan dengan tanda “=” (sama dengan).

2.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Sistem Persamaan Linear

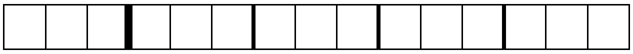
Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel. Contohnya adalah :

$3x + 2y - z = 1$
$2x - 2y + 4z = -2$
$-x + 4y - z = 0$

Tidak semua sistem persamaan linear memiliki penyelesaian, sistem persamaan linear yang memiliki penyelesaian memiliki dua kemungkinan, yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Jika sistem penyelesaian linear tidak mempunyai penyelesaian maka grafiknya berupa dua garis yang saling sejajar.



Grafik 2.2.1 Sistem persamaan linear yang tidak mempunyai penyelesaian

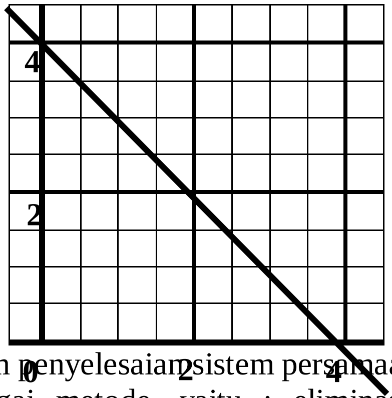


Jika penyelesaiannya banyak maka himpunan penyelesaiannya berupa dua garis lurus yang saling berhimpit. Perhatikan contoh berikut :

x + y =4

2x + 2y = 8

Jika digambarkan grafiknya akan berimpit sehingga berpotongan di banyak (tak hingga) titik.



Grafik 2.2.2 Sistem persamaan linear yang mempunyai banyak penyelesaian

Dalam penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel terdapat berbagai metode, yaitu : eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, grafik, eliminasi Gaus-Jordan, dan determinan.

1. Metode Eliminasi

Eliminasi artinya membuang atau menghilangkan.

Contoh

Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

Tentukan penyelesaian dari persamaan tersebut!

Penyelesaian :

Eliminasi variabel x dari persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{r|l|l} x + y = 2 & \text{x } 4 & 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 & \text{x } 1 & 4x + 2y = 7 \\ \hline \end{array}$$

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Eliminasi variabel y dari persamaan (1) dan (2)

$$-2x = -3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} x+y=2 \\ 4x+2y=7 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{x } 2 \\ \text{x } 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2x+2y=4 \\ 4x+2y=7 \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$

2. Metode Substitusi

Substitusi artinya mengganti atau menempatkan. Cara substitusi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear berarti mengganti variabel yang satu dengan variabel lain sesuai dengan persamaan yang diberikan.

Contoh

Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$$

Tentukan penyelesaian dari persamaan tersebut!

Penyelesaian :

$x+y=2$ …… persamaan (1)

Dari persamaan (1) diperoleh $x=2-y$

$4x+2y=7$ …… persamaan (2)

Substitusi $x=2-y$ ke persamaan (2)

$4(2-y)+2y=7$

$8-4y+2y=7$

$8-2y=7$

$-2y=7-8$

$y=\frac{1}{2}$

Substitusi $y=\frac{1}{2}$ ke persamaan (1)

$x+y=2$

$x+\frac{1}{2}=2$

$x=\frac{3}{2}$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$

3. Metode eliminasi dan substitusi

Cara menyelesaikan dengan metode eliminasi substitusi adalah dengan menghilangan atau membuang suatu persamaan kemudian mengganti variabel yang satu dengan yang lain.

Contoh

Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

Tentukan penyelesaian dari persamaan tersebut!

Penyelesaian :

Eliminasi variabel x dari persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{r|c|r} x + y = 2 & \text{x } 4 & 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 & \text{x } 1 & 4x + 2y = 7 \\ \hline & & 2y = 1 \\ & & y = \frac{1}{2} \end{array}$$

Substitusikan $y = \frac{1}{2}$ ke persamaan (1)

$$x + y = 2$$

$$x + \frac{1}{2} = 2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

4. Metode Grafik

Grafik dari persamaan linear dua variabel berbentuk garis lurus.

Contoh

Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

Tentukan penyelesaian dari persamaan tersebut!

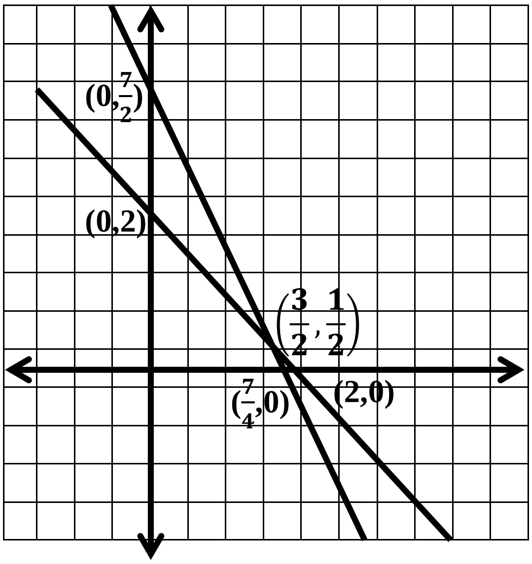
Penyelesaian :

Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk persamaan (1)

	$x + y = 2$	
x	0	2
y	2	0

Diperoleh titik-titik potong pada $x + y = 2$ terhadap sumbu koordinat yaitu titik (0,2) dan (2,0)
Diperoleh titik-titik potong pada $4x + 2y = 7$terhadap sumbu koordinat yaitu titik (0,$\frac{7}{2}$) dan ($\frac{7}{4}$,0)
Tarik garis lurus dari titik (0,2) ke titik (2,0) dan dari titik (0,$\frac{7}{2}$) ke titik ($\frac{7}{4}$,0)
Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk persamaan (2)

	$4x + 2y = 7$	
x	0	$\frac{7}{4}$
y	$\frac{7}{2}$	0



Grafik 2.2.3 Persamaan Linear

Berdasarkan grafik $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$, kedua garis lurus tersebut berpotongan pada sebuah titik, yaitu titik $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sehingga diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

5. Metode eliminasi Gaus-Jordan

Hal yang dapat digunakan untuk menyederhanakan permasalahan adalah dengan mengubah sistem persamaan linear ke dalam bentuk matriks. Setelah diubah ke bentuk matriks, maka matriks tersebut diubah ke dalam bentuk eselon baris untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem persamaan linear. Untuk mendapatkan matriks eselon baris disebut sebagai eliminasi Gauss-Jordan. Pada proses eliminasi tersebut, operasi yang digunakan disebut operasi baris elementer.

Contoh

Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

Tentukan penyelesaian dari persamaan tersebut!

Penyelesaian :

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks, sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 - 4R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan tersebut dapat ditulis:

$$\begin{cases} x + y = 2 \to x = \dfrac{3}{2} \\ -2y = -1 \to y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

6. Metode Determinan

Bentuk umum sistem persamaan linear

$ax + by = p$

$cx + dy = q$

Dapat diubah ke bentuk matriks sebagai berikut

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$

$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

$D_x = \begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix} = pd - bq$

$D_y = \begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix} = aq - cp$

Nilai x dan y ditentukan dengan

$x = \frac{D_x}{D}$ dan $y = \frac{D_y}{D}$

Contoh

Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$

Tentukan penyelesaian dari persamaan tersebut!

Penyelesaian :

Sistem persamaan linear tersebut dapat disusun dalam bentuk matriks berikut :

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \\ 7 \end{matrix}$

$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = ad - bc = 2 - 4 = -2$

$D_x = \begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = pd - bq = 4 - 7 = -3$

$D_y = \begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = aq - cp = 7 - 8 = -1$

Dengan demikian diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

2.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Persamaan Linear Satu Variabel

Persamaan linear satu variabel adalah kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda sama dengan (=) dan hanya memiliki satu variabel.
Bentuk umum persamaan linear satu variabel :
$ax + b = c$ dengan $a \neq 0; x$ disebut variabel/peubah
Contoh:

1. $x + 2 = 7$
   $x = 7 - 2$
   $x = 5$
2. $p - 5 = 10$
   $p = 10 + 5$
   $p = 1$
3. $3x + 5 = x + 15$
   $3x - x = 15 - 5$
   $2x = 10$
   $x = 5$

2.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Persamaan Linear Dua Variabel

Sistem persamaan linear dua variabel adalah sebuah sistem atau kesatuan dari beberapa persamaan linear dua variabel yang sejenis. Persamaan linear dua variabel adalah sebuah bentuk relasi sama dengan bentuk aljabar yang memiliki dua variabel dan keduanya berpangkat satu.
Dalam penyelesaian soal persamaan linear dua variabel kita dapat menggunkan beberapa metode penyelesaian seperti metode eliminasi, metode substitusi, metode Gauss dan lain sebagainya. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh soal berikut :
Contoh :
Nilai p yang memenuhi persamaan $4p + 3q = 20$ dan $2p - q = 3$ adalah
Cara penyelesaian:
$4p + 3q = 20 \ldots \ldots (1)$
$2p - q = 3 \ldots \ldots \ldots (2)$
Pilih salah satu persamaan misalnya persamaan (2), kemudian nyatakan salah satu variabelnya dalam bentuk variabel yang lain$2p - q = 3$

$-q = 3 - 2p$
$q = 2p + 3 \dots \dots (3)$
Substitusi persamaan (3) pada persamaan (1)
$4p + 3(2p + 3) = 20$
$4p + 6p + 9 = 20$
$10p = 20$
$p = 2$
Jadi, nilai p yang memenuhi persamaan adalah 2

2.5. Kegiatan Pembelajaran 5. Persamaan Linear Tiga Variabel

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebuah konsep dalam ilmu matematika yang digunakan untuk menyelesaikan kasus yang tidak dapat diselesaikan oleh persamaan satu variabel dan persamaan dua variabel.

Penyelesaian persamaan linear tiga variabel sama dengan cara atau metode penentuan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel, kecuali dengan metode grafik. Untuk lebih memahami bagaimana cara penyelesaian soal persamaan tiga variabel, perhatikanlah contoh dibawah ini.

Contoh

Perhatikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut:
$x - 3y + z = -1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (1)$
$5x - y - z = 5 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .. (2)$
$8x - 6y - z = 1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . (3)$
Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan diatas!
Cara penyelesaian :
Eliminasi variabel z pada persamaan (1) dan (2), yaitu dengan menjumlahkan kedua persamaan itu sehingga diperoleh persamaan (4) sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} x - 3y + z = -1 \\ \underline{5x - y - z = 5} \\ \qquad 6x - 2y = 1 \\ \quad 3x - y = 2 \dots \dots (4) \end{array}$$

Eliminasi variabel z pada persamaan (1) dan (3), yaitu dengan menjumlahkan kedua persamaan (1) dan (3) sehingga diperoleh persamaan (5) sebagai berikut.

$x - 3y + z = -1$

$8x - 6y - z = 1$

$9x - 9y = 0$

$x - y = 0$ ... ... (5)

Persamaan (4) dan (5) membentuk sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$3x - y = 2$

$x - y = 0$

Penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel ini adalah

$3x - y = 2$

$x - y = 0$

$2x = 2$

$x = 1$

2.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah kalimat matematika terbuka yang variable-variabelnya berpangkat tinggi 1 dan ruas-ruasnya dihubungkan dengan tanda $\neq$ $(> atau <)$ $atau$ $(\geq atau \leq)$.

Dalam pertidaksamaaan linear memiliki beberapa sifat yaitu:

a. Suatu pertidaksamaan tidak akan berubah nilainya apabila ditambahkan atau dikurangkan dengan bilangan yang sama.

$$sebagai\ contoh : x > y\ maka\ x + a > y + a$$

b. Suatu pertidaksamaan tidak akan berubah nilainya apabila kedua ruasnya dikalikan atau dibagikan dengan bilangan positif yang sama.

$sebagai\ contoh: x \leq y\ maka\ a.x \leq y.a\ dengan\ a > 0$

c. Suatu pertidaksamaan linear akan berubah nilainya apabila kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilanagan negative yang sama.

keduanya dibedakan dari pemakaian tanda dan terdapat juga pada soal perkalian atau pembagian bilangan yang negative.

Dalam persamaan linear, jika kedua ruas dikali atau bagi kedalam bilangan negative, maka “tanda”-nya akan tetap sama dengan $(=)$. Hal tersebut berbeda dengan pertidaksamaan linear karena dalam pertidaksamaan linear, jika terdapat soal dimana kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilangan negative $(-)$, maka tanda sebelumnya akan berubah menjadi tanda sebaliknya.

2.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Pertidaksamaan linear satu variable adalah pertidaksamaan yang memuat satu variabel dan pangkat variabelnya. Untuk lebih jelasnya tentang pertidaksamaan linear perhatikan beberapa bentuk pertidaksamaan berikut ini.

a. $x + 1 > 3$
b. $2x - 4 < 3$
c. $5x + 7 \geq -3$
d. $4x + 1 \leq 5$

Pertidaksamaan yang memuat satu variabel berderajat 1 seperti di atas disebut dengan pertidaksamaan linear satu variabel. Dalam variabel x, pertidaksamaan linear ini memiliki 4 macam bentuk baku sebagai berikut.

1. $ax + b < 0$
2. $ax + b \leq 0$
3. $ax + b > 0$
4. $ax + b \geq 0$

dengan a dan b bilangan real dan a $\neq 0$

Menyelesaikan sebuah pertidaksamaan linear satu variabel berarti mencari nilai-nilai x yang memenuhi pertidaksamaan yang dimaksud. Untuk itu, kita perlu memahami sifat-sifat pertidaksamaan. Misalkan diberikan pernyataan bahwa $10 < 20$ bernilai benar:

a. Jika kedua ruas ditambah 2 maka $10 + 2 < 20 + 2$, nilainya benar
b. Jika kedua ruas dikurangi 2 maka $10 - 2 < 20 - 2$, milainya benar
c. Jika kedua ruas dikalikan 2 maka $10 \times 2 < 20 \times 2$, nilainya benar
d. Jika kedua ruas dibagi 2 maka $10 \div 2 < 20 \div 2$, nilainya benar.

e. Jika kedua ruas dikali -2 maka $10 \times (-2) < 20 \times (-2)$, nilainya salah. Agar nilainya menjadi benar maka tanda pertidaksamaan dibalik sehingga $-20 > -40$

f. Jika kedua ruas dibagi -2 maka $10 \div (-2) < 20 \div (-2)$ nilainya salah. Agar nilainya menjadi benar, tanda pertidaksamaannya dibalik sehingga $-5 > -10$.

Contoh lain

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2x + 8 > 0$.
   Cara penyelesaian:
   $2x + 8 > 0$
   $\Rightarrow 2x > -8$
   $\Rightarrow x > -4$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > -4, x \in R\}$.

2. Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2 - 3x \geq 2x + 12$
   Cara penyelesaian:
   $2 - 3x \geq 2x + 12$
   $\Rightarrow -2x - 3x \geq -2 + 12$
   $\Rightarrow -5x \geq 10$
   $\Rightarrow x \leq -2$

Jadi, himpunan pertidaksamaan itu adalah $\{x \mid x - 2, x \in R\}$.

2.8 Kegiatan Pembelajaran 8. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pertidaksamaan linear dua variabel adalah kalimat terbuka matematika yang memuat dua variabel, dengan masing-masing variabel berderajat satu dan dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan. Tanda ketidaksamaan yang dimaksud adalah $>, <, \geq$ ***atau*** $\leq$.

1. $ax + by > c$
2. $ax + by \geq c$
3. $ax + by < c$
4. $ax + by \leq c$

a=koefisien dari x,a≠0, b=koefisien dari y,b≠0, c=konstanta

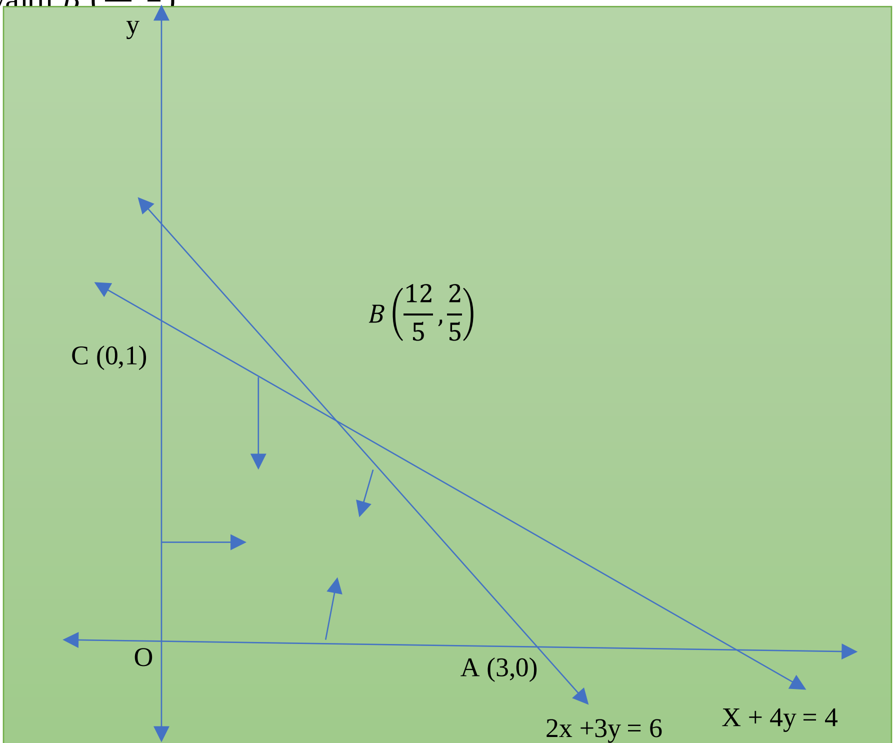
a,b,c anggota bilangan real

2.9 Kegiatan Pembelajaran 9. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Sistem pertidaksamaan linear berarti Agar lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.
Contoh soal
Gambarkan sistem pertidaksamaan berikut:

$2x + 3y \leq 6 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$
$x + 4y \leq 4 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$
$x \geq 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$
$y \geq 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$

Cara penyelesaian:
Gambarkan (1), (2), (3) dan (4) pada satu diagram.
Daerah yang memenuhi adalah $(1) \cap (2) \cap (3) \cap (4)$.
Catatan :
$2x + 3y \leq 6$ dapat ditulis sebagai $\{(x, y) | \; 2x + 3y \leq 6 \}$
Titik 0 = (0,0) Titik A = (3,0) Titik C = (0,1)
Titik B dicari dari perpotongan antara 2x + 3y = 6 dan x + 4y = 4, yaitu $B\left(\frac{12}{5}, \frac{2}{5}\right)$



Grafik 2.9.4 Grafik Daerah penyelesaian contoh soal sistem pertidaksaman linear dua variabel

2.10. Kegiatan Pembelajaran 10. Rangkuman

1. Persamaan linear adalah kalimat matematika terbuka yang variabel-variabelnya berpangkat tertinggi 1 dan ruas-ruasnya dihubungkan dengan tanda “=” (sama dengan).
2. Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel. Contohnya adalah :
   3x + 2y – z = 1
   2x – 2y + 4z = -2
   -x + 4y – z = 0

3. Dalam penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel terdapat berbagai metode, yaitu : eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, grafik, eliminasi Gaus-Jordan, dan determinan.

4. Persamaan linear satu variabel adalah kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda sama dengan (=) dan hanya memiliki satu variabel. Bentuk umum persamaan linear satu variabel :
$ax + b = c$ dengan $a \neq 0; x$ disebut variabel/peubah

5. Sistem persamaan linear dua variabel adalah sebuah sistem atau kesatuan dari beberapa persamaan linear dua variabel yang sejenis. Persamaan linear dua variabel adalah sebuah bentuk relasi sama dengan bentuk aljabar yang memiliki dua variabel dan keduanya berpangkat satu.

6. Sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebuah konsep dalam ilmu matematika yang digunakan untuk menyelesaikan kasus yang tidak dapat diselesaikan oleh persamaan satu variabel dan persamaan dua variabel. Penyelesaian persamaan linear tiga variabel sama dengan cara atau metode penentuan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel, kecuali dengan metode grafik.

7. Pertidaksamaan linear adalah kalimat matematika terbuka yang variable-variabelnya berpangkat tinggi 1 dan ruas-ruasnya dihubungkan dengan tanda $\neq$ $(> atau <)$ $atau$ $(\geq atau \leq)$.
Dalam pertidaksamaaan linear memiliki beberapa sifat yaitu:

d. Suatu pertidaksamaan tidak akan berubah nilainya apabila ditambahkan atau dikurangkan dengan bilangan yang sama.

   $sebagai\ contoh : x > y\ maka\ x + a > y + a$

e. Suatu pertidaksamaan tidak akan berubah nilainya apabila kedua ruasnya dikalikan atau dibagikan dengan bilangan positif yang sama. $sebagai\ contoh$:

   $x \leq y\ maka\ a.x \leq y.a\ dengan\ a > 0$

f. Suatu pertidaksamaan linear akan berubah nilainya apabila kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilanagan negative yang sama.

$$sebagai\ contoh: x \leq y\ maka - x.a \geq -y.a$$

8. Pertidaksamaan linear satu variable adalah pertidaksamaan yang memuat satu variabel dan pangkat variabelnya. Dalam variabel x, pertidaksamaan linear ini memiliki 4 macam bentuk baku sebagai berikut.

1. $ax + b < 0$
2. $ax + b \leq 0$
3. $ax + b > 0$
4. $ax + b \geq 0$

$$dengan\ a\ dan\ b\ bilangan\ real\ dan\ a \neq 0$$

9. Pertidaksamaan linear dua variabel adalah kalimat terbuka matematika yang memuat dua variabel, dengan masing-masing variabel berderajat satu dan dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan. Tanda ketidaksamaan yang dimaksud adalah $>, <, \geq$ $\boldsymbol{atau} \leq$. Berikut bentuk umum dari pertidaksamaan dua variabel.

$$ax + by > c$$

$$ax + by \geq c$$

$$ax + by < c$$

$$ax + by \leq c$$

$Dengan$:

$$a = koefisien\ dari\ x, a \neq 0$$

$$b = koefisien\ dari\ y, b \neq 0$$

$$c = konstanta$$

$$a, b, c\ anggota\ bilangan\ real$$

10. Sistem pertidaksamaan linear berarti kelompok pertidaksamaan linier yang terdiri dari beberapa pertidaksamaan linear diman kelompok tersebut mempresentasikan hasil bersama.

2.11. Kegiatan Pembelajaran 11. Soal Diskusi Kelompok

Diskusikan dan Kerjakanlah latihan soal dibawah ini dengan teman kelompokmu

1. Gambarkan secara grafik daerah yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \le 60 \\ x_1+2x_2 \le 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Cara penyelesaian :

2. Tentukan daerah penyelesaian dari system pertidaksamaan berikut.

$5x + 4y \leq 20$
$7x + 2y \leq 14$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Cara penyelesaian :
Gambarkan setiap garis batas dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel, yaitu : $5x + 4y \leq 20, 7x + 2y \leq 14, x = 0 (sumbu\ y), y = 0 (sumbu\ x)$.

3. Carilah himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3} + 2\frac{1}{2}$

Cara penyelesaian:

$\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3} + 2\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3} + 2\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{\dots} < \dots \frac{1}{2} - 2$
$\Rightarrow \frac{3x}{6} - \frac{\dots}{\dots\dots} < \frac{\dots}{\dots}$
$\Rightarrow \frac{\dots}{\dots} < \frac{\dots}{\dots}$
$\Rightarrow x < 3$

Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear adalah, HP $= \{x \mid x < 3\}$.

4. Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan 4x + 1 < x – 8

Cara penyelesaian:

$4x + 1 - 3x < x - 8$
$\Rightarrow \cdots - x < -8 - \cdots$
$\Rightarrow \cdots < \cdots$
$\Rightarrow x \leq -3$
Jadi, himpunan pertidaksamaan itu adalah $\{x \mid x - 3, x \in R\}$.

5. Didalam kandang terdapat domba dan angsa sebanyak 13 ekor. Jika jumlah kaki hewan tersebut 32, maka jumla kambing dan ayam masing-masing adalah
   Cara penyelesaian :
   Misalkan domba = x dan angsa = y
   Jumlah kaki domba = 4 dan kaki ayam =2
   Ditanyakan : jumlah domba dan angsa= ?
   Buatlah dalam bentuk model matematika
   $\ldots + \cdots = \cdots \ldots \ldots .(1)$
   $\ldots + \cdots = \cdots \ldots \ldots .(2)$
   Eliminasi persamaan (1) dan (2) akan didapatkan :
   Substitusi nilai y = 10 kesalah satu persamaan :
   Sehingga jumlah domba = 3 ekor dan angsa = 10 ekor
6. Perhatikan sistem persamaan berikut.
   $x + 2y - z = 4$
   $z - x - y = -4$
   $3x + 6y - 3z = 12$
   Apakah Sistem persamaan linear tiga variabel itu memiliki penyelesaian? Jelaskan!
7. Perhatikan sistem persamaan berikut.
   $10x + 4y - z = 20$
   $10x + 4y - z = 30$
   $10x + 4y - 6z = -20$
   Apakah Sistem persamaan linear tiga variabel itu memiliki penyelesaian? Jelaskan!
   Dari kedua persoalan yaitu soal no 6 dan 7, buatlah suatu kesimpulan dengan kelompokmu kapan suatu Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel memiliki penyelesaian dan kapan Sistem Persamaan linear tiga variabel tidak memiliki penyelesaian.
8. Perhatikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut:
   $x - 6y + z = -2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$
   $10x - y - z = 10 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. (2)$
   $16x - 12y - z = 2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .(3)$

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan diatas!
Cara penyelesaian :
Sistem persamaan diatas dapat diselesaikan dengan metode eliminasi sebagai berikut:
Eliminasi variabel z pada persamaan (1) dan (2), yaitu dengan menjumlahkan kedua persamaan itu sehingga diperoleh persamaan (4) sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} \ldots - \cdots + \cdots = 2 \\ \underline{\ldots - \cdots - \cdots = 10} \\ \ldots - \cdots = \cdots \\ \ldots - \cdots = \cdots \ldots \ldots (4) \end{array}$$

Eliminasi variabel z pada persamaan (1) dan (3), yaitu dengan menjumlahkan kedua persamaan (1) dan (3) sehingga diperoleh persa.maan (5) sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} \ldots - \cdots + z = \cdots \\ \underline{\ldots - \cdots - \cdots = \cdots} \\ \ldots - \cdots = \cdots \\ \ldots - \cdots = \cdots \ldots \ldots (5) \end{array}$$

Persamaan (4) dan (5) membentuk sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$\ldots - \cdots = \cdots$

$\ldots - \cdots = \cdots$

Penyelesaian dari sistm persamaan linear tiga variabel ini adalah

$$\begin{array}{l} \ldots - \cdots = \cdots \\ \ldots - \cdots = \cdots \\ \hline \ldots = \cdots \\ \ldots = \cdots \end{array}$$

2.12. Kegiatan Pembelajaran 12. Latihan Soal Mandiri

Kerjakanlah soal-soal pertidaksamaan linear di bawah ini!
Tentukan nilai x dan y untuk no 1-4 dan tentukan nilai x, ,y,dan z 5-10

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 4y = 30 \\ 2x + 3y + 14 = 14 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 9x + 15y = 45 \end{cases}$

5. $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 10 \\ 5y - z &= -1 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} -3x + 2y + z &= -9 \\ 5y - z &= -1 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 10 \\ 4x - 3z &= 18 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= -10 \\ 2y + 3z &= 16 \\ 2y - 5z &= -16 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 7 \\ 2x + 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 4y - 3z &= -10 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x + 2y - z &= 8 \\ x + 3y + 3z &= 10 \\ -x - 3y - 3z &= -10 \end{aligned}$

11. Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan dibawah ini.
    a. $2 - 3x = 2x + 12$
    b. $4x + 1 < x - 8$
12. Carilah himpunan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan linear dibawah ini.
    a. $2x - 1 < 0$
    b. $3x - 6 > 0$
13. Carilah himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan linear dibawah ini yakni:
    a. $2x - 4 < 3x - 2$
    b. $1 + x = 3 - 3x$
14. Carilah himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan berikut ini.
    a. $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3} + \frac{21}{2}$
    b. $1 < 2x - 1 = 3$
15. Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan berikut pada koordinat cartesius.
    a. $-4 \leq x \leq 0$
    b. $12x - 5y \leq 60$
    c. $2x - 3y \geq 8$
    d. $3x + 4x \geq 1.200$

MODUL 3

PROGRAM LINIER SATU, DUA DAN TIGA VARIABEL

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mampu memahami Konsep Masalah Program Linier dengan baik dan benar serta mampu membuat soal yang sesuai dengan pemograman linear satu, dua dan tiga Variabel	1. Pengertian Masalah Program Linear 2. Mencari Masalah yang Merupakan Masalah Program Linear 3. Menyelesaikan Masalah Program Linier dengan Metode Aljabar dan Grafik

Tujuan Pembelajaran

1. Mampu Memahami Pengertian Masalah Program Linear
2. Mampu Mencari Masalah yang Merupakan Masalah Program Linier
3. Mampu Menyelesaikan Masalah Program Linier dengan Metode Aljabar dan Grafik
4. Mampu Menyelesaikan Soal Diskusi Kelompok Masalah Program Linier
5. Mampu Menyelesaikan Soal Latihan Mandiri Masalah Program Linier

MODUL 3

PROGRAM LINIER SATU, DUA DAN TIGA VARIABEL

3.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Defenisi Masalah Program Linier

Menurut Darta,S.Pd.,M.Pd. dan Thesa Kandaga,S.Si.,M.Pd. dalam Buku Program Linier dan Aplikasinya. Dalam modul ini sebelum membahas ke topik, yakni masalah program linier. Penyusun menyinggung sedikit tentang program linear, yang dimana Program Linier merupakan suatu pendekatan pemecahan masalah yang dikembangkan untuk membantu mengambil keputusan.. Berbagai masalah dalam aspek-aspek kegiatan perusahaan seperti masalah produksi, biaya, pemasaran, distibusi, dan periklanan, seringkali dipecahkan dengan program linier. Masalah program linier umumnya berasal dari dunia nyata (kontekstual) yang kemudian dibuat model matematis (simbolik) yang merupakan dunia abstrak dan dibuat mendekati kenyataan. Misalkan dalam suatu organisasi atau bisnis yang bergerak dalam bidang produksi barang, dalam kegiatan usahanya selalu merencanakan kegiatan yang pada dasarnya ingin menghasilkan keuntungan yang besar namun dengan biaya produksi dan penggunaan bahan buku yang seminim mungkin. Contoh lain, seorang pemimpin perusahaan harus mampu memanfaatkan sumber-sumber yang tersedia untuk menetapkan jenis dan jumlah barang yang harus diproduksi, sehingga perusahaan memperoleh keuntungan maksimal atau biaya yang minimal. Berbagai masalah kontekstual tersebut yang bertujuan mengoptimalkan suatu nilai dengan kendala tertentu dapat dimodelkan dalam model matematika yang sesuai dengan standar baku atau bentuk umum program linier yang sudah ada. Kemudian dianalisis batasan-batasan variabelnya dan diselesaikan dengan metode tertentu, untuk kemudian hasil perhitungannya akan dapat diterapkan sebagai solusi bagi permasalahan kontekstualnya.

Hal-hal tersebut di atas adalah merupakan masalah program linear yang sebenarnya sangat sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh-contoh tersebut maka dapat disimpulkan bahwa, Masalah Program Linier (MPL) adalah suatu masalah (persoalan) untuk menentukan besarnya masing-masing harga variabel penentu fungsi tujuan sedemikian rupa, sehingga nilai fungsi tujuan yang linier menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan pembatas (kendala atau constraint) yang ada. Kendala-kendala di sini biasanya berupa sistem pertidaksamaan dan atau persamaan linier. Saat ini sudah banyak perangkat lunak komputer yang dirancangkan untuk menyelesaikan masalah program linier, antara lain Lindo, POM-QM, Microsoft Excel-solver, dan lain sebagainya. Namun begitu, tahapan pemodelan matematika dan analisis variabel kendala dalam masalah program linier tidak dapat dikerjakan menggunakan perangkat lunak, sehingga bagaimanapun kita sebagai pengguna tetap harus mampu memahami dengan baik prosedur-prosedur dalam penyelesaian masalah program linier.

Defenisi Masalah Program Linier secara umum

Masalah Program Linier dapat diartikan secara umum sebagai salah satu teknik menyelesaikan riset operasi. Dalam hal ini adalah khusus menyelesaikan masalah-masalah optimasi (memaksimalkan atau memininumkan) tetapi hanya terbatas pada masalah-masalah yang dapat diubah menjadi fungsi linier. Secara khusus, persoalan program linier merupakan suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel sehingga nilai fungsi tujuan atau objektif yang linear menjadi optimum (memaksimalkan atau meminimumkan) dengan memperhatikan adanya kendala yang ada, yaitu kendala yang harus dinyatakan dalam bentuk ketidaksamaan yang linier.

Secara umum ada empat hal yang harus benar-benar dipahami dan dikuasai untuk menjawab masalah program linier yaitu:

1. Harus bisa menggunakan model matematika.
2. Harus bisa membuat grafik pertidaksamaan (dimana grafik pertidaksamaan ada arsirannya, sedangkan grafik persamaan tidak ada arsirannya).
3. Harus bisa mencari titik pojoknya.
4. Harus bisa menghitung hasil maksimal dan minimal dari masalah program linier.

Defenisi Masalah Program Linier Menurut Para Ahli

1. Menurut Hari Purnomo (2004),
Pokok pikiran utama dalam menggunakan program linier adalah merumuskan masalah dengan menggunakan sejumlah informasi yang tersedia, kemudian menerjemahkan masalah tersebut dalam bentuk model matematika. Sifat *linier* mempunyai arti bahwa seluruh fungsi dalam model ini merupakan fungsi yang linear.

2. Menurut Wikipedia (2009),
Linear programming merupakan suatu model umum yang dapat digunakan dalam pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Masalah tersebut timbul apabila seseorang diharuskan untuk memilih atau menentukan tingkat setiap kegiatan yang akan dilakukan, dimana masig-masing kegiatan membutuhkan sumber yang sama sedangkan jumlahnya terbatas.

3. Menurut Siringoringo (2005),
L*inear programming* merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan biaya. *Liniear programing* berkaiatan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematika yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier.

Pengertian Masalah Program Linier Menurut Penyusun

Masalah program linier merupakan masalah yang timbul karena seseorang mempunyai pilihan untuk memutuskan apa yang harus dia lakukan dari masing-masing pilihan dengan sumber yang sama namun jumlahnya terbatas. Masalah yang terdapat dalam program linear biasanya terkait dengan memaksimalkan untung atau meminimalkan biaya produksi. Tujuannya untuk mendapatkan perhitungan yang tepat terkait biaya yang dianggarkan. Program linier banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah optimal di dalam industri, perbankan, pendidikan, dan masalah-masalah lain yang dapat dinyatakan dalam bentuk linier.

Supaya semakin mudah dimengerti, penyusun dalam hal ini menyediakan beberapa point penting yang memudahkan saudara-saudara dalam menentukan masalah yang disebut sebagai masalah program linear, yakni sebagai berikut:

1. Terdapat tujuan yang dicapai
2. Terdapat sumber daya atau masukan (input) yang berada dalam keadaan terbatas
3. Pola umum masalah yang dapat dimodelkan dengan program linear harus memenuhi
4. Adanya pilihan kombinasi berbagai faktor kegiatan
5. Adanya sumber penunjang berserta batasanya
6. Adanya fungsi objektif/sasaran/tujuan yang harus dioptimumkan
7. Semua relasi yang timbul antara faktor-faktor adalah linear

Masalah keputusan yang sering dihadapi analisis adalah alokasi optimum sumber daya. Sumber daya dapat berupa uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruangan, atau teknologi. Tugas analisis adalah mencapai hasil terbaik dengan keterbatasan sumber daya itu. Setelah masalah didefinisikan, tujuan ditetapkan, langkah selanjutnya adalah formulasi model matematika. Formulasi model matematika ada tiga tahap:

1) Tentukan variabel yang tidak diketahui dan dinyatakan dalam simbol.

2) Membentuk fungsi tujuan yang ditunjukan sebagai suatu hubungan linear dari variabel keputusan.
3) Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikannya dalam persamaan atau pertidaksamaan.

Dari penjabaran di atas, model matematika masalah program linier (MPL) dapat dirumuskan sebagai berikut.

Cari nilai variabel Sedemikian rupa sehingga (srs): fungsi tujuan optimum. Dengan pembatas (dp): sistem persamaan dan atau system pertidaksamaan linier

Bentuk Umum MPL Sebagai Berikut:

Maksimum atau minimum $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \times_j$

Dengan kendala $Z = \sum_{j=i}^{n} a_j \times_j \leq b, i = 1,2,\dots,m, \times_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n.$

Atau

Maksimumkan atau minimumkan $Z = c_j \times_1 + \ldots + c_n \times_n.$

Dengan kendala $a_{11} \times_1 + a_{12} \times_2 + \ldots + a_{1n} \times_n </=> b_1$

$$a_{21} \times_1 + a_{12} \times_2 + \ldots + a_{2n} \times_n </=> b_2$$

$$a_n \times_1 + a_{n2} \times_2 + \ldots + a_{nn} \times_n </=> b_n$$

Dengan:

Z : fungsi objektif/fungi tujuan

a_{ij}: koefisien fungsi kendala

c_j : koefisien fungsi tujuan

$\times_j$: variabel keputusan

b_i : right-hand-side (rhs)

Simbol $\times_1, \times_2, \dots, \times_n$ ($\times_i$) menunjukkan variabel keputusan. Jumlah variabel keputusan($\times_j$) oleh karenanya tergantung dari jumlah kegiatan atau aktivitas yang dilakukan untuk mencapai tujuan. Simbol $c_1, c_2, \dots, c_n$ merupakan konstribusi masing-masing variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi, atau disebut juga sebagai koefisien fungsi kendala pada model matematikanya. Simbol $b_1, b_2, \dots b_m$ menunjukan jumlah masing-masing sumber daya yang ada. Jumlah fungsi kendala akan tergantung dari banyaknya sumber daya yang terbatas. Dalam model matematika tersebut, kita berusaha memaksimumkan atau meminimumkan nilai Z dengan nilai $\times_1, \times_2, \dots, \times_n$ ($\times_i$) tertentu. Hasil nilai keputusan $\times_i$ ini harus tetap $<$ atau = $>$ dari nilai b_i, sehingga tetap memenuhi semua pertidaksamaan kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times_j \leq b$. Pertidaksamaan terakhir ($\times_1, \times_2, \dots, \times_n \geq 0$) menunjukkan batasan non negatif. Membuat model matematika dari suatu permasalahan bukan hanya menuntut kemampuan matematika, tapi juga menuntut kemampuan permodelan matematika. Kasus pemograman linier sangat beragam. Dalam setiap kasus, hal yang penting adalah memahami setiap kasus dan memahami konsep permodelan. Meskipun fungsi tujuan misalnya hanya mempunyai kemungkinan bentuk maksimalisasi atau minimalisasi, keputusan untuk memilih salah satunya bukan perkerjaan mudah. Tujuan pada suatu kasus bisa menjadi batasan pada kasus yang lain. Harus hati-hati dalam menentukan tujuan, koefisien fungsi tujuan, batasan dan koefisien pada fungsi pembatas.

Pada bab sebelumnya, kita telah membahas berbagai contoh masalah kontekstual yang dapat dipecahkan melalui prosedur program linier hingga pembuatan model matematikanya. Andaikan pemodelan matematika telah dibuat, barulah masalah program linier dapat ditentukan penyelesaiannya atau bahkan tidak memiliki penyelesaian yang layak.

3.2.Kegiatan Pembelajaran 2. Program Linier Metode Aljabar dan Grafik

Aplikasi program linier di dunia nyata cukup banyak, misalnya di bidang industri, kedokteran, transportasi, ekonomi, dan pertanian. Masalah program linier dapat dilestarikan dengan berbagai cara/algoritma, seperti metode grafik, metode simpleks, metode simpleks yang direvisi, dan algoritma Karmakar Algoritma yang akan dibahas dalam menyelesaikan masalah program linier pada modul ini adalah metode grafik dan metode simpleks. Masalah program linier dengan dua variabel (n>2) dapat diselesaikan dengan metode grafik, sedangkan untuk n > 2 dapat diselesaikan dengan metode simpleks.

Metode grafik dalam menyelesaikan masalah program linier sebenarnya telah masuk ke dalam kurikulum Sekolah Menengah Atas (SMA) dan seharusnya pelajar tingkat Universitas telah fasih dalam menggunakannya. Oleh karena itu, dalam buku ini, akan langsung diberikan contoh penyelesaian masalah program linier dengan menggunakan metode grafik. Urutan pertama dalam penyelesaian adalah mempelajari sistem atau model matematis yang relevan dan mengembangkan pernyataan permasalahan yang dipertimbangkan dengan jelas. Penggambaran sistem dalam pernyataan ini termasuk pernyataan tujuan, sumber daya yang membatasi, alternatif keputusan, hubungan antara bagian yang dipelajari dan bagian lain dalam perusahaan, dan lain-lain. Penetapan tujuan yang tepat merupakan aspek yang sangat penting dalam formulasi masalah. Untuk membentuk tujuan optimalisasi, diperlukan identifikasi anggota manajemen yang benar-benar akan melakukan pengambilan keputusan dan mendiskusikan pemikiran mereka tentang tujuan yang ingin dicapai.

Tahap berikutnya yang harus dilakukan setelah memahami permasalahan optimal adalah membuat model yang sesuai untuk analisis. Pendekatan konvensional riset operasional untuk pemodelan adalah membangun model matematika yang menggambarkan inti permasalahan. Kasus dari bentuk cerita diterjemahkan ke model matematika. Model matematika merupakan representasi kuantitatif tujuan dan sumber daya yang membatasi sebagai fungsi variabel keputusan. Model matematika permasalahan optimal terdiri dari dua bagian, bagian pertama memodelkan tujuan optimasi. Model matematika tujuan selalu menggunakan bentuk persamaan. Bentuk persamaan digunakan karena kita ingin mendapatkan solusi optimum pada suatu titik. Fungsi tujuan yang akan dioptimalkan hanya satu, bukan berarti bahwa permasalahan optimal hanya dihadapkan pada satu tujuan. Tujuan dari suatu usaha bisa lebih dari satu, tapi pada bagian ini kita hanya akan tertarik dengan permasalahan optimal dengan satu tujuan. Bagian kedua merupakan model matematika yang merepresentasikan sumber daya yang membatasi. Fungsi pembatas bisa berbentuk persamaan (=) atau pertidaksamaan ($\leq$ atau $\geq$). Fungsi pembatas disebut juga sebagai *constraint*. Konstanta (baik sebagai koefisien maupun nilai kanan) dalam fungsi pembatas maupun pada tujuan dikatakan sebagai parameter model. Model matematika mempunyai beberapa keuntungan dibandingkan pendeskripsian permasalahan secara verbal. Salah satu keuntungan yang paling jelas adalah model matematika menggambarkan permasalahan secara lebih ringkas. Hal ini cenderung membuat struktur keseluruhan permasalahan lebih mudah dipahami dan membantu mengungkapkan relasi sebab akibat penting. Model matematika juga memfasilitasi yang berhubungan dengan permasalahan dan keseluruhannya dan mempertimbangkan semua keterhubungannya secara simultan. Terakhir, model matematika membentuk jembatan ke penggunaan teknik matematika dan komputer kemampuan tinggi untuk menganalisis permasalahan.

Di sisi lain, model matematika mempunyai kelemahan. Tidak semua karakteristik sistem dapat dengan mudah dimodelkan menggunakan fungsi matematika. Meskipun dapat dimodelkan dengan fungsi matematika, kadang-kadang penyelesaiannya sulit diperoleh karena kompleksitas fungsi dan teknik yang dibutuhkan.

Menyelesaikan masalah program linier dengan menggunakan metode aljabar dan grafik hanya terbatas untuk yang terdiri dari dua variabel, yang dapat dilihat secara persis. Tetapi, sebenarnya untuk yang ketiga variabel dapat dilakukan, walaupun sangat sulit, karena kertas yang kita pakai untuk menggambarkannya adalah representasi dari ruang berdimensi dua.

Untuk keperluan ini, Anda mesti sudah mahir dalam hal menggambar grafik garis lurus dalam diagram Cartesius. Selain itu, dituntut juga keterampilan dalam hal mencari titik perpotongan antara garis-garis lurus.

3.2.1 Daerah Layak (Feasible Region)

Dalam menentukan nilai optimum (memaksimumkan atau meminimumkan) masalah program linier, kita harus menentukan titik pojok dari daerah himpunan penyelesaian (daerah layak/*feasible*) sistem pertidaksamaan yang ada (kendala/syarat fungsi tujuan). Penentuan titik pojok, penentuan daerah *feasible*, dan beberapa prosedur lain terlalu rumit dan tidak memungkinkan untuk persoalan program linier lebih dari dua variabel, sehingga kita dapat menyelesaikan masalah program linier dengan metode grafik hanya untuk masalah dengan satu atau dua variabel dalam satu pertidaksamaan kendala.

Contoh 3.2.1

Fungsi pembatasnya :

$a - b \leq 1 \qquad (i)$

$3a + 2b \geq 12 \qquad (ii)$

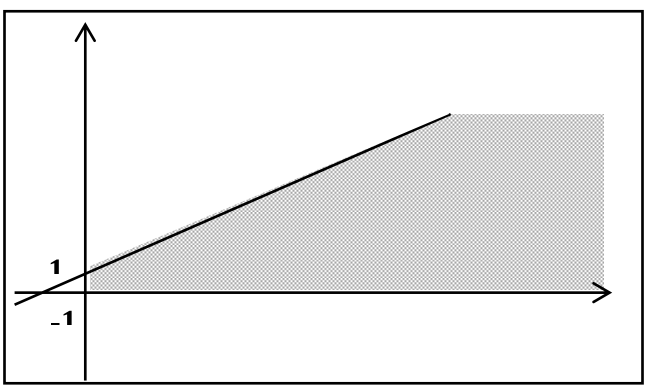
$a \leq 7 \qquad (iii)$

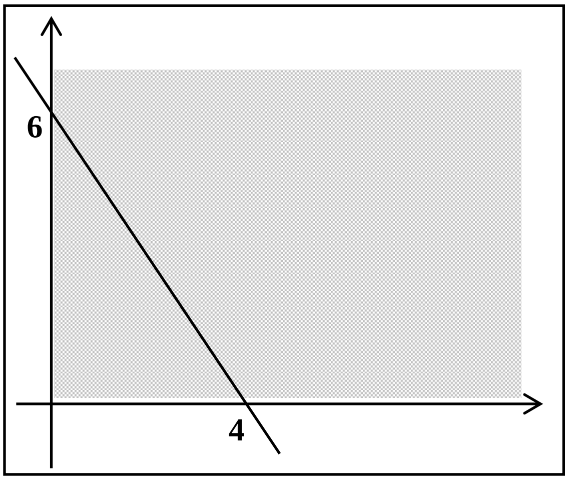
$b \leq 6 \qquad (iv)$

$b \geq 3 \qquad (v)$

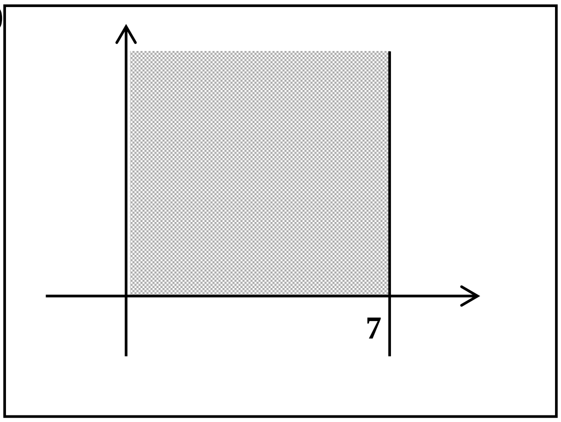
Jika masing-masing pertidaksamaan tersebut dibuat grafiknya, maka daerahnya adalah sebagai berikut:

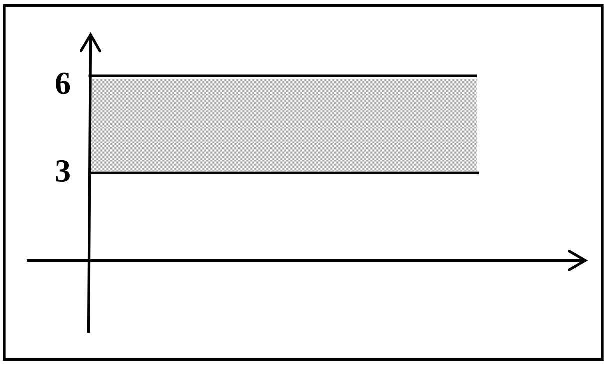
(i)





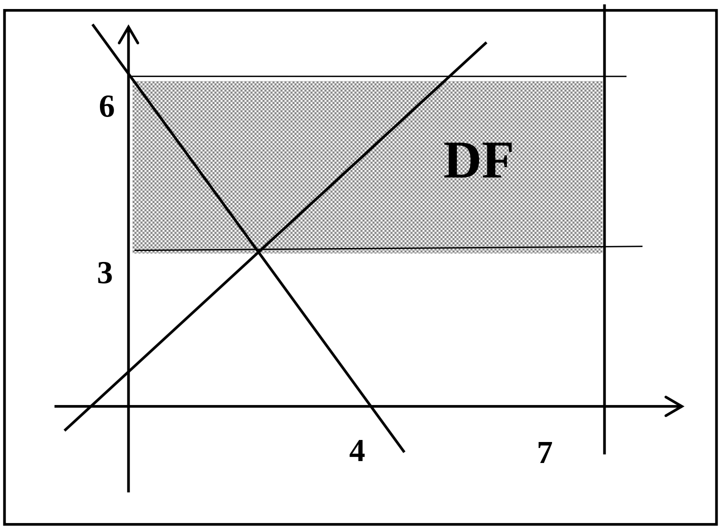
(iii)





Gambar 3.2.1 Grafik dari Fungsi Kendala Contoh 3.2.1

Jika keempat daerah tersebut dijadikan satu bidang kemudian dicari irisannya, maka diperoleh :



Gambar 3.2.2 Grafik dari Fungsi Kendala Contoh 3.2.1

Masing-masing kendala pertidaksamaan di atas menjangkau suatu bidang penyelesaian, dimana variabel-variabel keputusan memenuhi fungsi-fungsi matematikanya. Perpotongan antara bidang penyelesaian dari masing-masing kendala membentuk suatu bidang baru yang dinamakan dengan daerah layak (*feasible region*). Oleh karena itu, penyelesaian optimum yaitu variabel-variabel keputusan yang memenuhi seluruh kendala dan mengakibatkan fungsi tujuan bernilai ekstrim, pasti terletak pada daerah layak.

3.2.2 Titik Pojok Pada Daerah Penyelesaian Layak

Sebuah titik pojok dari daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan adalah sebuah titik pada atau di dalam daerah penyelesaian yang merupakan perpotongan dua garis pembatas. Titik pojok sering disebut juga titik ekstrim.

Contoh 3.2.2.a (Masalah daerah tertutup)

Maksimumkan $z = 200x_1 + 150x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$x_1 + 2x_2 \leq 80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (2)$

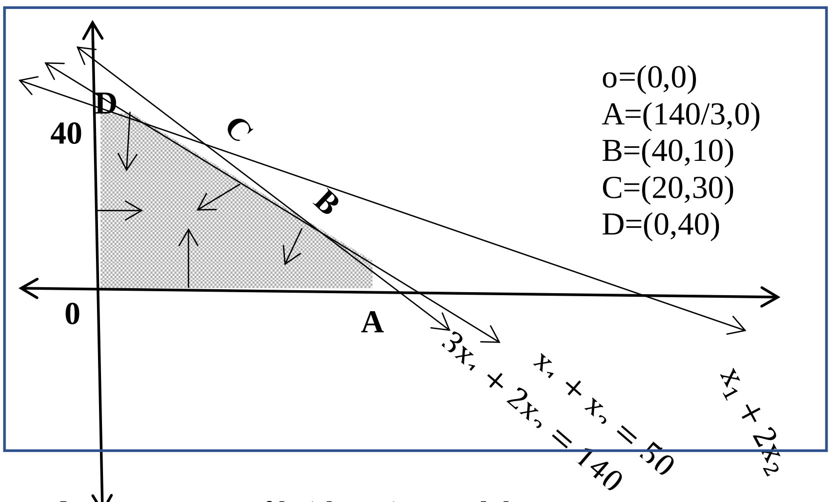
$3x_1 + 2x_2 \leq 140 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$

$x_1 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

$x_2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

Penyelesaian:

a. Gambarkan daerah yang memenuhi (1), (2), (3), (4), dan (5).
b. Gambarkan fungsi tujuan dengan memilih z tertentu (dalam matematika SMA disebut garis selidik)
c. Buatlah garis yang sejajar dengan garis pada poin b, geser sampai ke titik ujung daerah penyelesaian, substitusikan koordinat titik ujung tersebut ke persamaan tujuan, titik manakah yang membuat fungsi tujuan maksimum.



Gambar 3.2.2.a Grafik (sketsa) Masalah Program Linear

Sehingga daerah yang memenuhi MPL pada poin a adalah daerah segilima 0ABCD, dengan $0 = (0,0), A = (140\backslash 3,0), B = (40, 10), C = (20,30), D = (0,40)$. Bila diringkas diperoleh:

$B = (40,10)$	$z = 200.40 + 150.10 = 9500$	Maksimum

Contoh 3.2.2.b

Minimumkan $z = 300x_1 + 150x_2$

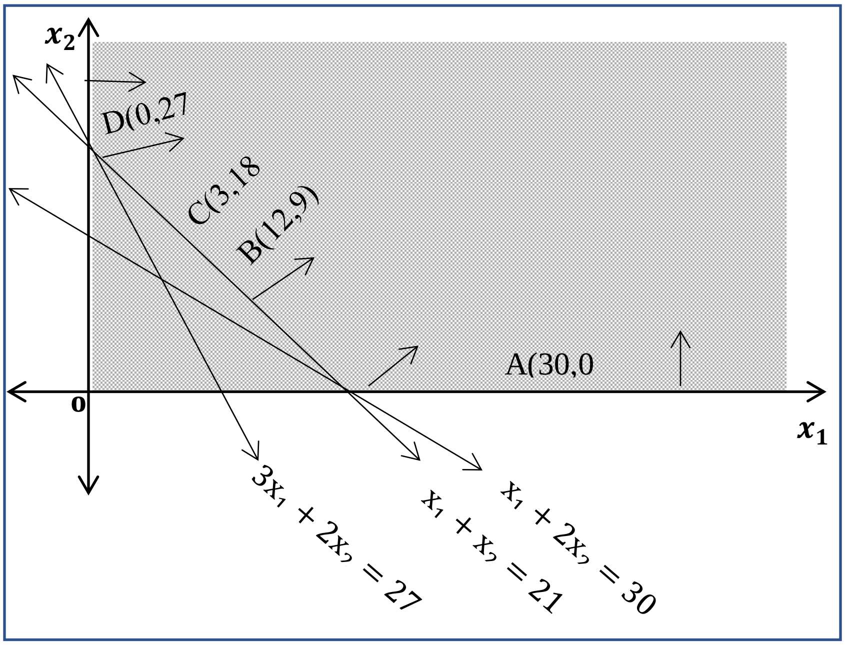
dp. $3x_1 + x_2 \geq 27$ … … … … … … … … … … (1)

$x_1 + x_2 \geq 21$ … … … … … … … … … … … (2)

$x_1 + 2x_2 \geq 30$ … … … … … … … … … … . (3)

$x_1 \geq 0$ … … … … … … … … … … … … … … (4)

$x_2 \geq 0$ … … … … … … … … … … … … … … (5)



Gambar 3.2.2.b Grafik (Sketsa) Masalah Program Linear untuk Contoh 3.2.2.b

Tabel ringkasannya sebagai berikut :

Tabel 3.2.2.b Harga Z untuk Contoh 3.2.2.b

Titik	Harga $z = 300x_1 + 150x_2$	Keterangan
$A = (30,0)$	$z = 300.30 + 150.0 = 9000$	
$B = (12,9)$	$z = 300.12 + 150.9 = 4950$	
$C = (3,18)$	$z = 300.3 + 150.18 = 3600$	Minimum
$D = (0,27)$	$z = 300.0 + 150.27 = 4050$	

Jadi, minimum $z = 3600$ untuk $x_1 = 3$ dan $x_2 = 18$.

Definisi :

Contoh 3.2.2.a dan 3.2.2.b di atas, adalah memperlihatkan penyelesaian masalah program linear.

Seperti telah dibahas dalam Bab 1 sebelumnya, bahwa bila ditinjau dari segi kemungkinan, terdapat empat kemungkinan penyelesaian MPL :

a. MPL tidak punya penyelesaian
b. MPL punya penyelesaian tunggal (unik)
c. MPL punya penyelesaian banyak tapi terbatas
d. MPL punya penyelesaian yang banyaknya tak terbatas

Contoh Lain Masalah Program Linier

1. Seorang ibu rumah tangga mempunyai 1,6 kg tepung beras dan 2,4 kg tepung terigu untuk membuat kue jenis A dan B. Setiap kue A memerlukan 160 gram tepung beras dan 200 gram tepung terigu,

sedangkan setiap kue B memerlukan 120 gram tepung beras dan 300 gram tepung terigu. Ia hendak membuat lebih dari 2 loyang kue A dan sekurang-kurangnya satu loyang kue B. Dalam berapa carakah dua jenis kue dapat dibuat? Lalu, tentukan jumlah loyang kue jenis mana yang terbanyak yang dapat dibuat.

Jawaban:

Misalkan x dan y sebagai dua variabel yang hendak dihitung nilainya dimana x mewakili banyak kue A serta y mewakili banyak kue B.

Analisis kasus:

a. Setiap kue A dan setiap kue B memerlukan masing-masing 160 gram dan 120 gram tepung beras. Tepung beras yang tersedia adalah 1.600 gram. Kue A memerlukan (x kali 160 gram tepung beras) dan kue B memerlukan (y kali 120 gram tepung beras), sehingga banyak tepung beras yang diperluaskan untuk membuat x kue A dan y kue B adalah (160x + 120y) gram. Hanya tersedia 1.600 gram tepung beras, maka (160x + 120y) gram tepung terigu yang tidak boleh melebihi 1.600 gram. Jadi, pertidaksamaan yang dapat disusun adalah:

$160x + 120y \leq 1.600$, di mana x dan y $\in$ **B** (bilangan bulat).

b. Setiap kue A dan setiap kue B masing-masing memerlukan 200 gram dan 300 gram tepung terigu. Dari 2.400 gram tepung terigu yang tersedia, kue A memerlukan (x kali 200 gram tepung terigu) dan kue B memerlukan (y kali 300 gram tepung terigu), sehingga banyak tepung terigu yang diperlukan untuk membuat kue A dan kue B adalah (200x + 300y) gram. Hanya tersedia 2.400 gram tepung terigu, maka (200x + 300y) gram tepung terigu yang tidak boleh melebihi 2.400 gram. Jadi, pertidaksamaan yang dapat disusun adalah:

$200x + 300y \leq 2.400$, x dan y $\in$ **B** (bilangan bulat).

c. Ia berencana membuat lebih dari 2 loyang kue A, maka $x > 2$.

d. Membuat Sekurang-kurangnya satu loyang kue **B**, maka $y \geq 1$.

2. Carilah x_1 dan x_2 sedemikian rupa sehigga:

Z=$200x_1 + 150x_2$ bernilai maksimum

Dengan pembatas (dp) $10x_1 + 10x_2 \leq 500$

$10x_1 + 20x_2 \leq 800$

$30x_1 + 20x_2 \leq 1400$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Penulisan lain dari contoh diatas, yaitu bisa dengan cara membagi 10 terhadap kendala (1), (2), dan (3) menjadi:

Maksimumkan $Z = 200x_1 + 150x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 50$ ....(1)

$x_1 + x_2 \leq 80$ ....(2)

$3x_1 + 2x_2 \leq 140$ ....(3)

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Bila MPL di atas ditulis dalam bentuk matriks, maka akan seperti berikut:

Maksimumkan Z=$200x_1 + 150x_2$

dp. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$

$x_1 \geq 0,$ untuk i=1,2

Secara umum rumusan MPL dengan notasi matriks adalah sebagai berikut:

Optimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$

$$\text{dp.}\begin{bmatrix} a_{11} a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \text{atau} \geq \text{atau} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$x_i \geq 0$, untuk i = 1,2,3, ... , n.

Bila disingkat dapat ditulis:

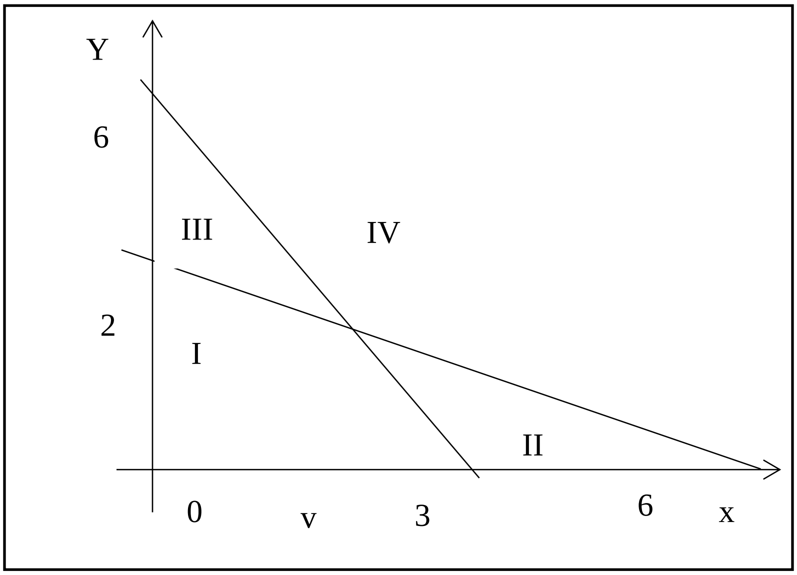
Optimumkan Z = Cx

dp.Ax ≤ atau ≥ atau = B

$x_i \geq 0$

Untuk A adalah matriks koefisien a_i, B adalah matriks koefisien b_i, dan C adalah matriks koefisien c_i.

3. Daerah penyelesaian dari sistem persamaan linear $2x + y \leq 6; x + 3y \geq 6; x \geq 0; y \geq 0, x, y \in$ R adalah…

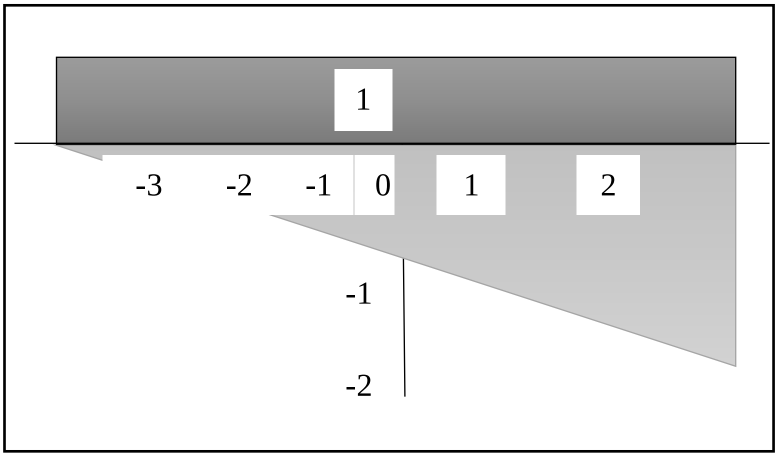


Jawaban:
Titik potong garis$2x + y \leq 6$ terhadap penyelesaian untuk pertidaksamaan.
Ini karena bertanda $\leq$(arsiran ke bawah).
Titik potong garis $x + 3y \geq 6$ terhadap sumbu koordinat dapat dinyatakan dalam tabel berikut.

x	0	6
y	2	0
(x, y)	$(0,2)$	$(6,0)$

Daerah III dan IV adalah penyelesaian untuk pertidaksamaan ini karena bertanda $\geq$ (arsirannya ke atas). Perhatikan bahwa pertidaksamaan $x \geq 0, y \geq 0$ membatasi daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear tersebut merupakan daerah III.

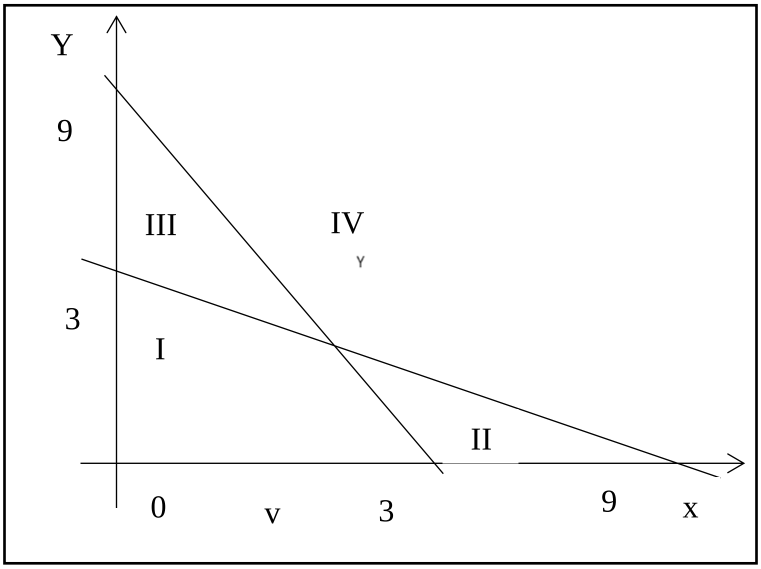
4. Perhatikan grafik berikut ini!



Grafik pertidaksamaan linear
Daerah yang diarsir merupakan penyelesaian dari pertidaksamaan...
Jawaban:

Grafik garis lulus di atas memotong sumbu $-Y$ di $(O,-1)$.
Dengan demikian, persamaan garisnya berbentuk
$-1x + (-3)y = (-1)(3)$
$-x - 3y = 3$
Uji titik (0,0) untuk mengecek tanda:
$0 + 3(0) = 0 \geq -3$
Dengan demikian, pertidaksamaan garisnya adalah $3y + x \geq -3$
(catatan: bila garisnya putus-putus, gunakan tanda >)

5. Daerah penyelesaian dari sistem persamaan linear $3x + y \leq 9; x + 3y \geq 9; x \geq 0; y \geq 0, x, y \in$ R adalah…



Jawaban:
Titik potong garis $3x + y \leq 9$ terhadap penyelesaian untuk pertidaksamaan.
Ini karena bertanda ≤(arsiran ke bawah).
Titik potong garis $x + 3y \geq 9$ terhadap sumbu koordinat dapat dinyatakan dalam tabel berikut.

x	0	9
y	3	0

(x, y)	$(0,3)$	$(9,0)$

Daerah III dan IV adalah penyelesaian untuk pertidaksamaan ini karena bertanda $\geq$ (arsirannya ke atas). Perhatikan bahwa pertidaksamaan $x \geq 0, y \geq 0$ membatasi daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan

3.3. Kegiatan Pembelajaran 3. Aplikasi Program Linear

Beberapa masalah penentuan nilai optimum yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari dapat diformulasikan ke bentuk masalah program linear dan diselesaikan dengan metode uji titik pojok.

Langkah-langkah yang harus ditempuh dalam mengubah persoalan sehari-hari ke dalam bentuk masalah program linear adalah sebagai berikut :

1. Tetapkan objek-objek yang dituju dengan pemisah variabel x dan y.
2. Tuliskan ketentuan-ketentuan yang ada ke dalam sebuah tabel dan tuliskan model matematikanya.
3. Selesaikanlah model matematika tersebut dengan metode uji titik pojok untuk memperoleh nilai optimum fungsi objektif.

Contoh 3.3

Seorang penjahit pakaian mempunyai persediaan 16 m kain sutera, 11 m kain wol, 15 m kain katun yang akan dibuat 2 model pakaian dengan ketentuan berikut ini:

- Model A membutuhkan 2 m sutera, 1 m wol, dan 1 m katun per unit.
- Model B membutuhkan 1 m sutera, 2 m wol, dan 3 m katun per unit.

Jika keuntungan pakaian model A Rp.30.000/unit dan keuntungan pakaian model B Rp.50.000/unit, tentukan banyaknya masing-

masing pakaian yang harus dibuat agar diperoleh keuntungan maksimum.

Jawaban:

Misalkan : x = jumlah pakaian model A

y = jumlah pakaian model B

Tabel 3.3 Perencanaan Model Matematika Contoh 3.3

Bahan	Model A (x)	Model B (y)	Tersedia
Sutera	2	1	16
Wol	1	2	11
Katun	1	3	15
Keuntungan	30.000	50.000	

Model matematika yang terbentuk:
Memaksimumkan fungsi tujuan $z = 30.000x + 50.000y$

Kendala:

$2x + y \leq 16$

$x + 2y \leq 11$

$x + 3y \leq 15$

$x \geq 0, y \geq 0$

Gambar di bawah ini menunjukkkan daerah penyelesaian dari kendala masalah program linier.

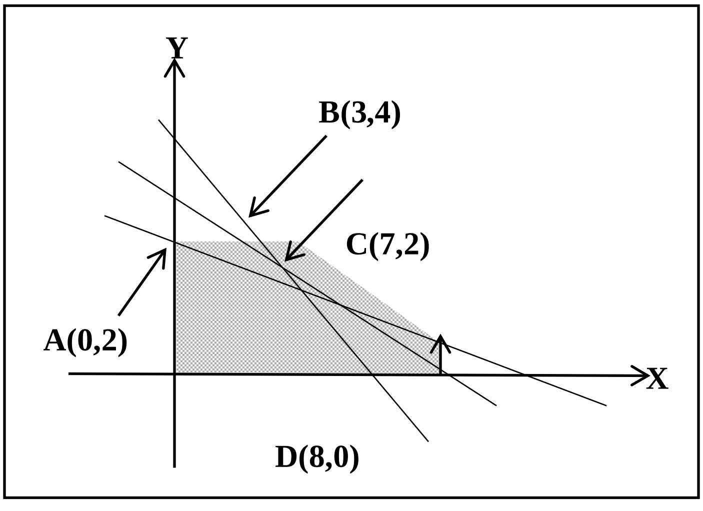
Penentuan titik pojok daerah penyelesaian:

1. A(0,5), perpotongan garis x+3y = 15 dengan sumbu Y
2. B(3,4), perpotongan garis x+3y = 15 dengan garis x+2y =11 Penentuan titik B:

$x + 3y = 15$
$\underline{x + 2y = 11}$ -
$y = 4$
$x + 8 = 11 \rightarrow x = 3$

- B(3,4)

3. C(7,2), perpotongan garis 2x+y = 16 dan garis x+2y = 11.
   Penentuan titik C:
   $2x + y = 16$
   $\underline{x + 2y = 11 +}$
   $3(x + y) = 27$

   $x + y = 9$
   $\underline{x + 2y = 11}$
   $-y = -2$
   $y = 2$
   $x + 2 = 9 \rightarrow x = 7$
   - C(7,2)
4. D(0,8), perpotongan garis 2x+y = 16 dengan sumbu X.
5. 

Gambar 3.3 Daerah Penyelesaian Contoh 3.3

Penentuan nilai maksimum fungsi tujuan z dengan uji titik potong daerah penyelesaian kendala:

Tabel 3.3 Harga Z untuk contoh 3.3

Fungsi Tujuan: $z = 30.000x + 50.000y$	
Titk Pojok	Nilai z
$A(0,5)$	$Z = 0 + 250.000 = 250.000$
$B(3,4)$	$z = 90.000 + 200.000 = 290.000$
$C(7,2)$	$z = 210.000 + 100.000 = 310.000$
$D(8,0)$	$z = 240.000 + 0 = 240.000$

Jadi, banyaknya pakaian yang harus dibuat adalah 7 unit model pakaian A dan 2 unit model pakaian B dengan keuntungan Rp. 310.000.

Sebagai pengantar konsep agar memiliki pemahaman yang baik mengenai program linear, perhitungan matematis tersebut sangatlah berharga dan diperlukan. Namun, dalam realitanya, program linear banyak bersinggungan dengan nilai-nilai dan satuan yang tidak ideal. Hal tersebut mengakibatkan perhitungan dalam permasalahan program linear memerlukan waktu yang tidak singkat dan terkadang bilangan-bilangan yang muncul membuat permasalahan menjadi semakin rumit.

Seiring dengan perkembangan ternologi, saat ini telah banyak bermunculan berbagai perangkat lunak yang menyediakan pemrosesan permasalahan program linear, seperti Maple, Ms.Excel, Lindo, POM-QM, dan lain sebagainya.

3.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Rangkuman

Program Linier merupakan:
Suatu pendekatan pemecahan masalah yang dikembangkan untuk membantu mengambil keputusan.

Masalah program linier adalah:
Masalah yang timbul karena seseorang mempunyai pilihan untuk memutuskan apa yang harus dia lakukan dari masing-masing pilihan dengan sumber yang sama namun jumlahnya terbatas.

Suatu masalah dikatakan masalah program linier jika mengandung point berikut: 1. Terdapat tujuan yang dicapai

2. Terdapat sumber daya atau masukan (input) yang berada dalam keadaan terbatas

3. Pola umum masalah yang dapat dimodelkan dengan program linear harus memenuhi

4. Adanya pilihan kombinasi berbagai faktor kegiatan

5. Adanya sumber penunjang berserta batasanya

6. Adanya fungsi objektif/sasaran/tujuan yang harus dioptimumkan

7. Semua relasi yang timbul antara faktor-faktor adalah linear

Langkah-langkah penyelesaian soal masalah program linier:

1. Merancang model matematika

Model matematika terdiri dari dua bagian, yakni fungsi kendala dan fungsi objektif. Fungsi kendala berupa persamaan atau pertidaksamaan, sedangkan fungsi objektif berupa fungsi yang menjelaskan tujuan (memaksimumkan dan meminimumkan).

2. Menggambar Grafik Sesuai Model Matematika

Grafik yang digambar adalah berupa daerah himpunan penyelesaian (DHP) dari sistem pertidaksamaan linier yang merupakan kendala pada model matematika. Langkah awal untuk menggambar grafik supaya lebih mudah adalah dengan menggambar terlebih dahulu gambar dari masing-masing persamaan.

3. Menentukan Titik Pojok

Titik pojok adalah titik-titik pada daerah himpunan penyelesaian (DHP). Dalam arti lain merupakan titik potong garis dengan garis atau garis dengan sumbu koordinat.

4. Menentukan Nilai Maksimum atau Minimum

Nilai maksimum atau minimum adalah nilai fungsi objektif yang paling besar/kecil dari titik-titik yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian (DHP). Secara umum, nilai maksimum dan minimum ini diperoleh dari titik pojok. Kata kunci dari masalah program linier adalah: “Memaksimumnkan dan Meminimumkan”

3.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Diskusi Kelompok

1. Seorang Ibu berencana ingin membuat 2 jenis kue, yakni kue basah dan kue kering. Adonan kue basah dibuat dengan 3 kg tepung dan 2 kg gula, sedangkan adonan kue kering dibuat dengan 3 kg tepung dan 4 kg gula. Ibu memiliki persediaan tepung sebanyak 7 kg dan persediaan gula sebanyak 8 kg. Jika setiap satu adonan kue basah dapat memberikan untung Rp.80.000 dan setiap satu adonan kue kering dapat memberikan untung Rp.65.000. Berapa banyak kombinasi adonan kue yang dapat dibuat supaya memperoleh keuntungan maksimal?

Misalkan : $x = adonan\ kue\ basah$

$y = adonan\ kue\ kering$

Bahan	Tepung	Gula
Adonan kue basah (x)	3 kg	2 kg
Adonan kue kering (y)	3 kg	4 kg
Persediaan	7 kg	8 kg

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 3y \leq 7$
$2x + 4y \leq 8$

Fungsi tujuan adalah memaksimalkan:
$f(x, y) = 80000x + \cdots$

$3x + 3y \leq 7$
$\underline{2x + 4y \leq 8}$
……………….
……………….

Substitusi nilai $x = \cdots$ ke persamaan ….. supaya diperoleh nilai y.
…………………..
…………………..

……………………..

Gambar grafik dan tabel.

……………

……………

Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh adalah …….., dengan membuat sebanyak ….. adonan kue basah dan sebanyak ……. adonan kue kering.

2. Seorang Ibu berencana ingin membuat 2 jenis kue, yakni kue basah dan kue kering. Adonan kue basah dibuat dengan 2 kg tepung dan 1 kg gula, sedangkan adonan kue kering dibuat dengan 2 kg tepung dan 3 kg gula. Ibu memiliki persediaan tepung sebanyak 6 kg dan persediaan gula sebanyak 5 kg. Jika setiap satu adonan kue basah dapat memberikan untung Rp.75.000 dan setiap satu adonan kue kering dapat memberikan untung Rp.60.000. Berapa banyak kombinasi adonan kue yang dapat dibuat supaya memperoleh keuntungan minimum?

Misalkan : $x = adonan\ kue\ basah$
$y = adonan\ kue\ kering$

Bahan	Tepung	Gula
Adonan kue basah (x)	2 kg	1 kg
Adonan kue kering (y)	2 kg	3 kg
Persediaan	6 kg	5 kg

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + 2y \leq 6$

$x + 3y \leq 5$

Fungsi tujuan adalah memaksimalkan:
$f(x, y) = 75000x + \cdots$

$$\begin{array}{r} 2x + 2y \leq 6 \\ x + 3y \leq 5 \\ \hline \end{array}$$

……………….

………………

Substitusi nilai $x = \cdots$ ke persamaan ….. supaya diperoleh nilai y.

…………………..

…………………..

…………………..

Gambar grafik dan tabel.

……………

……………

Jadi, keuntungan minimum yang diperoleh adalah …….., dengan membuat sebanyak ….. adonan kue basah dan sebanyak ……. adonan kue kering.

3. Seorang tukang jualan roti berencana ingin membuat 2 jenis roti, yakni roti basah dan roti kering. Adonan roti basah dibuat dengan 5 kg tepung dan 4 kg gula, sedangkan adonan roti kering dibuat dengan 3 kg tepung dan 4 kg gula. Tukang jualan roti memiliki persediaan tepung sebanyak 10 kg dan persediaan gula sebanyak 9 kg. Jika setiap satu adonan roti basah dapat memberikan untung Rp.65.000 dan setiap satu adonan roti kering dapat memberikan untung Rp.60.000. Berapa banyak kombinasi adonan roti yang dapat dibuat supaya memperoleh keuntungan maksimal?

Misalkan : $x = adonan\ roti\ basah$
$y = adonan\ roti\ kering$

Bahan	Tepung	Gula
Adonan roti basah (x)	5 kg	4 kg
Adonan roti kering (y)	3 kg	4 kg
Persediaan	10 kg	9 kg

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$5x + 3y \leq 10$
$3x + 4y \leq 9$

Fungsi tujuan adalah memaksimalkan:
$f(x, y) = \cdots + 60000y$

$5x + 3y \leq 10$
$\underline{3x + 4y \leq 9}$
……………….
………………

Substitusi nilai $x = \cdots$ ke persamaan ….. supaya diperoleh nilai y.
…………………..
…………………..
…………………..

Gambar grafik dan tabel.

……………

……………

Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh adalah …….., dengan membuat sebanyak ….. adonan roti basah dan sebanyak ……. adonan roti kering.

4. Seorang tukang jualan roti berencana ingin membuat 2 jenis roti, yakni roti basah dan roti kering. Adonan roti basah dibuat dengan 6 kg tepung dan 2 kg gula, sedangkan adonan kue kering dibuat dengan 5 kg tepung dan 1 kg gula. Tukang jualan roti memiliki persediaan tepung sebanyak 12 kg dan persediaan gula sebanyak 5 kg. Jika setiap satu adonan roti basah dapat memberikan untung Rp.55.000 dan setiap satu adonan roti kering dapat memberikan untung Rp.45.000. Berapa banyak kombinasi adonan roti yang dapat dibuat supaya memperoleh keuntungan maksimal?

Misalkan : $x = adonan\ roti\ basah$
$y = adonan\ roti\ kering$

Bahan	Tepung	Gula
Adonan roti basah (x)	6 kg	2 kg
Adonan roti kering (y)	5 kg	1 kg
Persediaan	12 kg	5 kg

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$6x + 5y \leq 12$
$2x + \ \ y \leq 5$

Fungsi tujuan adalah memaksimalkan:
$f(x, y) = \cdots + 45000y$

$6x + 5y \leq 12$
$2x + \ \ y \leq 5$

……………….
……………
Substitusi nilai $x = \cdots$ ke persamaan ….. supaya diperoleh nilai y.
…………………..

……………………..
……………………..

Gambar grafik dan tabel.

……………

……………

Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh adalah …….., dengan membuat sebanyak ….. adonan roti basah dan sebanyak ……. adonan roti kering.

5. Sebuah pabrik roti melakukan percobaan dengan membuat adonan 2 jenis roti, yakni roti basah dan roti kering. Adonan roti basah dibuat dengan 14 kg tepung dan 8 kg gula, sedangkan adonan roti kering dibuat dengan 11 kg tepung dan 5 kg gula. Tukang jualan roti memiliki persediaan tepung sebanyak 25 kg dan persediaan gula sebanyak 15 kg. Jika setiap satu adonan roti basah dapat memberikan untung Rp.85.000 dan setiap satu adonan roti kering dapat memberikan untung Rp.70.000. Berapa banyak kombinasi adonan roti yang dapat dibuat supaya memperoleh keuntungan maksimal dan keuntungan minimal?

Misalkan : $x = adonan\ roti\ basah$
$y = adonan\ roti\ kering$

Bahan	Tepung	Gula
Adonan roti basah (x)	14 kg	8 kg
Adonan roti kering (y)	11 kg	5 kg
Persediaan	25 kg	15 kg

$x \geq 0$
$y \geq 0$

$$14x + 11y \leq 25$$
$$8x + 5y \leq 15$$

Fungsi tujuan adalah memaksimalkan:
$f(x, y) = \cdots + 70000y$

$$\begin{array}{r} 14x + 11y \leq 25 \\ 8x + 5y \leq 15 \\ \hline \end{array}$$
……………….
………………

Substitusi nilai $x = \cdots$ ke persamaan ….. supaya diperoleh nilai y.
…………………..
…………………..
…………………..

Gambar grafik dan tabel.

……………

……………

Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh adalah …….., sedangkan keuntungan minimumnya adalah ………

6. Biaya produksi satu buah dompet jenis A adalah Rp25.000 per buah, sedangkan biaya satu buah produksi dompet jenis B adalah Rp35.000,00. Seorang pengusaha akan membuat dompet A dengan jumlah tidak kurang dari 45 buah. Sedangkan banyaknya payung jenis B yang akan diproduksi minimal adalah dari 55 buah. Jumlah maksimal produksi kedua dompet tersebut adalah 120 buah. Biaya minimum yang dikeluarkan untuk melakukan produksi kedua dompet sesuai ketentuan tersebut adalah ….

Misalkan : $x = dompet\ jenis\ A$
$y = dompet\ jenis\ B$

Fungsi tujuan adalah meminimumkan:

$f(x, y) = 25000x + 35000y$

Fungsi kendala adalah :

$x \geq 45$

$y \geq 55$

$x + y \leq 120$

Daerah penyelesaian yang memenuhi persamaan:
Gambar grafik.

…………………

…………………

………………....

…………………

Nilai minimim akan diperoleh melalui titik koordinat yang dilalui garis selidik yang pertama kali, yaitu titik A(45, 55). Sehingga, biaya produksi minimum adalah:

$f(45,55) = \cdots$

$f(45,55) = \cdots$

$f(45,55) = \cdots$

7. Biaya produksi satu buah tas jenis E adalah Rp50.000 per buah, sedangkan biaya satu buah produksi tas jenis B adalah Rp75.000,00. Sebuah perusahaan akan membuat tas E dengan jumlah tidak kurang dari 40 buah. Sedangkan banyaknya tas jenis B yang akan diproduksi minimal adalah dari 35 buah. Jumlah maksimal produksi kedua payung tersebut adalah 90 buah. Biaya maksimum yang dikeluarkan untuk melakukan produksi kedua tas sesuai ketentuan tersebut adalah ….

Misalkan : $x = tas\ jenis\ E$

$y = tas\ jenis\ B$

Fungsi tujuan adalah memaksimumkan:
$f(x, y) = 50000x + 75000y$

Fungsi kendala adalah :
$x \geq 40$
$y \geq 35$
$x + y \leq 90$

Daerah penyelesaian yang memenuhi persamaan:
Gambar grafik.
…………………
…………………
………………....
………………….

Nilai minimim akan diperoleh melalui titik koordinat yang dilalui garis selidik yang pertama kali, yaitu titik A(40, 35). Sehingga, biaya produksi minimum adalah:
$f(40{,}35) = \cdots$
$f(40{,}35) = \cdots$
$f(40{,}35) = \cdots$

8. Tentukan nilai minimum f(x, y) = 14x + y pada daerah yang dibatasi oleh 2 ≤ x ≤ 5, dan 8 ≤ y ≤ 11 serta x + y ≤ 28.

Gambar grafik.

…………………..

…………………..

…………………..

…………………..

…………………...

Dari gambar di atas, ada 4 titik ekstrim, yaitu: A, B, C, D dan himpunan penyelesaiannya ada di area yang diarsir.

Dari grafik diketahui titik A dan B memiliki y = 0, sehingga kemungkinan menjadi nilai minimum. Kedua titik disubstitusikan ke dalam f(x, y) = 14x + y untuk dibandingkan.

Titik $A(x, y) = \cdots$ Titik $B(x, y) = \cdots$

9. Diketahui luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan. Biaya parkir mobil kecil Rp.1.000,00/jam dan mobil besar Rp.2.000,00/jam. Jika dalam satu jam parkiran tersebut terisi penuh, maka pendapatan maksimum yang diperoleh dari hasil parkir adalah...

Misalkan:

Mobil kecil dilambangkan dengan x
Mobil besar dilambangkan dengan y
Luas parkir 1760 m^2
Daya tampung parkir 200

$4x + 20y \leq 1760$ disederhanakan menjadi
... +... ≤ ... (Garis I)
... +... ≤ ... (Garis II)
Membuat sketsa Garis 1 dan garis 2
Titik potong sumbu $x, y = 0$
$x + y =$ ...
....
Titik potong sumbu $y, x = 0$
$x + y =$ ...
....
Menentukan titik potong garis 1 dan garis 2
Untuk menentukan titik potong biasa dengan substitusi ataupun eliminasi.

$$\frac{\begin{array}{r} x+\cdots y=\cdots \\ x+y \quad =\cdots \end{array}}{\begin{array}{r} \ldots=\cdots \\ y=\cdots \end{array}} -$$

....
....

Gambar garafik
....
....
…………..
…………..

10. Nilai maksimum dari persamaan $(x, y) = 7x + 6y$ sertakan grafik yang menunjukkan luas daerah dari persamaan tersebut!

Buatlah persamaan garis
$y - y_1 = m(x - x_1)$
dengan
$m = \Delta y/\Delta x$
Persamaan garis yang melalui titik (12,0) dan (0,20) adalah
$m = 20/-12 = 5/-3$
....
....
Buatlah persamaan garis
$bx + ay = ab$

Gambar grafik
....
....
…………..
…………..

Titik potong kedua garis
$6x + 5y = 90$
$$\frac{3y+5x=60}{y=\cdots} -$$
$3(\ldots) + 5x = 60$
$x = \ldots.$
$x = \ldots$

11. Suatu perusahaan mebel memerlukan 18 unsur A dan 24 unsur B per hari. Untuk membuat barang jenis I dibutuhkan 1 unsur A dan 2 unsur B, sedangkan unsur membuat barang jenis II dibutuhkan 3 unsur A 2 unsur B. Barang jenis I dijual seharga Rp.250.000,00/unit dan barang jenis II dijual seharga Rp.400.000,00/unit. Agar penjualannya mencapai maksimum, berapa banyak masing-masing barang harus dibuat?

Barang I akan dibuat sebanyak x unit
Barang II akan dibuat sebanyak y unit

Gunakan tabel untuk membuat ilustrasi berikut dalam model matematika:

Barang dan Bahan	X	Y	Bahan tersedia
Unsur A			
Unsur B			

$x + 3y \leq 18$
$2x + 2y \leq 24$
Fungsi objektifnya:
$F(x, y) \ = \ldots . x + \ldots . y$
Titik potong
$x + \cdots y = 18 | \ldots |$
$2x + \cdots y = 24 | \ldots |$

$$\begin{array}{r} 2x + \cdots y = \cdots \\ 2x + \cdots y = \cdots \\ \hline y = \cdots \\ y = \cdots \end{array} -$$

....
....

12. Nilai minimum dari $f(x, y) = 6x + 5y$ yang memenuhi pertidaksamaan $2x + y \geq 5, x + y \geq 5, x \geq 0,$ dan $y \geq 0$ adalah...

Cari titik potongnya terlebih dahulu:

$$\begin{array}{r} 2x+y=\cdots \\ x+y=\cdots \\ \hline x=\cdots \\ y=\cdots \end{array} -$$

Dapat titik A (......)

Gambar grafik
....
....
……………..
……………..

13. Seorang pedagang sepeda ingin membeli 25 unit sepeda sebagai persediaan. Ia ingin membeli sepeda gunung dengan harga Rp.1.500.000,00/unit dan sepeda balap dengan harga Rp.2.000.000,00/unit. Ia merencanakan tidak akan mengeluarkan uang lebih dari Rp.42.000.000,00. Jika keuntungan satu unit sepeda gunung adalah Rp.500.000,00 dan satu unit sepeda balap adalah Rp.600.000,00, maka keuntungan maksimum yang diterima pedagang adalah...

	Sepeda gunung	Sepeda balap	Maksimal pembelian
Unit	X	Y	25
Harga			
Untung			

Banyak sepeda maksimal 25 unit
$(i) x + y \leq 25$
Uang tersedia Rp.42.000.000,00
....
....

Titik potong (i) dan (ii)
....
Keuntungan

....

14. Seorang pedagang gorengan menjual pisang goreng dan bakwan. Harga pembelian untuk satu pisang goreng Rp.1.000,00 dan satu bakwan Rp.400,00. Modalnya hanya Rp.250.000,00 dan muatan gerobak tidak melebihi 400 biji. Jika pisang goreng dijual seharga Rp.1.300,00/biji dan bakwan dijual seharga Rp.600,00/biji, maka keuntungan maksimum yang diperboleh pedagang adalah…

Pisang goreng dilambangkan dengan x
Bakwan dilambangkan dengan y

Model matematikanya:
$1000x + 400y \leq 250000$, (semuanya dibagi 100 agar sederhana)
(i) ... + ... ≤ ...
(ii) ... + ... ≤ ...
$f(x, y) = \cdots + \cdots$

Mencari titik potong garis (i) dan (ii) dengan sumbu x dan y masing-masing:
....
....
Gambar grafik
....
....
…………...
…………...

15. Nilai minimum dari $f(x, y) = 4x + 5y$ yang memenuhi pertidaksamaan $2x + y \geq 7, x + y \geq 5, x \geq 0,$ dan $y \geq 0$ adalah...

Cari titik potongnya terlebih dahulu:

$$\begin{array}{r} 2x+y=7 \\ x+y=5 \\ \hline x=\cdots \\ y=\cdots \end{array} -$$

Diperoleh titik A (...,...)

3.6. Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Latihan Mandiri

1. Jika di suatu kota bernama Kulu ada tanah seluas 20.000 m^2 yang akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk rumah tipe A diperlukan 200 m^2 dan rumah tipe B diperlukan 85 m^2. Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 135 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp.7.000.000,00/unit dan tipe B adalah Rp. 5.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut adalah...

2. Jika di suatu desa bernama Aruk ada tanah seluas 40.000 m^2 yang akan dibangun kontrakan tipe 1 dan tipe 2. Untuk rumah tipe 1 diperlukan 200 m^2 dan tipe 2 yang di perlukan 40 m^2. Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 120 unit. Keuntungan rumah tipe 1 adalah Rp. 8.000.000,00/unit dan tipe 2 adalah Rp. 6.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan kontrakan tersebut adalah...

3. Jika Pak Dadang memiliki dua jenis logam campuran X dan Y terdiri atas logam A,B, dan C. Dua kg logam campuran X terdiri atas 6 ons logam A, 4 ons logam B, dan 3 ons logam C. Dua kg logam campuran Y terdiri atas 3 ons logam A, 4 ons logam B, dan 6 ons logam C. Logam M dibuat semurah-murahnya dari logam X dan Y, sehingga sekurang-kurangnya terdiri atas 6 kg logam A, 7,2 kg logam B, dan 6 kg logam C. Jika harga logam X Rp.5000,00/kg dan harga logam Y Rp.3000,00/kg berapakah harga minimum logam campuran M?

4. Seorang pedagang sepeda ingin membeli 30 sepeda untuk persediaan. Ia ingin membeli sepeda gunung dengan harga Rp.1.500.000,00/unit dan sepeda balap dengan harga Rp.2.000.000,00/unit. Ia berencana tidak akan mengeluarkan uang lebih dari Rp.45.000.000,00. Jika keuntungan sebuah sepeda gunung Rp.500.000,00 dan sebuah sepeda balap Rp.700.000,00, maka Keuntungan maksimum yang akan diterima pedagang sepeda adalah...

5. Seorang pedagang sepatu sepak bola ingin membeli 50 pasang sepatu bola untuk persediaan di toko. Ia ingin membeli sepatu dengan ukuran 15 berjumlah 20 pasang dengan harga Rp.

125.000,00 sepasang. Selanjutnya sepatu dengan ukuran 40 berjumlah 22 pasang dengan harga Rp.150.000,00 sepasang dan sepatu dengan ukuran 45 berjumlah 8 pasang dengan harga Rp. 175.000,00 sepasang. Ia berencana tidak akan mengeluarkan uang lebih dari Rp. 5.000.000,00. Jika keuntungan sebuah sepatu sepak bola adalah Rp. 250.000,00, maka keuntungan maksimum yang akan di terima dari hasil penjualan adalah...

6. Jika diketahui untuk membuat suatu bungkus manisan A diperlukan 50 gram mentega dan 60 gram tepung, sedangkan untuk satu manisan B diperlukan 100 gram mentega dan 20 gram tepung. Jika tersedia 3,5 kg mentega dan 2,2 kg tepung, maka jumlah kedua jenis manisan yang dapat dibuat paling banyak adalah...

7. Sebuah pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg, sedangkan kelas ekonomi 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1440 kg. Harga tiket kelas utama Rp.150.000 dan kelas ekonomi Rp.100.000. Supaya pendapatan dari penjualan tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, jumlah tempat duduk utama haruslah ….

8. Diketahui sebuah tempat parkir dengan luas 600 m^2 hanya mampu menampung 58 bus dan mobil. Tiap mobil membutuhkan tempat 6 m^2dan tiap bus 24 m^2. Biaya parkir tiap mobil Rp.500,- dan bus Rp.750,-. Jika tempat parkir tersebut penuh, hasil dari biaya parkir maksimum adalah ….

9. Seorang pedagang rokok mempunyai modal Rp.300.000 dan kiosnya dapat menampung paling banyak 250 bungkus rokok. Jadi, pedagang tersebut akan mendapat keuntungan maksimum jika ia membeli …. rokok.

10. Untuk membuat satu adonan roti A diperlukankan 50 gram mentega dan 60 gram tepung, dan satu adonan roti B diperlukan 100 gram mentega dan 20 gram tepung. Jika tersedia 3,5 kg mentega dan 2,2 kg tepung. Berapakah jumlah kedua macam roti yang dapat dibuat paling banyak ….

11. Seseorang diharuskan makan dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari ia memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet pertama Rp.4000/biji dan harga tablet kedua Rp.8000/biji, maka pengeluaran minimum untuk membeli tablet perhari adalah …

12. Nilai maksimum fungsi objektif $f(x,y) = 4x + 5y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan $x + 2y \geq 6; x + y \leq 8; x \geq 0; y \geq 2$ adalah ...

13. Seorang pedangang paling sedikit menyewa 28 kendaraan untuk jenis truk dan colt, dengan jumlah yang diangkut sebanyak 270. Truk dapat mengangkut tidak lebih dari 14 karung dan colt dapat mengangkut 8 karung. Ongkos sewa truk Rp500.000,00 dan colt Rp.300.000,00. Jika x menyatakan banyaknya colt, maka model matematika dari permasalahan di atas adalah ...

14. Anis membeli mangga dan apel. Jumlah buah apel yang dibeli paling sedikit 12 buah. Mangga yang dibeli paling banyak 6 buah. Harga mangga adalah Rp.2.000,00/buah. Ia membeli x mangga dengan y apel, maka sistem pertidaksamaan yang sesuai adalah ...

15. Seorang pengusaha roti akan membuat roti, yakni roti jenis A dan roti jenis B. Roti jenis A membutuhkan 20 gram tepung dan 10 gram mentega, sedangkan roti jenis B membutuhkan 15 gram tepung 10 gram mentega. Bahan yang tersedia adalah 5 kg tepung dan 4 kg mentega. Jika x menyatakan banyaknya jenis roti B, maka model matematika persoalan tersebut adalah ...

16. Luas sebuah tempat parkir adalah 429 m^2. Diperlukan seluas 5 m^2 untuk tempat parkir mobil sedan. Harga parkir untuk sebuah mobil sedan adalah Rp3.000,00 dan harga parkir untuk sebuah truk adalah Rp.5.000,00. Jika banyak mobil sedan yang diparkir adalah x unit dan banyak truk yang diparkir adalah y unit. Buatlah model matematika dari masalah tersebut!

17. Untuk menambah penghasilan, seorang ibu rumah tangga setiap harinya memproduksi dua jenis kue untuk dijual. Setiap kue jenis A modelnya Rp1.000,00, dengan keuntungan Rp800,00, sedangkan setiap kue jenis B modalnya Rp1.500,00 dengan keuntungan Rp.900,00. Jika modal yang tersedia setiap harinya adalah Rp.500.000,00 dan paling banyak hanya dapat memproduksi 400 kue, maka keuntungan terbesar yang dapat diperoleh ibu rumah tangga tersebut adalah ...

18. Seorang anak diharuskan minum dua jenis tablet setiap hari. Tablet jenis I terdiri dari 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B. Tablet jenis II mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam 1 hari berapakah minimum biaya yang diperlukan anak tersebut untuk membeli tablet perharinya…

19. Seorang penjahit memiliki persediaan 20 m kain polos dan 20 m kain bergaris untuk membuat 2 jenis pakaian. Pakaian model 1 memerlukan 1 m kain polos dan 3 m kain bergaris. Pakaian model II memerlukan 2 m kain polos dan 1 m kain bergaris. Pakaian model I dijual dengan harga Rp.100.000,00 perpotong. Penghasilan maksimum yang dapat diperoleh penjahit tersebut adalah ...

20. Luas daerah yang dibatasi oleh $2x - y \leq 2, x + y \leq 10$, dan $x \geq -2$ adalah ...

MODUL 4

METODE SIMPLEKS

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mampu memahami dan menyelesaikan dengan baik dan benar pemograman leniar dengan metode Simpleks dan mampu membuat soal denga metode simpleks serta menjelaskan di depan denga baik dan benar.	1. Pengertian metode simpleks 2. Jenis-jenis metode simpleks 3. Metode pemecahan masalah pada jenis-jenis metode simpleks

Tujuan Pembelajaran

1. Mampu memahami pengertian metode simpleks
2. Mampu mengetahui jenis-jenis metode simpleks
3. Mampu memahami jenis-jenis metode simpleks
4. Mampu memahami cara pemecahan masalah pada jenis-jenis metode simpleks
5. Mampu menyelesaikan soal diskusi metode simpleks
6. Mampu menyelesaikan soal latihan mandiri metode simpleks

MODUL 4

METODE SIMPLEKS

4.1 Kegiatan Pembelajaran 1.Defenisi metode simpleks

Metode simpleks adalah algoritma yang digunakan untuk memecahkan masalah dalam pemrograman linear, Metode ini digunakan untuk masalah jumlah variable lebih dari dua. Metode simpleks dapat bekerja dengan cara mengubah kendala pada masalah program linear yang berupa pertidaksamaan menjadi persamaan. Dalam mengubah pertidaksamaan $\leq$ ke persamaan adalah dengan menambahkan variable longgar (*slack variable)*.

Dalam metode simpleks ini terdapat beberapa istilah yaitu:

a) Iterasi adalah tahapan perhitungan di mana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
b) Variabel non basis adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi.
c) Variabel basis adalah adalah variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi.
d) Solusi atau RHS adalah nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia,
e) Variabel longgar (slack) adalah variabel yang ditambahkan ke model matematika untuk mengkonversikan pertidaksamaan $\leq$ menjadi persamaan (=).
f) Variabel buatan adalah variabel yang ditambahkan ke model matematika dengan bentuk pertidaksamaan $\leq$ atau untuk difungsikan sebagai variabel basis awal.
g) Pivot elemen (pe) adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot
h) Baris pivot adalah salah satu baris dari antar variabel baris yang memuat variabel keluar.
i) Kolom pivot adalah kolom yang memuat variabel masuk.

4.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Jenis Metode Simpleks

1. Metode Simpleks Biasa

Metode simpleks dalam bekerja menggunakan proses iterasi, dimulai dari titik ekstrem *feasible* awal ke titik ekstrem *feasible* lain yang terhubung, dan iterasi akan berhenti jika penyelesaian optimal telah diperoleh . Metode simpleks biasa digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier yang kendala-kendala strukturalnya semua menggunakan tanda "≤" (masalah yang memuat variable longgar).

Contoh 1

Minimumkan Z = $-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6$

dp. $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \leq 6$

$2x_1 - x_2 - 2x_3 + +x_4 \leq 4$

$x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 4$

$x_i \geq 0$,untuk i =1,2,3…,6

Catatan :Pertidaksamaan (1), (2), dan (3) disebut kendala struktural, sedangkan pertidaksamaan (4) disebut kendala non negative.

Penyelesaian:

Prosedur kerja metode simpleks biasa sebagai berikut :

1. a) Mengubah pertidaksamaan kendala struktural (dp) menjadi persamaan dengan menambahkan **variable longgar**

   $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 = 6$

   $2x_1 - x_2 - 2x_3 + +x_4 + x_8 = 4$

   $x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_9 = 4$

   $x_i \geq 0$, untuk i = 1,2,3…,9

   dimana x_7, x_8, x_9 disebut variabel longgar.

   b) Fungsi tujuan ditambah dengan variabel longgar dengan koefisien nol

   Z = $-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9$

   ditulis kembali menjadi

   z + $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 = 0$

2. Membuat tabel simpleks (TS) seperti berikut:

   Tabel Simpleks biasa 1 (TS-1)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	1	-1	-1	1	4	-2	0	0	0	0
R1	x_7	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	6
R2	x_8	0	2	-2	-2	1	0	0	0	1	0	4
R3	x_9	0	0	1	1	1	2	1	0	0	1	4

Tabel 1.1

3. Menilai fungsi tujuan (FT)

optimum (maksimum atau minimum) FT diketahui apabila:

a) $z_j - c_j \geq 0$, mak FT sudah maksimum (untuk masalah maksimumkan)

b) $z_j - c_j \leq 0$, maka FT sudah minimum (untuk masalah minimumkan)

4. Menentukan unsur pusat (pe= pivot element)

untuk masalah minimumkan:

a) pe sekolom $z_j - c_j$ terbesar

b) pe > 0

c) pe sebaris dengan $\frac{b_i}{a_{ij(N)}}$ terkecil.

Tabel simpleks biasa 2 (TS-2)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	1	-1	-1	1	4	-2	0	0	0	0
R1	x_7	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	6
R2	x_8	0	2	-2	-2	1	0	0	0	1	0	4
R3	x_9	0	0	1	1	1	2	1	0	0	1	4

tabel 1.2

5. Membuat tabel simpleks berikutnya. aturannya:
   a) Unsur pusat harus jadi satu
   b) Unsur-unsur lain yang sekolom dengan unsur pusat harus jadi nol

Dengan aturan ini isilah OBE.

Tabel simpleks biasa 3 (TS-3)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS	OBE
R0	Z	1	1	-1	-1	1	4	-2	0	0	0	0	$R_0 \rightarrow R_0 - 4R_3$

R1	x_7	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	6	$R_1 \to R_1 - R_3$
R2	x_8	0	2	-2	-2	1	0	0	0	1	0	4	
R3	x_9	0	0	1	1	1	2	1	0	0	1	4	$R_3 \to 0{,}5R_3$

Tabel 1.3

Tabel simpleks biasa 4 (TS-4)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	1	2	-3	-1	0	-4	0	0	-2	8
R1	x_7	0	1	1	0,5	0,5	0	0,5	1	0	-0,5	4
R2	x_8	0	2	-1	-2	1	0	0	0	1	0	4
R3	x_5	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5	0	0	0,5	2

Tabel 1.4

Kembali ke langkah 5 karena terlihat pada diatas masih ada yang belum lebih kecil atau sama dengan nol, maka fungsi tujuan belum minimum.

Tabel simpleks biasa 5(TS-5)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS	OBE
R0	Z	1	1	2	-3	-1	0	-4	0	0	-2	8	$R_0 \to R_0 - 2R_1$
R1	x_7	0	1	1	0,5	0,5	0	0,5	1	0	-0,5	4	
R2	x_8	0	2	-1	-2	1	0	0	0	1	0	4	$R_2 \to R_2 + R_1$
R3	x_5	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5	0	0	0,5	2	

Tabel 1.5

Tabel simpleks biasa 6 (TS-6)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	1	0	-4	-2	0	-5	-2	0	-1	-16
R1	x_2	0	1	1	0,5	0,5	0	0,5	1	0	-0,5	4
R2	x_8	0	3	0	-1,5	1,5	0	0,5	1	1	-0,5	8
R3	x_5	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5	0	0	0,5	2

Tabel 1.6

Karena dari tabel diatas terlihat bahwa $z_j - c_j \leq 0$, maka table diatas merupakan table simpleks terakhir dan fungsi tujuan(FT) sudah minimum. Dengan $z_{min} = -16$, untuk $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2,$ dan$x_6 = 0$. Dari table terakhir yang tampak adalah x_2, x_5, dan x_8 sedangkan x_1, x_3, x_4, x_6 tak ada didalam table yang berarti bernilai 0, tapi bagaimana dengan x_8 yang terlihat di dalam tabel? Karena x_8 tidak terdapat pada z dalam soal, maka x_8 tidak diikutsertakan dalam penyelesaian masalah program liniear. Jadi, penyelesaian MPL di atas adalah $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = 0,\ x_2 = 4$, dan $x_5 = 2$ dengan $z_{min} = -16$. Untuk mengecek kebenaran jawaban di atas, dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh dari tabel, sebagai berikut :

a) Untuk FT, Z = $-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6$
   Z = $0 - 2(4) + 0 - 0 - 4(2) + 0$
   Z = -16 (terbukti).
   Untuk kendala struktural pertama, $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 + 4 + 0 + 0 + 2 + 0 = 6 \leq 6$ (terbukti)
b) Kendala struktural kedua, $2x_1 - x_2 - 2x_3 + +x_4 = 0 - 4 - 0 + 0 = -4 \leq 4$ (terbukti)
   Kendala struktural ketiga, $x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 + 0 + 2(2) + 0 = 4 \leq 4$ (terbukti)

2. Metode Simpleks Dua Fase

Ciri masalah program linier yang dapat diselesaikan oleh metode ini adalah bila kendala strukturnya memuat tanda"=" (sama dengan) dan / atau "≥" (lebih besar sama dengan). Mungkin satu,dua,tiga,atau bahkan semua kendala strukturnya memakai tanda tersebut. Tetapi bila,kita lihat kata "memuat", berarti satu juga sudah cukup memenuh kriteria memuat.

Metode simpleks ini disebut metode simpleks dua fase,karena pada prosesnya dilakukan dua fase / tahapan,yaitu:

1. Tahap I
   Tahap I ini bertujuan untuk mengoptimalkan fungsi tujuan yang memuat variabel artifisial. Ciri fungsi tujuan fase I sudah optimum adalah semua harga variabel artifisialnya

berharga nol. Dalam kondisi tertentu mungkin berharga negatif. Apabila ada paling sedikit stu harga variabel artifisial yang tidak nol (positif),maka masalah program linier tak punya penyelesaian oleh karena itu,tak perlu dilanjutkan ke fase II

2. Tahap II

   Tahap II ini bertujuan untuk mengoptimalkan fungsi tujuan yang memuat semua legitimate variabel (variabel yang sah)Ketentuan fungsi tujuan fase II sudah optimum sama seperti pada metode simpleks biasa.

   Prosedur Kerja Metode simpleks Dua Fase

   Prosedur kerja metode simpleks dua fase ada lima langkah sebagai berikut:

   $\boldsymbol{L_1}$**:** Mengubah Masalah

   Kendala struktural menjadi persamaan (sama seperti pada metode simpleks biasa)menambahkan variabel longgar dan variabel artifisial (pada kendala struktural dan FT).Untuk masalah maksimumkan koefisien variabel artifisial pada FT I adalah -1, sedangkan untuk masalah minimumkan koefisien variabel artifisial FT Fase I Adalah 1. Fase II hanya mengoptimalkan fungsi tujuan yang mengandung variabel

   Sah.

   $\boldsymbol{L_2}$ **:** Membuat Tabel Simpleks Awal

   (ketentuanya sama dengan simpleks biasa)Periksa apakah basisnya sudah merupakan basis standar (basis yang isinya vektor-vektor satuan searah sumbu-sumbunya bila di R^2 atau R^n,untuk n ≥ 2). Bila belum dipenuhi lakukan operasi baris elementer.

   $\boldsymbol{L_3}$**:** Menilai Fungsi Tujuan

   (ketentuannya sama dengan metode simpleks biasa)Bila sudah optimal lanjutkan dengan fase II dan selesai.

   $\boldsymbol{L_4}$:Menetukan Unsur Pusat

   (syaratnya sama dengan metode simpleks biasa)

   $\boldsymbol{L_5}$**:**Membuat Tabel Simpleks Berikutnya

   (ketentuannya sama dengan metode simpleks biasa)

   Kembali kelangkah 3.

Contoh 2

Selesaikan MPL berikut dengan metode simpleks dua fase.

Minimumkan z =x_1 - 2x_2

dp. -x_1 + $x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

Mengubah masalah

a) Kendala

$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2$

$-x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1$

$x_2 + x_5 = 3$

$x_1 \geq 0$, i = 1,2,...,6

Karena tidak ada variabel basis untuk kendala pertama dan kedua,kita tidak punya basis awal yang menguntungkan. Oleh karena itu, kita tambahkan variabel baru terhadap kendala 1 dan 2, yaitu x_6 dan x_7 yang disebut artificial variabel (variabel buatan) dan variabel longgar x_3, x_4, x_5

b) FT fase I : Z = $x_6 + x_7$ atau Z - x_6 - x_7 = 0,dan

FT fase II : Z = $x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ atau Z - x_1 - 2x_2 + $0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ = 0.

Fase I (TS Dua Fase -1**)**

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	z	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	$R_0 \rightarrow R_0 + R_1 + R_2$
R1	x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2	
R2	x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1	
R3	x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3	

Tabel 2.1

Pada tabel diatas nilai x_6 dan x_7 masih belum memmenuhi "basisi standar" ($x_6$dan x_7 belum sesuai dengan nilai di variabel bebas yang seharusnya sama-sama berniali 0), maka perlu dilakukan OBE yaitu $R_0 \rightarrow R_0 + R_1 + R_2$ untuk membuat $x_6$dan x_7 bernilai 0.

Fase I (TS Dua Fase -2)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	0	2	-1	-1	0	0	0	3	$R_0 \to R_0 - 2R_2$
R1	x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2	$R_1 \to R_1 - R_2$
R2	x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1	
R3	x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3	$R_3 \to R_3 - R_2$

Tabel 2.2

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka fase I belum minimum, maka selanjutnya menentukan pe (unsur pusat).

Fase I (TS Dua Fase-3)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	2	0	-1	1	0	0	-2	1	$R_0 \to R_0 - 2R_1$
R1	x_6	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1	$R_1 \to {}^1/_2 R_1$
R2	x_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1	$R_2 \to R_2 + R_1$
R3	x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2	$R_3 \to R_3 - R_1$

Tabel 2.3

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka fase I belum minimum maka dengan itu kita dapat menggunakan OBE (operasi baris elementer) seperti yang diatas, maka hasilnya dapat dilihat di tabel dibawah ini.

Fase I (TS Dua Fase-4)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	
R1	x_1	0	1	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0.5	
R2	x_2	0	0	1	-0.5	-0.5	0	0.5	0.5	1.5	
R3	x_5	0	0	0	0.5	0.5	1	-0.5	-0.5	1.5	

Tabel 2.4

Karena $z_j - c_j$ sudah minimum (berwarna kuning), maka fase I sudah minimum, sehingga kita akan melanjutkan ke fase II.

Catatan : jika $z_j - c_j \leq 0$ telah dipenuhi namun masih ada variabel artifisial dalam variabel basis, maka masalah program linear tersebut tidak memiliki solusi

Dalam masalah program linear di atas variabel artifisial (variabel buatan) adalah x_6, dan x_7 sedangkan variabel basis adalah x_1, x_2, dan x_5. Jadi, karena tidak ada lagi variabel artifisial yang masih merupakan variabel basis, maka masalah program linear di atas memiliki solusi, maka kita dapat membuat tabel simpleks pada fase II seperti yang dibawah ini.

Fase II (TS Dua Fase-5)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
R0	Z	1	-1	2	0	0	0	0	$R_0 \to R_0 + R_1$ - $2R_2$
R1	x_1	0	1	0	-0.5	0.5	0	0.5	
R2	x_2	0	0	1	-0.5	-0.5	0	1.5	
R3	x_5	0	0	0	0.5	0.5	1	1.5	

Tabel 2.5

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 (belum memenuhi basis standar), maka fase II belum minimum, dan harus dilakukan OBE.

Fase II (TS Dua Fase-6)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
R0	Z	1	0	0	0.5	1.5	0	-2.5	$R_0 \to R_0 - 3/2\, R_1$
R1	x_1	0	1	0	-0.5	0.5	0	0.5	$R_1 \to 2R_1$
R2	x_2	0	0	1	-0.5	-0.5	0	1.5	$R_2 \to R_2 + {}^1/_2\, R_1$
R3	x_5	0	0	0	0.5	0.5	1	1.5	$R_3 \to R_3 - {}^1/_2\, R_1$

Tabel 2.6

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 maka fase II belum minimum, maka berikutnya dilanjutkan dengan menentukan pe (berwarna kuning) seperti gambar tabel diatas.

Fase II (TS Dua Fase-7)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
R0	Z	1	-3	0	2	0	0	-4	$R_0 \to R_0$ -$2R_3$
R1	x_4	0	2	0	-1	1	0	1	$R_1 \to R_1 + R_3$
R2	x_2	0	1	1	-1	0	0	2	$R_2 \to R_2 + R_3$
R3	x_5	0	-1	0	1	0	1	1	

Tabel 2.7

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 maka fase II belum minimum, maka berikutnya dilanjutkan dengan menentukan pe (angka yang berwarna kuning) seperti gambar tabel diatas.

Fase II (TS Dua Fase-8)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
R0	Z	1	-1	0	0	0	-2	-6	
R1	x_4	0	1	0	0	1	1	2	
R2	x_2	0	0	1	0	0	1	3	
R3	x_3	0	-1	0	1	0	1	1	

Tabel 2.8

Karena $z_j - c_j \leq 0$maka Fase II sudah minimum dengan z_{min} = -6, $x_1 = 0, x_2 = 3$

3. Metode Simpleks Bilangan Besar -M

Metode ini dikembangkan oleh M. Charnes. Arti M disini berarti bilangan besar. Ciri masalah program linear yang dapat diselesaikan oleh metode simpleks bilangan besar-M adalah bila kendala strukturalnya memuat tanda “≥ ".

Prosedur kerja metode simpleks bilangan besar –M ada langkah yaitu sebagai berikut:

L_1 : Mengubah masalah

a) Kendala struktural menjadi persamaan (sama seperti metode simpleks biasa)

b) Menambahkan variabel artifisial (pada kendala struktural dan FT), untuk masalah maksimumkan koefisien variabel artifisial pada FT adalah –M, sedangkan untuk masalah minimumkan koefisien variabel artifisial pada FT adalah M.

L_2 : Membuat tabel simpleks awal

(Ketentuannya sama dengan simpleks biasa dan dua fase), periksa apakah basisnya sudah merupakan basis standar bila belum dipenuhi, lakukan operasi baris elementer.

L_3 : Menilai fungsi tujuan
Bila sudah optimal selesai, tetapi jika belum optimal lanjutkan ke langkah 4

L_4 : Menentukan unsur pusat (pe)

Syaratnya sama dengan metode simpleks biasa.

L_5 : Membuat tabel simpleks berikutnya
(ketentuannya sama dengan metode simpleks biasa), kembali ke langkah 3.

Contoh 3:
Maksimumkan z = $-x_1 + 2x_2$
dp.
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
Penyelesaian:
Bila kita ingin bekerja dengan aturan minimumkan, maka metode diatas dapat kita ubah berdasarkan rumus maksimum z = minimum –z menjadi:
Minimumkanz = $x_1 - 2x_2$
dp.
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
Mengubah masalah
Kendala
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2$$
$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1$$
$$x_2 + x_5 = 3$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3\ldots,7$$
Tambahkan variabel baru terhadap kendala 1 dan 2 yaitu x_6 dan x_7 yang disebut variabel buatan (artifisial variabel) dengan koefisien M dan tambahkan juga variabel longgar.
Min z = $x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$ ditulis kembali menjadi:
z $-x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 = 0$

a. Membuat tabel simpleks (TS) seperti berikut dan Melakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai 0.

Tabel simpleks big –M 1 (TS-1)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
R0	z	1	-1	2	0	0	0	-M	-M	0
R1	x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
R2	x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
R3	x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3

Tabel 3.1

b. Karena belum memenuhi basis standar ,maka lakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai 0.

Tabel simpleks big –M 2 (TS-2)

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	z	1	-1	2	0	0	0	-M	-M	0	$R_0 \to R_0 + MR_1 + MR_2$
R1	x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2	
R2	x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1	
R3	x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3	

Tabel 3.2

Tabel simpleks big -M 3 (TS-3)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	-1	2+2M	-M	-M	0	0	0	3M	$R_0 \to R_0 - (2 + 2M)R_2$
R1	x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2	$R_1 \to R_1 - R_2$
R2	x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1	
R3	x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3	$R_3 \to R_3 - R_2$

Tabel 3.3

c. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, makalanjutkan dengan menentukan pe(unsur pusat), setelah didapat pe ternyata x_2 mengganti x_7.

Tabel simpleks big -M 4 (TS-4)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	1+2M	0	-M	2+M	0	0	-2-2M	M-2	$R_0 \rightarrow R_0 - (1+2M)R_1$
R1	x_6	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1	$R_1 \rightarrow 0{,}5R_1$
R2	x_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1	$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$
R3	x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2	$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$`

Tabel 3.4

d. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, x_1 mengganti x_6.

Tabel simpleks big -M 5 (TS-5)

		z	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	RHS	OBE
R0	Z	1	0	0	0,5	1,5	0	$\frac{-(1+2M)}{2}$	$-1{,}5 - M$	3M	$R_0 \rightarrow R_0 - 1{,}5R_1$
R1	x_1	0	1	0	$-0{,}5$	0,5	0	0,5	$-0{,}5$	0,5	$R_1 \rightarrow 2R_1$
R2	x_2	0	0	1	$-0{,}5$	$-0{,}5$	0	0,5	0,5	1,5	$R_2 \rightarrow R_2 + 0{,}5R_1$
R3	x_5	0	0	0	0,5	0,5	1	$-0{,}5$	0,5	1,5	$R_3 \rightarrow R_3 - 0{,}5R_1$

Tabel 3.5

e. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, x_4 mengganti x_1.

Tabel simpleks big -M 6 (TS-6)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE

R0	z	1	-3	0	2	0	0	-2-M	1,5-M	-4	$R_0 \rightarrow R_0 - 2R_3$
R1	x_4	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1	$R_1 \rightarrow R_1 - R_3$
R2	x_2	0	1	1	-1	0	0	0	0	2	$R_2 \rightarrow R_2 + R_3$
R3	x_5	0	-1	0	1	0	1	0	1	1	

Tabel 3.6

f. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka , x_3 mengganti x_5.

Tabel simpleks big -M 7 (TS-7)

		Z	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	RHS	OBE
R0	z	1	-1	0	0	0	-2	-2-M	-0,5-M	-6	
R1	x_1	0	1	0	0	1	1	0	-1	2	
R2	x_1	0	0	1	0	0	1	0	0	3	
R3	x_1	0	-1	0	1	0	1	0	1	1	

Tabel 3.7

Karena $z_j - c_j \leq 0$ maka sudah minimum dengan z_{min} = -6, untuk x_1= 0, dan x_2 = 3. Karena yang diselesaikan adalah masalah maksimumkan, maka kita kembali ke rumus : maks z = -(min –z) = -(-6) = 6 , maka penyelesaiannya adalah z_{mak} = 6, untuk x_1= 0, dan x_2 =3.

4. Metode Dual Simpleks

Dalam kenyataanya,sebuah perusahaan atau pelaku usaha tidak selalu berhadapan dengan masalah-maslah yanag dapat dipecahka secara sederhana menggunakan menggunakan model program linier.ketika terdapat beberapa sasaran atau target yang ingin dicapai,maka semua target tersebut menjadi tujuan yang hendak dicapai.permasalahan seperti itu sedikit berbeda dengan masalah PL yang selalu ditemukan.Berdasarkan kebutuhan seperti pada permaslahan ini,maka dikembangkan sebuah teknik dualitas yaknik sebuah konsep dalam pemrograman linier terdiri dari masalah primal dan dual,dan konsep ini berguna untuk menginterpretasikan angka-angka yang terdapat pada tabel optimal dari masalah primal.Setiap persoalan program linier selalu mempunyai dua macam jenis nalisis ,yaitu analisis primal dan analisi dual yang biasanya disebut “analisis prmal-dual”. Dalam perjalananya ,teknik linear programming mengalami perkembangan dan penyempurnaan ,sehingga dapat ditemukan berbagai kelebihan-kelebihan yang berguna dalam penerapan teknik ini.salah satu manfaatnya yaitu dalam dunia linear programming yang digunakan sebagai alat analisis dan pengeambilan keputusan. Teknik tersebut dikenal dengan teori dualitas. Selain itu banyak sekali digunakan konsep dualitas,terutama dalam contoh berikut ini:

1. Dalam penelitian sikrut dapat diberikan untuk sirkuit yang umum,dapat juga dilakukan perubahan pada bentuk dual.
2. Dalam suatu penelitian yang dilakukan pada pelaksanaan teori graf.
3. Pada aljabar linier terdapat suatupemikiran dari dual ,serta beberapa contoh lainnya.

Menurut teori ini, setiap persoalan linear programming saling berhubungan timbal balik dengan persoalan linear yang lain merupakan “dual”nya. Hubungan timbal balik antara suatu persoalan linear programming yang asli (disebut primal) dengan persoalan linear programming yang lain (dual),akan menimbulkan manfaat berupa memudahkan orang dalam mengkaji suatu perhitungan dalam linear programming.

Sejalan dengan itu, menurut kakiay (2008),dalam perkembangan algoritma simpleks sudah lama ditemukan bahwa setiap pemrograman linier mempunyai hubungan dengan pemrograman lain dan dikenal dengan dual.solusi dari salah satu persoalan ini dapat dibentuk menjadi solusi yang lain. Penemuan pemroraman linier inisangat berpengaruh terhadap dua problema yang terkait dengan metode komputasi dan juga pengembangan pemrograman linier, disamping itu juga sangat berpengaruh terhadap pengembangan metode optimisasi yang lain. Hubungan antara pemrograman linier dengan dualnya dapat ditunjukan pada beberapa kasus yang juga sangat penting bagi informasi ekonomi yang diuraikan melalui pemograman linier.

Dalam penyelesaian persoalan linier dengan membentuk formulasi terlebih dahulu sudah dikenal dengan istilah primal,sedangkan penyelesaian perosalaan memalui dual sebagai pemgraman linier merupaka penyelesaian pada vaiabel yang ditambahkan pda fungsi-fungsi kendala yang sudah disusun sebagai pengenal dari variabel dual. Kedua simpleks.

Dalam perkembangan alogaritma simpleks sudah lama ditemukan bahwa setiap program linier mempunyai hubungan dengan pemrograman lain dan dikenal dengan dual. Solusi dari dari salah satu perosalan ini dapat dibentuk menjadi solusi yang lain. Penemuan program linier sangat berpengaruh dua problema yang terkait dengan metode komputasi dan juga pengembangan metode optimasi yang lain.

Adapun pengertian dari primal adalah masalah asal (mula-mula),sedangkan dual adalah maslah yang terkait. Bila primal mengandung maksimasi fungsi tujuan,dual mengandung minimasi atau maksimasi fungsi tujuan. Jumlah variabel dalam maslah dual sama dengan jumlah kendala dalam maslah primal dan sebaliknya.

Hubungan antar keduanya dapat dinyatakan secara gamblang melaluipenggunaan parameter-parameter yang terkandung dalam keduanya. Dalam teori program linier dinyatakan bahwa pada setiap persoalan yang sering disebut dengan persoalan primal dan persoalan dual.

a) Sifat Dasar

Dual mempunyai dua dalil yang bersifat sangat penting untuk progaram linier (Dowling,1996). Dalil tersebut berbunyi:

1. Nilai optimaldari fungsi objektif primal selalu sama dengan nilai optimal dari fungsi objektif dual,asalkan terdapat suatu penyelesaian optimal yang memnungkinkan.
2. Jika dalam penyelesaian optimal yang mungkin tersebut adalah:
    a. Suatu variabel keputusan dalam program primal mempunyai nilai bukan nol, variabel slack (atau surplus) yang berkaitan dengan program dual harus mempunyai nilai optimal nol.

b. Suatu variabel slack (atau surplus) dalam primal mempunyai nilai bukan nol,variabel keputusan yang berkaitan dalam program dual harus mempunyai nilai optimal nol. Dual simpeks dibagi lagi menjadi dual simetrik dan dual non simetrik.

b)Dual Simetris

Suatu program linier dikatakan berbentuk simetrik jika semua variabel kendala non-negatif dan semua kendala berupa pertidaksamaan (dalam masalah maksimum pertidaksamaan harus berbentuk $\leq$ sementara dalam minimum pertidaksamaan harus berbentuk $\geq$)

Terdapat beberapa ketentuan awal yang harus dipahami sebelum masuk dalam konsep primal-dual untukkasus program liniermaksimasi dan minimasi. Adapun ketentuan primal dan dualnya sebagai berikut:

Tabel Bentuk Primal dan Bentuk Dual

No	Bentuk Primal	Bentuk Dual
1	Umumnya notasi funsi tujuan adalah Z	Umumnya notasi fungsi tujuan adalah W
2	Umumnya notasi variabel keputusan dalam bentuk X	Umumnya notasi variabel keputusannya dalah Y
3	Unsur koefisien matriks pembatasan	Transpose koefisien matriks pembatas
4	Vektor ruas kanan pada kendala	Koefisien fungsi tujuan
5	Koefisien fungsi tujuan	Vektor ruas kanan pada kendala
6	Pembatas ke-i berupa “=”	Yi tidak terbatas dala tanda
7	Xj tidak terbatas dalam tanda	Pembatas ke-j berupa “=”

Gambar tabel 4.1

Tabel Fungsi tujuan berbentuk maksimasi:

No	Bentuk Primal	Bentuk Dual
1	Fungsi tujuan berbentuk maksimasi	Fungsi tujuan berbentuk minimasi
2	Pembatasan ke- i berupa "≤"	Yi ≥ 0
3	Pembatasan ke-i berupa ">"	Yi ≤ 0
4	Xj ≥ 0	Pembatasan ke j berupa "≥"
5	Xj ≤ 0	Pembatasan ke j berupa "≤"

Gambar tabel 4.2

Tabel Fungsi tujuan berbentuk minimasi:

No	Bentuk Primal	Bentuk Dual
1	Fungsi tujuan berbentuk minimasi	Fungsi tujuan berbentuk maksimasi
2	Pembatasan ke-i berupa "≤"	Yi ≤ 0
3	Pembatas ke-i berupa"≥"	Yi ≥ 0
4	Xj ≥ 0	Pembatasan ke-j berupa "≤"
5	Xj ≤ 0	Pembatasan ke- j berupa " ≥"

Gambar tabel 4.3

Hubungan persoalan primal dengan dual:

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan perosalan dual,sedangkan konstanta ruas kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan bagi dual.

2. Untuk setiap pembatas primal ada satu variabel dual,dan untuk setiap variabel primal ada satu pembatas dual.
3. Setiap variabel primal berkorespondesi dengan pembatas dual,dan setiap pembahasan primal berkorespondensi dengan variabel dual.
4. Fungsi tujuan berubah bentuk yaitu maksimasi menjadi minimasi dan sebaliknya,sedangkan tanda ketidaksamaan bergantung pada fungsi tujuan yaitu maksimum dual bertanda ≤ ,minimum dual bertanda ≥.
5. Dual dari dual adalah primal

   Dalam penguraian metode primal dual terdapat dua teorema yang menyatakan kepentingan dualitas dari pemrograman linier.

   a. Teorema 1 (Teorem Dualitas)

   Bila terdapat suatu solusi optimalpada salah satu primal atau simetrik dual dari pemrograman linier,maka yang lain adalah pemrograman linier juga, mempunyai solusi yang optimal dan kedua fungsi objektifnya mempunyai nilai optimal yang sama.

   Pada situasi ini,solusi optimal pada primal atau dual dapat terlihat dan dinyatakan pada baris indeks (Z_j - C_j) dari tabel simpleks yang terakhir untuk primal atau dualitas,yang dikaitkan dengan kolom yang mempunyai tambahan variabel slack atau surplus.

   Demikian juga bila terdapat kesulitan dalam penguraian pemrograman linier primal, maka akan lebih baik dan berguna bila pemrograman linier dual.

   b. Teorema 2 (Complementary Slackness Princips)

   Diberikan suatu pasangan simertrik primal dual yang mempunyai solusi optiml. Pada kendala K^{th} dari suatu sistem yang dinyatakan sebagai ketidaksamaan akan ketertarikan variabel slack dan surplus adalah positf dengan komponen K^{th} dari solusi optimal pada simetrik dual yang mempunyai nilai nol.

   Dengan demikian,kedua teorema ini dapat juga digunakan sebagai dasar penguraian ketidaksamaan dual. Sebagai pemrograman dualnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

   Primal

Minimum : Z = C^TX
Dengan kendala : AX = B
Dengan X $\geq$ 0
Dual
Maksimum : Z = B^TD
Dengan kendala : A^TD $\leq$ C
Dengan D $\geq$ 0

Sebagai pemrograman linier dual dalam bentuk standar dan bukan dengan sendirinya bentuk tersebut, maka program dual ini tidak simetris. Demikian juga teorema 1 juga valid bagi ketidaksimetrisan dari program dual,walaupun solusi untuk ketidaksimetrisan dual tidaklah umum muncul dari solusi pada program primal. Berikut ini contoh dari masalah program linier dengan model matematis primal dan dual non-simetrisnya.
Contoh 4
Tabel contoh Primal dan Dual

Primal	Dual
Maksimumkan : Z = X_1 + $3x_2$ - $2x_3$ Dengan kendala: $4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 25$ $7x_1 + 5x_2 + 9x_3 \geq 30$ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$	Minimum : Z = $25d_1$ + $30d_2$ Dengan kendala : $4d_1 + 7d_2 \leq 1$ $8d_1 + 5d_2 \leq 3$ $6d_1 + 9d_2 \leq$ -2 $d_{1,} d_2 \geq 0$

Tabel 4.4
Contoh 5
Minimumkan : Z = $3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$
Dengan kendala :
$x_1 + x_2 + x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 = 7$
$2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 = 8$
Dengan $x_1 \geq 0$ untuk j = 1,2.....6.
Pemrograman linier ini menunjukan bentuk yang tidak simetris dual yang dibentuk melalui
Maksimum : Z = $7d_1 + 8d_2$

Dengan kendala :
d_1 + $2d_2 \leq 3$
d_1 + $3d_2 \leq 1$
$d_1 \leq 0$
$d_2 \leq 0$
$d_1 \leq$ M
$d_2 \leq$ M

Dari hasil formulasi dual ini,ternyata ketidaksaamaan 3 dan 4 merupakan kendala yang ekuivalen dengan $d_1 \leq 0$ dan $d_2 \leq 0$,dan juga dari kendala 5 dan 6 yang merupakan kebutuhan sederhana dengan variabel yang terbatas. Kondisi selalu menyatakan seandainya sehingga program dual ini dapat sederhanakan menjadi :
Dengan kendala:
d_1 + $2d_2$ ≤ 3
d_1 + $3d_2$ ≤ 1
Dengan d_1 dan $d_2 \leq 0$
Dengan demikian,dalam persoalan pemrograman linier yang sulit pada primal dapat disederhanakan melalui program dual (Kakiay,2008).

c) Pemecahan masalah

Pemecahan masalah dual juga diberikan oleh pemecahan masalah primal, dan dalam beberapa kasus bisa terjadi lebih mudah memecahkan masalah dual. Jumlah iterasi yang dibutuhkan dalam pemecahan maslaah simpleks bergantung pada jumlah baris variabel dalam tabel simpleks; jadi jika m=n,biasanya pemecahan masalahdual membutuhkan perhitungan yang lebih sedikit dan dengan demikian lebih mudah.

Menurut Weber (1999),kaitan antara pemecahan masalah primal dandual dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Nilai fungsi sasaran dalam pemecahan masalah primal dan dual adalah sama.
2. Kriteria untuk variabel utama primal adalah pemecahan bagi variabel “slack” dari dual.

3. Kriteria untuk variabel "slacak" dari primaladalah pemecahan bagi variabel utama dari dual
4. Pemecahan variabel-variabel utama primal merupakan nilai negatif dari kriteria untuk varaibel-variabel "slack dari dual"
5. Pemecahan untuk variabel-variabel"slack" primal merupakan nilai negatif dari kriteria untuk variabel-variabel utama dari dual.

Meminjam penegrtian dari buku Wayne Winston, dualitas adalah "Associated With any LP is another LP,called the dual." Baikdari sudut pandang tori maupun praktek ,teori dualitas adalah saalah satu konsep yang sangat penting dan menarik dalam linier prigrmming (LP). Istilah dualitas menunjukanbentuk asli dinamakan primal,sementara bentu yang kedua yang berhubungan dinamakan dual,demikian sehingga suatu solusi terhadap LP yang asli juga memberikan solusi pada bentuk dualnya. Jadi, jika suatu LP diselesaikan dengan metode simpleks,sesungghunya diperoleh penyelesian untu dua masalah LP. Untuk menjelaskan konsep dualitas,mungkin cara yang paling mudahnya dengan memberikan contoh agar lebih diketahui antara yang primal dan dual, berikut contohnya.

Misalnya saja tentang masalah diet:

Tabel contoh masalah dualitas mengenai diet

Kandungan	Makanan tiruan Daging	sayur	Kebutuhan minimum/hari
Mineral vitamin Harga per unit	2 3 3	4 2 2,5	40 50

Tabel 4.5

Masalah adalah menetukan biaya pembelian sejumlah daging dan sayuran demikian,sehingga kebutuhan minimum per hariakan mineral dan vitamin terpenuhi.untuk merumuskannya,berikut model matematikanya :

Misalkan x_j(j=1,2) ada;ah jumlah unit daging dan sayuran yang dibeli.

Min Z=3x_j +2,5x_2

dp. 2x_1 + 4x_2 ≥ 40

3x_1 + 2x_2 ≥ 50

x_1,x_2 ≥ 0

Sekarang, kita pandan dari sudut yang berbeda yang masih berhubunga dengan masalah pertama (bentuk primal),kali ini misalkan ada dealer yang menjual mineral dan vitamin. Pemilik restoran setempat membeli mineral dan vitaminnya. Masalah yang dihadapi dealer adalah menetapkan harga jual mineral dan vitamin per unit yang memaksimumkan demikian,sehingga harga daging dan sayur tiruan tidak melebihi harga pasar yang ada.Unuk merumuskan masalah ini,kita menggunakan model berikut:

Misalkan dealer memutuskan:

y_1 : harga daging per unit

y^2 : harga sayur per unit

Max: W = 40y_1+ 50y_1

Dp.2y_2 + 3y_2≤ 3

4y_1 + 2y_2 ≤ 2,5

y_1 y_2 ≥ 0 (karena tidak mungkin negatif)

Bentuk LP yang terakhir ini dinamakan bentuk dual, $y_1$dan y_2 dinamakan variabel dual.

Mencari solusi optimum bentuk dual: Karena setiap LP dapat dipecahkan dengan metode simpleks,maka metode itu dapatditerapkan baik pada masalah primal maupun dual. Teorema dualitas utama menyatakan bahwa suatu solusi perimal dan sebaliknya.

Contoh berikut akan menunjukan bagaimana pernyataan itu bekerja.

Max : Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3

s.t : x_1+ 2x_2 + x_3 ≤ 5

$2x_1 - x_2$ $+3x_3$ = 2
$x_1 x_2$ ≥ 0

Kemudian selesaikan dengan metode simpleks. Dalam hal ini dibutuhkan variabel slack S dan artificial variabel A,pada tabel simpleks awal diperoleh variabel basis S = 5 dan A = 2. Pada iterasi terakhir diperoleh tebel simpleks optimum seperti berikut :

BV	x_1	x_2	x_3	S	A	Solusi
Z	0	10	$3/5$	$29/5$	$-2/5 + m$	28 $1/5$
x_2	0	1	$-1/5$	$2/5$	$-1/5$	$8/5$
x_1	1	0	$7/5$	$1/5$	$2/5$	$9/5$

4.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Rangkuman

1. Metode simpleks adalah algoritme yang digunakan untuk memecahkan masalah dalam pemrograman linear, Metode ini digunakan untuk masalah jumlah variable lebih dari dua.
2. Metode simpleks terbagi atas 4 bagian yaitu metode simpleks biasa, metode simpleks dua fase, metode simpleks bilangan besar –M, dan metode dual simpleks.
3. Metode simpleks biasa digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier yang kendala-kendala strukturalnya semua menggunakan tanda "≤" (masalah yang memuat variable longgar).
4. Metode dua fase dapat menyelesaikan masalah bila kendala strukturnya memuat tanda"=" (sama dengan) dan / atau "≥" (lebih besar sama dengan).
5. Metode simpleks bilangan besar-M dapat menyelesaikan masalah apabila kendala strukturalnya memuat tanda "≥ ".
6. Metode dual simpleks adalah suatu prosedur perhitungan yang memberikan suatu solusi yang optimum.
7. Variabel masuk adalah variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk di pilih satu diantara variabel non basis pada setiap iterasi.
8. Variabel keluar adalah variabel yang keluar dari basis pada iterasi berikutnya dan digantikan dengan variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu diantara variabel basis pada setiap iterasi dan bernilai 0.

4.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Soal Diskusi Kelompok

1. selesaikan soal program linear berikut menggunakan metode simpleks biasa.
   Minimumkan Z = $-8x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 + 2x_6$
   dp. $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \leq 8$
   $2x_1 - x_2 - 2x_3 + +x_4 \leq 6$
   $x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \leq 4$
   $x_i \geq 0$,untuk i =1,2,3…,8

a) Mengubah pertidaksamaan kendala struktural (dp) menjadi persamaan dengan menambahkan **variable longgar**

$x_{...} + x_{...} + x_{...} + x_{...} + x_{...} + x_{...} = \cdots$

$\ldots x_{...} - x_{...} - 2x_{...} + x_{...} + x_{...} = \ldots$

$x_{...} + 2x_{...} + x_{...} + x_{...} + x_{...} = \ldots$

$x_i \geq 0$, untuk i = 1,2,3…,8

dimana x_7, x_8, x_9 disebut variabel longgar.

b) Fungsi tujuan ditambah dengan variabel longgar dengan koefisien nol

Z = ...

ditulis kembali menjadi

z + ... $+ \cdots - \cdots + \cdots + \cdots - \cdots$ + $0x_7$ + $0x_8$ + $0x_9$ = 0

c) Membuat tabel simpleks (TS) seperti berikut:

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	…	…	…	…	…	…	….	0	0	0	0
R1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	...	…	8
R2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	6
R3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	4

d) Menentukan unsur pusat (pe= pivot element)
untuk masalah minimumkan:
a) pe sekolom $z_j - c_j$ terbesar
b) pe > 0
c) pe sebaris dengan $\frac{b_i}{a_{ij(N)}}$ terkecil.

e) Membuat tabel simpleks berikutnya. aturannya:
1) Unsur pusat harus jadi satu
2) Unsur-unsur lain yang sekolom dengan unsur pusat harus jadi nol. Dengan aturan ini isilah OBE.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS	OBE
R0	Z	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	….	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Kembali ke langkah e karena terlihat pada diatas masih ada yang belum lebih kecil atau sama dengan nol, maka fungsi tujuan belum minimum.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS	OBE
R0	Z	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	….	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Lanjutkan tabel jika masih ada yang belum lebih kecil datau sama dengan nol, maka fungsi tujuan belum minimum.

2. Selesaikan soal program linear berikut menggunakan metode simpleks biasa.

Minimumkan Z = $-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 4x_6$

dp. $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6 \leq 6$

$x_1 - x_2 - 2x_3 + +x_4 \leq 6$

$$2x_3 + x_4 + x_5 + 4x_6 \leq 4$$
$$x_i \geq 0, \text{untuk } i = 1,2,3\ldots,6$$

a) Mengubah pertidaksamaan kendala struktural (dp) menjadi persamaan dengan menambahkan **variable longgar**

$x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} = \cdots$

$\ldots x_{\ldots} - x_{\ldots} - 2x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} = \ldots$

$x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} + x_{\ldots} = \ldots$

$x_i \geq 0$, untuk $i = 1,2,3\ldots,6$

dimana x_7, x_8, x_9 disebut variabel longgar.

b) Fungsi tujuan ditambah dengan variabel longgar dengan koefisien nol

Z = ...

ditulis kembali menjadi

z + ... + $\cdots - \cdots + \cdots + \cdots - \cdots$ + $0x_7 + 0x_8 + 0x_9 = 0$

c) Membuat tabel simpleks (TS) seperti berikut:

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	…	…	…	…	…	…	….	0	0	0	0
R1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	...	…	8
R2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	6
R3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	4

d) Menentukan unsur pusat (pe= pivot element)

untuk masalah minimumkan:

a) pe sekolom $z_j - c_j$ terbesar

b) pe > 0

c) pe sebaris dengan $\frac{b_i}{a_{ij(N)}}$ terkecil.

e) Membuat tabel simpleks berikutnya. aturannya:

1) Unsur pusat harus jadi satu
2) Unsur-unsur lain yang sekolom dengan unsur pusat harus jadi nol. Dengan aturan ini isilah OBE.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS	OBE
R0	Z	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	….	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Kembali ke langkah e karena terlihat pada diatas masih ada yang belum lebih kecil atau sama dengan nol, maka fungsi tujuan belum minimum.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS	OBE
R0	Z	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	….	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Lanjutkan tabel jika masih ada yang belum lebih kecil datau sama dengan nol, maka fungsi tujuan belum minimum.

3. Selesaikan MPL berikut dengan metode simpleks dua fase.

Minimumkan $z = 2x_1 + x_2$

dp. $x_1 + 2x_2 \geq 2$

$x_1 + 2\,x_2 \geq 1$

$4x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

Mengubah masalah

a) Kendala

$x_{...} + x_{...} - x_{...} + x_{...} = 1$

$x_{...} + x_{...} - x_{...} + x_{...} = 1$

$x_{...} + x_{...} = 3$

$x_1 \geq 0$, i = 1,2,...,6

Karena tidak ada variabel basis untuk kendala pertama dan kedua,kita tidak punya basis awal yang menguntungkan. Oleh karena itu, kita tambahkan variabel baru terhadap kendala 1 dan 2, yaitu x_6 dan x_7 yang disebut artificial variabel (variabel buatan) dan variabel longgar x_3, x_4, x_5

b) FT fase I : Z = $x_6 + x_7$ atau Z - x_6 - x_7 = 0,dan
FT fase II : Z = ….+ ….+…+…+ …. atau Z - … +…+ … + … + … = 0.

Fase I

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Pada tabel diatas nilai x_6 dan x_7 masih belum memmenuhi "basisi standar" ($x_6$dan x_7 belum sesuai dengan nilai di variabel bebas yang seharusnya sama-sama berniali 0), maka perlu dilakukan OBE yaitu …. untuk membuat $x_6$dan x_7 bernilai 0.

Fase I

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka fase I belum minimum, maka selanjutnya menentukan pe (unsur pusat).

Fase I

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka fase I belum minimum maka dengan itu kita dapat menggunakan OBE (operasi baris elementer) seperti yang diatas, maka hasilnya dapat dilihat di tabel dibawah ini.

Fase I

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Fase I

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ sudah minimum, maka fase I sudah minimum, sehingga kita akan melanjutkan ke fase II.

Catatan : jika $z_j - c_j \leq 0$ telah dipenuhi namun masih ada variabel artifisial dalam variabel basis, maka masalah program linear tersebut tidak memiliki solusi

Dalam masalah program linear di atas variabel artifisial (variabel buatan) adalah $\dots$, dan $\dots$ sedangkan variabel basis adalah $\dots, \dots$, dan $\dots$ Jadi, karena tidak ada lagi variabel artifisial yang masih merupakan variabel basis, maka masalah program linear di atas memiliki solusi, maka kita dapat membuat tabel simpleks pada fase II seperti yang dibawah ini.

Fase II

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 (belum memenuhi basis standar), maka fase II belum minimum, dan harus dilakukan OBE.

Fase II

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 maka fase II belum minimum, maka berikutnya dilanjutkan dengan menentukan pe seperti gambar tabel diatas.

Fase II

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 maka fase II belum minimum, maka berikutnya dilanjutkan dengan menentukan pe (angka yang berwarna kuning) seperti gambar tabel diatas.

Fase II

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j \leq 0$ maka Fase II sudah minimum dengan $z_{min} = \ldots$, $\ldots = \cdots$, $\ldots = \cdots$

4. Selesaikan MPL berikut dengan metode simpleks dua fase.

Minimumkan $z = x_1 + 5x_2$

dp.

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$2x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian :

Mengubah masalah

c) Kendala

$x_{...} + x_{...} - x_{...} + x_{...} = 1$
$x_{...} + x_{...} - x_{...} + x_{...} = 1$
$x_{...} + x_{...} = 3$
$x_1 \geq 0$, i = 1,2,...,6

Karena tidak ada variabel basis untuk kendala pertama dan kedua,kita tidak punya basis awal yang menguntungkan. Oleh karena itu, kita tambahkan variabel baru terhadap kendala 1 dan 2, yaitu x_6 dan x_7 yang disebut artificial variabel (variabel buatan) dan variabel longgar x_3, x_4, x_5

d) FT fase I : Z = $x_6 + x_7$ atau Z - x_6 - x_7 = 0,dan
FT fase II : Z = …. + ….+…+…+ …. atau Z - … +…+ … + … + … = 0.

Fase I

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Pada tabel diatas nilai x_6 dan x_7 masih belum memmenuhi "basis standar" (x_6 dan x_7 belum sesuai dengan nilai di variabel bebas yang seharusnya sama-sama berniali 0), maka perlu dilakukan OBE yaitu …. untuk membuat x_6 dan x_7 bernilai 0.

Fase I

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka fase I belum minimum, maka selanjutnya menentukan pe (unsur pusat).

Fase I

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka fase I belum minimum maka dengan itu kita dapat menggunakan OBE (operasi baris elementer) seperti yang diatas, maka hasilnya dapat dilihat di tabel dibawah ini.

Fase I

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Fase I

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ sudah minimum, maka fase I sudah minimum, sehingga kita akan melanjutkan ke fase II.

Catatan : jika $z_j - c_j \leq 0$ telah dipenuhi namun masih ada variabel artifisial dalam variabel basis, maka masalah program linear tersebut tidak memiliki solusi

Dalam masalah program linear di atas variabel artifisial (variabel buatan) adalah …, dan … sedangkan variabel basis adalah …, …, dan … Jadi, karena tidak ada lagi variabel artifisial yang masih merupakan variabel basis, maka masalah program linear di atas memiliki solusi, maka kita dapat membuat tabel simpleks pada fase II seperti yang dibawah ini.

Fase II

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 (belum memenuhi basis standar), maka fase II belum minimum, dan harus dilakukan OBE.

Fase II

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 maka fase II belum minimum, maka berikutnya dilanjutkan dengan menentukan pe seperti gambar tabel diatas.

Fase II

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0 maka fase II belum minimum, maka berikutnya dilanjutkan dengan menentukan pe (angka yang berwarna kuning) seperti gambar tabel diatas.

Fase II

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j \leq 0$ maka Fase II sudah minimum dengan $z_{min} = \ldots$, ... $= \cdots$, ... $= \cdots$

5. Selesaikan MPL berikut dengan metode bilangan besar –M

Maksimumkan z = $-x_1 + 4x_2$

dp. $x_1 + x_2 \geq 4$

$-x_1 + x_2 \geq 2$

$x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Penyelesaian:

Bila kita ingin bekerja dengan aturan minimumkan, maka metode diatas dapat kita ubah berdasarkan rumus maksimum z = minimum –z menjadi:

Minimumkanz = $\cdots - \cdots$

dp. $x_1 + x_2 \geq 4$

$\dots . + \cdots \geq 2$

$x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$

Mengubah masalah

Kendala

$\cdots + \cdots - \cdots + \cdots = \cdots$

$\cdots + \cdots - \cdots + \cdots = \ldots$

$\cdots + \cdots = \cdots$

$x_i \geq 0$, i = 1,2,3…,7

Tambahkan variabel baru terhadap kendala 1 dan 2 yaitu x_6 dan x_7 yang disebut variabel buatan (artifisial variabel) dengan koefisien M dan tambahkan juga variabel longgar.

Min z = ... ditulis kembali menjadi:

z $- \cdots$ = 0

a. Membuat tabel simpleks (TS) seperti berikut dan Melakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	...	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…

b. Karena belum memenuhi basis standar ,maka lakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai 0.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...
R2	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...
R3	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...

c. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka lanjutkan dengan menentukan pe(unsur pusat), setelah didapat pe ternyata ... mengganti ...

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R2	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R3	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...

d. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R2	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R3	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...

e. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...

R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

f. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka , ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j \leq 0$ maka sudah minimum dengan z_{min} = …, untuk …= …, dan ... = ⋯. Karena yang diselesaikan adalah masalah maksimumkan, maka kita kembali ke rumus : maks z = -(min –z) = -(…) = … , maka penyelesaiannya adalah z_{mak} = …, untuk …= 0, dan … =…

6. Selesaikan MPL berikut dengan metode bilangan besar –M

Maksimumkan z = $-x_1 + 2x_2$

dp. $x_1 + 2x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Penyelesaian:

Bila kita ingin bekerja dengan aturan minimumkan, maka metode diatas dapat kita ubah berdasarkan rumus maksimum z = minimum –z menjadi:

Minimumkan z = $\cdots - \cdots$

dp. $x_1 + 2x_2 \geq 2$

$\ldots. + \cdots \geq 1$

$x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Mengubah masalah

Kendala

$\cdots + \cdots - \cdots + \cdots = \cdots$
$\cdots + \cdots - \cdots + \cdots = \ldots$
$\cdots + \cdots = \cdots$
$x_i \geq 0$, i = 1,2,3…,7
Tambahkan variabel baru terhadap kendala 1 dan 2 yaitu x_6 dan x_7 yang disebut variabel buatan (artifisial variabel) dengan koefisien M dan tambahkan juga variabel longgar.
Min z = ... ditulis kembali menjadi:
z $- \cdots$ = 0

a. Membuat tabel simpleks (TS) seperti berikut dan Melakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…
R1	x_6	0	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	x_7	0	…	…	…	…	…	…	...	…
R3	x_5	0	…	…	…	…	…	…	…	…

b. Karena belum memenuhi basis standar ,maka lakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai 0.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…
R1	...	0	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	...	0	…	…	…	…	…	…	...	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…

c. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka lanjutkan dengan menentukan pe(unsur pusat), setelah didapat pe ternyata ... mengganti ...

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

d. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

e. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

f. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka , ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j \leq 0$ maka sudah minimum dengan $z_{min} = \ldots$, untuk $\ldots = \ldots$, dan ... $= \cdots$. Karena yang diselesaikan adalah masalah maksimumkan, maka kita kembali ke rumus : maks z = -(min –z) = -(…) = … , maka penyelesaiannya adalah z_{mak} = …, untuk …= 0, dan … =…

7. Selesaikan MPL berikut dengan metode bilangan besar –M

Maksimumkan z = $-x_1 + x_2$

dp. $x_1 + 2x_2 \geq 2$

$-2x_1 + x_2 \geq 4$

$x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Penyelesaian:

Bila kita ingin bekerja dengan aturan minimumkan, maka metode diatas dapat kita ubah berdasarkan rumus maksimum z = minimum –z menjadi:

Minimumkan z = $\cdots - \cdots$

dp. $x_1 + 2x_2 \geq 2$

$\ldots . + \cdots \geq 4$

$x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Mengubah masalah

Kendala

$\cdots + \cdots - \cdots + \cdots = \cdots$

$\cdots + \cdots - \cdots + \cdots = \ldots$

$\cdots + \cdots = \cdots$

$x_i \geq 0$, i = 1,2,3…,7

Tambahkan variabel baru terhadap kendala 1 dan 2 yaitu x_6 dan x_7 yang disebut variabel buatan (artifisial variabel) dengan koefisien M dan tambahkan juga variabel longgar.

Min z = ... ditulis kembali menjadi:

z $- \cdots$ = 0

a. Membuat tabel simpleks (TS) seperti berikut dan Melakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS

R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	x_6	0	...	...	...	...	...	...	...	...
R2	x_7	0	...	...	...	...	...	...	...	...
R3	x_5	0	...	...	...	...	...	...	...	...

b. Karena belum memenuhi basis standar ,maka lakukan OBE jika basis standar (x_6 x_7) belum bernilai 0.

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R2	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R3	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...
R2	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...
R3	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...

c. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka lanjutkan dengan menentukan pe(unsur pusat), setelah didapat pe ternyata ... mengganti ...

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R2	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R3	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...

d. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R1	...	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...

R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

e. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka FT belum minimum, ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

f. Karena $z_j - c_j$ belum ≤ 0, maka , ... mengganti ....

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	OBE
R0	Z	1	...	…	…	...	…	…	…	…	…
R1	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…
R2	…	0	…	…	…	…	…	…	...	…	…
R3	…	0	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Karena $z_j - c_j \leq 0$ maka sudah minimum dengan z_{min} = …, untuk …= …, dan ... = ⋯. Karena yang diselesaikan adalah masalah maksimumkan, maka kita kembali ke rumus : maks z = -(min –z) = -(…) = … , maka penyelesaiannya adalah z_{mak} = …, untuk …= 0, dan … =…

8. Ubahlah bentuk penyelesaian primal berikut ke dalam bentuk dualnya.

   Minimumkan $z = 8x_1 + x_2$

   dp. $x_1 + 3x_2 \leq 10$

   $x_1 + 5x_2 \leq 8$

   $2x_1 + 2x_2 \leq 6$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

9. Selesaikan MPL berikut ini menggunakan dual simpleks.

   Minimumkan $z = x_1 + 2x_2$

   dp. $x_1 + x_2 \geq 4$

$$2x_1 + x_2 \geq 5$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

10. Selesaikan MPL berikut ini menggunakan dual simpleks.

    Minimumkan z = $x_1 + 5x_2$

    dp. $x_1 + x_2 \geq 8$

    $3x_1 + x_2 \geq 6$

    $x_1 - x_2 \leq 5$

    $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

4.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Latihan Soal Mandiri

1. Selesaikan MPL berikut dengan menggunakan metode simpleks biasa.

   Minimumkan Z = $-6x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$

   dp. $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6 \leq 6$

   $2x_1 - x_2 - 2x_3 + +x_4 \leq 4$

$x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \leq 6$
$x_i \geq 0$,untuk i =1,2,3…,6

2. Selesaikan MPL berikut dengan menggunakan metode simpleks biasa.
   Maksimumkan Z = $15x_1 + 18x_2 + 12x_3$
   dp. $18 + 12x_2 + 8x_3 + \leq 120$
   $18x_1 + 15x_2 + 6x_3 \leq 135$
   $12x_1 + 16x_2 + 6x_3 \leq 150$
   $x_i \geq 0$,untuk i =1,2,3…,150
3. Selesaikan MPL berikut dengan menggunakan metode simpleks dua fase.
   Minimumkan z =$2x_1$ + $2x_2$
   dp. -x_1 + $x_2 \geq 1$
   $x_2 \leq 3$
   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
4. Selesaikan MPL berikut dengan menggunakan metode simpleks dua fase.
   Maksimumkan z =x_1 - $2x_2$
   dp. -x_1 + $x_2 \geq 1$
   $2x_2 \leq 4$
   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
5. Selesaikan MPL berikut dengan menggunakan metode simpleks bilangan besar –M,
   Maksimumkan z = $-4x_1 + 8x_2$
   dp. $2x_1 + x_2 \geq 6$
   $-6x_1 + x_2 \geq 8$
   $x_2 \leq 3$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
6. Selesaikan MPL berikut dengan menggunakan metode simpleks bilangan besar –M.
   Minimumkan z = $-10x_1 + 16x_2$
   dp. $7x_1 + x_2 \geq 30$
   $-6x_1 + x_2 \geq 20$
   $x_2 \leq 20$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

7. Selesaikan MPL berikut dengan menggunakan metode simpleks

   Maksimumkan $Z = 8x_1 + 9x_2 + 4x_3$

   dp. $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$

   $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4$

   $7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$

   $x_1, x_2 x_3 \geq 0$

8. Ubahlah bentuk penyelesaian primal berikut ke dalam bentuk dualnya.

   Minimumkan $z = 2x_1 + x_2$

   dp. $x_1 + 5x_2 \leq 10$

   $x_1 + 3x_2 \leq 6$

   $2x_1 + 2x_2 \leq 8$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

9. Ubahlah bentuk penyelesaian primal berikut ke dalam bentuk dualnya.

   Maksimumkan $z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$

   dp. $4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 10$

   $7x_1 + 5x_2 + 9x_3 \leq 6$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

10. Ubahlah bentuk penyelesaian primal berikut ke dalam bentuk dualnya.

    Minimumkan $z = 2x_1 + 4x_2$

    dp. $x_1 + 8x_2 \leq 18$

    $x_1 + 6x_2 \leq 21$

    $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

MODUL 5
METODE SIMPLEKS DIREVISI

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mampu memahami dan menyelesaikan pemograman linear dengan metode simpleks direvisi, serta dapat membuat soal cerita dengan membuat pemodelan berbentuk model simpleks	1. Konsep metode simpleks direvisi 2. Proses kerja metode simpleks direvisi 3. Metode simpleks direvisi dua fase atau bilangan besar-M

Tujuan Pembelajaran

1. Mampu memahami konsep metode simpleks direvisi
2. Mampu memahami proses kerja metode simpleks direvisi
3. Memahami metode simpleks direvisi dua fase atau bilangan besar-M
4. Mampu menyelesaikan soal diskusi kelompok materi metode simpleks
5. Menyelesaikan soal latihan individu materi metode simpleks direvisi

MODUL 5
METODE SIMPLEKS DIREVISI

5.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Pengertian Metode Simpleks Direvisi

Metode simpleks dikembangkan oleh G.B. Dantzig merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan setiap permasalahan pada pemrograman linear yang kombinasi variabelnya terdiri dari tiga variabel atau lebih. Metode ini dimulai dari pemecahan dasar yang fisibel (*basic feasibel solution*) ke pemecahan dasar fisibel lainnya yang dilakukan berulang-ulang (iteratif) sehingga tercapainya penyelesaian yang optimal dan dinyatakan dalam bentuk standard.
Metode simpleks direvisi memiliki pengertian, tujuan dan prinsip yang sama dari metode simpleks biasa. Perbedaan dari metode simpleks biasa dengan metode simpleks direvisi yaitu berbeda pada waktu menghitung data baru untuk membentuk tabel baru menggunakan operasi matrik. Metode ini terdiri dari beberapa macam metode yaitu :

1. Metode simpleks direvisi biasa yaitu metode untuk menyelesaikan MPL yang kendala strukturalnya semuanya menggunakan tanda $\leq$ (lebih kecil sama dengan)
2. Metode simpleks direvisi dua fase dan metode simpleks direvisi bilangan besar-M yaitu metode untuk menyelesaikan MPL yang kendala strukturalnya semuanya menggunakan tanda $\geq$ (lebih besar sama dengan)

Metode simpleks memiliki syarat yang harus diperhatikan yaitu model program linear (*canonical form*) harus dirubah ke dalam suatu bentuk umum yang dinamakan bentuk baku (*standard form*). Sifat-sifat dalam bentuk baku (*standard form*) yaitu :

1. Semua batasan adalah persamaan (dengan tidak ada nilai negatif pada sisi kanan).
2. Semua variabel tidak ada yang bernilai negatif.
3. Fungsi tujuan dapat berupa minimasi atau maksimasi.

Ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam membuat bentuk baku :

1. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\leq$ dalam bentuk umum, dirubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel slack.
2. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\geq$ dalam bentuk umum, dirubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel slack.
3. Fungsi kendala dengan persamaan dalam bentuk umum, ditambahkan satu artifical variabel (variabel buatan).

Pengertian Metode Simpleks Direvisi

Metode simpleks adalah metode untuk menyelesaikan setiap permasalahan pemograman linear yang terdiri dari dua variabel atau lebih dengan cara perhitungan ulang sampai solusi yang optimal tercapai.

Metode simpleks memiliki istilah-istilah yang biasa digunakan, diantaranya :

1. Iterasi adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
2. Variabel non basis adalah variabel yang nilainya menjadi nol pada sembarang iterasi.
3. Variabel basis adalah variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Variabel basis merupakan variabel slack dan variabel buatan.
4. Variabel slack adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan $\leq$ menjadi persamaan (=).
5. Variabel surplus adalah variabel yang dikurangkan dari model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan $\geq$ menjadi persamaan (=).
6. Variabel buatan adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk $\geq$ atau = untuk difungsikan sebagai variabel basis awal.
7. Variabel masuk adalah variabel nonbasis yang akan menjadi variabel basis dalam proses iterasi metode simpleks.
8. Variabel keluar adalah variabel basis yang akan menjadi variabel nonbasis dalam proses iterasi metode simpleks.
9. Kolom pivot (kolom kerja) adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
10. Baris pivot (baris kerja) adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.
11. Elemen pivot (elemen kerja) adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.

5.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Prosedur Kerja Metode Simpleks Direvisi

Prosedur kerja ketiga metode simpleks direvisi tersebut pada prinsipnya sama dan masing-masing sama dengan simpleks yang tidak direvisi. Prosedur kerja metode simpleks direvisi diantaranya :

1. Ubahlah masalah program linear ke bentuk standar
2. Buatlah vector kolom dari masing-masing koefisien fungsi tujuan $\overline{C_j}$, fungsi pembatas $\overline{y_j}$, dan konstanta ruas kanan $\overline{b_i}$.
3. Tentukan matriks basis/dasar B. Matriks dasar ditunjukkan oleh 151ariable basis dan matriks selajutnya ditentukan oleh 151ariable yang masuk basis dan 151ariable basis lainnya, kemudian carilah inversnya.
4. Buatlah tabel dilengkapi dengan kolom kunci $\overline{y_k}$.

   Tabel ini berisi CB_i, 151ariable dalam basis (VDB), B^{-1}, konstanta ruas kanan $\overline{b_i}$, dan nilai fungsi tujuan Z. Nilai Z dihitung dengan rumus :

   $$\boldsymbol{Z = \sum CB_i b_i}$$

   Kolom kunci $\overline{y_k}$ menggunakan rumus :

   $\overline{C_j} = CB_i\overline{y_k} - \overline{c_j}$, dengan $\overline{y_k} = \mathrm{B}^{-1}\overline{y_j}$

   $\overline{C_j} = (CB_i\mathrm{B}^{-1}\overline{y_j}) - \overline{c_j}$

   $\overline{C_j} = (CB_i\mathrm{B}^{-1})\overline{y_j} - \overline{c_j}$

   Dengan $CB_i\mathrm{B}^{-1} = \pi$ (simpleks multiplier), sehingga rumusnya dapat disederhanakan seperti :

   $\boldsymbol{\overline{C_j} = (\pi\overline{y_j}) - \overline{c_j}}$, untuk j = 1,2,3,…n

   Keterangan :

   $\overline{C_j}$ = koefisien fungsi tujuan

   $\overline{c_j}$ = koefisien fungsi tujuan relatife (mula-mula)

   $\overline{y_j}$ = vector kolom dari koefisien x_{ij}

   $\overline{y_k}$ = vector kolom baru (kolom kunci)

   B^{-1} = invers makriks basis

$\pi =$ simpleks multipler

5. Cari basis kunci (baris yang keluar basis) dengan menggunakan rumus :
   $\mathbf{R}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{min}\frac{\overline{\boldsymbol{b_i}}}{\overline{\boldsymbol{y_k}}}$
   dengan $\overline{y_k} > 0$ dan $\overline{b_i} = \mathrm{B}^{-1}\overline{b_i}\,, i = k = 1{,}2{,}3\ldots, n$
6. Hitunglah nilai-nilai untuk table selanjutnya dengan cara :
   1. Tentukan matriks dasar baru B_i berdasarkan 152ariable masuk basis dan 152ariable lain yang berada dalam basis, kemudian hitunglah inversnya: $(\mathrm{B}_i)^{-1}$
   2. Hitunglah konstanta ruas kanan baru $\overline{b_i}$ dengan rumus :
      $$\overline{\boldsymbol{b_i}} = (\mathbf{B}_{\boldsymbol{i}})^{-\mathbf{1}}\overline{\boldsymbol{b_i}}\,, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\ldots, \boldsymbol{n}$$
   3. Buatlah table dan lengkapi dengan kolom kunci jika hasil pengujian koefisien fungsi tujuan baru $\overline{C_j}$ masih ada yang bernilai 152ariable.
   4. Hitunglah nilai fungsi tujuan baru Z, kemudian ujilah nilai fungsi tujuan ini melalui nilai-nilai koefisien, fungsi tujuan baru $\overline{C_j}$. Fungsi tujuan mencapai maksimum jika $\overline{C_j}$ seluruhnya bernilai positif. Apabila ada yang bernilai negative maka pilih nilai negative paling kecil sebagai kolom kunci. Selanjutnya cari nilai vector kolom baru $\overline{y_k}$ dengan rumus :
      $$\overline{\boldsymbol{y_k}} = (\mathbf{B}_{\boldsymbol{i}})^{-\mathbf{1}}\overline{\boldsymbol{y_j}}$$
   5. Cari baris kunci dan lanjutkan perhitungan mulai dari langkah (a) sampai tidak ditemukan lagi $\overline{C_j}$ yang bernilai negative.

Contoh Soal :
Suatu masalah program linear dinyatakan dalam model matematika sebagai berikut :
Fungsi tujuan : $Z_{maks} = 40x + 25y$
Pembatas : $3x + 2y \leq 150$
$8x + 2y \leq 200$
Sayarat variable : $x \geq 0, y \geq 0$
Penyelesaian :
1) Bentuk standar dari masalah adalah :
   Fungsi tujuan : $Z_{maks} = 40x + 25y + 0S_1 + 0S_2$
   Pembatas : $3x + 2y + S_1 = 150$
   $8x + 2y + S_2 = 200$
   Sayarat variable : $x, y, S_1, S_1 \geq 0$

2) Vektor kolom dari masing-masing koefisien fungsi pembatas, fungsi tujuan, dan konstanta ruas kanan.
   Koefisien fungsi tujuan relative (awal) $\overline{c_j}$:

$\overline{c_j} = \overline{c_1} = (40)$; $\overline{c_2} = (25)$; $\overline{c_3} = (0)$; $\overline{c_4} = (0)$
Koefisien fungsi pembatas $\overline{y_j}$:
$\overline{y_1} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$; $\overline{y_2} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$; $\overline{y_3} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_1 \end{pmatrix}$; $\overline{y_4} = \begin{pmatrix} S_2 \\ S_2 \end{pmatrix}$
$\overline{y_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overline{y_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overline{y_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{y_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Konstanta ruas kanan $\overline{b_i}$:
$\overline{b_i} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix}$

3) Matriks dasar dan inversnya
Variabel basis adalah S_1 dan S_1, maka matriks B :
$\text{B} = (S_1, S_2) = (y_3, y_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Invers matriks B :
$\text{B}^{-1} = \frac{1}{1-0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Tabel Awal dilengkapi dengan kolom kunci :
Lengkapilah tabel simpleks sesuai dengan perhitungan yang dijelaskan di atas.
Kemudian dapat menghitung nilai fungsi tujuan (Z) dengan rumus :
$Z = \sum CB_i b_i$, dimana $CB_i = \begin{pmatrix} CB_1 \\ CB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Maka nilai fungsi tujuan dapat dihitung :
$Z = \sum CB_i b_i = CB_i b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix} = 0$

CBi	**VDB**	$\mathbf{B^{-1}}$		$\overline{\boldsymbol{b_i}}$	$\overline{\boldsymbol{y_1}}$
0	S_1	1	0	150	3
0	S_2	0	1	200	8
Z		0	0	**0**	

Karena nilai fungsi Z = 0, maka perhitungan dilanjutkan dengan mencari kolom kunci.
Menentukan kolom kunci (variable keputusan yang masuk), dimulai dengan mencari nilai simpleks multiplier (π).
$\pi = CB_i\text{B}^{-1} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$
Kemudian, menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru $\overline{C_j}$ untuk menentukan kolom kunci dengan rumus $\overline{C_j} = (\pi\overline{y_j}) - \overline{c_j}$.

$\overline{C_1} = (\pi\overline{y_1}) - \overline{c_1} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} - 40 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - 40 = 0 - 40 = -40$

$\overline{C_2} = (\pi\overline{y_2}) - \overline{c_2} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - 25 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - 25 = 0 - 25 = -25$

$\overline{C_3} = (\pi\overline{y_3}) - \overline{c_3} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$

$\overline{C_4} = (\pi\overline{y_4}) - \overline{c_4} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$

Dari perhitungan di atas bahwa nilai negative paling kecil terdapat pada kolom $\overline{C_1}$ senilai -40. Jadi, $\overline{C_1}$ merupakan kolom kunci. Kolom ini berhubungan dengan $\overline{y_1}$ sehingga variable keputusan x yang masuk basis.
Dengan demikian nilai vector kolom baru $\overline{y_1}$ seperti tabel di atas adalah :

$\overline{y_1} = \mathrm{B}^{-1}\overline{y_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$

5) Menentukan baris kunci (R_i)

Konstanta ruas kanan mula-mula ($\overline{b_i}$) dan nilai-nilai vector kolom baru $\overline{y_j} = \overline{y_1}$

$\overline{b_i} = \begin{pmatrix}150\\200\end{pmatrix}$ dan $\overline{y_1} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$

Maka,

$\mathrm{R}_i = \min \dfrac{\overline{b_i}}{\overline{y_k}} = \min\left\{\dfrac{\overline{b_i}}{\overline{y_1}}\right\} = \min\left\{\dfrac{150}{3}, \dfrac{200}{8}\right\} = \min\{50, 25\} = 25$

Jadi, baris kunci (baris yang keluar basis) memiliki nilai terkecil dari R_i. Baris kuncinya terdapat dalam baris kedua yang berhubungan dengan variable dalam basis S_2. Jadi variable dalam basis S_2 digantikan oleh variable keputusan *x*, dan juga koefisien relative CB_2 bernilai 0 digantikan oleh nilai koefisien variable keputusan *x* dalam fungsi tujuan (Z_{maks}) yaitu 40 pada tabel kedua.

Perhitungan Tabel Kedua (Lanjut)

1. Matriks basis baru dan inversnya
   Variabel yang masuk basis adalah variable *x* dan variable lain yang berada dalam basis adalah S_1, sehingga matriks basis baru B_1 adalah :
   $\mathrm{B}_1 = (\mathrm{S}_1 \quad x) = (\overline{y_3} \quad \overline{y_1})$
   Dimana $\mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 8\end{pmatrix}$, sehingga invers matriks basis B_1 adalah :
   $(\mathrm{B}_1)^{-1} = \dfrac{1}{8-0}\begin{pmatrix}8 & -3\\0 & 1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & -3\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \dfrac{-3}{8}\\0 & \dfrac{1}{8}\end{pmatrix}$

2. Menghitung nilai konstanta ruas kanan baru $\overline{b_i}$

$$\overline{b_i} = \overline{b_1} = (\mathrm{B}_1)^{-1}\overline{b_i} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix}$$

3. Membuat Tabel Simpleks kedua
   Lengkapilah tabel simpleks dengan variable dalam basis S_2 digantikan oleh variable keputusan *x*, dan juga koefisien relative CB_2 bernilai 0 digantikan oleh nilai koefisien variable keputusan *x* yaitu 40 pada tabel kedua. Lengkapi juga sesuai dengan perhitungan yang dijelaskan di atas.
   Maka, $CB_i = \begin{pmatrix} CB_1 \\ CB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix}$
   Kemudian dapat menghitung nilai fungsi tujuan (Z) dengan rumus :
   $Z = \sum CB_i b_i = CB_i b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = 1000$

CBi	**VDB**	**B^{-1}**		**$\overline{b_i}$**	**$\overline{y_2}$**
0	S_1	1	$\frac{-3}{8}$	75	$\frac{5}{4}$
40	x	0	$\frac{1}{8}$	25	$\frac{1}{4}$
Z				**1000**	

Karena nilai fungsi Z = 1000, maka perhitungan dilanjutkan dengan mencari nilai-nilai vector kolom $\overline{C_j}$ (Koefisien fungsi baru)

Simpleks multiplier (π)

$$\pi = CB_i\mathrm{B}^{-1} = (0 \quad 40) \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = (0 \quad 5)$$

Maka :

$$\overline{C_1} = (\pi\overline{y_1}) - \overline{c_1} = (0 \quad 5)\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - 40 = 40 - 40 = 0$$
$$\overline{C_2} = (\pi\overline{y_2}) - \overline{c_2} = (0 \quad 5)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 25 = 10 - 25 = -15$$
$$\overline{C_3} = (\pi\overline{y_3}) - \overline{c_3} = (0 \quad 5)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$\overline{C_4} = (\pi\overline{y_4}) - \overline{c_4} = (0 \quad 5)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa $\overline{C_2}$ bernilai negative sebesar -15, maka kedua nilai fungsi tujuan 1000 bukan merupakan tabel optimum fungsi tujuan. Jadi $\overline{C_2}$ adalah kolom kunci. Kolom ini berhubungan dengan $\overline{y_2}$ sehingga variable *y* masuk basis. Sehingga, nilai vector kolom baru $\overline{y_2}$ adalah:

$$\overline{y_2} = \mathrm{B}^{-1}\overline{y_2} = \begin{pmatrix}1 & \frac{-3}{8}\\ 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

4. Menentukan baris kunci

   Konstanta ruas kanan mula-mula $(\overline{b_i})$ dan nilai-nilai vector kolom baru $\overline{y_j} = \overline{y_2}$

$$\overline{b_i} = \begin{pmatrix}75\\25\end{pmatrix}, \text{dan } \overline{y_2} = \begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

   Maka,

$$\mathrm{R}_i = \min\frac{\overline{b_i}}{\overline{y_k}} = \min\left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{y_2}}\right\} = \min\left\{\frac{75}{\frac{5}{4}}, \frac{25}{\frac{1}{4}}\right\} = \min\{60, 100\} = 60$$

   Jadi, baris kunci (baris yang keluar basis) memiliki nilai terkecil dari R_i. Baris kuncinya terdapat dalam baris pertama yang berhubungan dengan variable dalam basis S_1 Jadi, baris kunci variable dalam basis S_1 digantikan oleh variable keputusan *y* dan juga koefisien relative CB_1 bernilai 0 digantikan oleh koefisien variable keputusan *y* dalam fungsi tujuan (Z_{maks}) yaitu 25 pada tabel ketiga.

Perhitungan Tabel Ketiga (Lanjut)

1. Matriks basis baru dan inversnya

   Variabel yang masuk basis adalah variable *x* dan variable *y* sehingga matriks basis baru adalah :

$$\mathrm{B}_2 = (y \quad x) = (\overline{y_2} \quad \overline{y_1}) = \begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 8\end{pmatrix}$$

   Sehingga invers matriks basis B_2 adalah :

$$(\mathrm{B}_2)^{-1} = \frac{1}{16-6}\begin{pmatrix}8 & -3\\-2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}8 & -3\\-2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-3}{10}\\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

2. Menghitung nilai konstanta ruas kanan baru $\overline{b_\iota}$

$$\overline{b_\iota} = \overline{b_2} = (\mathrm{B}_2)^{-1}\overline{b_\iota} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix}$$

3. Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)
   Lengkapilah tabel simpleks dengan variable dalam basis S_1digantikan oleh variable keputusan *y* dan juga koefisien relative CB_1 bernilai 0 digantikan oleh koefisien variable keputusan *y* yaitu 25 pada tabel ketiga. Lengkapi juga sesuai dengan perhitungan yang dijelaskan di atas.
   Maka, $CB_i = \begin{pmatrix} CB_1 \\ CB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$
   Kemudian dapat menghitung nilai fungsi tujuan (Z) dengan rumus :
   $Z = \sum CB_i b_i = CB_i b_1 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} = 1900$

CBi	**VDB**	$\mathbf{B^{-1}}$		$\overline{\boldsymbol{b_i}}$	$\overline{\boldsymbol{y}}$
25	y	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{10}$	60	-
40	x	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	10	-
Z				**1900**	

Karena nilai fungsi Z = 1900, maka perhitungan dilanjutkan dengan mencari nilai-nilai vector kolom $\overline{C_j}$ (Koefisien fungsi baru)

Simpleks multiplier (π)

$$\pi = CB_i \mathrm{B}^{-1} = (25 \quad 40)\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Maka nilai-nilai koefisien fungsi baru :

$$\overline{C_1} = (\pi\overline{y_1}) - \overline{c_1} = \begin{pmatrix} 12 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - 40 = 40 - 40 = 0$$

$$\overline{C_2} = (\pi\overline{y_2}) - \overline{c_2} = \begin{pmatrix} 12 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 25 = 25 - 25 = 0$$

$$\overline{C_3} = (\pi\overline{y_3}) - \overline{c_3} = \begin{pmatrix} 12 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 12 - 0 = 12$$

$$\overline{C_4} = (\pi\overline{y_4}) - \overline{c_4} = \begin{pmatrix} 12 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa koefisien fungsi tujuan baru $\overline{C_J}$ semuanya bernilai nol (≥ 0), maka tabel tersebut merupakan tabel optimum fungsi tujuan melalui metode simpleks direvisi. Oleh karena itu, nilai fungsi tujuan maksimum Z_{maks} = 1900 dicapai jika x = 10 dan y = 60.

Contoh Soal 2:
Suatu perusahaan menghasilkan 2 produk diproses pada 2 jalur perakitan. Jalur perakitan 1 memiliki 100 jam tersedia dan jalur perakitan 2 memiliki 42 jam tersedia. Setiap produk memerlukan 10 jam waktu pemrosesan pada jalur 1. Sedangkan pada jalur 2, produk 1 membutuhkan 7 jam dan produk 2 membutuhkan 3 jam. Keuntungan untuk produk 1 sebesar \$6 per unit dan keuntungan untuk produk 2 sebesar \$4 per unit. Tentukanlah model pemrograman linear untuk masalah ini dan selesaikan dengan menggunakan metode simpleks biasa ?
Penyelesaian :
Model matematika :

	Produk 1	**Produk 2**	**Batasan**
Perakitan 1	10 jam	10 jam	100 jam
Perakitan 2	7 jam	3 jam	42 jam
Keuntungan	\$6 per unit	\$4 per unit	

Misalkan x_1 = Produk 1 dan x_2 = Produk 2
Persamaan :
Fungsi Tujuan : $Z_{maks} = 6\,x_1 + 4\,x_2$
Kendala : $10x_1 + 10x_2 \leq 100$
$7x_1 + 3x_2 \leq 42$
$x_1\,, x_2 \geq 0$
Proses kerja dengan menggunakan metode simpleks biasa :

1) Bentuk standar dari masalah adalah :
   Fungsi tujuan : $Z_{maks} = 6\,x_1 + 4\,x_2 + 0S_1 + 0S_2$
   Pembatas $10x_1 + 10x_2 + S_1 = 100$
   $7x_1 + 3x_2 + S_2 = 42$
   Sayarat variable : x, y, S_1, $S_1 \geq 0$

2) Vektor kolom dari masing-masing koefisien fungsi pembatas, fungsi tujuan, dan konstanta ruas kanan.

Koefisien fungsi tujuan relative (awal) $\overline{c_j}$:
$\overline{c_j} = \overline{c_1} = (6)\ ;\ \overline{c_2} = (4)\ ;\ \overline{c_3} = (0)\ ;\ \overline{c_4} = (0)$
Koefisien fungsi pembatas $\overline{y_j}$:
$\overline{y_1} = (x_1)\ ;\ \overline{y_2} = (x_2)\ ;\ \overline{y_3} = (S_1)\ ;\ \overline{y_4} = (S_2)$
$\overline{y_1} = \begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}\ ;\ \overline{y_2} = \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}\ ;\ \overline{y_3} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ;\ \overline{y_4} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
Konstanta ruas kanan $\overline{b_i}$:
$\overline{b_i} = \begin{pmatrix}100\\42\end{pmatrix}$

3) Matriks dasar dan inversnya
Variabel basis adalah S_1 dan S_1, maka matriks B :
$\text{B} = (S_1, S_2) = (y_3, y_4) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
Invers matriks B :
$\text{B}^{-1} = \dfrac{1}{1-0}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

4) Tabel Awal dilengkapi dengan kolom kunci :
Lengkapilah tabel simpleks sesuai dengan perhitungan yang dijelaskan di atas.
Kemudian dapat menghitung nilai fungsi tujuan (Z) dengan rumus :
$Z = \sum CB_i b_i$,dimana $CB_i = \begin{pmatrix}CB_1\\CB_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S_1\\S_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
Maka nilai fungsi tujuan dapat dihitung :
$Z = \sum CB_i b_i = CB_i b_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\42\end{pmatrix} = 0$

CBi	**VDB**	**B^{-1}**		$\overline{b_i}$	$\overline{y_1}$
0	S_1	1	0	100	10
0	S_2	0	1	42	7
Z				**0**	

Karena nilai fungsi Z = 0, maka perhitungan dilanjutkan dengan mencari kolom kunci.
Menentukan kolom kunci (variable keputusan yang masuk), dimulai dengan mencari nilai simpleks multiplier (π).
$\pi = CB_i\text{B}^{-1} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = (0 \quad 0)$

Kemudian, menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru $\overline{C_j}$ untuk menentukan kolom kunci dengan rumus $\overline{C_j} = (\pi\overline{y_j}) - \overline{c_j}$.

$\overline{C_1} = (\pi\overline{y_1}) - \overline{c_1} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix} - 6 = 0 - 6 = -6$

$\overline{C_2} = (\pi\overline{y_2}) - \overline{c_2} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix} - 4 = 0 - 4 = -4$

$\overline{C_3} = (\pi\overline{y_3}) - \overline{c_3} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$

$\overline{C_4} = (\pi\overline{y_4}) - \overline{c_4} = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 0 = 0$

Dari perhitungan di atas bahwa nilai negative paling kecil terdapat pada kolom $\overline{C_1}$ senilai -6. Jadi, $\overline{C_1}$ merupakan kolom kunci. Kolom ini berhubungan dengan $\overline{y_1}$ sehingga variable keputusan x_1 yang masuk basis.
Dengan demikian nilai vector kolom baru $\overline{y_1}$ seperti tabel di atas adalah :

$\overline{y_1} = \mathrm{B}^{-1}\overline{y_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}$

5) Menentukan baris kunci (R_i)
   Konstanta ruas kanan mula-mula ($\overline{b_i}$) dan nilai-nilai vector kolom baru $\overline{y_j} = \overline{y_1}$

   $\overline{b_i} = \begin{pmatrix}100\\42\end{pmatrix}$ dan $\overline{y_1} = \begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}$

   Maka,

   $\mathrm{R}_i = \min \frac{\overline{b_i}}{\overline{\overline{y_k}}} = \min \left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{\overline{y_1}}}\right\} = \min\left\{\frac{100}{10}, \frac{42}{7}\right\} = \min\{10, 6\} = 6$

   Jadi, baris kunci (baris yang keluar basis) memiliki nilai terkecil dari R_i yaitu nilai 6. Baris kuncinya terdapat dalam baris kedua yang berhubungan dengan variable dalam basis S_2. Jadi variable dalam basis S_2 digantikan oleh variable keputusan x_1, dan juga koefisien relative CB_2 bernilai 0 digantikan oleh nilai koefisien variable keputusan x_1 dalam fungsi tujuan (Z_{maks}) yaitu 6 pada tabel kedua.

<u>Perhitungan Tabel Kedua (Lanjut)</u>

1) Matriks basis baru dan inversnya
   Variabel yang masuk basis adalah variable x_1 dan variable lain yang berada dalam basis adalah S_1, sehingga matriks basis baru B_1 adalah :

   $\mathrm{B}_1 = (\mathrm{S}_1 \quad x_1) = (\overline{y_3} \quad \overline{y_1})$

   Dimana $\mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix}1 & 10\\0 & 7\end{pmatrix}$, sehingga invers matriks basis B_1 adalah :

   $$(\mathrm{B}_1)^{-1} = \frac{1}{7-0}\begin{pmatrix}7 & -10\\0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}7 & -10\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{-10}{7}\\0 & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

   Menghitung nilai konstanta ruas kanan baru $\overline{b_i}$

$$\overline{b_i} = \overline{b_1} = (\mathrm{B}_1)^{-1}\overline{b_i} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-10}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2) Membuat Tabel Simpleks kedua

Lengkapilah tabel simpleks dengan variable dalam basis S_2 digantikan oleh variable keputusan x_1, dan juga koefisien relative CB_2 bernilai 0 digantikan oleh nilai koefisien variable keputusan x_1 dalam fungsi tujuan (Z_{maks}) yaitu 6 pada tabel kedua. Lengkapi juga sesuai dengan perhitungan yang dijelaskan di atas.

Maka, $CB_i = \begin{pmatrix} CB_1 \\ CB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Kemudian dapat menghitung nilai fungsi tujuan (Z) dengan rumus :

$$Z = \sum CB_i b_i = CB_i b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 6 \end{pmatrix} = 36$$

CB_i	**VDB**	$\mathbf{B^{-1}}$		$\overline{\boldsymbol{b_i}}$	$\overline{\boldsymbol{y_2}}$
0	S_1	1	$\frac{-10}{7}$	40	$\frac{5}{4}$
6	x_1	0	$\frac{1}{7}$	6	$\frac{1}{4}$
Z				**36**	

Karena nilai fungsi Z = 36, maka perhitungan dilanjutkan dengan mencari nilai-nilai vector kolom $\overline{C_j}$ (Koefisien fungsi baru)

Simpleks multiplier (π)

$$\pi = CB_i \mathrm{B}^{-1} = (0 \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & \frac{-10}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

Maka :

$$\overline{C_1} = (\pi\overline{y_1}) - \overline{c_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} - 6 = 6 - 6 = 0$$

$$\overline{C_2} = (\pi\overline{y_2}) - \overline{c_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 = \frac{18}{7} - 4 = -\frac{10}{7}$$

$$\overline{C_3} = (\pi\overline{y_3}) - \overline{c_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$\overline{C_4} = (\pi\overline{y_4}) - \overline{c_4} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{6}{7}$$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa $\overline{C_2}$ bernilai negative sebesar $-\frac{10}{7}$, maka kedua nilai fungsi tujuan 36 bukan merupakan tabel optimum fungsi tujuan. Jadi $\overline{C_2}$ adalah kolom kunci. Kolom ini berhubungan dengan $\overline{y_2}$ sehingga variable x_2 masuk basis. Sehingga, nilai vector kolom baru $\overline{y_2}$ adalah:

$$\overline{y_2} = \mathrm{B}^{-1}\overline{y_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-10}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

3) Menentukan baris kunci

Konstanta ruas kanan mula-mula ($\overline{b_i}$) dan nilai-nilai vector kolom baru $\overline{y_j} = \overline{y_2}$

$$\overline{b_i} = \begin{pmatrix} 40 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{dan } \overline{y_2} = \begin{pmatrix} \frac{40}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Maka,

$$\mathrm{R}_i = \min \frac{\overline{b_i}}{\overline{y_k}} = \min \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{y_2}} \right\} = \min \left\{ \frac{40}{\frac{40}{7}}, \frac{6}{\frac{3}{7}} \right\} = \min\{7, 14\} = 7$$

Jadi, baris kunci (baris yang keluar basis) memiliki nilai terkecil dari R_i yaitu bernilai 7. Baris kuncinya terdapat dalam baris pertama yang berhubungan dengan variable dalam basis S_1 Jadi, baris kunci variable dalam basis S_1 digantikan oleh variable keputusan x_2 dan juga koefisien relative CB_1 bernilai 0 digantikan oleh koefisien variable keputusan x_2 dalam fungsi tujuan (Z_{maks}) yaitu 4 pada tabel ketiga.

<u>Perhitungan Tabel Ketiga (Lanjut)</u>

1) Matriks basis baru dan inversnya

Variabel yang masuk basis adalah variable x_1 dan variable x_2 sehingga matriks basis baru adalah :

$$\mathrm{B}_2 = (x_2 \quad x_1) = (\overline{y_2} \quad \overline{y_1}) = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Sehingga invers matriks basis B_2 adalah :

$$(\mathrm{B}_2)^{-1} = \frac{1}{70 - 30} \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{40} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{40} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Menghitung nilai konstanta ruas kanan baru $\overline{b_\iota}$

$$\overline{b_\iota} = \overline{b_2} = (\mathrm{B}_2)^{-1}\overline{b_\iota} = \begin{pmatrix} \frac{7}{40} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{40} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)

Lengkapilah tabel simpleks dengan variable dalam basis S_1 digantikan oleh variable keputusan x_2 dan juga koefisien relative CB_1 bernilai 0 digantikan oleh koefisien variable keputusan x_2 dalam fungsi tujuan (Z_{maks}) yaitu 4 pada tabel ketiga. Lengkapi juga sesuai dengan perhitungan yang dijelaskan di atas.

Maka, $CB_i = \begin{pmatrix} CB_1 \\ CB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Kemudian dapat menghitung nilai fungsi tujuan (Z) dengan rumus :

$$Z = \sum CB_i b_i = CB_i b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 46$$

CB_i	**VDB**	**B^{-1}**		**$\overline{b_i}$**	**$\overline{y}$**
4	x_2	$\frac{7}{40}$	$-\frac{1}{4}$	7	-
6	x_1	$-\frac{3}{40}$	$\frac{1}{4}$	3	-
Z				**46**	

Karena nilai fungsi Z = 46, maka perhitungan dilanjutkan dengan mencari nilai-nilai vector kolom $\overline{C_J}$ (Koefisien fungsi baru)

Simpleks multiplier (π)

$$\pi = CB_i\mathrm{B}^{-1} = (4 \quad 6) \begin{pmatrix} \frac{7}{40} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{40} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Maka nilai-nilai koefisien fungsi baru :

$$\overline{C_1} = (\pi\overline{y_1}) - \overline{c_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} - 6 = 6 - 6 = 0$$

$$\overline{C_2} = (\pi\overline{y_2}) - \overline{c_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\overline{C_3} = (\pi\overline{y_3}) - \overline{c_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\overline{C_4} = (\pi\overline{y_4}) - \overline{c_4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{2}$$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa koefisien fungsi tujuan baru $\overline{C_J}$ semuanya bernilai nol ($\geq$ 0), maka tabel tersebut merupakan tabel optimum fungsi tujuan melalui metode simpleks direvisi. Oleh karena itu, nilai fungsi tujuan maksimum: Z_{maks} = 46 dicapai jika x_1 = 3 dan x_2 = 7

5.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Metode Simpleks Direvisi Dua Fase/Bilangan Besar-M

Metode simpleks direvisi dua fase atau bilangan besar-M adalah metode untuk menyelesaikan masalah program linear yang kendala strukturnya merupakan tanda lebih besar sama dengan ($\geq$). Metode simpleks direvisi dua fase atau bilangan besar-M termasuk metode simpleks direvisi dengan artifisial.

a. Metode simpleks direvisi dua fase

Metode dua fase digunakan jika variable basis awal terdiri dari variable buatan. Metode ini melakukan proses optimasi dalam dua tahap. Tahap pertama adalah proses optimasi variable buatan. Tahap kedua adalah proses optimasi variable keputusan. Alasan metode ini memiliki dua tahap karena untuk memaksa variable buatan bernilai 0, sebab variable buatan seharusnya tidak ada.

b. Metode simpleks direvisi bilangan besar-M (Big M)

Metode simpleks Big M memiliki perbedaan dari metode simpleks biasa yaitu terletak pada pembentukan tabel awal. Jika fungsi kendala menggunakan bentuk persamaan $\geq$, perubahan dari bentuk umum ke bentuk baku memerlukan satu variable surplus. Variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai variable basis awal, karena koefisiennya bertanda negative. Oleh karena itu, untuk menjadi variable basis awal harus ditambahkan satu variable buatan. Variabel buatan pada solusi optimal harus bernilai 0 karena variable ini tidak ada dalam pengerjaan hanya ada dalam proses nyata.

Langkah atau cara atau teknik yang digunakan untuk membuat variable buatan bernilai 0 pada solusi optimal yaitu dengan cara :

1) Penambahan variable buatan pada fungsi kendala yang tidak memiliki variable slack, menuntut penambahan variable buatan pada fungsi tujuan.
2) Apabila fungsi tujuan merupakan maksimum, maja variable buatan pada fungsi tersebut memiliki koefisien -M.
3) Apabila fungsi tujuan merupakan minimum, maka variable buatan pada fungsi tersebut memiliki koefisien +M.
4) Variabel pada fungsi tujuan digantikan nilai dari fungsi kendala yang memuat variable buatan tersebut. Hal ini dikarenakan koefisien variable basis pada tabel metode simpleks harus bernilai 0.

Secara umum, metode simpleks dua fase dan metode simpleks Big M dapat diselesaikan dengan langkah-langkah pengerjaan sebagai berikut :

1. Mengubah masalah :
   a. Mengubah kendala structural dari pertidaksamaan menjadi persamaan.
   b. Mengubah fungsi tujuan dengan masuknya variable longgar, tetapi ditulis tetap dalam bentuk eksplisit.

2. Membuat Tabel Simpleks Awal (TSA) yang formatmya sebagai berikut :

Basis	Invers Basis (B^{-1})	RHS
Z	w	Min Z
X_B	B^{-1}	$\bar{b}$

x_k	$\frac{RHS}{x_k}$
$Z_j - C_j$	-
y_k	$\frac{\bar{b}}{y_k}$

Table 5.3.1. Tabel Simpleks Direvisi

Keterangan :
Min Z $= C_B \bar{b}$
w $= C_B B^{-1}$
$\bar{b}$ $= B^{-1}b$
$Z_j - C_j$ $= w.a_j - c_j$
y_k $= B^{-1}a_j$
a_j = vector koefisien variable ke-j (x_j) pada kendala struktural
b = ruas kanan kendala structural
$\bar{b}$ = vector konstanta
c_j = koefisien variable ke-j dari fungsi tujuan
C_B = koefisien fungsi tujuan variable basis
X_B = variable bebas
B = matriks basis
B^{-1} = invers dari B
RHS = *Right Hand Side*

3. Menilai fungsi tujuan (FT)
   Untuk memastikan fungsi tujuan sudah optimum atau belum yaitu dengan cara :
   Menghitung $Z_j - C_j$ $= w.a_j - c_j$
   dengan : w $= C_B B^{-1}$
   Untuk mengoptimalkan fungsi tujuan ada beberapa syarat yang harus diperhatikan:
   a. Untuk meminimumkan, fungsi tujuan dikatakan minimum selesai, dan optimal bila $Z_j - C_j \leq 0$. Jika belum dalam keadaan tersebut maka fungsi tujuan belum minimum.

b. Untuk memaksimumkan, fungsi tujuan dikatakan maksimum, selesai, dan optimal bila $Z_j - C_j \geq 0$. Jika belum dalam keadaan tersebut maka fungsi tujuan belum minimum.

Apabila fungsi tujuan sudah sesuai syarat maka tidak ada lagi perhitungan, sedangkan jika belum optimum maka lanjutkan ke langkah berikutnya yaitu langkah 4.

4. Menentukan unsur pusat (pe)
   Untuk menentukan pe, terlebih dahulu isi kolom x_j , yaitu dengan :
   Jika nilai $Z_j - C_j$ bernilai besar maka itu untuk masalah minimumkan,
   Jika nilai $Z_j - C_j$ bernilai kecil maka itu untuk masalah maksimumkan.
   Dengan ketentuan ini berarti vector a_j harus masuk basis.
   y_k diperoleh dengan rumus :
   $y_k = B^{-1}a_k$
   dengan a_j vector yang harus masuk basis.
   Setelah itu, isi kolom $\frac{RHS}{x_j}$
   Bila $x_j = 0$ atau $x_j < 0$, maka hasil baginya tak perlu ditentukan (tak terdefinisi untuk pe, dimana pe harus bernilai positif)
   Pilih nilai $\frac{RHS}{x_j}$, terkecil untuk menentukan vekor yang harus keluar dari basis.

5. Membuat tabel simpleks berikutnya
   Tentukan basis yang barunya (X_B **)**
   Tentukan matriks basis (B)
   Tentukan B^{-1}
   Tentukan C_B
   Tentukan $\bar{b} = B^{-1}b$
   Tentukan $w = C_B B^{-1}$
   Hitunglah minimum Z
   Kemudian isikan hasilnya ke tabel dengan format yang sama dengan format tabel simpleks awal.
   Kembali ke langkah 3.

Agar lebih memahami mengenai metode ini dapat dijelaskan langsung dengan contoh soal di bawah ini.

Contoh Soal 1 : Metode Simpleks Dua Fase

1. Meminimumkan $Z_{maks} = 300x_1 + 150x_2$
   dp $3x_1 + x_2 \geq 27$
   $x_1 + x_2 \geq 21$
   $x_1 + 2x_2 \geq 30$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian :

1. Mengubah Masalah

a) Fungsi kendala

$3x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 27$

$x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 21$

$x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 30$

$x_i \geq 0$, untuk i = 1,2,3,4,5,6,7,8

b) Bila pakai dua fase, fungsi tujuannya seperti :

Fungsi 1 : Z = $0x_1 + 0x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 + x_6 + x_7 + x_8$

Fungsi 2 : Z = $300x_1 + 150x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5$

Bila pakai Big M, fungsi tujuannya seperti :

Fungsi 3 : Z = $300x_1 + 150x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 + \mathrm{M}x_6 + \mathrm{M}x_7 + \mathrm{M}x_8$

$a_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$a_5 = x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_6 = x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_7 = x_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_8 = x_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fungsi tujuan dalam metode dua fase :

c_1 = Fungsi 1 = $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$,

c_2 = Fungsi 2 = $(300\ \ 150\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$,

Fungsi tujuan dalam metode Big M :

c = Fungsi 3 = $(300\ \ 150\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \mathrm{M}\ \ \mathrm{M}\ \ \mathrm{M})$

Setelah mendapatkan nilai-nilai yang dibutuhkan, maka dapat membuat tabel simpleks awal untuk **metode simpleks direvisi dua fase**. Penyelesainnya sebagai berikut :

2. Membuat Tabel Simpleks Awal (Fase I)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	1	1	1	78
x_6	1	0	0	27
x_7	0	1	0	21
x_8	0	0	1	30

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_1}}$
5	-
3	9
1	21
1	30

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

Fase 1 atau tahap 1 ini menggunakan fungsi tujuan (c_1) dalam metode dua fase yang diketahui soal.

$$X_B = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_6, x_7, x_8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_6, x_7, x_8) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w = C_B\, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\, \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 30 \end{pmatrix} = 78$$

3. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 5 - 0 = 5$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 4 - 0 = 4$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1 - 0 = -1$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1 - 0 = -1$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -1 - 0 = -1$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1 - 1 = 0$$

$$Z_7 - C_7 = w.a_7 - c_7 = (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0 = 1 - 1 = 0$$

$$Z_8 - C_8 = w.a_8 - c_8 = (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 0 = 1 - 1 = 0$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum.

4. Menentukan Unsur Pusat (pe)
   Nilai terbesar dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_1 - C_1 = 5$ yang terletak pada kolom x_1, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_1, maka k = 1

   $$y_k = y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

   Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:

   $$\text{Baris } X_6 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{27}{3} = 9$$

   $$\text{Baris } X_7 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{21}{1} = 21$$

   $$\text{Baris } X_8 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{30}{1} = 30$$

   Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 9, terletak dalam baris x_6. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_1 dan baris x_6. Artinya x_6 diganti dengan x_1 . Tabel awal menjadi :

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	1	1	1	78
x_6	1	0	0	27
x_7	0	1	0	21
x_8	0	0	1	30

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_1}}$
5	-
3	9
1	21
1	30

Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum akan lanjut ke tahap selanjutnya.

5. Membuat Tabel Simpleks Berikutnya (TS-2)
Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel awal (Fase I)

Basis	**Invers Basis ($\mathbf{B^{-1}}$)**			**RHS**
Z	1	1	1	78
x_6	1	0	0	27
x_7	0	1	0	21
x_8	0	0	1	30

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_1}}$
5	-
3	9
1	21
1	30

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-2) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	**Invers Basis ($\mathbf{B^{-1}}$)**			**RHS**
Z	$-\frac{2}{3}$	1	1	33
x_1	$\frac{1}{3}$	0	0	9
x_7	$-\frac{1}{3}$	1	0	12
x_8	$-\frac{1}{3}$	0	1	21

$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_2}}$
$\frac{7}{3}$	-
$\frac{1}{3}$	27
$\frac{2}{3}$	18
$\frac{5}{3}$	$\frac{63}{5}$

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_1, x_7, x_8) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} R_1 \to \frac{1}{3} R_1 \\ R_2 \to 3R_2 - R_1 \end{cases}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} R_2 \rightarrow \frac{1}{3} R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{cases}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} R_2 \rightarrow \frac{1}{3} R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C_B} = (x_1, x_7, x_8) = (0 \quad 1 \quad 1)$$

$$\mathrm{w} = \mathrm{C_B}\, \mathrm{B}^{-1} = (0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{3} \quad 1 \quad 1\right)$$

$$\bar{b} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min Z} = \mathrm{C_B}\, \bar{b} = (0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix} = 33$$

6. Menilai Fungsi Tujuan
   Pengerjaannya sesuai dengan langkah 3, yaitu :
   menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru $\mathrm{C_j}$ dengan rumus:

$$\mathrm{Z_j} - \mathrm{C_j} = \mathrm{w.\,a_j} - \mathrm{c_j}$$

   Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$\mathrm{Z_1} - \mathrm{C_1} = \mathrm{w.\,a_1} - \mathrm{c_1} = \left(-\frac{2}{3} \quad 1 \quad 1\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\mathrm{Z_2} - \mathrm{C_2} = \mathrm{w.\,a_2} - \mathrm{c_2} = \left(-\frac{2}{3} \quad 1 \quad 1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = \frac{7}{3} - 0 = \frac{7}{3}$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1 - 0 = -1$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -1 - 0 = -1$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$$

$$Z_7 - C_7 = w.a_7 - c_7 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1 - 1 = 0$$

$$Z_8 - C_8 = w.a_8 - c_8 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 1 - 1 = 0$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum.

7. Menentukan Unsur Pusat (pe)

Nilai terbesar dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_2 - C_2 = \frac{7}{3}$ yang terletak pada kolom x_2, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_2, maka $k = 2$

$$y_k = y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:

Baris $X_1 = \frac{RHS}{y_2} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 27$

Baris $X_7 = \frac{RHS}{y_2} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = 18$

Baris $X_8 = \frac{RHS}{y_2} = \frac{21}{\frac{5}{3}} = \frac{63}{5}$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu $\frac{63}{5}$, terletak dalam baris x_8 . Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_2 dan baris x_8 . Artinya x_8 diganti dengan x_2 .

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**		$\mathbf{x_2}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_2}}$
Z	$-\frac{2}{3}$	1	1	33		$\frac{7}{3}$	-
x_1	$\frac{1}{3}$	0	0	9		$\frac{1}{3}$	27
x_7	$-\frac{1}{3}$	1	0	12		$\frac{2}{3}$	18
x_8	$-\frac{1}{3}$	0	1	21		$\frac{5}{3}$	$\frac{63}{5}$

Dikarenakan tabel simpleks kedua memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum dan akan lanjut ke tahap selanjutnya.

8. Membuat Tabel Simpleks Berikutnya (TS-3)
   Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks kedua (TS-2)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**		$\mathbf{x_2}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_2}}$
Z	$-\frac{2}{3}$	1	1	33		$\frac{7}{3}$	-
x_1	$\frac{1}{3}$	0	0	9		$\frac{1}{3}$	27
x_7	$-\frac{1}{3}$	1	0	12		$\frac{2}{3}$	18
x_8	$-\frac{1}{3}$	0	1	21		$\frac{5}{3}$	$\frac{63}{5}$

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-3) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$
x_7	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_2	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{63}{5}$

$\mathbf{x_5}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_5}}$
$\frac{2}{5}$	-
$\frac{1}{5}$	24
$\frac{2}{5}$	9
$-\frac{3}{5}$	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_7 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_1, x_7, x_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} R_1 \to \frac{1}{3} R_1 \end{cases}$$

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{cases}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} R_3 \to \frac{3}{5} R_3 \end{cases}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{array}\right) \begin{cases} R_1 \to R_1 - \frac{1}{3} R_3 \\ R_2 \to R_2 - \frac{2}{3} R_3 \end{cases}$$

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_1, x_7, x_2) = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$w = C_B\, B^{-1} = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{63}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\, \bar{b} = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{63}{5} \end{pmatrix} = \frac{18}{5}$$

9. Menghitung Fungsi Tujuan
   Langkah ini sesuai seperti langkah 3 sebelumnya.
   menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

   Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1 - 0 = -1$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{2}{5} - 0 = \frac{2}{5}$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{5} - 1 = -\frac{6}{3}$$

$$Z_7 - C_7 = w.a_7 - c_7 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1 - 1 = 0$$

$$Z_8 - C_8 = w.a_8 - c_8 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{2}{5} - 1 = -\frac{7}{5}$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum.

10. Menentukan Unsur Pusat (pe)

Nilai terbesar dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_5 - C_5 = \frac{2}{5}$ yang terletak pada kolom x_5, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_5, maka $k = 5$

$$y_k = y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{\text{RHS}}{y_k}$:

$$\text{Baris } X_1 = \frac{\text{RHS}}{y_5} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{1}{5}} = 24$$

$$\text{Baris } X_7 = \frac{\text{RHS}}{y_5} = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{2}{5}} = 9$$

$$\text{Baris } X_8 = \frac{\text{RHS}}{y_5} = \frac{\frac{63}{5}}{-\frac{3}{5}} = -21$$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 9, terletak dalam baris x_7 . Baris x_8 memiliki nilai terkecil namun di dalam solusi baru atau hasil bagi tidak bisa mengandung bilangan negative, tetapi harus bilangan positif. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_5 dan baris x_7 . Artinya x_7 diganti dengan x_5 .

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$
x_7	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_2	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{63}{5}$

x_5	$\frac{RHS}{x_5}$
$\frac{2}{5}$	-
$\frac{1}{5}$	24
$\frac{2}{5}$	9
$-\frac{3}{5}$	-

Dikarenakan tabel simpleks ketiga memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum dan akan lanjut ke tahap selanjutnya.

11. Membuat Tabel Simpleks Berikutnya (TS-4)
Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks ketiga (TS-3)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$
x_7	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_2	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{63}{5}$

x_5	$\frac{RHS}{x_5}$
$\frac{2}{5}$	-
$\frac{1}{5}$	24
$\frac{2}{5}$	9
$-\frac{3}{5}$	-

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-4) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	0	0	0	0
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	9
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	18

$\mathbf{x_5}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_5}}$
-	-
-	-
-	-
-	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_1, x_5, x_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks B setelah dihitung dengan menggunakan proses kerja matriks menghasilkan invers matriks B :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_1, x_5, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w = C_B\, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min Z} = C_B\,\bar{b} = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = 0$$

12. Menghitung Fungsi Tujuan
    Langkah pengerjaan sesuai langkah 3 sebelumnya.
    menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 1 = -1$$

$$Z_7 - C_7 = w.a_7 - c_7 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 1 = -1$$

$$Z_8 - C_8 = w.a_8 - c_8 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 1 = -1$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ sudah seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I sudah minimum dan dapat melanjutkan ke fase II.

13. Membuat Tabel Simpleks Kelima (Fase II)
    Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks keempat (TS-4)

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	0	0	0	0
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	9
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	18

x_5	$\frac{RHS}{x_5}$
-	-
-	-
-	-
-	-

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-5= Fase II) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	75	75	0	3600
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	9
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	18

x_5	$\frac{RHS}{x_5}$
-	-
-	-
-	-
-	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

Fase 2 atau tahap 2 ini menggunakan fungsi tujuan (c_2) dalam metode dua fase yang diketahui soal.

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_1, x_5, x_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks B setelah dihitung dengan menggunakan proses kerja matriks menghasilkan invers matriks B :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_1, x_5, x_2) = (300 \quad 0 \quad 150)$$

$$w = C_B\, B^{-1} = (300 \quad 0 \quad 150) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = (75 \quad 75 \quad 0)$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 21 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\, \bar{b} = (300 \quad 0 \quad 150) \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = 3600$$

14. Menilai Fungsi Tujuan

Langkah pengerjaan sesuai langkah 3 sebelumnya.
menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (75 \quad 75 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 300 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (75 \quad 75 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 150 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (75 \quad 75 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -75 - 0 = -75$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (75 \quad 75 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -75 - 0 = -75$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (75 \quad 75 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ sudah seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase II sudah minimum. Jadi dilihat dari tabel simpleks Fase II dapat diperoleh :

$Z_{min} = 3600$
$x_1 = 3$
$x_2 = 18$

Contoh Soal 2 : Metode Simpleks Big M

Asrama UKI adalah sebuah tempat tinggal yang menampung beberapa mahasiswa yang mendapatkan beasiswa dari UKI. Asrama ini akan melakukan penambahan jumlah kamar tidur. Ada dua jenis kamar tidur yang akan dibangun, yaitu kamar tidur kecil yang menampung 1 orang dan kamar tidur besar yang menampung 2 orang. Dalam pembangunan ini, terdapat 2 syarat yaitu total kamar baru minimal berjumlah 4 kamar dan total daya tampung minimal adalah 6 orang. Biaya pembangunan satu kamar tidur kecil adalah 2 kantung kuningan, sedangkan biaya pembangunan satu kamar tidur besar adalah 3 kantung kuningan. Berapa jumlah kamar tidur kecil dan kamar tidur besar yang dibangun agar biaya minimum ?

Penyelesaian :

Meminimumkan : $Z = 2x_1 + 3x_2$

Kendala : $x_1 + x_2 \geq 4$
$x_1 + 2x_2 \geq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan program linear ini dapat menggunakan metode dua fase atau metode Big M. Pada permasalahan ini kita menggunakan metode Big M dengan cara pengerjaan sebagai berikut :

1. Mengubah Masalah
   a) Fungsi kendala
      $x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4$
      $x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 6$
      $x_1, x_2 \geq 0$
   b) Fungsi tujuannya
      $Z = 2x_1 + 3x_2 - 0x_3 - 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$
      $a_1 = x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, a_2 = x_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, a_3 = x_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$
      $a_4 = x_4 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, a_5 = x_5 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, a_6 = x_6 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
      $c =$ fungsi tujuan $= (2 \ \ 3 \ \ 0 \ \ 0 \ \ M \ \ M)$

2. Membuat Tabel Simpleks Awal (Fase I)

Basis	**Invers Basis ($\mathbf{B^{-1}}$)**		**RHS**
Z	M	M	4M + 6M
x_5	1	0	4
x_6	0	1	6

$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_2}}$
3M − 3	-
1	4
2	3

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$X_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

$B = (x_5, x_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C_B = (x_5, x_6) = (M \quad M)$

$w = C_B\, B^{-1} = (M \quad M)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (M \quad M)$

$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Min Z $= C_B\, \bar{b} = (M \quad M)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4M + 6M$

3. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (M \quad M)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = (M + M) - 2 = 2M - 2$

$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (M \quad M)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 = (M + 2M) - 3 = 3M - 3$

$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (M \quad M)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (-M) - 0 = -M$

$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (M \quad M)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = (-M) - 0 = -M$

$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (M \quad M)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (M) - M = 0$

$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = (M \quad M)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = (M) - M = 0$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum.

4. Menentukan Unsur Pusat (pe)
Nilai terbesar dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_2 - C_2 = 3M - 3$ yang terletak pada kolom x_2, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_2, maka k = 2
$y_k = y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:
Baris $X_5 = \dfrac{RHS}{y_2} = \dfrac{4}{1} = 4$
Baris $X_6 = \dfrac{RHS}{y_2} = \dfrac{6}{2} = 3$
Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 3, terletak dalam baris x_6. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_2 dan baris x_6. Artinya x_6 diganti dengan x_2 . Tabel awal menjadi :

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**
Z	M	M	$4M + 6M$
x_5	1	0	4
x_6	0	1	6

x_2	$\frac{RHS}{x_2}$
$3M - 3$	-
1	4
2	3

Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan belum minimum akan lanjut ke tahap selanjutnya.

5. Membuat Tabel Simpleks Kedua (TS-2)
Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks awal.

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**
Z	M	M	$4M + 6M$
x_5	1	0	4

x_2	$\frac{RHS}{x_2}$
$3M - 3$	-
1	4

x_6	0	1	6	2	3

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-2) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	Invers Basis (B^{-1})		RHS	x_1	$\frac{RHS}{x_1}$
Z	M	$-\frac{1}{2}M+\frac{3}{2}$	$7M+9$	$\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}$	-
x_5	1	$-\frac{1}{2}$	1	1	1
x_2	0	$\frac{1}{2}$	3	1	3

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_5, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2-0}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_5, x_2) = (M \quad 3)$$

$$w = C_B\, B^{-1} = (M \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(M \quad -\frac{1}{2}M+\frac{3}{2}\right)$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\, \bar{b} = (M \quad 3)\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 7M + 9$$

6. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = \left(M \quad -\frac{1}{2}M+\frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = \left(\frac{1}{2}M+\frac{3}{2}\right) - 2$$

$$= \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} M & -\frac{1}{2}M + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} M & -\frac{1}{2}M + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (-M) - 0 = -M$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} M & -\frac{1}{2}M + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = \left(\frac{1}{2}M - \frac{3}{2}\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2}M - \frac{3}{2}$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = \begin{pmatrix} M & -\frac{1}{2}M + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (M) - M = 0$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = \begin{pmatrix} M & -\frac{1}{2}M + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \left(-\frac{1}{2}M + \frac{3}{2}\right) - M$$

$$= -\frac{3}{2}M + \frac{3}{2}$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≤ 0, sehingga fungsi tujuan fase I belum minimum.

7. Menentukan Unsur Pusat (pe)

   Nilai terbesar dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_1 - C_1 = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}$ yang terletak pada kolom x_1, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_1, maka k = 1

   $y_k = y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:

   Baris $X_5 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{1}{1} = 1$

   Baris $X_6 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{3}{1} = 3$

   Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 1, terletak dalam baris x_5 . Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_1 dan baris x_5 . Artinya x_5 diganti dengan x_1 . Tabelnya menjadi :

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**
Z	M	$-\frac{1}{2}M + \frac{3}{2}$	$7M + 9$
x_5	1	$-\frac{1}{2}$	1

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_1}}$
$\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}$	-
1	1

x_2	0	$\frac{1}{2}$	3	1	3

Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan belum minimum akan lanjut ke tahap selanjutnya.

8. Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)
   Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks kedua (TS-2)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**	**x**	$\frac{\textbf{RHS}}{\textbf{x}}$
Z	M	$-\frac{1}{2}M + \frac{3}{2}$	$7M + 9$	-	-
x_5	1	$-\frac{1}{2}$	1	-	-
x_2	0	$\frac{1}{2}$	3	-	-

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-3) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**	**x**	$\frac{\textbf{RHS}}{\textbf{x}}$
Z	1	1	10	-	-
x_1	2	-1	2	-	-
x_2	-1	1	2	-	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$B = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$C_B = (x_1, x_2) = (2 \quad 3)$

$w = C_B B^{-1} = (2 \quad 3)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 1)$

$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Min Z $= C_B \bar{b} = (2 \quad 3)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 10$

9. Menilai Fungsi Tujuan

   Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

   Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

   $Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 2 = 2 - 2 = 0$

   $Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3 = 3 - 3 = 0$

   $Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - 0 = (-1) - 0 = -1$

   $Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - 0 = (-1) - 0 = -1$

   $Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 0 = 1 - M$

   $Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 0 = 1 - M$

   Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ sudah seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan sudah minimum. Jadi dilihat dari tabel simpleks ketiga dapat diperoleh :

   $Z_{min} = 3600$

   $x_1 = 2$

   $x_2 = 2$

   Kesimpulannya : jumlah kamar tidur kecil dan kamar tidur besar yang dibangun agar biaya minimum sebanyak 4 kamar tidur yang terdiri dari 2 kamar tidur kecil dan 2 kamar tidur besar.

Contoh Soal 3 : Metode Simpleks Biasa

Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x dengan menggunakan metode simpleks biasa.

Maksimumkan : $Z = 3x_1 + 2x_2$

Kendala : $-x_1 + 2x_2 \leq 4$

$3x_1 + 2x_2 \leq 14$

$x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

2. Mengubah Masalah

a) Fungsi kendala

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$

$x_1 - x_2 + x_5 = 3$

$x_1 , x_2 \geq 0$

b) Fungsi Tujuan

Z = $3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$a_1 = x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$a_4 = x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_5 = x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

Fungsi tujuan dalam metode biasa :

$c = (3\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ )$

3. Membuat Tabel Simpleks Awal

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	0	0	0	0
x_3	1	0	0	4
x_4	0	1	0	14
x_5	0	0	1	3

$\mathbf{x_1}$	$\dfrac{\textbf{RHS}}{\mathbf{x_1}}$
-3	-
-1	-
3	$\dfrac{14}{3}$
1	3

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

$B = (x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C_B = (x_3, x_4, x_5) = (0 \quad 0 \quad 0)$

$w = C_B\, B^{-1} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0)$

$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$

Min Z $= C_B \bar{b} = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

4. Menilai Fungsi Tujuan
   Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:
   $$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$
   Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :
   $Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0 - 3 = -3$
   $Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 = 0 - 2 = -2$
   $Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$
   $Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$
   $Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$
   Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum.

5. Menentukan Unsur Pusat (pe)
   Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_1 - C_1 = -3$ yang terletak pada kolom x_1, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_1, maka k = 1
   $y_k = y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
   Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:
   Baris $X_3 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{4}{-1} = -4$
   Baris $X_4 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{14}{3}$
   Baris $X_5 = \frac{RHS}{y_1} = \frac{3}{1} = 3$
   Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 3, terletak dalam baris x_5 . Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_1 dan baris x_5 . Artinya x_5 diganti dengan x_1 . Tabel awal menjadi :

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	0	0	0	0
x_3	1	0	0	4
x_4	0	1	0	14
x_5	0	0	1	3

x_1	$\frac{RHS}{x_1}$
-3	-
-1	-
3	$\frac{14}{3}$
1	3

Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum akan lanjut ke tahap selanjutnya.

6. Membuat Tabel Simpleks Kedua (TS-2)
   Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks awal

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	0	0	0	0
x_3	1	0	0	4
x_4	0	1	0	14
x_5	0	0	1	3

x_1	$\frac{RHS}{x_1}$
-3	-
-1	-
3	$\frac{14}{3}$
1	3

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-2) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	0	0	3	9
x_3	1	0	-1	7

x_2	$\frac{RHS}{x_2}$
-5	-
2	7

x_4	0	1	-3	5
x_1	0	0	1	3

2	1
-1	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_3, x_4, x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_3, x_4, x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$w = C_B\, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\, \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$$

7. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 3 - 0 = 3$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum $\geq$ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum.

8. Menentukan Unsur Pusat (pe)
   Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_2 - C_2 = -5$ yang terletak pada kolom x_2, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_2, maka k = 2
   $$y_k = y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{\text{RHS}}{y_k}$:
   $$\text{Baris } X_3 = \frac{\text{RHS}}{y_2} = \frac{7}{1} = 7$$
   $$\text{Baris } X_4 = \frac{\text{RHS}}{y_2} = \frac{5}{5} = 1$$
   $$\text{Baris } X_5 = \frac{\text{RHS}}{y_2} = \frac{3}{-1} = -3$$

   Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 1, terletak dalam baris x_4. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_2 dan baris x_4. Artinya x_4 diganti dengan x_2. Tabel awal menjadi :

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**		**x_2**	**$\frac{\text{RHS}}{x_2}$**
Z	0	0	3	9		-5	-
x_3	1	0	-1	7		2	7
x_4	0	1	-3	5		2	1
x_1	0	0	1	3		-1	-

   Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum akan lanjut ke tahap selanjutnya.

9. Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)
   Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks kedua (TS-2)

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS		x_2	$\frac{RHS}{x_2}$
Z	0	0	3	9		-5	-
x_3	1	0	-1	7		2	7
x_4	0	1	-3	5		2	1
x_1	0	0	1	3		-1	-

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-3) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS		x_2	$\frac{RHS}{x_2}$
Z	0	1	0	14		-	-
x_3	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	6		-	-
x_2	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1		-	-
x_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	4		-	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_3, x_2, x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_3, x_2, x_1) = (0 \quad 2 \quad 3)$$

$$w = C_B\, B^{-1} = (0 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\, \bar{b} = (0 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 14$$

10. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1 - 0 = 1$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum $\geq$ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum. Jadi dilihat dari tabel simpleks ketiga dapat diperoleh :

Z_{min} = 14

x_1 = 4

x_2 = 1

Contoh Soal 4 : Metode Simpleks Big M

Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x dengan menggunakan metode simpleks Big M.

Maksimumkan : $Z = 50\,x_1 + 80\,x_2$

Kendala : $x_1 \leq 40$

$x_2 \geq 20$

$x_1 + x_2 = 50$

$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

1. Mengubah Masalah
   a) Fungsi kendala

   $x_1 + x_3 = 40$

   $x_2 - x_4 + x_5 = 20$

   $x_1 + x_2 + x_6 = 50$

   b) Fungsi tujuannya

   $Z = 50x_1 + 80x_2 + 0x_3 - 0x_4 - \mathrm{M}x_5 - \mathrm{M}x_6$

   $a_1 = x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, a_2 = x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, a_3 = x_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

   $a_4 = x_4 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, a_5 = x_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, a_6 = x_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $c = \text{fungsi tujuan} = (50 \quad 80 \quad 0 \quad 0 \quad -\mathrm{M} \quad -\mathrm{M})$

2. Membuat Tabel Simpleks Awal

Basis	**Invers Basis ($\mathbf{B^{-1}}$)**			**RHS**
Z	0	$-\mathrm{M}$	$-\mathrm{M}$	$-70\mathrm{M}$
x_3	1	0	0	40
x_5	0	1	0	20
x_6	0	0	1	50

$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_2}}$
$(-2\mathrm{M}) - 80$	-
0	-
1	20
1	50

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_3\,, x_5, x_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_3\,, x_5, x_6) = (0 \quad -M \quad -M)$$

$$w = C_B\, B^{-1} = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad -M \quad -M)$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\, \bar{b} = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = -70M$$

3. Menilai Fungsi Tujuan
   Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.\,a_j - c_j$$

   Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.\,a_1 - c_1 = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 50 = (-M) - 50$$

$$Z_2 - C_2 = w.\,a_2 - c_2 = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 80 = (-2M) - 80$$

$$Z_3 - C_3 = w.\,a_3 - c_3 = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = w.\,a_4 - c_4 = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (M) - 0 = M$$

$$Z_5 - C_5 = w.\,a_5 - c_5 = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-M) = (-M) + M = 0$$

$$Z_6 - C_6 = w.\,a_6 - c_6 = (0 \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-M) = (-M) + M = 0$$

   Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum.

4. Menentukan Unsur Pusat (pe)

   Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_2 - C_2 = (-2M) - 80$ yang terletak pada kolom x_2, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_2, maka k = 2.

   $$y_k = y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{\mathrm{RHS}}{y_k}$:

   $$\text{Baris } X_3 = \frac{\mathrm{RHS}}{y_2} = \frac{40}{0} = 0$$

   $$\text{Baris } X_5 = \frac{\mathrm{RHS}}{y_2} = \frac{20}{1} = 20$$

   $$\text{Baris } X_6 = \frac{\mathrm{RHS}}{y_2} = \frac{50}{1} = 50$$

   Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 20, terletak dalam baris x_5 . Baris x_3 memiliki nilai terkecil namun baris tersebut tidak bisa dijadikan baris kunci karena hasil baginya bernilai 0. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_2 dan baris x_5 . Artinya x_5 diganti dengan x_2 . Tabel awal menjadi :

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	0	$-M$	$-M$	$-70M$
x_3	1	0	0	40
x_5	0	1	0	20
x_6	0	0	1	50

$\mathbf{x_2}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_2}}$
$(-2M) - 80$	-
0	-
1	20
1	50

   Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum dan akan lanjut ke tahap selanjutnya.

5. Membuat Tabel Simpleks Kedua (TS-2)

   Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks awal

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	0	$-M$	$-M$	$-70M$
x_3	1	0	0	40
x_5	0	1	0	20
x_6	0	0	1	50

x_2	$\frac{RHS}{x_2}$
$(-2M)-80$	-
0	-
1	20
1	50

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-2) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS
Z	0	$M+80$	$-M$	$-30M+1600$
x_3	1	0	0	40
x_2	0	1	0	20
x_6	0	-1	1	30

x_4	$\frac{RHS}{x_4}$
$-M-80$	-
0	-
-1	-
0	30

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_3\,, x_2, x_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_3\,, x_2, x_6) = \begin{pmatrix} 0 & 80 & -M \end{pmatrix}$$

$$w = C_B\,B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 80 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M+80 & -M \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min Z} \quad = C_B\,\bar{b} = (0 \quad 80 \quad -M)\begin{pmatrix}40\\20\\30\end{pmatrix} = -30M + 1600$$

6. Menilai Fungsi Tujuan

   Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

   Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (0 \quad M+80 \quad -M)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 50 = (-M) - 50$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (0 \quad M+80 \quad -M)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - 80 = 80 - 80 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (0 \quad M+80 \quad -M)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (0 \quad M+80 \quad -M)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} - 0 = (-M - 80)$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (0 \quad M+80 \quad -M)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - (-M) = 2M + 80$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = (0 \quad M+80 \quad -M)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (-M) = (-M) + M = 0$$

   Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum.

7. Menentukan Unsur Pusat (pe)

   Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah $Z_4 - C_4 = (-M - 80)$ yang terletak pada kolom x_4, sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom x_4, maka
   k = 4.

$$y_k = y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

   Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_1}$:

$$\text{Baris } X_3 = \frac{RHS}{y_4} = \frac{40}{0} = 0$$

$$\text{Baris } X_2 = \frac{RHS}{y_4} = \frac{20}{-1} = -20$$

Baris $X_6 = \frac{\text{RHS}}{y_4} = \frac{30}{1} = 30$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu 30, terletak dalam baris x_6 . Baris x_2 memiliki nilai terkecil namun baris tersebut tidak bisa dijadikan baris kunci karena hasil baginya bernilai -20. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom x_4 dan baris x_6 . Artinya x_6 diganti dengan x_4 . Tabel awal menjadi :

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**	$\mathbf{x_4}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_4}}$
Z	0	$M + 80$	$-M$	$-30M + 1600$	$-M - 80$	-
x_3	1	0	0	40	0	-
x_2	0	1	0	20	-1	-
x_6	0	-1	1	30	0	30

Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum dan akan lanjut ke tahap selanjutnya.

8. Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)
   Sebelum membuat tabel simpleks berikutnya, tampilkan terlebih dahulu tabel sebelumnya. Hal ini bertujuan untuk melihat perbedaannya. Ini tabel simpleks kedua (TS-2)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**	$\mathbf{x_4}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_4}}$
Z	0	$M + 80$	$-M$	$-30M + 16000$	$-M - 80$	-
x_3	1	0	0	40	0	-
x_2	0	1	0	20	-1	-
x_6	0	-1	1	30	0	30

Ini adalah tabel simpleks berikutnya (TS-3) yang telah dibuat sesuai perhitungan yang dijabarkan di bawah ini.

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**	**RHS**	**x**	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x}}$

Z	0	0	80	4000
x_3	1	0	0	40
x_2	0	0	1	50
x_4	0	-1	1	30

-	-
-	-
-	-
-	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$B = (x_3\,, x_2, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_B = (x_3\,, x_2, x_4) = (0 \quad 80 \quad 0)$$

$$w = C_B\, B^{-1} = (0 \quad 80 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 80)$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min Z} = C_B\,\bar{b} = (0 \quad 80 \quad 0)\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = 4000$$

9. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.a_1 - c_1 = (0 \quad 0 \quad 80)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 50 = 80 - 50 = 30$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (0 \quad 0 \quad 80)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 80 = 80 - 80 = 0$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (0 \quad 0 \quad 80)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (0 \quad 0 \quad 80)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (0 \quad 0 \quad 80)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-M) = 0 + M = M$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = (0 \quad 0 \quad 80)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-M) = 80 + M$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ sudah ≥ 0, sehingga fungsi tujuan sudah maksimum. Jadi dilihat dari tabel simpleks ketiga dapat diperoleh :

Z_{min} = 4000

x_1 = 0

x_2 = 50

Catatan : x_1 = 0 , dikarenakan di dalam tabel simpleks tersebut tidak ada nilai dari x_1 . Ini berarti x_1 tidak memiliki nilai.

5.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Rangkuman Metode Simpleks Direvisi

Metode simpleks direvisi merupakan metode untuk menyelesaikan setiap permasalahan pemograman linear yang terdiri dari dua variabel atau lebih dengan cara perhitungan ulang sampai solusi yang optimal tercapai. Metode simpleks direvisi juga merupakan metode lanjutan dari metode simpeks biasa. Perbedaan dari metode simpleks biasa yaitu terlihat dari proses pengerjaan yang menggunakan teknik matriks atau teknik eleminasi Gauss Jordan untuk setiap perhitungan. Metode ini terdiri dari beberapa macam metode yaitu :

1. Metode simpleks direvisi biasa yaitu metode untuk menyelesaikan MPL yang kendala strukturalnya semuanya menggunakan tanda ≤ (lebih kecil sama dengan)
2. Metode simpleks direvisi dua fase dan metode simpleks direvisi bilangan besar-M yaitu metode untuk menyelesaikan MPL yang kendala strukturalnya semuanya menggunakan tanda ≥ (lebih besar sama dengan)

Proses pengerjaan metode simpleks direvisi ini cukup sulit sehingga membutuhkan konsentrasi yang lebih terutama penguasaan metode matriks. Secara umum, metode simpleks dua fase dan metode simpleks Big M dapat diselesaikan dengan langkah-langkah pengerjaan sebagai berikut :

a. Mengubah masalah :
   1) Mengubah kendala structural dari pertidaksamaan menjadi persamaan.
   2) Mengubah fungsi tujuan dengan masuknya variable longgar, tetapi ditulis tetap dalam bentuk eksplisit.

b. Membuat Tabel Simpleks Awal (TSA) yang formatmya sebagai berikut :

Basis	**Invers Basis ($\mathbf{B^{-1}}$)**	**RHS**
Z	w	Min Z
X_B	B^{-1}	$\bar{b}$

$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{\frac{RHS}{x_k}}$
$Z_j - C_j$	-
y_k	$\frac{\bar{b}}{y_k}$

Keterangan :

Min Z $= C_B\, \bar{b}$

w $= C_B\, B^{-1}$

$\bar{b}$ $= B^{-1}b$

$Z_j - C_j$ $= w.a_j - c_j$

y_k $= B^{-1}a_j$

a_j = vector koefisien variable ke-j (x_j) pada kendala struktural
b = ruas kanan kendala structural
$\bar{b}$ = vector konstanta
c_j = koefisien variable ke-j dari fungsi tujuan
C_B = koefisien fungsi tujuan variable basis
X_B = variable bebas
B = matriks basis
B^{-1} = invers dari B
RHS = *Right Hand Side*

c. Menilai fungsi tujuan (FT)
Untuk memastikan fungsi tujuan sudah optimum atau belum yaitu dengan cara :
Menghitung $Z_j - C_j = w. a_j - c_j$
dengan : $w = C_B B^{-1}$
Untuk mengoptimalkan fungsi tujuan ada beberapa syarat yang harus diperhatikan:
1) Untuk meminimumkan, fungsi tujuan dikatakan minimum selesai, dan optimal bila $Z_j - C_j \leq 0$. Jika belum dalam keadaan tersebut maka fungsi tujuan belum minimum.
2) Untuk memaksimumkan, fungsi tujuan dikatakan maksimum, selesai, dan optimal bila $Z_j - C_j \geq 0$. Jika belum dalam keadaan tersebut maka fungsi tujuan belum minimum.

Apabila fungsi tujuan sudah sesuai syarat maka tidak ada lagi perhitungan, sedangkan jika belum optimum maka lanjutkan ke langkah berikutnya yaitu langkah 4.

d. Menentukan unsur pusat (pe)
Untuk menentukan pe, terlebih dahulu isi kolom x_j , yaitu dengan :
Jika nilai $Z_j - C_j$ bernilai besar maka itu untuk masalah minimumkan,
Jika nilai $Z_j - C_j$ bernilai kecil maka itu untuk masalah maksimumkan.
Dengan ketentuan ini berarti vector a_j harus masuk basis.
y_k diperoleh dengan rumus :
$y_k = B^{-1} a_k$
dengan a_j vector yang harus masuk basis.
Setelah itu, isi kolom $\frac{RHS}{x_j}$
Bila $x_j = 0$ atau $x_j < 0$, maka hasil baginya tak perlu ditentukan (tak terdefinisi untuk pe, dimana pe harus bernilai positif)
Pilih nilai $\frac{RHS}{x_j}$, terkecil untuk menentukan vekor yang harus keluar dari basis.

e. Membuat tabel simpleks berikutnya
Tentukan basis yang barunya (X_B **)**
Tentukan matriks basis (B)
Tentukan B^{-1}
Tentukan C_B
Tentukan $\bar{b} = B^{-1}b$
Tentukan $w = C_B B^{-1}$
Hitunglah minimum Z
Kemudian isikan hasilnya ke tabel dengan format yang sama dengan format tabel simpleks awal.
Kembali ke langkah 3.

5.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Diskusi Kelompok MetodeSimpleks Direvisi

1. Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x menggunakan metode simpleks biasa.

   Maksimumkan : Z $= 3x_1 + 2x_2$

   Kendala : $x_1 + 2x_2 \leq 20$

   $3x_1 + x_2 \leq 20$

   $x_1, x_2 \geq 0$

   Penyelesaian :

   a) Mengubah Masalah

   1. Fungsi kendala

      $x_1 + 2x_2 + \cdots = 20$

      $3x_1 + x_2 + \cdots = 20$

      $x_1, x_2 \geq 0$

   2. Fungsi Tujuan

      Z = $3x_1 + 2x_2 + \cdots + \cdots$

      $a_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}, a_2 = x_2 = \begin{pmatrix} \dots \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}, a_4 = x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}$

      Fungsi tujuan dalam metode biasa :

      $c = (\dots \;\; 2 \;\; \dots \;\; 0 \;)$

   b) Membuat Tabel Simpleks Awal

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**
Z	...	0	...
...	1	...	20
x_4	0	...	...

$x_{\dots}$	**$\frac{RHS}{x_{\dots}}$**
...	-
...	...
...	....

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ \dots \end{pmatrix}$

$B = (\dots, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

$C_B = (x_3, ..) = (\cdots \quad \cdots)$

$$w = C_B\,B^{-1} = (0 \quad \ldots)\begin{pmatrix}1 & \cdots\\ 0 & \ldots\end{pmatrix} = (\ldots \quad 0)$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \ldots & \ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\ \ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots\\ 20\end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\,\bar{b} = (0 \quad \ldots)\begin{pmatrix}\cdots\\ \\ \ldots\end{pmatrix} = 0$$

c) Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.\,a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = w.\,a_1 - c_1 = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix}1\\ \ldots\end{pmatrix} - 3 = \cdots$$

$$Z_2 - C_2 = w.\,a_2 - c_2 = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix}2\\ \ldots\end{pmatrix} - 2 = \cdots$$

$$Z_3 - C_3 = w.\,a_3 - c_3 = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix}1\\ \ldots\end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_4 - C_4 = w.\,a_4 - c_4 = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix}0\\ \ldots\end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≥ 0, sehingga fungsi tujuan …. maksimum.

d) Menentukan Unsur Pusat (pe)

Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah ... yang terletak pada kolom ... , sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom .... , maka k = …

$$y_k = y_{\ldots} = B^{-1}a_{\ldots} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \ldots & \ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots\\ \\ \ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots\\ \\ \ldots\end{pmatrix}$$

Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:

$$\text{Baris } X_3 = \frac{RHS}{y} = \frac{20}{\ldots} = \cdots$$

$$\text{Baris } X_4 = \frac{RHS}{y} = \frac{\ldots}{\ldots} = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu ... , terletak dalam baris ... . Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom ... dan baris .... . Artinya ... diganti dengan ... . Tabel awal menjadi : (warnai baris yang menjadi baris kunci)

Basis	Invers Basis (B^{-1})		RHS
Z	...	0	...
...	1	...	20
x_4	0	...	...

$x_{...}$	$\frac{RHS}{x_{...}}$
...	-
...	...
...	....

Dikarenakan tabel awal memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum akan lanjut ke tahap selanjutnya.

e) Membuat Tabel Simpleks Kedua (TS-2)

Basis	Invers Basis (B^{-1})		RHS
Z	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

$x_{...}$	$\frac{RHS}{x_{...}}$
...	-
...	...
...	....

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$X_B \quad = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

$B \quad = (\ldots, \ldots) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

$B^{-1} \quad = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

$C_B \quad = (\ldots, \ldots) = (\cdots \quad \cdots)$

$w \quad = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (\cdots \quad \cdots)$

$\bar{b} \quad = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

$\text{Min Z} \quad = C_B\,\bar{b} = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \cdots$

f) Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$Z_1 - C_1 = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - 3 = \cdots$

$Z_2 - C_2 = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - 2 = \cdots$

$Z_3 - C_3 = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$

$Z_4 - C_4 = (\cdots \quad \cdots)\binom{\cdots}{\cdots} - 0 = \cdots$
Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j \ldots \geq 0$, sehingga fungsi tujuan …. maksimum.

g) Menentukan Unsur Pusat (pe)
Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah ... yang terletak pada kolom ... , sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom .... , maka k = …
$y_k = y_{\ldots} = B^{-1}a_{\ldots} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\binom{\cdots}{\cdots} = \binom{\cdots}{\cdots}$
Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:
Baris $X_{\ldots} = \frac{RHS}{y} = \frac{\ldots}{\ldots} = \cdots$
Baris $X_{\ldots} = \frac{RHS}{y} = \frac{\ldots}{\ldots} = \cdots$
Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu ... , terletak dalam baris ... . Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom ... dan baris ..... Artinya ... diganti dengan ... . Tabel awal menjadi : (warnai baris yang menjadi baris kunci)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**	**$x_{\ldots}$**	**$\frac{RHS}{x_{\ldots}}$**
Z	...	...	...	...	-
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	....

h) Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**		**RHS**	**$x_{\ldots}$**	**$\frac{RHS}{x_{\ldots}}$**
Z	...	...	...	...	-
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	....

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :
$X_B = \binom{\cdots}{\cdots}$

$\mathrm{B} \quad = (\dots, \dots) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$
$\mathrm{B}^{-1} \quad = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$
$\mathrm{C_B} \quad = (\dots, \dots) = (\cdots \quad \cdots)$
$\mathrm{w} \quad = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = (\cdots \quad \cdots)$
$\bar{b} \quad = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \end{pmatrix}$
$\text{Min Z} \quad = \mathrm{C_B}\,\bar{b} = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \end{pmatrix} = \cdots$

i) Menilai Fungsi Tujuan
Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru $\mathrm{C_j}$ dengan rumus:

$$\mathrm{Z_j} - \mathrm{C_j} = \mathrm{w.a_j} - \mathrm{c_j}$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :
$\mathrm{Z_1} - \mathrm{C_1} = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \end{pmatrix} - 3 = \cdots$
$\mathrm{Z_2} - \mathrm{C_2} = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \end{pmatrix} - 2 = \cdots$
$\mathrm{Z_3} - \mathrm{C_3} = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$
$\mathrm{Z_4} - \mathrm{C_4} = (\cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$
Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $\mathrm{Z_j} - \mathrm{C_j} \dots \geq 0$, sehingga fungsi tujuan …. maksimum. Jadi dilihat dari tabel simpleks ketiga dapat diperoleh :
$\mathrm{Z_{min}}$ = ….
$\mathrm{x_1}$ = ….
$\mathrm{x_2}$ = ….

2. Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x
Meminimumkan : $\mathrm{Z} = 2x_1 + x_2$
Kendala : $3x_1 + x_2 = 3$
$4x_1 + 3x_2 \geq 6$
$2x_1 + x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
Penyelesaian :
a. Mengubah Masalah
1) Fungsi kendala
$3x_1 + x_2 + \cdots = 3$
$4x_1 + 3x_2 - \cdots + \cdots = 6$
$2x_1 + x_2 + \cdots = 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
2) Fungsi tujuannya
$\mathrm{Z} = \dots x_1 + x_2 - \cdots + 0x_4 + \cdots + \mathrm{M}x_6$
$a_1 = x_1 = \begin{pmatrix} \cdots \\ 4 \\ \dots \end{pmatrix}, a_2 = x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, a_3 = x_3 = \begin{pmatrix} \cdots \\ -1 \\ \dots \end{pmatrix}$

$a_4 = x_4 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_5 = x_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, $a_6 = x_6 = \begin{pmatrix} \dots \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$

$c = \text{fungsi tujuan} = (\dots \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \mathrm{M})$

b. Membuat Tabel Simpleks Awal

Basis	**Invers Basis ($\mathbf{B^{-1}}$)**			**RHS**
Z	...	...	0	...
x_5	...	...	0	...
...	...	1	...	6
...	...	0	1	...

$\mathbf{x_{\dots}}$	$\frac{\mathbf{RHS}}{\mathbf{x_{\dots}}}$
...	-
...	...
...	...
...	...

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$\mathrm{X_B} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \mathrm{x_4} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = (\dots, \mathrm{x_6}, \dots) = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C_B} = (\dots, \dots, \mathrm{x_4}) = (\dots \quad \mathrm{M} \quad \dots)$$

$$\mathrm{w} = \mathrm{C_B\,B^{-1}} = (\dots \quad \mathrm{M} \quad \dots)\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\mathrm{M} \quad \dots \quad \dots)$$

$$\bar{b} = \mathrm{B^{-1}b} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min Z} = \mathrm{C_B}\,\bar{b} = (\dots \quad \mathrm{M} \quad \dots)\begin{pmatrix} \dots \\ 6 \\ \dots \end{pmatrix} = \cdots$$

c. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru $\mathrm{C_j}$ dengan rumus:

$$\mathrm{Z_j} - \mathrm{C_j} = \mathrm{w.a_j} - \mathrm{c_j}$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$\mathrm{Z_1} - \mathrm{C_1} = \mathrm{w.a_1} - \mathrm{c_1} = (\dots \quad \mathrm{M} \quad \dots)\begin{pmatrix} \dots \\ 4 \\ \dots \end{pmatrix} - 2 = \cdots$$

$$Z_2 - C_2 = w.a_2 - c_2 = (\ldots \quad M \quad \ldots)\begin{pmatrix}1\\ \ldots\\ \ldots\end{pmatrix} - 1 = \cdots$$

$$Z_3 - C_3 = w.a_3 - c_3 = (\ldots \quad M \quad \ldots)\begin{pmatrix}\ldots\\ -1\\ \ldots\end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_4 - C_4 = w.a_4 - c_4 = (\ldots \quad M \quad \ldots)\begin{pmatrix}\ldots\\ \ldots\\ 1\end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 = (\ldots \quad M \quad \ldots)\begin{pmatrix}1\\ \ldots\\ \ldots\end{pmatrix} - M = \cdots$$

$$Z_6 - C_6 = w.a_6 - c_6 = (\ldots \quad M \quad \ldots)\begin{pmatrix}\ldots\\ 1\\ \ldots\end{pmatrix} - M = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≤ 0, sehingga fungsi tujuan belum minimum.

d. Menentukan Unsur Pusat (pe)

Nilai terbesar dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah ... ... yang terletak pada kolom ... , sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom ... , maka k = ...

$$y_k = y_{\ldots} = B^{-1}a_{\ldots} = \begin{pmatrix}1 & \ldots & 0\\ \ldots & 1 & \ldots\\ 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{pmatrix}$$

Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:

$$\text{Baris } X_{\ldots} = \frac{RHS}{y} = \frac{3}{\ldots} = \cdots$$

$$\text{Baris } X_6 = \frac{RHS}{y} = \frac{\ldots}{\ldots} = \cdots$$

$$\text{Baris } X_{\ldots} = \frac{RHS}{y} = \frac{\ldots}{\ldots} = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu …, terletak dalam baris $x_{\ldots}$. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom $x_{\ldots}$ dan baris $x_{\ldots}$. Artinya $x_{\ldots}$ diganti dengan $x_{\ldots}$. Tabel awal menjadi : (warnai baris yang menjadi baris kunci)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	...	...	0	...

$x_{\ldots}$	**$\frac{RHS}{x_{\ldots}}$**
...	-

x_5	...	...	0	...		...	-
...	...	1	...	6		...	...
...	...	0	1	...		...	...

e. Membuat Tabel Simpleks Kedua (TS-2)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**		**x...**	**RHS / x...**
Z	...	...	...	...		...	-
...	...	...	...	...		...	-
...	...	...	...	...		...	-
...	...	-1	...	...		...	...

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$B = (\ldots, \ldots, \ldots) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$C_B = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$w = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = C_B\,\bar{b} = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \cdots$$

f. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ 4 \\ \cdots \end{pmatrix} - 2 = \cdots$$

$$Z_2 - C_2 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} - 1 = \cdots$$

$$Z_3 - C_3 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ -1 \\ \ldots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_4 - C_4 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_5 - C_5 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} - M = \cdots$$

$$Z_6 - C_6 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix} - M = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j \ldots. \leq 0$, sehingga fungsi tujuan ….. minimum.

g. Menentukan Unsur Pusat (pe)

Nilai terbesar dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah ... ... yang terletak pada kolom ... , sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom ... , maka k = ...

$$y_k = y_{\ldots} = B^{-1}a_{\ldots} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:

Baris $X_{\ldots} = \dfrac{RHS}{y} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \cdots$

Baris $X_6 = \dfrac{RHS}{y} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \cdots$

Baris $X_{\ldots} = \dfrac{RHS}{y} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \cdots$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu …, terletak dalam baris $x_{\ldots}$. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom $x_{\ldots}$ dan baris $x_{\ldots}$. Artinya $x_{\ldots}$ diganti dengan $x_{\ldots}$. Tabel awal menjadi : (warnai baris yang menjadi baris kunci)

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS		x_4	$\frac{RHS}{x_4}$
Z	...	...	...	...		...	-
...	...	...	...	...		...	...
...	...	...	...	...		...	...
...	...	...	...	...		...	...

Dikarenakan tabel simpleks tersebut memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≤ 0, sehingga fungsi tujuan belum minimum dan akan lanjut ke tahap selanjutnya.

h. Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)

Basis	Invers Basis (B^{-1})			RHS		x	$\frac{RHS}{x}$
Z	...	...	...	...		-	-
...	...	...	...	...		-	-
...	...	...	...	...		-	-
...	...	...	...	...		-	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$B = (\ldots, \ldots, \ldots) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$C_B = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$w = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Min Z $= C_B\,\bar{b} = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \cdots$

i. Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$Z_1 - C_1 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ 4 \\ \cdots \end{pmatrix} - 2 = \cdots$

$Z_2 - C_2 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - 1 = \cdots$

$Z_3 - C_3 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ -1 \\ \cdots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$

$Z_4 - C_4 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \cdots$

$Z_5 - C_5 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - M = \cdots$

$Z_6 - C_6 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \\ \cdots \end{pmatrix} - M = \cdots$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ ….. ≤ 0, sehingga fungsi tujuan …. minimum. Jadi dilihat dari tabel simpleks ketiga dapat diperoleh :

Z_{min} = …. , x_1 = ….. , dan x_2 = ….

3. Perusahaan Woody memproduksi kursi dan meja dari 2 sumber daya-tenaga kerja dan kayu. Perusahaan ini memiliki 80 jam kerja dan 36 gram kayu tersedia setiap hari. Permintaan kursi dibatasi hingga 6/hari. Setiap kursi membutuhkan 8 jam kerja dan 2 gram kayu. Sedangkan meja membutuhkan 10 jam kerja dan 6 gram kayu. Keuntungan yang diperoleh dari setiap kursi adalah $400 dan dari setiap meja $100. Perusahaan ini ingin menentukan jumlah kursi dan meja yang akan diproduksi setiap hari untuk memaksimalkan keuntungan. Tentukanlah model pemograman untuk masalah ini dan selesaikanlah menggunakan metode simpleks biasa.

   Penyelesaian :

	Kursi	**Meja**	**Batasan**
Waktu Kerja	… jam	10 jam	80 jam

Banyak Kayu	2 gram	…. gram	36 gram
Permintaan	1 unit	-	6 unit/hari
Keuntungan	400 per unit	… per unit	

Misalkan : x_1 = kursi dan x_2 = meja
Model/persamaan matematika :
Fungsi Tujuan : $Z_{maks} = 400x_1 + \dots\ x_2$
Kendala $\dots x_1 + 10x_2 \le 80$
$2x_1 + \dots\ x_2 \le 36$
$x_1 \le 6$
$x_1 , x_2 \ge 0$

Proses kerja untuk menyelesaikan masalah ini menggunkan metode simpleks biasa :

1) Mengubah Masalah
   a. Fungsi kendala
      $\dots x_1 + 10x_2 + \cdots = \cdots$
      $2x_1 + \dots\ x_2 + \cdots = 36$
      $x_1 + \cdots = \cdots$
      $x_1 , x_2 \ge 0$
   b. Fungsi tujuannya
      $Z = 400x_1 + \dots\ x_2 + \cdots + 0x_4 + \cdots$
      $a_1 = x_1 = \begin{pmatrix} \cdots \\ 2 \\ \dots \end{pmatrix}, a_2 = x_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, a_3 = x_3 = \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$
      $a_4 = x_4 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, a_5 = x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
      $c = \text{fungsi tujuan} = (\dots \quad 100 \quad 0 \quad \dots \quad 0\ )$

2) Membuat Tabel Simpleks Awal

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	...	...	0	...
x_3	...	...	0	...

$x_{\dots}$	$\frac{RHS}{x_{\dots}}$
...	-
...	...

...	...	1	...	36		...	...
...	...	0	1	...		...	...

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B \quad = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$B \quad = (\dots, x_4, \dots) = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \quad = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_B \quad = (\dots, \dots, x_5) = (\dots \quad 0 \quad \dots)$$

$$w \quad = C_B\, B^{-1} = (\dots \quad 0 \quad \dots) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad \dots \quad \dots)$$

$$\overline{b} \quad = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z \; = C_B\, \overline{b} = (\dots \quad 0 \quad \dots) \begin{pmatrix} \dots \\ 36 \\ \dots \end{pmatrix} = \cdots$$

3) Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j \; = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 \; = w.a_1 - c_1 \; = (\dots \quad 0 \quad \dots) \begin{pmatrix} \dots \\ 2 \\ \dots \end{pmatrix} - 400 = \cdots$$

$$Z_2 - C_2 \; = w.a_2 - c_2 \; = (\dots \quad 0 \quad \dots) \begin{pmatrix} 10 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - 100 = \cdots$$

$$Z_3 - C_3 \; = w.a_3 - c_3 \; = (\dots \quad 0 \quad \dots) \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_4 - C_4 \; = w.a_4 - c_4 \; = (\dots \quad 0 \quad \dots) \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_5 - C_5 = w.a_5 - c_5 \; = (\dots \quad 0 \quad \dots) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ belum ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum.

4) Menentukan Unsur Pusat (pe)

Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah ... ... yang terletak pada kolom ... , sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom ... , maka k = ...

$$y_k = y_{...} = B^{-1}a_{...} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & 1 & ... \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$$

Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{\text{RHS}}{y_k}$:

$$\text{Baris } X_{...} = \frac{\text{RHS}}{y} = \frac{3}{...} = \cdots$$

$$\text{Baris } X_4 = \frac{\text{RHS}}{y} = \frac{...}{...} = \cdots$$

$$\text{Baris } X_{...} = \frac{\text{RHS}}{y} = \frac{...}{...} = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu …, terletak dalam baris $x_{...}$. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom $x_{...}$ dan baris $x_{...}$. Artinya $x_{...}$ diganti dengan $x_{...}$. Tabel awal menjadi : (warnai baris yang menjadi baris kunci)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	...	...	0	...
x_3	...	...	0	...
...	...	1	...	36
...	...	0	1	...

$x_{...}$	**$\frac{\text{RHS}}{x_{...}}$**
...	-
...	-
...	...
...	...

5) Membuat Tabel Simpleks Kedua (TS-2)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**	**RHS**

$x_{...}$	**$\frac{\text{RHS}}{x_{...}}$**

Z	...	...	...	...		...	-
...	...	...	...	...		...	-
...	...	...	...	...		...	-
...	...	-1	...	...		...	...

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$B = (\ldots, \ldots, \ldots) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$C_B = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$w = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80 \\ 36 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \cdots$$

6) Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ 2 \\ \cdots \end{pmatrix} - 400 = \cdots$$

$$Z_2 - C_2 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} 10 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - 100 = \cdots$$

$$Z_3 - C_3 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_4 - C_4 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$Z_5 - C_5 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ …. $\geq$ 0, sehingga fungsi tujuan ….. maksimum.

7) Menentukan Unsur Pusat (pe)

Nilai terkecil dari perhitungan $Z_j - C_j$ adalah ... ... yang terletak pada kolom ... , sehingga kolom kunci terdapat dalam kolom ... , maka k = ...

$$y_k = y_{\dots} = B^{-1}a_{\dots} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Sehingga, dapat dicari baris kunci dengan perhitungan $\frac{RHS}{y_k}$:

Baris $X_{\dots} = \dfrac{RHS}{y} = \dfrac{\dots}{\dots} = \cdots$

Baris $X_{\dots} = \dfrac{RHS}{y} = \dfrac{\dots}{\dots} = \cdots$

Baris $X_{\dots} = \dfrac{RHS}{y} = \dfrac{\dots}{\dots} = \cdots$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh nilai terkecil yaitu …, terletak dalam baris $x_{\dots}$. Jadi, unsur pusat terdapat pada kolom $x_{\dots}$ dan baris $x_{\dots}$. Artinya $x_{\dots}$ diganti dengan $x_{\dots}$. Tabel awal menjadi : (warnai baris yang menjadi baris kunci)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

$x_{\dots}$	**$\frac{RHS}{x_{\dots}}$**
...	-
...	...
...	...
...	...

Dikarenakan tabel simpleks tersebut memiliki nilai fungsi tujuan $Z_j - C_j$ belum seluruhnya ≥ 0, sehingga fungsi tujuan belum maksimum dan akan lanjut ke tahap selanjutnya.

8) Membuat Tabel Simpleks Ketiga (TS-3)

Basis	**Invers Basis (B^{-1})**			**RHS**
Z	…	…	…	…
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…

x	**$\frac{RHS}{x}$**
-	-
-	-
-	-
-	-

Untuk mengisi tabel dilakukan perhitungan sebagai berikut :

$$X_B = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$B = (\ldots, \ldots, \ldots) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$C_B = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$w = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 36 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\text{Min } Z = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \cdots$$

9) Menilai Fungsi Tujuan

Menghitung nilai koefisien fungsi tujuan baru C_j dengan rumus:

$$Z_j - C_j = w.a_j - c_j$$

Sehingga dapat dihitung sebagai berikut :

$$Z_1 - C_1 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \begin{pmatrix} \cdots \\ 2 \\ \cdots \end{pmatrix} - 400 = \cdots$$

$$Z_2 - C_2 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \begin{pmatrix} 10 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - 100 = \cdots$$

$$Z_3 - C_3 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_4 - C_4 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

$$Z_5 - C_5 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots)\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - 0 = \cdots$$

Berdasarkan perhitungan nilai fungsi tujuan bahwa nilai $Z_j - C_j$ ….. ≥ 0, sehingga fungsi tujuan …. maksimum. Jadi dilihat dari tabel simpleks ketiga dapat diperoleh :

Z_{maks} = 2720 , x_1 = 6 , x_2 = 3,2

5.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Latihan Simpleks Direvisi

1. PT. Sana Group bergerak di bidang percetakan. Perusahaan ini mencetak Antara lain Novel dan Majalah. Seperti percetakan lainnya, bahan utama yang diperlukan adalah kertas dan tinta. Dalam prosesnya juga terbatas oleh waktu yang tersedia. Tentukanlah jumlah novel dan majalah yang harus diproduksi untuk mendapatkan keuntungan maksimum bila diketahui sebuah novel memberi keuntungan Rp.3.000 sedangkan majalah memberi keuntungan Rp.2.000. Persediaan yang ada, yaitu kertas 70 Kg, tinta 40 desiliter dan waktu 90 jam.

2. PT Yummy Food memiliki sebuah pabrik yang akan memproduksi dua jenis produk yaitu vanilla dan violette. Untuk memproduksi kedua produk tersebut diperlukan bahan baku A, bahan baku B dan jam tenaga kerja.Maksimum pengerjaan bahan baku A adalah 60kg per hari, bahan baku B 30kg per hari dan tenaga kerja 40 jam per hari. Kedua jenis produk memberikan sumbangan keuntungan sebesar Rp40,00 untuk vanilla dan Rp30,00 untuk violette. Masalah yang dihadapi adalah bagaimana menentukan jumlah unit setiap produk yang akan diproduksi setiap hari. Kebutuhan setiap unit produk akan bahan baku dan jam tenaga kerja dapat dilihat pada tabel berikut ini :

Jenis Bahan Baku dan Tenaga Kerja	Kg Bahan Baku Dan Jam Tenaga Kerja		Maksimum Penyediaan
	Vanilla	Violette	
Bahan baku A	2	3	60Kg
Bahan baku B	-	2	30Kg
Tenaga Kerja	2	1	40jam
Sumbangan keuntungan	Rp40,00	Rp30,00	

3. Sebuah pabrik pangan memproduksi tempe kecil, besar, dan jumbo. Kedelai yang digunakan untuk membuat setiap jenis tempe berbeda-beda. Setoap tempe kecil membutuhkan 25 kg kedelai , 3,5 kg garam, dan coko sebanyak 0,5 kg. Tempe besar membutuhkan 55 kg kedelai, 5 kg garam, dan coko sebanyak 0,75 kg. sedangkan tempe jumbo membutuhkan 75 kg kedelai, 5 kg garam, dan coko sebanyak 0,5 kg. Dari pembuatan tempe kecil mendapatkan keuntungan Rp30.000, tempe besar mendapatkan keuntungan Rp50.000, dan tempe jumbo mendapatkan keuntungan Rp40.000. Pabrik tersebut mempunyai persediaan bahan baku kedelai maksimal 250 kg, persediaan untuk garam 75 kg, dan persediaan untuk coko 30 kg. Dari penjeladan tersebut, tentukan berapa banyak tempe kecil, tempe besar dan tempe jumbo yang dihasilkan oleh pabrik tersebut dan berapa keuntungan maksimal yang diperoleh pabrik tersebut!

4. Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x

   Maksimumkan : Z $= 15\, x_1 + 18\, x_2 + 12\, x_3$

   Kendala : $10\, x_1 + 12\, x_2 + 8\, x_3 \leq 120$

   $18\, x_1 + 15\, x_2 + 6\, x_3 \leq 135$

   $12\, x_1 + 16\, x_2 + 6\, x_3 \leq 150$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

5. Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x

   Maksimumkan : Z $= 4x_1 + x_2$

   Kendala : $3x_1 + x_2 = 3$

   $4x_1 + 3x_2 \geq 6$

   $x_1 + 2\, x_2 \leq 4$

   $x_1, x_2 \geq 0$

6. Sebuah perusahaan agroindustry kedelai hendak memproduksi 2 buah produk, yaitu produk susu kedelai bubuk dan susu kedelai cair, yang masing-masing memerlukan biaya produksi per unitnya sebesar Rp12.000 dan Rp24.000. Kedua produk tersebut harus diproses melalui dua buah mesin, yaitu mesin penggiling kedelai dengan kapasitas sebesar minimal 4 jam dan mesin pengolah susu kedelai dengan kapasitas paling sedikit 5 jam.

   Setiap unit produk susu kedelai cair mula-mula diproses pada mesin penggiling selama 1 jam, lalu pada mesin pengolah susu kedelai selama 4 jam. Sedangkan setiap unit produk susu kedelai bubuk diproses pada mesin penggiling dan mesin pengolah susu kedelai masing-masing 3 jam. Hitunglah berapa lama kombinasi penggunaan mesin penggiling dan mesin pengolah susu kedelai untuk memproduksi produk susu kedelai cair dan susu kedelai bubuk yang optimal sehingga biaya produksi yang dikeluarkan perusahaan menjadi minimal ?

7. Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x

   Maksimumkan : Z $= 2x_1 + x_2 + 2\, x_3$

   Kendala : $4x_1 + 3\, x_2 + 8\, x_3 \leq 12$

   $4x_1 + x_2 + 12\, x_3 \leq 8$

   $4x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 8$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

8. Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x_1, x_2

   Maksimumkan : Z $= 3x_1 + 5x_2$

   Kendala : $x_1 \leq 4$

   $2x_2 \leq 12$

   $3x_1 + 2\, x_2 \leq 18$

   $x_1, x_2 \geq 0$

9. Tentukanlah nilai dari fungsi tujuan maksimum, dan nilai x_1, x_2

   Maksimumkan : Z $= 3x_1 + 2x_2$

   Kendala : $x_1 + 2x_2 \leq 6$

   $2x_1 + x_2 \leq 8$

   $-x_1 + x_2 \leq 1$

   $x_2 \leq 2$

   $x_1, x_2 \geq 0$

10. Suatu perusahaan menghasilkan 2 produk, meja dan kursi yang diproses melalui 2 bagian fungsi : perakitan dan pemolesan. Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesannya hanya 48 jam kerja. Untuk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan. Laba untuk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing 80.000 dan 60.000, berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan ?

MODUL 6
MASALAH TRANSFORTASI

Capaian Pembelajaran	Uraian materi
Mahasiswa diharapkan mampu memahami dan menyelesaikan masalah pemograman linear dan mengaplikasi masalah transportasi serta mengasumsikan transportasi yang ada	1. Masalah transportasi ke model matematika. 2. Masalah transportasi ke dalam tabel simpleks awal (TSA). 3. Nilai Optimal. 4. Aplikasi PQM-QM dalam. 5. Aplikasi Ms. Excel melalui *Excel Solver*

MODUL 6
MASALAH TRANSFORTASI

6.1. Kegiatan Pembelajaran 1. Masalah Transportasi

Masalah transportasi ini sebenarnya telah lama dipelajari dan dikembangkan sebelum lahir model program linear. Pada tahun 1939, L.V Kantorovitch mempelajari beberapa permasalahan yang berhubungan dengan model transportasi. Kemudian, pada tahun 1941, F.L. Hitchcock merumuskan model matematika dari persoalan transportasi yang kini dianggap sebagai model matematika dari persoalan transportasi yang kini dianggap sebagai model baku, sehingga sering disebut juga sebagai model Hitchcock. Ada lagi seseorang yang bernama T.C. Koopmans pada tahun 1947 banyak mempelajari hal-hal yang berhubungan dengan program transportasi (PT) atau model transportasi (MT).

Model transportasi merupakan salah satu kasus khusus dari persoalan pemrograman linier. Model transportasi pada dasarnya merupakan sebuah program linear yang dapat dipecahkan oleh metode simpleks yang biasa. Tetapi, strukturnya yang khusus memungkinkan pengembangan sebuah prosedur pemecahan, yang disebut teknik transportasi, yang lebih efisien dalam hal perhitungan.

Data yang digunakan dalam model meliputi data berikut: (1) Tingkat penawaran di setiap sumber; (2) Jumlah permintaan di setiap tujuan; dan (3) Biaya transportasi untuk setiap unit barang dari setiap sumber ke setiap tujuan. Sebuah tujuan dapat menerima permintaan dari 1 sumber atau lebih dari satu sumber (karena terdapat hanya satu barang). Model yang dibentuk bertujuan untuk menentukan jumlah yang harus dikirimkan dari setiap sumber ke setiap tujuan yang ditujukan untuk meminimalkan biaya transportasi total.

Menurut Dimyati (2003), ciri-ciri permasalahan transportasi secara khusus dapat dilihat dari:

1. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.
2. Kuantitas komoditas atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh setiap tujuan, besarnya tertentu.
3. Komoditas yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
4. Ongkos pengangkutan kapasitas dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya tertentu.

Contoh 1

Tiga perusahaan W, H, dan P memproduksi alatalat elektronik masing-masing 90 set, 60 set, dan 50 set. Hasil produksi dari ketiga pabrik tersebut akan disimpan di tiga gudang A, B, dan C, yang kapasitasnya berturut-turut 50 set, 110 set, dan 40 set. Diketahui biaya angkut per set (dihitung dalam ribuan rupiah) dari W ke A adalah 20, W ke B adalah 5, dan W ke C adalah 8. Kemudian dari H ke A adalah 15, dari H ke B adalah 20, dan dari H ke C adalah 10. Sementara dari P ke A adalah 25, dari P ke B adalah 10, dan dari P ke C adalah 19. Tentukan biaya minimum untuk mengangkut barang hasil produksi W, H, dan P ke gudang A, B, dan C.

Masalah di atas adalah masalah setengah jadi untuk model matematika, karena masih banyak maslah transportasi yang harus lebih dipahami dengan baik, agar permasalahan di atas bisa di selesaikan dengan optimal secara matematika. Apabila masalah di atas diubah menjadi model matematika maka permasalahan di atas merupakan masalah program linear yang dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Berikut model matematika dari permasalahan di atas.

Min. $20x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 15x_{21} + 20x_{22} + 10x_{23} + 25x_{31} + 10x_{32} + 19x_{33}$

Dp. $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 60$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$

$x_{ij} \geq 0, \forall\ i, j$

Seperti yang telah disebutkan, permasalahan transportasi adalah kasus khusus dari metode simpleks. hal tersebut dilihat dari struktur kendalanya, semua koefisiennya 1 dan setiap variabel muncul selalu dalam dua kendala. Masalah transportasi ini juga memiliki beberapa keistimewaan, di antaranya:

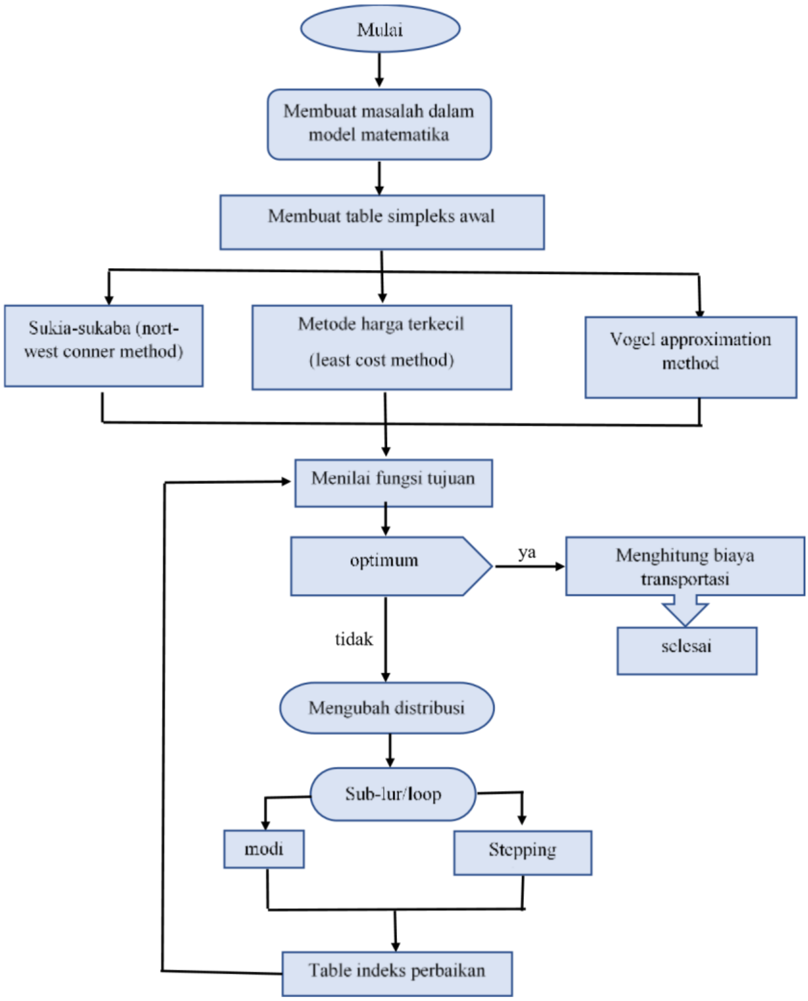
1. Selalu ada solusi;
2. Solusi selalu bilangan bulat non-negatif.

Untuk menyelesaikan masalah transportasi ini akan digunakan suatu metode khusus dari metode simpleks yang tentunya lebih sederhana. Pertama, permasalahan tersebut dalam bentuk tabel simpleks (TSA), kemudian diatur alokasi awal yang nantinya akan diperbaiki untuk mendapatkan biaya minimum. Alokasi pada tabel simpleks awal (TSA) dapat dibuat dengan dua metode, yaitu:

1. *Metode Northwest Corner* atau Sudut Kiri Atas Sudut Kanan Bawah (sukia-sukabe). Metode di mana alokasi dimulai dari sudut kiri atas dari pojok kiri atas dan terus berlanjut ke pojok kanan bawah. Kelemahan dari metode ini adalah tidak memperhitungkan besarnya biaya sehingga kurang efisien.
2. *Least Cost Method* atau Metode Biaya Terkecil. Metode ini terlebih dahulu mencari dan memenuhi biaya yang terkecil. Lebih efisien dibandingkan metode NWC.
3. *Voge's Aproximation Method* (VAM). Metode Vogel adalah metode yang paling efisien dalam menunjukkan alokasi pada TSA. Namun, biasanya tetap diperlukan perbaikan alokasi lanjutan.

Setelah didapatkan TSA, maka langkah selanjutnya akan dihitung indeks perbaikan untuk kemudian alokasinya diubah untuk mendapatkan biaya yang lebih kecil. Metode yang biasa digunakan untuk perbaikan alokasi ini adalah *Stepping Stone* dan *Modified Distribution* (MODO). Alur dari metode penyelesaian masalah transportasi dapat dilihat pada Gambar 6.1.1 sebagai berikut.

1. Bahwa suatu produk yang ingin diangkut tersedia dalam jumlah yang tetap dan diketahui.
2. Produk tersebut akan dikirim melalui jaringan transportasi yang ada dengan memakai cara pengangkutan tertentu dari pusat-pusat pengadaan ke pusat-pusat permintaan.
3. Jumlah permintaan di pusat permintaan pun diketahui dalam jumlah tertentu dan tetap.
4. Ongkos pengangkutan per unit produk yang ingin diangkut diketahui sehingga tujuan kita untuk meminumkan biaya total angkutan tercapai.



Gambar 6.1.1 Alur Metode Penyelesaian Masalah Transportasi

6.2. Kegiatan Pembelajaran 2.. Pengertian Masalah Transportasi

Masalah transportasi bias diselesaikan dengan banyak kombinasi metode, bahkan kemungkinan ada metodemetode lain yang mungkin tidak disebutkan.

Model masalah transportasi: Minimum:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

dengan batas

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_1; untuk\ i = 1,2,3, \dots\dots, m$$

dengan

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j\,; untuk\ i = 1,2,3, \dots\dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Selanjutnya dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Namun, penyelesaian masalah transportasi dengan metode tersebut bukan cara yang praktis, karena banyak persamaan linear bias dipakai dan berbagai kerumitan lainnya yang masih bisa ditemui dalam permasalahan metode simpleks.

Masalah transportasi merupakan suatu kasus dari metode simpleks, oleh karena itu masalah transportasi mempunyai metode penyelesaian yang sedikit berbeda. Meskipun demikian, penyelesaian masalah tersebut yang lebih praktis tetap berdasarkan kepada penggunaan metode simpleks dan aljabar.

Sebelum diselesaikan, masalah transportasi lebih dahulu dipresentasikan ke dalam sebuah tabel. Berikut tabel baku dalam menyelesaikan masalah transportasi.

KE DARI	D_1 K_1	D_2 K_2	...	D_N K_N	KAPASITAS SUMBER
S_1 R_1	$\boxed{C_{11}}$ X_{11}	$\boxed{C_{12}}$ X_{12}	...	$\boxed{C_1}$ X_{1N}	S_1
S_2 R_2	$\boxed{C_{21}}$ X_{21}	$\boxed{C_{22}}$ X_{22}		$\boxed{C_{2N}}$ X_{2N}	S_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_M R_M	$\boxed{C_{m1}}$ X_{31}	$\boxed{C_{m2}}$ X_{32}	...	$\boxed{C_{mn}}$ X_{3N}	S_M
KEBUTUHAN TUJUAN	D_1	D_2		D_N	$\Sigma S_1 = \Sigma D_1$

Tabel 6.2.1 Contoh Tabel Masalah Transportasi

Keterangan:

c_{ij} = biaya transportasi per unit dari sumber ke-i dan tujuan ke-i

s_i = jumlah unit yang tersedia pada sumber ke-i

d_i = jumlah unit yang diminta oleh tujuan ke-j

Setelah itu, langkah selanjutnya adalah membuat tabel simpleks awal (TSA) dengan mengisi tabel dengan menggunakan metode yang telah disebutkan sebelumnya, yaitu Sukia-sukaba harga terkecil atau aproksimasi Vogel.

6.3.Kegiatan Pembelajaran 3. Penyelesaian Awal Masalah Transportasi

Metode ini merupakan metode untuk menentukan solusi awal yang pengalokasiannya berawal dari sudut kiri atas(barat laut/*Nortwest*) hingga ke sudut kanan bawah (tenggara/*south east*), sehingga metode ini sering disebut metode sukia-sukaba. Misalnya dimulai dari basis 1 kolom 1, pengisian ini tergantung pada kapasitas tujuan dan sumber produksi, isilah baris 1 kolom 1 sesuai kapasitas selama sumber produksi memungkinkan. Jika kapasitas tujuan sudah terpenuhi dan sumber produksi masih tersisa, maka pengalokasian berikutnya bergeser ke kanan. Namun, jika kapasitas belum terpenuhi dan sumber produksi sudah habis, maka pengalokasian berikutnya bergeser ke bawah atau jika kapasitas tujuan sudah terpenuhi dan sumber produksi juga sudah habis maka pengalokasiannya bergeser serong kanan bawah dan seterusnya hingga baris dan kolom yang terakhir diujung kanan bawah tabel transportasi.

Contoh dengan penyelesaian awal metode sukiasukaba:
Pertama, dimulai dengan mengisi sel sudut kiri atas (X_{11}) kebutuhan Gudang A (permintaan) sebanyak 50 sedangkan kapasitas pabrik W adalah 90, sehingga alokasi untuk sel X_{11} adalah 50 sesuai dengan kebutuhan Gudang A dan tersisa 40 kapasitas produksi di pabrik w.

Kemudian dilanjutkan dengan mengisi sel X_{12} dengan kebutuhan Gudang B sebanyak 110 namun kapasitas pabrik hanya tersisa 40, sehingga alokasi untuk sel X_{12} adalah 40 dan Gudang B dan masih menyisakan permintaan yang belum terpenuhi. Pada tahap ini, kebutuhan Gudang A sudah terpenuhi dan kapasitas pabrik w sudah seluruhnya tersalurkan, sehingga sel di baris 1 dan kolom 1 sudah tidak mungkin diisi.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 =$	$\boxed{20}$ 50	$\boxed{5}$ 40	$\boxed{8}$	90
H $R_2 =$	$\boxed{15}$	$\boxed{20}$	$\boxed{10}$	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$	$\boxed{19}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.1.1 Simpleks Awal (TSA) I

Setelah pengisian tabel di atas maka langkah selanjutnya akan dilakukan pada sudut kiri atas dari baris dan kolom yang masih dapat diisi, yaitu sel $X_{22,}$ pada sel $X_{22,}$ kebutuhan Gudang B adalah 110 tapi sudah terpenuhi 40, sehingga tersisa kebutuhan Gudang B sebanyak 70 sedangkan kapasitas pabrik H adalah 60. Jadi, alo kasih untuk sel $X_{22,}$ adalah 60, masih menyisakan kebutuhan Gudang B yang belum terpenuhi sebanyak 10,sementara kapasitas pabrik H telah tersalurkan semua.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 =$	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{5}$ 40	$\boxed{8}$	90
H $R_2 =$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 60	$\boxed{1}$	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.2 Simpleks Awal (TSA) II

Pada tahap ini, baris kedua sudah tidak dapat di isi, menyisakan sel X_{32}, karena $X_{32,}$ dan X_{32}, di sebelah kiri maka pengisian sel X_{32}, dilakukan terlebih dahulu. Pada sel $X_{32,}$ kebutuhan Gudang B masih belum terpenuhi sebanyak 10, sedangkan kapasitas produksi pabrik P adalah 50, sehingga alokasi untuk sel $X_{32,}$ adalah 10 dan sisa kapasitas produksi kapasitas pabrik P adalah 40 disalurkan untuk kebutuhan Gudang C sebanyak 40.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3=$	Kapasitas pabrik
W $R_1 =$	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{5}$ 40	$\boxed{8}$	90
H $R_2=$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 60	$\boxed{1}$	60
P $R_M=$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{1}$ 40	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.1.2 Simpleks Awal (TSA) III

Penyelesaian awal untuk masalah transportasi telah selesai, terlihat pada tabel simpleks awal (TSA), semua kebutuhan Gudang telah terpenuhi dan semua kapasitas produksi pabrik telah tersalurkan. Namun, solusi ini belum merupakan solusi optimal (untuk meminumkan harga). Pada tahap ini biaya distribusinya sebesar

$$50(20) + 40(5) + 60(20) + 10(10) + 40(19) = 3260.$$

Untuk mendapatkan hasil yang optimal dalam meminimkan biaya distribusi, dapat dilanjutkan pada tahap selanjutnya yaitu pembuatan tabel simpleks I, II, III, dan seterusnya dengan metode *steping stone* atau modi.

6.3.1. Metode Harga Terendah (Least Cost Method)

Pengalokasian pada metode harga terendah merupakan salah satu tahap dalam penyelesaian tahap awal, artinya metode ini merupakan alternatif metode sukia-sukaba, bukan tahap lanjutannya. Metode harga terendah

mengisi sel dengan harga terendah dari seluruh harga pada tabel.
Pengalokasian berdasarkan kapasitas dan permintaan tempat tujuan. Apabila pada baris atau kolom tersebut belum tersalurkan atau terpenuhi seluruh kapasitasnya, maka dilanjutkan dengan pengisian pada baris atau kolom tersebut dengan harga terendah yang disesuaikan dengan kapasitas atau permintaan. Prosedur tersebut diulangi secara terus menerus hingga semua permintaan terpenuhi dan produksi dari sumber tersalurkan seluruhnya.

Berikut contoh:
Apabila diselesaikan dengan metode penyelesaian awal menggunakan metode harga terendah.
Pertama, harga terendah dalam tabel adalah 5 yang berada pada sel X12, pada sel tersebut kebutuhan Gudang B yaitu 110 belum dapat terpenuhi oleh kapasitas produksi pabrik W sehingga menyisakan kebutuhan Gudang B sebanyak 20. Sel X12 diisi 90.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 =$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 90	$\boxed{8}$	90
H $R_2 =$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.2.1 Simpleks Awal (TSA) IV

Berikutnya, masih terdapat enam sel yang dapat diisi, dengan harga terendah adalah 10 berada pada sel X_{32}. Pada sel tersebut, kebutuhan Gudang B yang belum terpenuhi adalah 20, sedangkan kapasitas produksi pabrik P adalah 50. Sel X_{32} diisi 20,sehingga tersisa kapasitas produksi pabrik P sebanyak 30 belum tersalurkan.

gudang / pabrik	A K_1 =	B K_2 =	C K_3=	Kapasitas pabrik
W R_1 =	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 90	$\boxed{8}$	90
H R_2=	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 40	60
P R_M=	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 20	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.2.1 Simpleks Awal (TSA) V

Sekarang, tersisa empat sel yang masih dapat diisi, dari keempat sel tersebut harga terendahnya adalah 10 pada sel X_{23}. Pada sel tersebut, kebutuhan Gudang C adalah 40 dengan kapasitas produksi pabrik H adalah 60. Sel X_{23} dapat diisi 40, sehingga tersisa 20 yang belum tersalurkan dari pabrik H. tersisa 2 sel yang dapat diisi dengan harga terendah adalah 15 pada sel X_{21}. Pabrik X_{21} kebutuhan Gudang A adalah 50, sedangkan kapasitas produksi pabrik H tersisa 20, sehingga sel X_{21} diisi 20 dan menyisakan kebutuhan Gudang A sebanyak 30.

gudang / pabrik	A K_1 =	B K_2 =	C K_3=	Kapasitas pabrik
W R_1 =0	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 90	$\boxed{8}$	90
H R_2=	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 40	60
P R_M=	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 20	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.2.2 Simpleks Awal (TSA) VI

Sekarang tersisa sel x_{31} untuk diisi dengan sisa kapasitas produksi dari pabrik P yaitu 30. Pada tahap ini, penyelesaian awal maslah transportasi telah selesai dengan biaya distribusi sebesar $90(5) + 20(15) + 40(10) + 30(25) + 20(10) = 2100$.

Biaya distribusi metode harga terendah ini lebih kecil bila dibandingkan dengan metode sukia-sukaba, sehingga menjadikannya metode alternative yg lebih optimal. Namun, namun hasil ini belum tentu biaya distribusi terendah, sehingga tetap harus dilanjutkan pada tahap selanjutnya yaitu metode *stepping stone* atau MODI.

6.3.2. Metode Vogel (Vogel Approximation Method/Vam)

VAM merupakan salah satu alternatif metode dalam penyelesaian awal masalah transportasi. Pada VAM, diambil dua harga terendah pada setiap baris dan dua harga terendah dari setiap kolom, untuk kemudian kedua harga tersebut dihitung selisihnya. Baris atau kolom dengan selisih terbesar kemudian diambil untuk diisi sel dengan harga terendah dari 2 angka yang terdapat pada baris atau kolom tersebut. Begitu seterusnya prosedur tersebut dilakukan hingga semua kebutuhan Gudang terpenuhi dan kapasitas produksi pabrik tersalurkan.

Contoh:

Dengan penyelesaian awal menggunakan VAM.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 = 0$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	90
H $R_2 =$	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 40	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.3.1 Simpleks Awal (TSA) VII

Pada tabel diatas, diambil dua sel dengan harga terendah pada tiap baris dan tiap kolom, untuk kemudian dihitung selisihnya dan dipilih yang selisihnya terbesar. Pengambilan sel-sel tersebut ditampilkan pada tabel berikut:

BARIS ATAU KOLOM	DUA HARGA TERMURAH	SELISIH
BARIS 1	5 dan 8	3
BARIS 2	10 dan 15	5
BARIS 3	10 dan 19	9 (TERBESAR)
KOLOM 1	15 dan 20	5
KOLOM 2	5 dan 10	5
KOLOM 3	8 dan 10	2

Tabel 6.3.3.2 Penghitungan Selisih

Pada tabel di atas, selisih terbesar adalah 9 pada baris ketiga, dan sel dengan harga terendah pada baris tiga adalah x_{32}. Pada sel x_{32}, kebutuhan Gudang b adalah 110 dengan kapasitas produksi pabrik P adalah 50, sehingga x_{32} diisi 50 dan terisi 60 kebutuhan Gudang B yg belum terpenuhi.

Kemudian dari baris dan kolom yang tersisa dibuat kembali tabel untuk membandingkan selisih dari dua harga terendahnya. Pembentukan tabel untuk membandingkan harga terendah ini tidak menjadi keharusan. Apabila telah terbiasa, penentuan selisih terbesar dapat dilakukan secara mudah tanpa bantuan tabel, sehingga akan mempercepat pekerjaannya.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 = 0$	2	5	8	90
H $R_2 =$	1	2	40 1	60
P $R_M =$	25	50 10	1	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.3.3 Simpleks Awal (TSA) VIII

Dengan tabel selisih dari sel-sel yang tersisa adalah sebagai berikut:

BARIS ATAU KOLOM	DUA HARGA TERMURAH	SELISIH
BARIS 1	5 dan 8	3
BARIS 2	10 dan 15	5
KOLOM 1	15 dan 20	5
KOLOM 2	5 dan 20	15(TERBESAR)
KOLOM 3	8 dan 10	2

Tabel 6.3.3.4 Penghitungan Selisih II

Dengan kolom 2 sebagai kolom yang memiliki selisih terbesar dan sel x_{12} sebagai harga terendah. Pada sel x_{12}, tersisa kebutuhan Gudang B sebanyak 60 dan kapasitas produksi pabrik W adalah 90, sehingga x_{12} dapat diisi 60 yang disalurkan dari pabri W hingga tersisa kapasitas produksi pabrik W adalah 30.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 = 0$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 60	$\boxed{8}$	90
H $R_2 =$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 50	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.3.3 Simpleks Awal (TSA) VIII

Selanjutnya kembali diulangi pembuatan tabel selisih dari sel-sel yang tersisa :

BARIS ATAU KOLOM	DUA HARGA TERMURAH	SELISIH
BARIS 1	8 dan 20	12 (TERBESAR)
BARIS 2	10 dan 15	5
KOLOM 1	15 dan 20	5
KOLOM 3	8 dan 10	2

Tabel 6.3.3.4 Penghitungan Selisih III

Baris 1 sebagai baris dengan selisih terbesar dan sel x_{13} merupakan sel dengan harga terkecil pada baris 1 tersebut, sehingga pengisian dilakukan pada sel x_{13}, pada sel x_{13} kebutuhan Gudang C adalah 40 sedangkan kapasitas produksi pabrik W hanya tersisa 30, sehingga sel x_{13} dapat diisi 30 dengan menyisakan kebutuhan Gudang C sebanyak 10 yang belum terpenuhi.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 = 0$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 60	$\boxed{8}$ 30	90
H $R_2 =$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 50	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.3.5 Simpleks Awal (TSA) VIII

Selanjutnya, tabel selisih tidak diperlukan lagi karena hanya tersisa satu baris. Harga terkecil pada baris 2 ini adalah 10 pada sel x_{23}, kebutuhan Gudang C pada sel x_{23} tersisa 10 yang belum terpenuhi, sedangkan kapasitas produksi pabrik H adalah 60, sehingga sel x_{23} diisi 10 dan sisa produksi pabrik H sebanyak 50 dialokasikan untuk pabrik A pada sel $x_{21,}$ pada tahap ini, semua kebutuhan Gudang telah terpenuhi dan semua kapasitas produksi tiap pabrik telah tersalurkan dengan biaya:

$$60(5) + 30(8) + 50(15) + 10(10) + 50(10) = 1890$$

Terlihat bahwa biaya distribusi yang dihasilkan VAM lebih kecil daripada metode sukia-sukaba maupun metode harga terendah, namun hasil ini masih belum tentu optimum sehingga tetap dilanjutkan dengan *stepping stone* ataupun MODI.

gudang / pabrik	A K_1 =	B K_2 =	C K_3=	Kapasitas pabrik
W R_1 =0	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 60	$\boxed{8}$ 30	90
H R_2=	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 10	60
P R_M=	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 50	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.3.3.6 Simpleks Awal (TSA) IX

6.4.Kegiatan Pembelajaran 3. Tahap Penentuan Hasil Optimal

Untuk menentukan hasil optimal, alokasi pada tiap sel yang telah memenuhi asas keseimbangan alokasi.

Akibatnya, apabila, ada sel yang ditambah, maka akan ada sel lain yang dikurangi sebesar nilai pertambahan tersebut. System penambahan dan pengurangan ini akan membentuk sebuah kurva tertutup (*loop*), ada beberapa keharusan pada *loop*, yaitu:

a. Tertutup(biasanya jumlah sel genap)
b. Tidak berarah miring/ diagonal
c. Jumlah sel yang terisi pada *loop* tersebut + 1 = jumlah sudut pada *loop*

Terdapat beberapa metode untuk menentukan hasil optimal ini, di antaranya adalah metode *stepping stone* dan MODI.

a. Metode Stepping Stone

Metode *stepping stone* dilakukan setelah metode penyelesaian awal. Pada metode ini akan memperhitungkan semua *loop* yang mungkin dilakukan untuk kemudian menghitung biaya perubahannya. Jika biaya perubahannya negatif maka penurunan biaya dan perubahan alokasi pada *loop* tersebut, sehingga alokasi pun di ubah dengan memperhatikan asas keseimbangan.

Contoh metode harga terendah untuk dilanjutkan dengan metode *stepping stone*:

gudang / pabrik	A K_1 =	B K_2 =	C K_3=	Kapasitas pabrik
W R_1=0	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 60	$\boxed{8}$ 30	90
H R_2=	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 10	60
P R_M=	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 50	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.4.1 Simpleks Awal (TSA) X

Untuk sel kosong x_{11} dapat diisi dengan membuat *loop* dari $x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$, artinya sel x_{11} dapat ditambah alokasinya sebanyak 1, agar tetap memenuhi kapasitas produksi pabrik W, maka sel x_{12} dikurang 1. Selanjutnya, agar kebutuhan Gudang B tetap terpenuhi, maka sel x_{32} ditambah 1, dan agar kapasitas produksi pabrik P tetap seimbang maka x_{31} dikurangi 1, seperti tabel berikut:

gudang / pabrik	A K_1 =	B K_2 =	C K_3=	Kapasitas pabrik
W R_1=0	$\boxed{20}$ +1	$\boxed{5}$ 90 --1	$\boxed{8}$	90
H R_2=	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{20}$	$\boxed{10}$ 40	60
P R_M=	$\boxed{25}$ 30 -1	$\boxed{10}$ 20 +1	$\boxed{19}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.4.2

pada tabel di atas, ketika sel x_{11} diberikan alokasi +1 maka sel x_{31} alokasinya -1, dan sel x_{32} alokasinya +1, juga sel x_{12} alokasinya adalah -1, apabila dihitung perubahan biaya untuk *loop* tersebut per 1 alokasi adalah $+1(20) - 1(25) + 1(10) - 1(5) = 0$, jadi perubahan alokasi tersebut tidak akan memberikan perubahan biaya.

Perubahan alokasi maksimal sebanyak alokasi terkecil dari perubahan bernilai -1 pada *loop* tersebut, sehingga pada *loop* tersebut sebanyak 30 dapat dipindahkan alokasinya dari Gudang A ke Gudang B pada baris ke tiga dan sebanyak 30 dari Gudang B ke Gudang A pada baris ke kesatu. Tabel setelah diubah yaitu sebagai berikut:

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 = 0$	$\boxed{20}$ 30	$\boxed{5}$ 60	$\boxed{8}$	90
H $R_2 =$	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{20}$	$\boxed{10}$ 40	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$ 50	$\boxed{19}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.4.3

Perubahan di atas tidak memberikan biaya distribusi yg lebih kecil, sehingga perubahan alokasi ini tidak diperlukan.

Sehingga untuk mendapat biaya distribusi yang lebih kecil, terlebih dahulu dihitung biaya perubahan tiap *loop* yang mungkin, lalu dipilih biaya perubahan terkecil. Berikut adalah tabel perhitungannya:

Sel kosong	loop	Perubahan biaya
X_{11}	$(+)x_{11} \rightarrow (-)x_{31} \rightarrow (+)x_{32} \rightarrow (-)x_{12}$	20-25+10-5 = 0
X_{13}	$(+)x_{12} \rightarrow (-)x_{21} \rightarrow (+)x_{31} \rightarrow (-)x_{32}$	20-15+25-10 =20
X_{22}	$(+)x_{33} \rightarrow (-)x_{23} \rightarrow (+)x_{21} \rightarrow (-)x_{31}$	19-10+15-25 = -1

Tabel 6.4.4

Pada tabel di atas bahwa *loop* $(+)x_{11} \rightarrow (-)x_{23} \rightarrow (+)x_{21} \rightarrow (-)x_{31}$ akan menghasilkan biaya -1 per alokasinya. Dengan begitu alokasi tabel simpleks 1 akan terdistribusi sebagai berikut:

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	Kapasitas pabrik
W $R_1 = 0$	$\boxed{20}$	$\boxed{5}$ 90	$\boxed{8}$	90
H $R_2 =$	50 $\boxed{15}$ 20 + 1	$\boxed{20}$	10 $\boxed{10}$ 40 -1	60
P $R_M =$	$\boxed{25}$ 30 - 1	$\boxed{10}$ 20	$\boxed{19}$ 30 +1	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Tabel 6.4.5

Jika dihitung biaya distribusinya adalah $90(5) + 50(15) + 10(10) + 20(10) + 30(19) = 2070$.

Dengan cara seperti ini biayanya lebih sedikit dibanding dengan sebelum menggunakan metode penentuan biaya optimum. Untuk mengetahui nilai optimum atau bukan, maka dilakukan proses metode *stepping stone* kembali dengan menghitung perubahan biaya setiap *loop*, dan kemudian melakukan perubahan alokasinya kembali hingga tidak ada perubahan biaya bernilai negatif. Jika tidak ada lagi perubahan biaya bernilai negatif, berarti biaya distribusi untuk alokasi tersebut telah optimum.

b. Modified Distribution Method (Metode MODI)

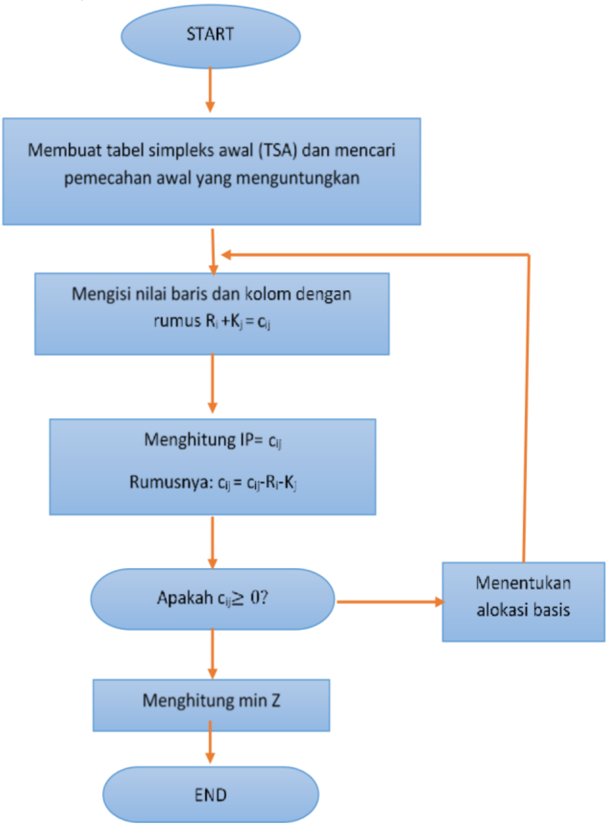
Metode MODI adalah pengembangan dari metode batu loncatan (*stepping stone method*). Metode ini juga memberikan cara yang lebih efisien dalam menghitung C_{ij} dari semua sel non basis. Nilai C_{ij} disebut juga dengan nilai yang menunjukkan besarnya jumlah penurunan biaya apabila ada satu satuan barang yang diangkat dari tempat asal i ke tempat tujuan j.

Untuk menentukan sel mana yang harus masuk basis dalam perhitungan selanjutnya, dan harus dihitung terlebih dahulu indeks perbaikan dengan rumus $C_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$.

Ket:
C_{ij} = koefisien ongkos relatif R_i
= nilai baris ke-1
k_j = nilai kolom ke-j
C_{ij} = biaya pengangkutan satu satuan barang dari sumber I ke titik tujuan j

Dalam metode MODI, penentuan sel kosong dilakukan dengan menggunakan persamaan $R_i+K_j= c_{ij}$. cara untuk menghitung hal tersebut yaitu sebagai berikut:
L_1: menentukan nilai kolom dan baris
L_2 : menghitung indeks perbaikan (IP)
L_3 : memilih titik tolak perubahan
L_4 : memperbaiki alokasi
L_5 : ulangi langkah-langkah tersebut di atas

Perhatikan bagan atau diagram berikut yang menyatakan alur dari penyelesaian metode MODI seimbang. Dengan ini, maka penyelesaian masalah transportasi akan menjadi lebih mudah.



Gambar 6.4.1 Diagram Alur Metode MODI Seimbang

Mari kita selesaikan Contoh 2 menggunakan Tabel Simpleks Awal (TSA) dan perhatikan secara seksama penyelesaiannya.

Contoh 2
Tiga perusahaan W, H, dan P memproduksi alatalat elektronik masing-masing 90 set, 60 set, dan 50 set. Hasil produksi dari ketiga pabrik tersebut akan disimpan di tiga gudang A, B, dan C, yang kapasitasnya berturut-turut 50 set, 110 set, dan 40 set. Diketahui biaya angkut per set (dihitung dalam ribuan rupiah) dari W ke A adalah 20, W ke B adalah 5, dan W ke C adalah 8. Kemudian dari H ke A adalah 15, dari H ke B adalah 20, dan dari H ke C adalah 10. Sementara dari P ke A adalah 25, dari P ke B adalah 10, dan dari P ke C adalah 19. Tentukan biaya minimum untuk mengangkut barang hasil produksi W, H, dan P ke gudang A, B, dan C per satu bulan tertentu.

Penyelesaian Contoh 2:

gudang / pabrik	A $K_1=$	B $K_2=$	C $K_3=$	Kapasitas pabrik
W $R_1=0$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	90
H $R_2=$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	60
P $R_M=$	$\boxed{25}$	$\boxed{10}$	$\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Untuk mengisi tabel di atas, langkah-langkah yang kita gunakan seperti yang tercantum pada *flowchart* di atas supaya lebih operasional. Untuk contoh ini, sementara kita gunakan aturan sukia-sukaba , dengan langkah sebagai berikut:

1. Mulai dari sudut kiri atas, tabel simpleks awal (TSA) alokasikan sesuai maksimum kapasitas Gudang A yaitu 50, kolom 1 selanjutnya abaikan dari pertimbangan

alokasi-alokasi TSA berikutnya. 2. Kelebihan produk dari sumber W adalah 90-50=40. Alokasikan ke baris 1 sehingga alokasi berikutnya pada baris 1 kolom 2 sebanyak 40

3. Karena pada baris pertama alokasinya sudah maksimum, maka baris 1 kolom 3 diabaikan dari pertimbangan alokasi berikutnya
4. Selanjutnya pindah ke baris 2 kolom 2 dari tabel terlihat bahwa kebutuhan Gudang B masih lebar sehingga pada x_{22} dialokasikan sebanyak 60 dan karena kapasitas dari pabrik H telah teralokasi seluruhnya maka diabaikan baris 2 kolom 3 untuk pertimbangan alokasi berikutnya
5. Selanjutnya karena kebutuhan Gudang B masih belum terpenuhi, maka alokasikan produk dari pabrik P ke baris 3 kolom 2 sebanyak 10
6. Alokasikan produk dari pabrik P ke baris 3 kolom3 sebanyak 40

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3=$	Kapasitas pabrik
W $R_1=0$	50 $\boxed{2}$	40 $\boxed{5}$	$\boxed{8}$	90
H $R_2=$	$\boxed{1}$	60 $\boxed{2}$	$\boxed{1}$	60
P $R_M=$	$\boxed{25}$	10 $\boxed{10}$	40 $\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

Sel yang terisi disebut sel basis atau sel batu, sedangkan yang tidak terisi disebut sel non basis atau sel air. Setelah kolom tersebut terisi maka dilanjutkan proses selanjutnya yaitu menghitung biaya angkut minimumnya dan jika belum minimum maka lanjutkan pada metode MODI. Selanjutnya, tentukan nilai basis dan kolom, ini dihitung pada sel basis, rumusnya adalah $R_1 + K_1 = C_{ij}$

Mencari nilai kolom 1
$R_1 + K_3 = C_{11}$, karena R_1 selalu diberi nilai 0. Maka $K_1 = C_{11} = 20$, mencari nilai baris dan kolom yang lain:
$R_1 + K_2 = C_{12} \Longrightarrow 0 + K_1 = C_{12} \Longrightarrow K_2 = C_{12} = 5$
$R_2 + K_2 = C_{22} \Longrightarrow R_2 + 5 = 20 \Longrightarrow R_2 = 20-5 = 15$
$R_3 + K_2 = C_{32} \Longrightarrow R_3 + 5 = 10 \Longrightarrow R_3 = 10-5 = 5$
$R_3 + K_3 = C_{33} \Longrightarrow 5 + K_3 = 19 \Longrightarrow K_3 = 19-5 = 14$

Selanjutnya, hitung indeks perbaikan (IP). IP ini dihitung pada sel non basis. Rumusnya adalah $C_{ij} = C_{ij} - R_i - R_j$
$c'_{23} = c_{23} - R_2 - K_3 \Rightarrow c_{23} = 10 - 15 - 14 = -19$
$c'_{31} = c_{31} - R_3 - K_1 \Rightarrow c_{31} = 25 - 5 - 20 = 0$

Langkah ke empat adalah menilai apakah $c_{ij} \geq 0$. Ternyata c_{ij} ada yang bernilai negatif dan yang terkecil $c_{21} = -20$, yang berarti biaya angkut belum minimum. Pada tahap ini, biaya angkut untuk tahap pertama adalah
$50(20) + 40(5) + 60(20) + 10(10) + 40(19) = 3260$

Langkah kelima adalah menentukan alokasi basis. Caranya sebagai berikut:
1. Beri tanda positif(+) pada sel non basis yang c_{ij} nya terkecil, yaitu pada c_{21}
2. Buat *loop* yang ujung-ujungnya sel basis terdekat dan berikan tanda + atau – secara bergantian mulai dari sel basis terdekat
3. Buat perubahan alokasinya sesuai dengan tanda + atau – yaitu dengan memindahkan alokasi dari sel yang bertanda – ke sel yang bertanda + sebanyak isi terkecil dari sel yang bertanda – tersebut. Lalu coret

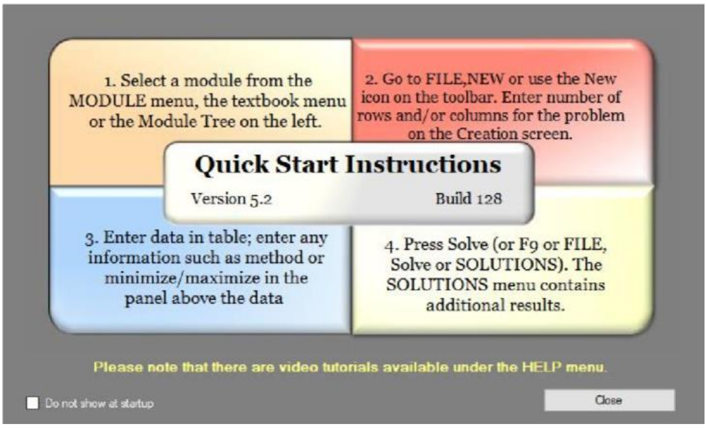
nilai yang lama dan tulis nilai yang baru pada masing-masing sel.

gudang / pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3=$	Kapasitas pabrik
W $R_1 = 0$	50 - $\boxed{2}$	40 + 90 $\boxed{5}$	$\boxed{8}$	90
H $R_2=$	50 + $\boxed{1}$	10 - 60 $\boxed{2}$	$\boxed{1}$	60
P $R_M=$	$\boxed{25}$	10 $\boxed{10}$	40 $\boxed{1}$	50
KEBUTUHAN TUJUAN	50	110	40	200

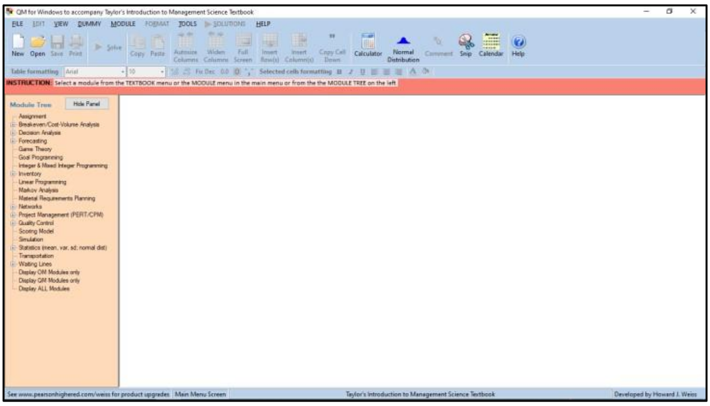
6.5.Kegiatan Pembelajaran 5. PQM-QM Masalah Transportasi

PQM-QM merupakan kepanjangan dari *production and operation management-quantitative methods*, yaitu salah satu perangkat atau aplikasi khusus dalam menyelesaikan berbagai permasalahan yang berkaitan dengan riset operasi. Perangkat lunak (*software*) ini dapat diunduh secara gratis di website resmi Prenhall (http://wps.prenhall.com/bp_weiss_software_1/1/358/91664.cw/).

Penyelesaian masalah dengan menggunakan PQM-QM ini tidak hanya menampilkan solusi akhir, namun juga ditampilkan langkah-langkah dan berbagai dukungan lainnya seperti grafik, dual, residu, dan lain sebagainya yang sangat berguna sebagai data pendukung dan sumber belajar bagi para pemula dalam program linear.



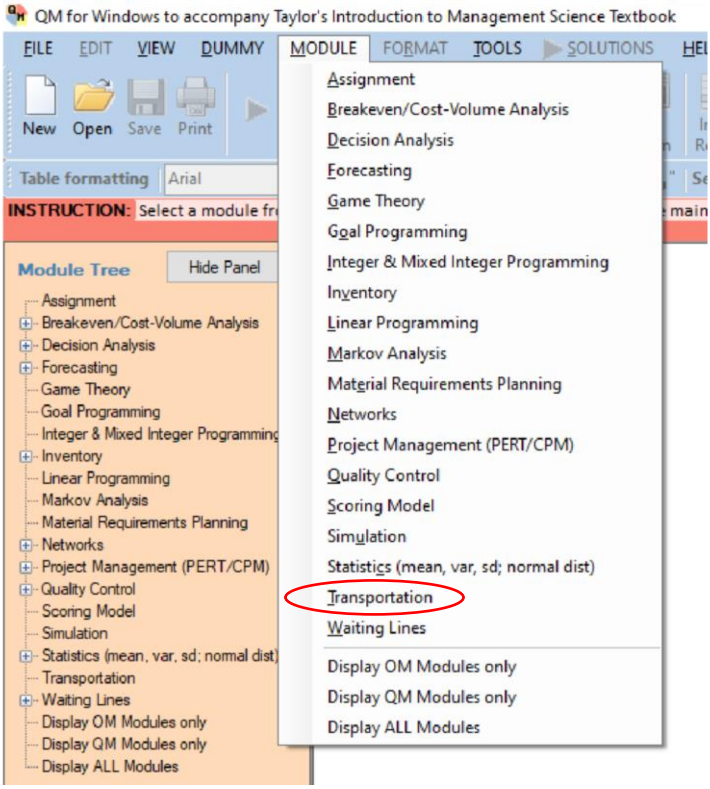
Gambar 6.5.1 Tampilan Muka PQM-QM for Windows



Gambar 6.5.2 Tampilan PQM-QM for Windows

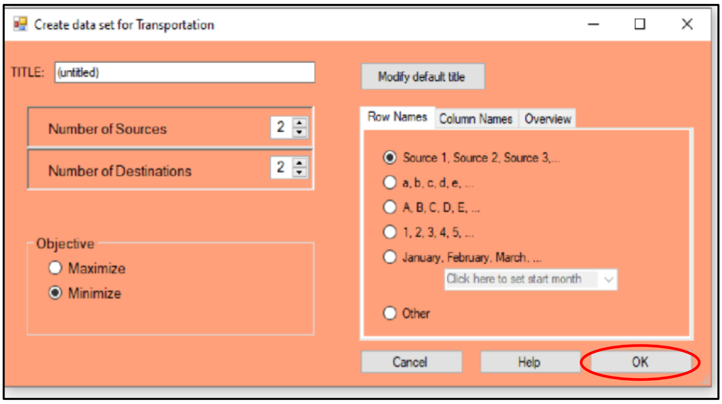
Masalah transportasi dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan *software* PQM-QM ini. Tidak hanya menghasilkan solusi akhir, namun juga aplikasi ini dapat menampilkan tiap langkah yang dilalui sehingga dapat dianalisis tiap prosesnya. PQM-QM juga menyediakan berbagai teknik pembuatan simpleks awal pada masalah transportasi, yaitu metode Sukia-sukaba, metode harga terkecil, dan metode Vogel.

Untuk penyelesaian masalah transportasi, terlebih dahulu pilih modul *Transportation* pada pilihan modul *tree* di sebelah kiri hingga muncul tampilan seperti di bawah ini.



Gambar 6.5.3 Pilihan Menu Modul pada PQM-QM

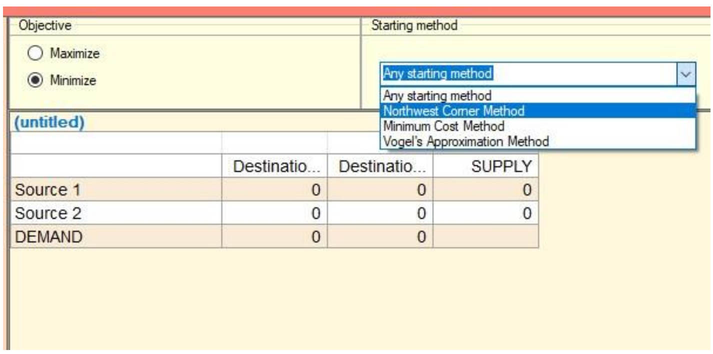
Setelah memilih *Transportasi* ikuti instruksi dari aplikasi tersebut untuk memilih *New* sebagai plot pengerjaan masalah transportasi.



Gambar 6.5.4 Inisialisasi Awal Masalah Transportasi

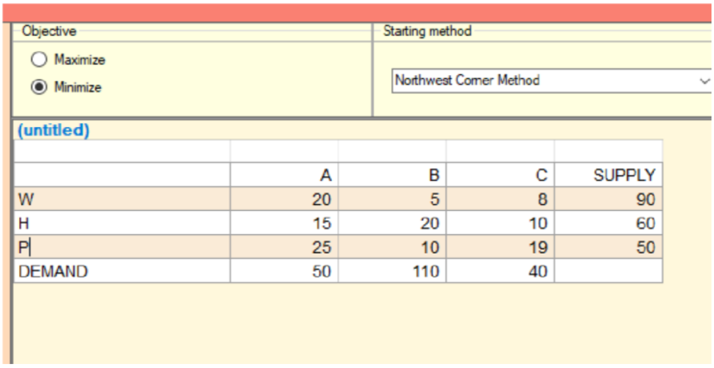
Tampilan inisialisasi untuk masalah transportasi pada PQM-QM ini hampir sama dengan inisialisasi awal untuk masalah program linear dengan penyelesaian metode simpleks. Ada sedikit perbedaan di inisialisasi sumber dan tujuan yang pada metode simpleks merupakan inisialisasi kendala dan variabel.

Kemudian, klik OK pada tampilan tersebut hingga tampilan berubah seperti pada gambar berikut.



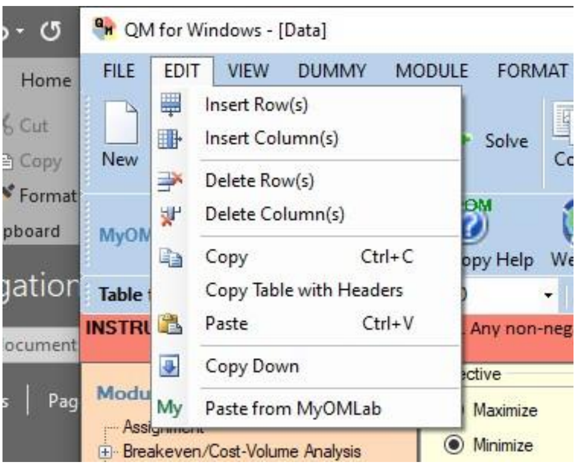
Gambar 6.5.4 Tampilan *Form Input* untuk Masalah Transpostasi

Setelah klik OK, akan muncul *form input* untuk mengisi biaya distribusi dan kapasitas produksi maupun kapasitas tujuan. Pada layar tersebut juga terdapat pilihan metode yang akan digunakan untuk pembuatan TSA. Agar sesuai dengan pengerjaan manual sebelumnya, maka pilih metode Sukia-sukaba (*northwest corner method*). Kemudian isi biaya distribusi, kapasitas produksi, dan kapasitas gudang.



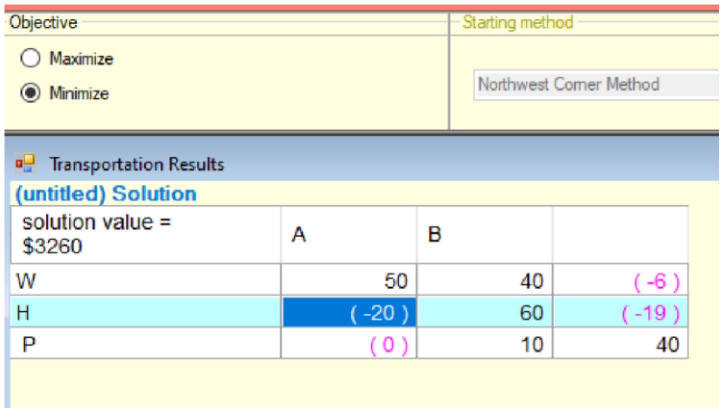
Gambar 6.5.5 *Input Data* untuk Menyelesaikan Contoh 2

Untuk menambahkan kolom dan baris, pilih *Edit* kemudian pilih *Insert Row* dan *Insert Column* sesuai data yang dibutuhkan.



Gambar 6.5.6 Menambahkan Kolom dan Baris

Setelah data diinput, maka permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan memilih *Solve*. Tetapi, kali ini dapat dipilih menu *Step* untuk merinci kesesuaian proses tiap langkah dengan perhitungan manual.



Gambar 6.5.7 TSA Penyelesaian Contoh 2

Pada iterasi pertama yang dilakukan dengan menggunakan metode Sukia-sukaba menampilkan indeks perbaikan. Indeks perbaikan yang dilakukan PQM-QM ini memberikan hasil perhitungan perbaikan yang sama seperti perhitungan manual.

$$c_{13} = 8 - 0 - 14 = -6$$
$$c_{21} = 15 - 15 - 20 = -20$$
$$c_{23} = 10 - 15 - 14 = -19$$
$$c_{31} = 25 - 5 - 20 = 0$$

Sedangkan untuk biaya distribusi sementara pada TSA tersebut ditampilkan pada bagian kiri atas tabel tersebut.

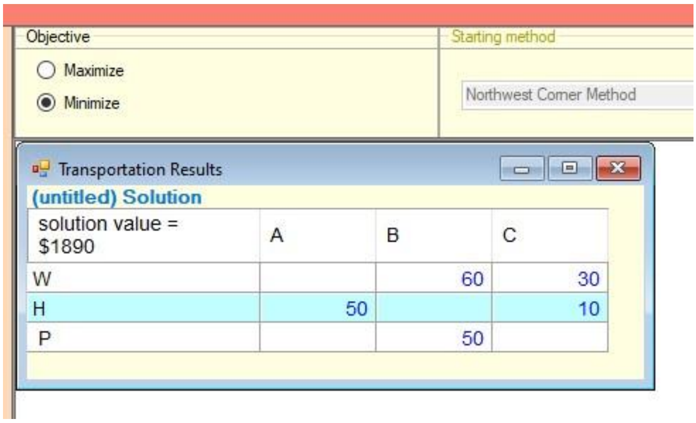
Apabila dilanjutkan dengan menekan tombol *Step*, maka proses akan berlanjut ke iterasi berikutnya. Dengan menekan tombol *Solve*, maka akan diperoleh jawaban akhir dan tab iterasi dapat ditampilkan seperti pada penyelesaian dengan metode simpleks, yaitu dari bagian bawah.

(untitled) Solution

	A	B	C
Iteration 1			
W	50	40	(-6)
H	(-20)	60	(-19)
P	(0)	10	40
Iteration 2			
W	(20)	90	(-6)
H	50	10	(-19)
P	(20)	10	40
Iteration 3			
W	(1)	90	(-6)
H	50	(19)	10
P	(1)	20	30
Iteration 4			
W	(7)	60	30
H	50	(13)	10
P	(7)	50	(6)

Gambar 6.5.8 Iterasi pada Penyelesaian Contoh 2

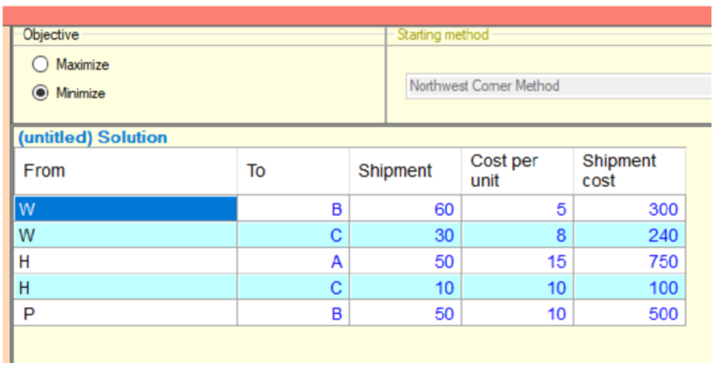
Setiap langkah sesuai dengan perhitungan manual dan diselesaikan dengan empat iterasi. Dapat diperhatikan pula, hasil pengerjaan menghasilkan *solution value* yang merupakan hasil akhir permasalahan transportasi.



solution value = $1890	A	B	C
W		60	30
H	50		10
P		50	

Gambar 6.5.9 Penyelesaian Contoh 2

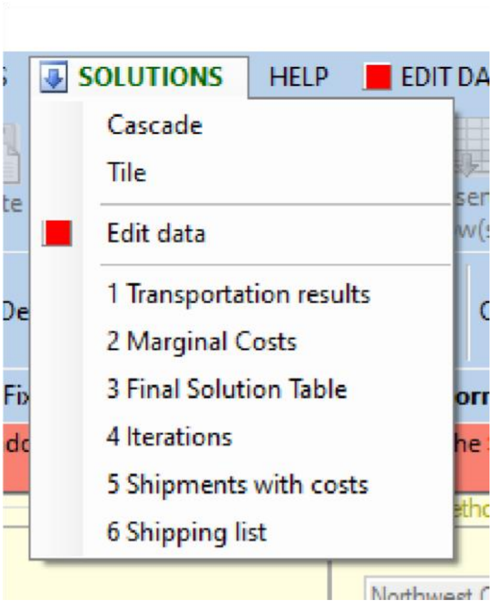
Dengan biaya distribusi minimum yang ditampilkan pada sudut kiri atas tabel, yaitu 1890 (dalam ribuan rupiah). Hasil ini sama dengan hasil perhitungan manual yang telah dilakukan sebelumnya secara manual. Sementara, untuk kesimpulan yang lebih mendalam, mengenai rute pengiriman dan biayanya terdapat dalam tab tersendiri, yaitu tab *Shipping List* (pendistribusian barang dan biaya).



From	To	Shipment	Cost per unit	Shipment cost
W	B	60	5	300
W	C	30	8	240
H	A	50	15	750
H	C	10	10	100
P	B	50	10	500

Gambar 6.5.10 Distribusi Barang dan Biaya Contoh 2

Perlu diketahui, pada masalah transportasi yang diselesaikan melalui aplikasi PQM-QM ini tidak memiliki penyelesaian berupa grafik. Penyelesaian berupa grafik disediakan apabila pengguna memilih modul *Linear Programming*. Berikut ini fitur solusi



yang tersedia pada modul *Transportation*.

Gambar 6.5.11 Layanan Solusi Modul Transportasi

6.6.Kegiatan Pembelajaran 6. *Excel Solver* dalam Masalah

Untuk menyelesaikan masalah transportasi tidak seimbang, POM-QM akan secara otomatis membuat sumber atau tujuan *dummy* (tujuan yang kemungkinan tidak dapat terealisasi; palsu; tiruan), sehingga kita tidak perlu direpotkan dengan menghitung kapasitas sumber maupun tujuan. Penggunaan bilangan besar-M untuk masalah transportasi dengan ketidaklayakan rute dalam POM-QM bisa diwakili dengan bilangan yang besar, misalkan 100, 1000, atau 2000. Sesungguhnya, cukup bilangan tersebut lebih besar dari biaya distribusi yang lainnya, tidak diperlukan bilangan pengganti yang demikian besar hingga rnenyulitkan perhitungan.

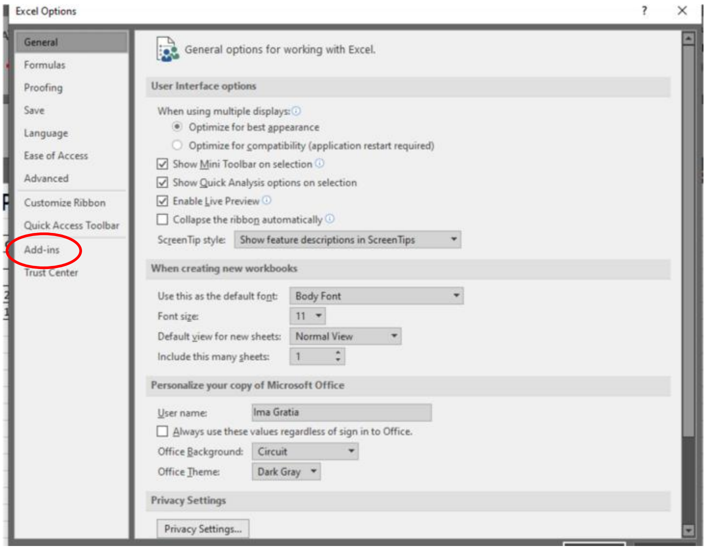
Dikarenakan ringkas dan detailnya POM-QM dalam penyelesaian masalah transportasi, penggunaan *Excel Solver* dalam masalah transportasi sesungguhnya tidak rnemberikan kelebihan berarti seperti pada masalah program linear dengan metode simpleks. Namun, sering kali data kapasitas produksi dan tujuan/gudang disimpan dalam Ms. Excel sehingga akan memudahkan apabila masalah transportasi langsung dapat diselesaikan di situ.

Dengan *Excel Solver* yang telah, kita akan mencoba menyelesaikan Contoh 2 dengan pengubahan bentuk matematika. Tabel masalah transportasi tersebut akan tampak sebagai berikut.

Gudang / Pabrik	A $K_1 =$	B $K_2 =$	C $K_3 =$	D (*Dummy*) $K_4 =$	Kapasitas Pabrik
W $R_1 =$	20	5	8	0	90
H $R_2 =$	15	20	10	0	60
P $R_3 =$	25	10	19	0	100
Kebutuhan Gudang	50	110	40	50	250

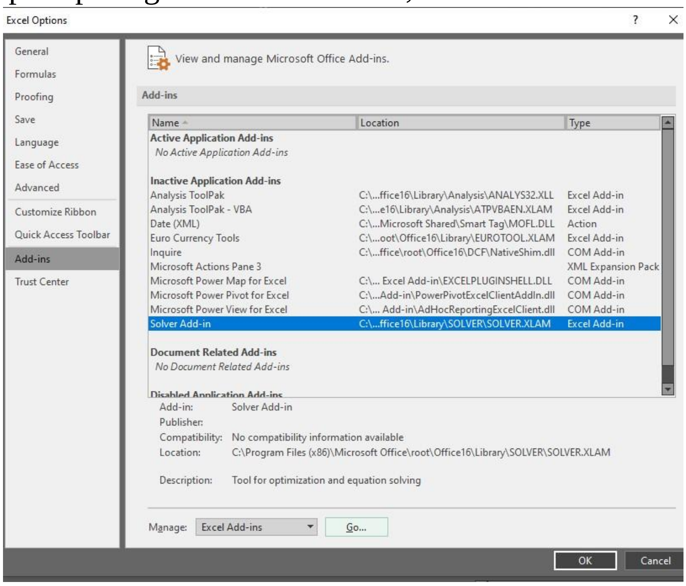
Tabel 6.6.1 TSA Penyelesaian Contoh 2

Namun, sebelum itu harus dipastikan Ms. Excel yang dimiliki sudah terpasang dengan *Excel Solver Add-in* dengan cara klik *File* dan pilih *Options*, maka akan tampak tampilan seperti pada gambar di bawah ini. Kemudian pilih menu *Add-ins* seperti pada bagian yang dilingkari berwarna merah.



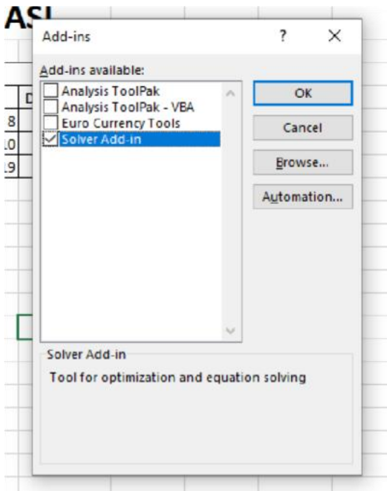
Gambar 6.6.1 Tampilan Ms. Excel *Option*

Setelah memilih menu *Add-ins*, pilih *Solver Add-in*, kemudian pada *dropdown manage* pilih *Excel Add-ins* seperti pada gambar di bawah ini, dan klik *Go*.



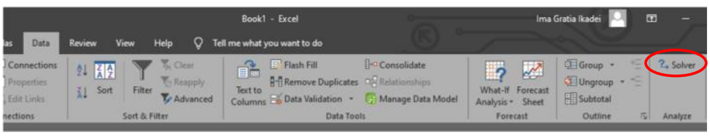
Gambar 6.6.2 Pemasangan *Excel Solver Add-in*

Setelah itu akan muncul kotak dialog, pilih dan berikan cek-lis kepada *Solver Add-in* kemudian klik OK.



Gambar 6.6.3 Kotak Dialog *Solver Add-in*

Lihat tab menu dari *Data*, maka akan terlihat fitur *Solver* pada ujung kanan halaman Ms. Excel.



Gambar 6.6.3 Fitu *Solver Add-in*

Dalam menyelesaikan masalah transportasi dengan *Excel Solver*, data harus didistribusikan terlebih dahulu dan dipindah dengan data kapasitas produksi maupun tujuan atau gudang sesuai dengan kebutuhan dalam penyelesaian masalah transportasi seperti pada tangkapan layar dari Ms. Excel berikut ini.

MASALAH TRANSPORTASI

Pabrik	Gudang			
	A	B	C	D (Dummy)
W	20	5	8	0
H	15	20	10	0
P	25	10	19	0

Gambar 6.6.5 Data Distribusi Masalah Transportasi

Kemudian dalam pembuatan tabel serupa, di mana input dari tabel tersebut bukanlah biaya distribusi, namun jumlah distribusi. Tabel tersebut akan dibiarkan bernilai nol yang kemudian dapat diubah distribusinya menjadi solusi oleh *Excel Solver*. Perhatikan gambar berikut ini.

MASALAH TRANSPORTASI

TABEL BIAYA DISTRIBUSI

Pabrik	Gudang			
	A	B	C	D (Dummy)
W	20	5	8	0
H	15	20	10	0
P	25	10	19	0

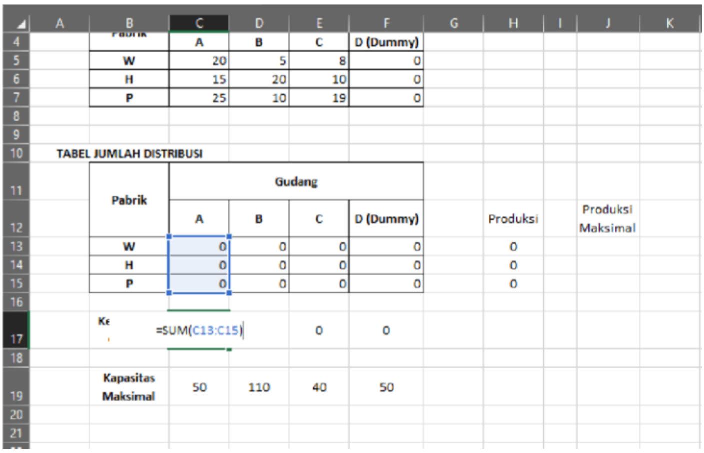
TABEL JUMLAH DISTRIBUSI

Pabrik	Gudang			
	A	B	C	D (Dummy)
W	0	0	0	0
H	0	0	0	0
P	0	0	0	0

Gambar 6.6.6 Tabel Biaya dan Jumlah Distribusi

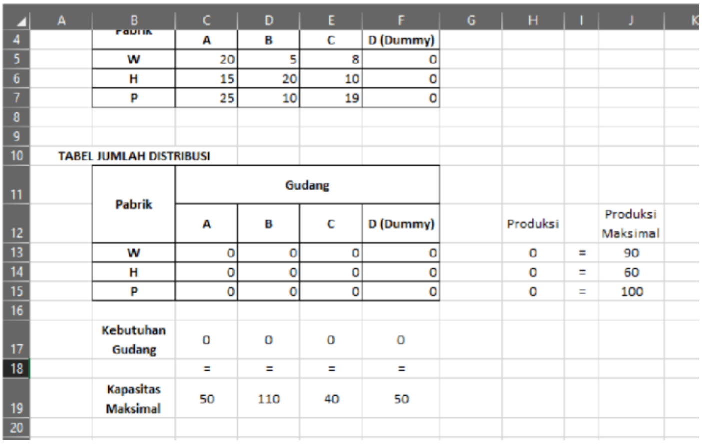
Kemudian buatlah kapasitas produksi pada soal dan kapasitas produksi yang diselesaikan oleh *Excel Solver* dalam bentuk kesamaan, seperti yang dilakukan pada penyelesaian metode simpleks sebelumnya. Begitu juga dengan kebutuhan gudang, dibuat dalam bentuk tabel kesamaannya.

Buatlah jumlah (SUM) dari kebutuhan gudang dan kapasitas maksimal serta produksi dan produksi maksimal seperti tampilan berikut ini sesuai dengan permasalahan yang ditanya. Perhatikanlah kolom dan baris yang berperan untuk dijumlahkan.



Gambar 6.6.7 Tabel Produksi Maksimal dan Kapasitas Maksimal

Agar jumlah produksi dapat dihitung banyaknya, kita akan menggunakan rumus menjumlahkan baris produksi, yaitu SUM(baris) pada tiap pabrik, yaitu W, H, dan P. Begitu juga dengan kebutuhan gudang, dapat menggunakan rumus penjumlahan tersebut.



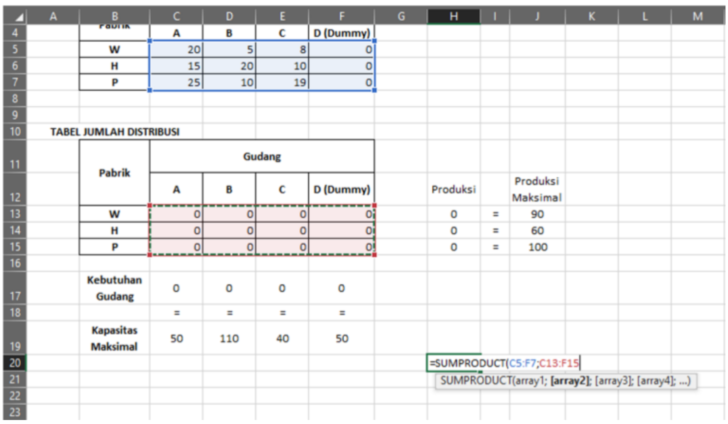
Pabrik	A	B	C	D (Dummy)
W	20	5	8	0
H	15	20	10	0
P	25	10	19	0

TABEL JUMLAH DISTRIBUSI

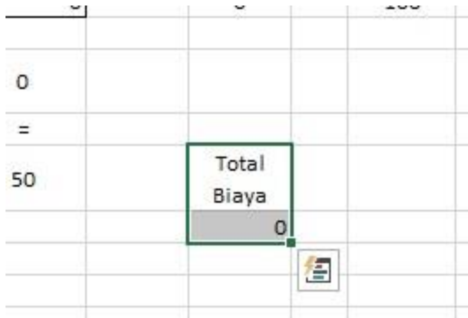
Pabrik	Gudang A	B	C	D (Dummy)		Produksi		Produksi Maksimal
W	0	0	0	0		0	=	90
H	0	0	0	0		0	=	60
P	0	0	0	0		0	=	100
Kebutuhan Gudang	0	0	0	0				
	=	=	=	=				
Kapasitas Maksimal	50	110	40	50				

Gambar 6.6.8 Tabel Produksi dan Kapasitas Maksimal

Sedangkan untuk total biaya, dapat dilakukan dengan menjumlahkan seluruh perkalian biaya dengan jumlah distribusi. Rumus yang digunakan adalah SUMPRODUCT(biaya dist.; jumlah dist.).

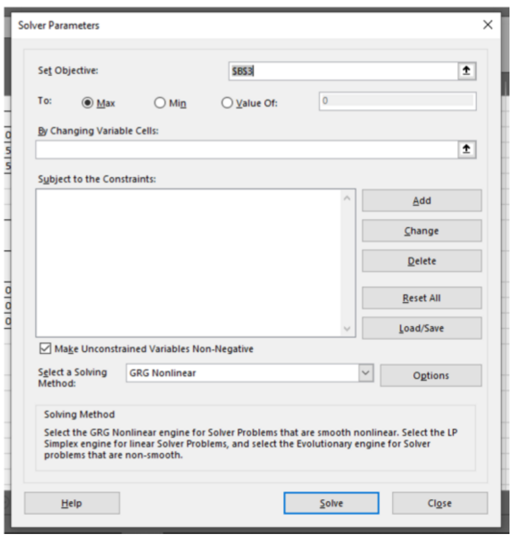


Gambar 6.6.9 Formula SUMPRODUCT



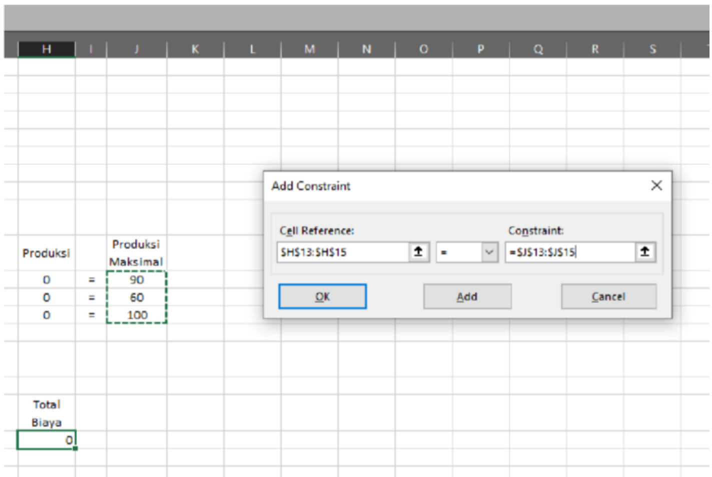
Gambar 6.6.10 Total Biaya dengan SUMPRODUCT

Setelah muncul kotak dialog *Excel Solver*, isikan *Set Objective* dengan kotak sel total biaya. Kemudian pilih *Min* yang berarti minimum untuk meminimalkan biaya distribusi. Isikan *By Changing Variable Cells* dengan jumlah distribusi pada tabel jumlah distribusi. Pemilihan tiap sel dapat dilakukan dengan klik sel tersebut atau *drag* seluruh bagian sel yang diinginkan. Jangan lupa untuk memberikan cek-lis kepada *Make Unconstrained Variables Non-Negative* dan memilih *Simplex LP* untuk *Select a Solving Method*.



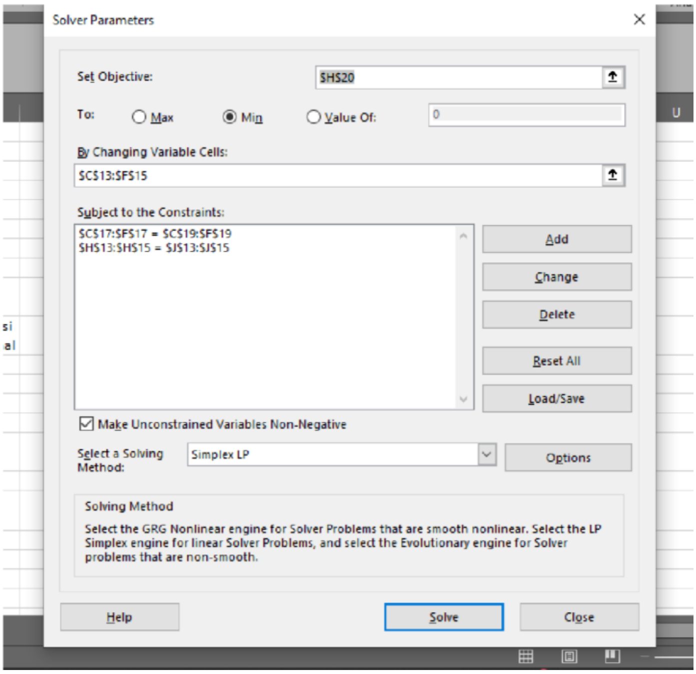
Gambar 6.6.11 Tampilan Kotak Dialog *Excel Solver*

Kemudian klik tombol *Add* untuk mengisi produksi maksimum sehingga muncul kotak dialog seperti yang ditunjukkan gambar berikut ini. Kemudian isikan kolom produksi pada *Cell Reference*. Sedangkan pada produksi maksimal isikan pada *Constrains*. Pilih tanda "=" di antara *Cell Reference* dan *Constrains*. Setelah itu, klik OK.



Gambar 6.6.12 Tampilan Kotak Dialog *Subject to the Constrains*

Berikutnya, masukkan kapasitas maksimum gudang dengan klik *Add*, lalu isi kebutuhan gudang pada *Cell Reference* dan kapasitas maksimal pada *Constrains*, kemudian ubah tandanya menjadi " = " lagi. Maka perhatikan tampilan pada bagian *Subject to the Constrains* yang sudah terisi dengan kapasitas gudang dan produksi maksimal untuk dikelola dalam *Excel Solver* ini. Pada tampilan kotak dialog tersebut harus terdapat 2 formula, yaitu seperti pada kebutuhan masalah transportasi ini.



Gambar 6.6.13 Tampilan Kotak Dialog *Solver Parameters*

Setelah semua terisi dengan baik, klik *Solve* untuk menyelesaikan soal tersebut, kemudian Ms. Excel akan menampilkan hasil penyelesaiannya dengan jumlah distribusi dan total biaya minimum yang diperlukan. Pada kotak dialog terakhir, pilih *Keep Solver Solution*, dan silakan memilih laporan yang dapat disajikan, seperti *Answer*, *Sensitivity*, dan *Limits* sesuai dengan yang diperlukan oleh pengguna. Kemudian pilih OK supaya memunculkan hasil seperti gambar berikut ini.

Pabrik	Gudang			
	A	B	C	D (Dummy)
W	20	5	8	0
H	15	20	10	0
P	25	10	19	0

TABEL JUMLAH DISTRIBUSI

Pabrik	Gudang				Produksi		Produksi Maksimal
	A	B	C	D (Dummy)			
W	0	60	30	0	90	=	90
H	50	0	10	0	60	=	60
P	0	50	0	50	100	=	100
Kebutuhan Gudang	50	110	40	50			
	=	=	=	=			
Kapasitas Maksimal	50	110	40	50	Total Biaya		
					1890		

Gambar 6.6.14 Hasil Penyelesaian Contoh 2

Perhatikan hasil perhitungan dengan menggunakan *Excel Solver* sama dengan hasil perhitungan manual dan PQM-QM. Hasil yang diperoleh pada biaya distribusi adalah 1890 (dalam ribuan rupiah).

676.Kegiatan Pembelajaran 7. Rangkuman

1. Model transportasi pada dasarnya merupakan sebuah program linear yang dapat dipecahkan oleh metode simpleks yang biasa. Tetapi, strukturnya yang khusus memungkinkan pengembangan sebuah prosedur pemecahan, yang disebut teknik transportasi, yang lebih efisien dalam hal perhitungan.

2. Metode penyelesaian masalah transportasi antara lain, Metode Sukia-sukaba, Metode Biaya Terkecil, dan Vogel's Aproximation Method (VAM).

3. Model matematika untuk masalah transportasi secara umum:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

dengan batas

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_1; untuk\ i = 1,2,3, \ldots\ldots, m$$

dengan

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j\,; untuk\ i = 1,2,3, \ldots \ldots, n.$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

4. Tahapan penentuan hasil optimal:
   a. Tertutup(biasanya jumlah sel genap)
   b. Tidak berarah miring/ diagonal
   c. Jumlah sel yang terisi pada *loop* tersebut + 1 = jumlah sudut pada *loop*

5. Masalah transportasi akan lebih mudah dipecahkan dengan menggunakan aplikasi PQM-QM atau dengan *Excel Solver*. Kedua perangkat lunak tersebut sangat membantu dalam menyelesaikan permasalahan pemrograman linear.

‘

6.8.Kegiatan Pembelajaran 8. Latihan Soal Mandiri

1. Selesaikanlah permasalahan transportasi di bawah ini! Biaya, sumber, dan tujuan terdapat pada tabel di berikut ini.

Sumber \ Tujuan	P	Q	R	S	Kapasitas Sumber
A	4	3	3	1	8
B	3	2	4	8	11
C	5	4	6	3	16
Kebutuhan Tujuan	4	9	9	13	55

2. Empat perusahaan elektronik I, II, III, IV memproduksi berturut-turut 950, 300, 1350, dan 450 set barang elektronik setiap bulannya. Keempat pabrik tersebut mempunyai pelanggan A, B, C, D, dan E yang setiap bulannya memerlukan berturutturut 250, 1000, 700, dan 450 set barang elektroniknya. Biaya transportasi per set ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

Sumber \ Tujuan	A	B	C	D	E	Kapasitas Sumber
I	12	16	21	19	32	950
II	4	4	9	5	24	300
III	3	8	14	10	26	1350
IV	24	33	36	34	49	450
Kebutuhan Tujuan	250	1000	700	650	450	

3. Tiga pabrik barang dengan kapasitas 90 ton, 60 ton dan 50 ton hendak mengirim barang ke tiga kota dengan kebutuhan masing-masing kota adalah 50 ton, 110 ton dan 40 ton. Biaya pengiriman (ribuan)

dari dari pabrik ke kota disajikan dalam tabel berikut.

Pabrik	Kota		
	A	B	C
1	20	5	8
2	15	20	10
3	25	10	19

Berapakah total biaya optimal yang harus dikeluarkan perusahaan dalam memenuhi kebutuhan ketiga kota tersebut ?

4. Carilah pola alokasi distribusi yang mengakibatkan biaya transportasi minimum!
   Suatu masalah transportasi di gambarkan dalam tabel berikut ini.

Tujuan / Sumber	1	2	3	4	Kapasitas Sumber
I	200	750	300	450	12
II	650	800	400	600	17
III	400	700	500	550	11
Permintaan	10	10	10	10	

   Tentukan tabel simpleks awal dengan menggunakan metode Sukia-sukaba, metode harga terkecil, dan metode VAM. Kemudian bandingkan biaya distribusi untuk ketiganya, manakah yang paling kecil?

5. Seorang kepala departemen universitas memiliki lima instruktur untuk ditugaskan ke-4 program yang

berbeda. Semua instruktur telah mengajarkan kursus di masa lalu dan telah dievaluasi oleh peserta program tersebut. peringkat untuk setiap instruktur pada kursus telah ditunjukkan dalam tabel berikut (skor sempurna adalah 100). Kepala departemen ingin mengetahui tugas optimal dari instruktur untuk kursus akan memaksimalkan evaluasi ratarata keseluruhan. Instruktur yang tidak ditugaskan untuk mengajar kursus akan ditugaskan untuk ujian kelas. Pecahkan maslah ini menggunakan metode Sukia-sukaba.

Instruktur	Program Pelatihan			
	A	B	C	D
1	80	75	90	85
2	95	90	90	97
3	85	95	88	91
4	93	91	80	84
5	91	92	93	88

6. Suatu masalah transportasi di gambarkan dalam tabel berikut ini.

Tujuan / Sumber	1	2	3	4	Kapasitas Sumber
I	200	750	300	450	12
II	650	800	400	600	17
III	400	700	500	550	11
Permintaan	10	10	10	10	

Buatlah TSA yang menggunakan VAM dengan menggunakan MODI untuk mendapatkan solusi optimum distribusinya.

7. Sebuah perusahaan mempunyai 3 buah mobil truk yang digunakan untuk membawa bahan baku yang masing-masing mobil tersebut berlokasi di gudang 1, 2, dan 3 dengan kapasitas muatan per bulan masing-masing mobil: Mobil 1 = 1.000 ton
Mobil 2 = 1.200 ton
Mobil 3 = 800 ton

   Perusahaan ini mendapat order dari 3 buah pabrik yang berlokasi di kota A, B, dan C yang mana masing-masing memerlukan:
Pabrik A = 1.400 ton
Pabrik B = 700 ton
Pabrik C = 900 ton

   Tentukan biaya distribusi minimum yang dapat dikeluarkan oleh perusahaan (gunakan PQM-QM atau *Excel Solver*).

8. Suatu perusahaan tekstil mempunyai 3 pabrik di 3 tempat yang berbeda, yaitu P, Q, dan R dengan kapasitas masing-masing 60, 80, dan 70 ton per bulan. Produk kain yang dihasilkan dikirim ke-3 lokasi penjualan, yaitu J, K, dan L dengan permintaan penjualan masing-masing 50, 100, dan 60.

   Ongkos angkut dari masing-masing pabrik ke lokasi penjualan adalah sebagai berikut (dalam ribuan rupiah):

	J	K	L
P	5	10	10
Q	15	20	15
R	5	10	20

Berapakah biaya distribusi minimum yang akan dibayarkan oleh perusahaan?

9. Selesaikanlah permasalahan transportasi di bawah ini dengan menggunakan aplikasi PQM-QM.

   Namun, sebelumnya buatlah TSA sebagai acuan pengerjaan secara manual untuk bisa mendapatkan hasil yang valid.

   Oleh karena itu, perhatikanlah tabel berikut ini dengan seksama.

Tujuan / Sumber	P	Q	R	S	Kapasitas Sumber
A	4	3	3	1	8
B	3	2	4	8	11
C	5	4	6	3	16
Kebutuhan Tujuan	4	9	9	13	55

10. Sebuah perusahaan mempunyai 5 buah mobil truk yang digunakan untuk membawa bahan baku yang masing-masing mobil tersebut berlokasi di gudang 1, 2, 3, 4, dan 5 dengan kapasitas muatan per bulan masing-masing mobil: Mobil 1 = 1.000 ton
    Mobil 2 = 1.200 ton
    Mobil 3 = 800 ton
    Mobil 4 = 950 ton
    Mobil 5 = 750 ton

    Perusahaan ini mendapat order dari 5 buah pabrik yang berlokasi di kota A, B, C, D, dan E yang mana masing-masing memerlukan:
    Pabrik A = 1.400 ton

Pabrik B = 700 ton
Pabrik C = 900 ton
Pabrik D = 600 ton
Pabrik E = 1.100 ton

Tentukan biaya distribusi minimum yang dapat dikeluarkan oleh perusahaan (gunakan PQM-QM atau *Excel Solver*)

MODUL 7

KONSEP PENUGASAN DALAM PEMOGRAMAN LINEAR

Capaian Pembelajaran	Uraian materi
Mahasiswa diharapkan mampu memahami dengan baik dan benar konsep penugasan dalam dalam bidang pemograman linear dan mempersentasekannya di depan kelas.	1. Konsep dasar penugasan dalam pekerjaan 2. Materi pengunaan penugasan dalam metode hungaria

TUJUAN PEMBELAJARAN
1. Mahasiswa mampu memahami notasi atau konsep dasar dari materi penugasan dalam bidang apapun 2. Mahasiswa mampu mengerti materi penugasan dalam matode hungaria dan excel solver 3. Mahasiswa mampu mengerti dan memahami langkah dan cara yang harus dilakukan dalam mengerjakan tugas dalam penugasan 4. Mahasiswa mampu mengerjakan soal-soal yang begeliut dalam materi penugasan 5. Mahasiswa mampu mengerti dan memahami langkah dan cara yang harus dilakukan dalam mengerjakan tugas dalam penugasan 6. Mahasiswa mampu mengerjakan soal-soal yang begeliut dalam materi penugasan

MODUL 7

KONSEP PENUGASAN DALAM PEMOGRAMAN LINEAR

7. 1 Kegiatan Pembelajaran 1. Penugasan Pertama

Penugasan adalah sebuah pekerjaan yang tidak lazim lagi dalam pekerajaan, dalam pekerjaan penugasaan diangap sebagai sumber dari pekerjaan tersebut sedangkan pekerjaan dianggap sebagai tujuan dari penugasan tersebut yanag dimana keterkaitan kedua tersebut sangatlah nyata , yaitu disertiap sumber banyak dan tujuan adalah sama. Dimana setiap sumber hanya meghasilkan satu dan begitu juga dengan tujuan hanya memerlukan satu. Masalah penugasan (*assignment problem*) bertujuan untuk memecahkan suatu persoalan distribusi barang, misalnya dalam suatu pekerjaan yang dapat dikerjakan oleh satu pekerja saja dengan harapan dapat meminimalkan biaya yang dikeluarkan oleh suatu perusahan atau dapat memaksimalkan keuntungan yang akan didapatkan oleh suatu perusahaan. Sedangkan, masalah transportasi (*transportation problem*) bertujuan untuk memecahkan suatu persoalan distribusi barang dengan jumlah persediaan dan permintaan yang dikeluarkan oleh suatu perusahaan dengan tujuan yaitu meminimumkan biaya atau memaksimalkan keuntungan.

Dengan pengertian metode penugasan atau assignment method adalah salah satu bagian dari program linear, yang dimana untuk menglokasikan pekerjaan agar menghasilkan sesuatu yang optimal Hasil yang optimal dapat berupa biaya yang paling minimal, keuntungan yang paling maksimal, maupun waktu yang paling minimum, dan yang lain-lain. Alat analisis metode ini menggunakan pendekatan metode Hungarian.
Metode ini bersifat saling meniadakan, artinya apabila seseorang telah mengerjakan suatu pekerjaan tertentu maka tidak mungkin untuk mengerjakan pekerjaan lain (1 orang 1 pekerjaan) Permasalahan yang dapat diselesaikan melalui metode penugasan meliputi :

1. Masalah Maksimasi

Pengalokasian tugas kepada sumber daya sehingga diperoleh biaya total minimum. Menyangkut masalah keuntungan, penjualan, kepuasan.

2. Masalah Minimasi

Pengalokasian tugas kepada sumber daya sehingga diperoleh keuntungan yang maksimum Menyangkut masalah biaya produksi, waktu tempuh, upah, dll.

Terdapat juga persyaratan dalam metode penugasan yaitu dimana jumlah baris dalam tabel penugasan harus sama dengan jumlah kolomnya (jumlah baris = jumlah kolom) Dengan kata lain, jumlah pekerjaan harus sama dengan jumlah pelamar atau karyawan nya.Bagaimana jika terdapat kelebihan pekerjaan atau kelebihan jumlah pelamar. Jika terjadi hal demikian, maka diperlukan variabel tambahan yaitu *dummy,* yang dapat ditambahkan pada baris atau kolom tabel penugasan. Variable dummy berfungsi untuk menunjukkan pekerjaan mana yang tidak diisi siapa-siapa jika terjadi kelebihan pekerjaan.Serta karyawan mana yang tidak memperoleh pekerjaan jika terjadi kelebihan jumlah pelamar. Untuk lebih jelas tentang *dummy* dalam metode penugasan dapat dilihat pada :

Dummy dalam Metode Penugasan Namun tidak hanya mengunakan metode tersebut saja dapat menyelasaikan penugasan tersebut , dengan mengunakan metode homogaria (Hungarian method) merupakan salahsatu teknik untuk pemecahan yang tersedia untuk menyelsaikan masalah-masalah yang ada dalam penugasan tersebut, yang dimana metode ini di kembangkan oleh ahli matematika berkebangsaan hungaria yang bernama D. konig pada T ahun 1916 , makanya disebut metode ogaria. Yaitu berasal dari asal akhi yang membuat.

Untuk mengunakan metode ini jumlah sumber-sumber harus sama dengan jumlah tugas , untuk dapat menyeleselesaikan dan selain itu setiap sumber hanya ditugas kan untuk satu tugas saja, masalah penugasan akan mencakup sejumlah n sumber yang memiliki tugas. Karena berpasangan satu-satu . maka dalam satu kasus akan terdapat n! (n factorial) penugasan ini dapat di jelaskan dengan mudah dalam bentuk matriks segi . yang dimana baris pada matriks menunjukan sumber-sumber dan kolom pada matriks menunjukan tugas-tugas (Eliyani 2007).

7.2. Kegiatan Pembelajaran 2. Penugasan Seimbang Algoritma Hongaria

Masalah penugasan dapat dikerjakan secara matematis yang dimana dengan mengunakan program linear untuk menentukan minumunkan dan maksimumkan sebuah data penugasan tersebut. Dengan mengunakan batas dengan keteteapan yang telah ditentukan yang telah diketahui sebelumnya, yang dimana masalah minimasi dapat diselasaikan dengan ,aksimasi , dimana elemen-elemen matriks menunjukan tingkat keuntungan (indeks, produktifitas) dengan mengetahui maksimum dan minimum kita dapat memenuhi persyaraatan untuk penyelsaian mengunakan metode hongaria dengan matriks segi empat bujur sangkar , jika kita mendapatkan jumlah pekerjaan lebih besar dari jumlah karyawan / maka kita dapat menambahkan karyawan semu / yang dimaksud dengan kryawan semu atau biaya semu adalah sama dengan nol karena tidak akan terjadi biaya jika seuatu pekerjaan ditugaskan ke karywan semu. Atau bisa dengan kata lain bahwa sebenarnya pekerejaan tersebut tidak terlaksana dan jika sebalikanya makan akan ditambahkan dengan kryawan semu (*dummy job*)

Persyaratan dalam menggunakan metode Hungarian, yaitu :

1. Jumlah kolom (sumber daya) harus sama dengan jumlah baris (tugas) yang harus diselesaikan.
2. Setiap sumber daya hanya dapat mengerjakan satu tugas.
3. Apabila jumlah sumber tidak sama dengan jumlah tugas atau sebaliknya, maka ditambahkan variabel *dummy worker* atau *dummy job.*

Prinsip dari metode Hongaria adalah dengan melakukan manipulasi terhadap matriks biaya yang diberikan. Manipulasi tersebut adalah operasi pengurangan elemen tiap baris dengan elemen minimum barisnya. Kemudian melakukan operasi pengurangan elemen tiap kolom dengan elemen minimum kolomnya. Setelah itu, melakukan pembuatan garis yang melalui elemen-elemen “0”. Selanjutnya, dicari elemen minimum pada submatriks yang tidak dilewati garis. Akhirnya, elemen minimum tersebut dikurangkan dari setiap elemen pada submatriks yang tidak dilewati garis dan ditambahkan pada elemen yang dilalui dua garis. Manipulasi terhadap matriks biaya tersebut dilakukan beberapa kali sampai diperoleh matriks biaya optimum, yang dapat diindetifikasi dengan banyaknya garis (yang melalui elemen "0") tepat sama dengan n

7.2.1 Langkah-langkah pengajaran

1. Langkah pertama untuk membuat tabel penugasan

Tabel penugasan adalah tabel berbentuk segi empat biasa, hanya seja sesuai dengan persyaratan jumlah harusnya sama dengan dengan jumlah kolom.

Tabel 7.1 tabel awal penugasan

pekerjaan / pekerja	Accounting	Finace	Marketing	Engineer
ANEL	20	30	40	50
IKA	40	15	30	20
IMA	70	60	60	60
MARIA	30	50	50	40

2. Langkah ke dua, selisihkan seluruh angka pada setiap baris

Langkah yang selanjutnya adalah mengselisihkan masing angka pada setiap baris dengan angka terkecil/terbesar pada baris tersebut. Dimana jika persoalan maksimasi maka angka pada setiap baris diselisih dengan angka terbesar. Sedangkan jika persoalaan minimasi makan angka pada setiap baris diselisih dengan angka terkecil. Sehingga dengan mengselisihkan angka-angka tersebut baik dengan maksimasi maupun dengan minimasi. Setidakya terdapat satu angka nol pada setiap baris.

3. Langkah ke tiga selsihkan seluruh angka pada setiap kolom

Sesudah kita menyelsaikan langkah yang kedua maka kita akan melanjutkan denga langkah berikutnya yang dimana kita meselisihkan angka-angka pada setiap kolom persamaan baru yang talah didapat. Namun disini mempunyai perbedan dengan langkah yang sebelumnya yang dimana jika ada minimasi diselisihkan dengan angka terkecil, dan angka

maksimasi diselisihkan dengan angka terbesar.dan dalam langkah ini juga seamua angka pada masing-masing kolom akan diselisihkan dengan angka tekacil pada kolom tersebut maksimasi maupun minimasi. Dan akan menghasil kan angka nol dari setiap kolomnya.

4. Langkah ke empat buatlah garis

Dalam langkah yang ke empat ini kita diajarkan cara membuat garis baik vertical maupun horizontal untuk mencoret angka 0 dalam tabel penugasan tersebut. Dengan cara mencoret angka yang nol dengan garis vertical maupun horizaontal tersebut dengan mengingt aturan dengan cara mencret angka 0 terbanyak terlebih dahulu. Dengan catatan jika kita mendapatkan garis yang memiliki jumlah nol yang sama maka coret dengan jumlah terbesar (ditambahkan semua angka yang dicoret) untuk memaksimasi atau coret garis dengan jumlah kecil untuk maksimasi.

5. Langkah yang ke lima hitung jumlah garis

Setelah kita membuat garis dari langkah yang ke empat maka di langkah yang kelima kita diajaarkan untuk menghitung jumlah garis tersebut yang dimana jika **jumlah garis= jumlah baris/kolom** . maka tabel penugasan tersebut sudah optimal

6. Langkah yang ke enam mengoptimal tabel

Jika kita sudah mendapatkan tabel yang optimal maka kita bisa ke langkah yang selanjutnya dimana dapat melengkapi dengan cara seperti berikut ini :

1. Menentukan angka yanga terkecil dari angka-angka yang tida terkena garis
2. Mengurangi seluruh angka yang tidak terkena garis dengan angka terkecil tersebut.
3. Menambahkan angka yang terkecil dengan angka yang terkena perpotongan garis (terkena 2 garis)
4. Dan kemudian angka yanga hanya terkena 1 garis hilainya akan tetap.

Catatan untuk langkah yang ke enam , setelah kita menyelesaikan nya maka kita dapat menglangi langkah ke -4 sampai dengan tabel penugasan optimal

7. Langkah ke tujuh penentuan tugas

Setelah kita mendapatkan tabel yang optimal , langkah setrusny kita dapat menentukan pekerja pada tugas tertentu melihat angka nol (0) yang telah menunjukan pekerjaan yang ppaling efesian untuk pekrjaannya.

Tabel 7.1.2 penugasan berdasarkan asal dan tujuan

		Tujuan		
		Singkawang	Medan	Jakarta
Asal	Pontianak	30	36	40
Asli	Bandung	20	25	29
	Padang	27	24	22

7.3 Kegiatan Pembelajaraan 3. Penugasan Masalah Kasus Maksimum

Penugasan mengunakan masalah maksimum hamper sama dengan penugasan mengunakan masalah manimasi , penugasan masalah maksimum dapat dikerjakan mengunakan metode hongaria .tidak berbeda jauh dengan masalah maksimasi perbedaannya dapat kita lihat dari pengurangan dengan bilangan terecil dan barisdan kolom diubah menjadi pemgambilan selisih dari bilangan terbesar baris dan kolomnya . kemudian dapat kita selesaikan dengan cara yang serupa dengan masalah minimasi (jaskowski & tomczak 2014)

Salah satu perusahaan terkenal diindonesia hendak merekrut 4 pekerja untuk menempati sebuah jabatan yang masih kosong . berikut adalah data tebel mengenai pekerjaan dari posisi yang ada.

Tabel 7.2.1 awal penugasan

pekerjaan / karyawan	Accounting	Finace	Marketing	Engineer
ANEL	950	850	750	840
IKA	985	860	785	820
IMA	970	840	770	830
MARIA	900	870	760	850

Berdasarakan data diatas .kita dapat menyelesaikan tugaspenugasan dari salah satu perusahaan Indonesia untuk menentukan penugasan yang tepat agar karyawan dapat mendapat kepuasan maksimum. Atau maksimasi.

1. Langkah pertama.

Langkah pertama adalah kita membuat tabel , namun tabel sudah dibuat dalam soal atau dalam data tersebut. Maka kita melanjutkan dengan langkah ke 2.

2. Langkah ke dua

Dalam tabel penugasan di atas kita dapat melihat bahwa dalam tabel tersebut mengunakan kasus maksimasi . sehingga setiap baris harus diselisih dengan angka terbesar pada baris tersebut . kita dapat membedakan kasus maksimasi dan kasus minimasi.

Catatan : kita dapat mengambil contoh dengan misalkan pada baris karyawan ANEL. Semua angka dalam baris tersebut harus di dengan angka terbesar 950. Dan karna ini sealisih maka hasil tersebut tidak akan bernilai negative. Dan selisihkan juga dengan baris IKA,IMA,dan MARIA. Maka tabel penugasan akan bebentuk seperti dibawah ini:

pekerjaan / karyawan	Accounting	Finace	Marketing	Engineer
ANEL	0	100	200	110
IKA	0	125	205	165
IMA	0	130	200	140
MARIA	0	30	140	50

Kita dapat membedakan maksimasi dan minimasi dari cara melihat langkah pengerjaan penugasan ini, jika dari soalnya minimasi makan kita dapat melihat angka pada setiap baris diselisihkan dengan angka terkecil.

3. Langkah ke tiga

Pada langkah yang ketiga ini kita dapat meselisihkan angka-angka yang dietiap kolom dengan angka yang paling terkecil pada masing-masing kolom.jika misalkan dalam koloh sudah terdapat angka nol maka tidak aka nada perubahan,kita dapat menyimpulkan sendiri jika angka terkecil adalah nol makan todak aka nada perubahan karana sesuatu aatau angka apa saja jika di selisihkan dengan angka nol maka hasilnya akan tetap sama yaitu nol. Kita dapat melihat contoh dari kolom acconting yang dimana semua kolom acconting terdapat angka nol maka tidak aka nada perubahan. Sedangkan kolom-kolom yang lain terdapat angka yang terkecil yang dimana di kolom finance ada angka terkecil yaitu angka 30.dan lakukan hal yang sama dengan kolom seterusnya.

Tabel 7.2.2 penugasan setelah melakukan langkah yang ke 3

pekerjaan / karyawan	Accounting	Finace	Marketing	Engineer
ANEL	0	70	60	60
IKA	0	95	65	115
IMA	0	100	60	90
MARIA	0	0	0	0

Dari tebel tersebut kita dapat melihat sudah ada angka nol dari setiap kolom dan baris maka kita akan melakukan pengujian.

4. Langkah ke empat

Dilangkah yang ke empat ini kita dapat melakukan pengujian dengan membuat garis vertical /horizontal pada angka nol dengan jumlah yang minimal seperti atutan yang telah dijelaskan diatas.

pekerjaan / karyawan	Accounting	Finace	Marketing	Engineer
ANEL	0	70	60	60

IKA	0	95	65	115
IMA	0	100	60	90
MARIA	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

5. Langkah ke 5

Dengan meghitung garais yng kita buat kita dapat mendapatkan jumlah garis hanya 2 sedang kan dalam tabel tersebut kita dapat melihat ada 4 garis/kolom karena **jumlah baris/kolom ,** maka dipelukan perhitungan lebih lanjut.

6. Langkah yang ke 6

Dengan cara melakukan pengoptimalan tabel dengan langkah-langkah dan aturan seperti yang telah dijelaskan dilangkah-langkah sebelumnya

Catatan : angka terkecil yang tidak terkena garis pada tabel tersebut dapat kita lihat adalah angka 60 makan dengan itu kita dapat mengurangi angka yang tidak terkena garis dengan angka 60 dan angka yang terkena garis 2 kali(perpotongan garis) ditambah 60 dan jika angka yang terkena garis 1 kali niainya akan tetap.

Tabel 7.2.4 setelah melakukan pengarisan baris/kolom.

pekerjaan / karyawan	Accounting	Finace	Marketing	Engineer
ANEL	0	10	0	0
IKA	0	35	5	55
IMA	0	40	0	30
MARIA	0	0	0	0

Dengan melakukan langkah yang ke 4 kita dapat membuat garis kembali untuk menguji apakah tabelnya sudah optimal atau belum.

pekerjaan / karyawan	Accounting	Finace	Marketing	Engineer
ANEL	0	10	0	0
IKA	0	35	5	55
IMA	0	40	0	30
MARIA	0	0	0	0

Jika dilihat **jumlah garis = jumlah baris/kolom**
Maka tabel diatau dapat dinyatakan sebagai optimal yang neghasilkan kepuasan maksimum(kasus maksimasi)

Catatan : jika kita mendapatkan soal mainimasi , caranya sama dengan langkah diatas. Yang dapat membedakan terdapat pada langkah ke 2 karena pada kasus minimasi diselisihkan dengan angka terkecil.

7. Langkah ke tujuh

Di langkah yanag ke tujuh ini adalah langkah penentuan tugas dengan melihat angka nol pada tabel penugasan. Yang dimana kita dapat melihat pekerja mendapat nilai nol pada pekerjaan, menandakan nilai yang optimal

Tabel terakhir penentuan tugas

pekerjaan / karyawan	Accounting	Finace	Marketing	Engineer

ANEL	0	10	0	0
IKA	0	35	5	55
IMA	0	40	0	30
MARIA	60	0	0	0

Kesimpulan :

1. ANEL berkerja sebagai **accounting,marketing,engineer**
2. IKA bekerja sebagai **accounting**
3. IMA bekerja sebagai **accounting, marketing**
4. MARIA bekerja sebagai **financial, marketing, engineer**

Dari kesimpulan hasil tabel kita dapat melihat dan menarik kesimpulan yang dapat kita ingan dimana 1 pekerja hanya dapat mendapat pekerjaan 1 saja yang dimana dikasus ini hanya IKA , maka pekerjaan accounting sudah tidak mungkin diisi oleh para pekerja yang lain, maka IMA mungkin hanya dapat bekerja sebagai marketing dan karena marketing dan accounting sudah tidak dapat diisi dengan pekerja lain maka ANEL kemungkinan akan bekerja sebagai engineer sama juga dengan halnya dengan MARIA akan bekerja sebagai finance

Kesimpulan :

1. ANEL bekerja sebagai **ENGINEER**
2. IKA bekerja sebagai **ACCOUNTING**
3. IMA bekerja sebagai **MARKETING**
4. MARIA bekerja sebagai **FINANCE**

Dari hasil penugasan terakhir kita dapat melihat dengan tebel awal dimana

Karyawan	Pekerjaan	Tingkat kepuasan
ANEL	ENGINEER	840

IKA	ACCOUNTING	985
IMA	MARKETING	770
MARIA	FINANCE	870
TOTAL		3.465

7.4 Kegiatan Pembelajaraan 4. Penugasan Tidak Seimbang

Penugasan tidak seimbang seperti halnya masalah transportasi. Masalah penugasan bisa saja tidak seimbang dimana suplay lebih besar daripada kebutuhan atau sebaliknya kebutuhan lebih banyak dari pada suplai. Masalah penugasan juga bisa memiliki penugasan yang dilarang seperti pada masalah transportasi. Kedua kondisi unik tersebut diselesaikan dengan prosedur yang sama dengan masalah transportasi. Dalam masalah penugasan seringkali kita mendapatkan masalah penugasan tidak seimbang maka dari itu kita dapat membuat tabel penugasan untuk megoptimalkan sebuah data tersebut. Sama halnya dengan kasus seimbang namun ika kita mendapkan jumlah yang tidak sama maka kita dapat menambahkan variable DUMMY baris (kasus pekerja < pekerjaan) atau DUMMY kolom (kasus pekerja > pekerjaan) atau mengalokasikan dengan bilangan besar-M

Contoh soal :

Di daerah kota DKI Jakarta memiliki 5 sekolah yang diangap sekolah terbaik se DKI Jakarta , namun jarak tempuh seakolah tersebut rawan macet , untuk mengatasi macet dan biaya transportasi siswa untuk menuju sekolah tersebut pemerintah mengambil tindakan peraturan dalam kebijakan dalam pebagian wilayah siswa dengan sekolah

Tabel 7.4.1 waktu tempuh dan populasi siswa pada suatu kota

	Waktu tempuh rumah – sekolah (menit)	

Bagian Daerah	SMAN A	SMAN B	SMAN C	Populasi siswa
utara	20	30	35	220
barat		20	30	310
timur	50	45	35	270
Selatan	60	75	55	315

Jika dalam dalam data tersebuh SMAN A tidak diperbolehkan menerima siswa dari kota bagian Utara dikarenakan ketidak sediaan jalur kendaraan umum tentukan alokasi pembagian sekolah terhadap daerah diatas untuk wilayah tempuh minimal.

Penyelesaian :

Dari data dan solah penyelesaian di atas kita dapat menarik kesimpulah bahwa penugasan tersebut adalah penugasan tidak seimbang. Dengan demikian kita dapat membuah daearah DUMMY pada kota tersebut dan mengubah waktu tempuh dari kota bagian Utara ke SMAN A menjadi bilangan besar –M..

Catatan :

semangkin banyak siswa yang memilih untuk menuju suatu sekolah tertentu dapaat berakibat juga untuk waktu tempuh yang semangkin bertambah. Dengan demikian kita dapat membuat tabel dengan terlebih dahulu untuk mengalihkan populasi siswa terhadap waktu tempuh .

Bagian Daerah	Waktu tempuh rumah- sekolah (menit)			
	SMAN A	SMAN B	SMAN C	DUMMY
utara	M	6600	7700	0

barat	10850	6200	9300	0
timur	13500	12150	9450	0
Selatan	18900	23625	17325	0

Dari data tabel diatas kita dapat mengerjakan langkah seterusnya dengan mengunakan metode hongaria . yaitu dengan mengurangi setiap baris dengan nilai terkecil pada baris tersebut.

M	6600	7700	0
10850	6200	9300	0
13500	12150	9450	0
18900	23625	17325	0

Kemudaian kita dapat mengurangkan setiap kolom dengan nilai terkecil pada kolom.

M-10850	400	0	0
0	0	1600	0
13500	5950	1750	0
18900	17425	9625	0

Sesuai dengan langkah seterusnya kita dapat membuat garis pada baris atau kolom yang memiliki angka nol dan kita mendapatkan 3 garis .

M-10850	400	0	0
0	0	1600	0
13500	5950	1750	0
18900	17425	9625	0

Langkah yang berikutnya kita dapat mengurangi sel yang tidak di garis/ dicoret dengan bilangan terkecil diantara sel-sel tersesbut , dan kita dapat menambahkan bilangan terkecil tersebut pada setiap persilngan 2 garis.

M-10850	400	0	1750
0	0	1600	1750
900	4200	0	0
6300	15675	9625	0

Namun dalam tabel tersebut kita sebenarnya dapat membuat 3 garis paling sedikit untuk menutupi angka nol yang belim sama jumlah baris atau kolom, sehingga kita dapat mengulangi langkah pengurangan dengan bilangan terkecil pada bilangan yang tercoret/tergaris .

M-10450	0	0	1750
0	0	2000	2150
500	3800	0	0
5900	15275	7875	0

Dalam tabel tersebut kita dapat melihat bahwa kita telah mendapatkan garis minimal untuk mencoret sel dengan isi bilangan nol sebanyak 4 garis . dapat kita simpulkan kita telah menyelsaikan proses penugasan optimum, dengan penugasan seperti dibawah ini :

M-10450	0	0	1750
0	0	2000	2150
500	3800	0	0

5900	15275	7875	0

Kesimpulan :

1. Kota bagian Utara diarahkan untuk menuju SMAN B
2. Kota bagian Barat diarahkan untuk menuju SMAN A
3. Kota bagian Timur diarahkan untuk menuju SMAN C
4. Kota bagian selatan tidak memiliki aturan khusus , karena tabel tersebut mengarah pada variable DUMMY.

7.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Masalah Penugasan Dengan Excel

Penugasan dengan excel solver adalah penugasan yang pendataan mengunakan aplikasi , penyelesaian masalah dengan mengunakan POM-QM merupakan penyelesaian yang diangap sangat mudah, dengan cara memilih model modul assignment dan kemudian input data sesuai dengan permasalahan den kita dapat megklik solve. Penyelesain masalah mengunakan axcel solver bisa dikatakan penyelesaian penugasan yang cukup unik tersendiri yang tidak sesederhana POM-QM, dan beberapa pernyataan penguna yang mengerjakan penugasan menyatakan mengunakan aplikasi excel solver lebih mudan dan nyaman untuk dipahami dibandingkan dengan POM-QM.

Masalah penugasan dengan aplikasi excel solver hampir sama dengan dengan pengunaan penyelesaian mengunakan transportasi .hanya berbedan dibagian supply (sumber) dan demand (tujuan) bernilai 1 .

7.6 Kegiatan pembelajara 6. Rangkuman

Dalam tugas penugasan ini kita dapaat menarik keimpulan bahwa bahawa penyelesaian penugasan mengunakan metode Hungarian sangatlah mudah dan dapat dipahami dan kita dapat menyelesaikan masalah maksimasi dan moinimasi mengunakan metode yang sama yaitu mengunakan metode Hungarian yang dimana jika kita mendapatkan melihat hasil sudah optimal atau tidak dengan melihat apakah seimbang apakah tidak seimbang. Masalah penugasan dapat dikerjakan secara matematis yang dimana dengan mengunakan program linear untuk menentukan minumunkan dan maksimumkan sebuah data penugasan tersebut. Dengan mengunakan batas dengan keteteapan yang telah ditentukan yang telah diketahui sebelumnya, yang dimana masalah minimasi dapat diselasaikan dengan ,aksimasi , dimana elemen-elemen matriks menunjukan tingkat keuntungan (indeks, produktifitas) dengan mengetahui maksimum dan minimum kita dapat memenuhi persyaraatan untuk penyelsaian mengunakan metode hongaria dengan matriks segi empat bujur sangkar , jika kita mendapatkan jumlah pekerjaan lebih besar dari jumlah karyawan / maka kita dapat menambahkan karyawan semu / yang dimaksud dengan kryawan semu atau biaya semu adalah sama dengan nol karena tidak akan terjadi biaya jika seuatu pekerjaan ditugaskan ke karywan semu. Atau bisa dengan kata lain bahwa sebenarnya pekerejaan tersebut tidak terlaksana dan jika sebalikanya makan akan ditambahkan dengan kryawan semu (*dummy job*) Dan kita juga dapat menyelesaikan masalah penugasan mengunakan Excel solver yang dimana hamper sama dengan cara Masalah penugasan dengan aplikasi excel solver hampir sama dengan dengan pengunaan penyelesaian mengunakan transportasi hanya berbedan dibagian supply (sumber) dan demand (tujuan) bernilai 1

7.7. Kegiatan Pembelajaran 7. Diskusi Kelompok

1. Salah satu perusahaan terkenal diindonesia hendak merekrut 4 pekerja untuk menempati sebuah jabatan yang masih kosong . berikut adalah data tebel mengenai pekerjaan dari posisi yang ada.

pekerjaan / karyawan	1	2	3	4
A	890	750	650	940
B	795	760	685	920
C	688	740	670	930
D	580	770	660	950

Berdasarakan data diatas .kita dapat menyelesaikan tugaspenugasan dari salah satu perusahaan Indonesia untuk menentukan penugasan yang tepat agar karyawan dapat mendapat kepuasan maksimum. Atau maksimasi.

2. Buatlah penugasan sesuai dengan jumlah angkatan dan jumlah siswa yang ada dikelas yang ada SDN 07 cawang . mengunakan kasus maksimasi dan minimasi
3. Apa kekurangan dari penugasan yang kamu pahami ?

pekerjaan / karyawan	SPG	MANAGER	CIO	OB
A	780	750	650	940

B	870	780	780	980
C	900	740	670	960
D	580	770	660	950

Tentukan apakah tabel diatas seimbang atau tidak seimbang dengan mengunakan model hungaria .

4. Sebuah perusahaan kain yang membutuhkan 4 orang pegawai karyawan diantaranya ,Andi, Bayu, Candra, Dodo yang akan di tugaskan dibagian mengukur, memotong, menjahit, menyusun dengan rincian upah perhari Rp. 10.000 sebagai berikut.

Karyawan	Pekerjaan			
	Mengukur	Memotong	menjahit	Menyusun
Andi	650	500	600	700
Bayu	550	450	600	550
Candra	500	600	750	700
Dodi	400	550	650	600

Tentukan pengalokasian optimal pekerjaan ke karyawan , agar diperoleh biaya upah paling murah. Selesaikan masalah penugasan diatas mengunakan metode Hungarian.

5. Sebuah perusahaan roti membutuh karyawan untuk bekerja sebagai pegawai di bagian marketing, manager, cio dan ob ,

pekerjaan	Marketing	manager	cio	Ob

karyawan				
A	780	650	650	840
B	685	600	785	870
C	700	640	770	830
D	600	660	600	850

Berdasarakan data diatas .kita dapat menyelesaikan tugas penugasan dari salah satu perusahaan roti untuk menentukan penugasan yang tepat agar karyawan dapat mendapat kepuasan maksimum. Atau maksimasi.

6. Suatu perusahaan kotak hadiah mempunyai empat pekerjaan yang berbeda, yaitu memotong karton, merekatkan kertas warna, memberi perhiasan, dan membungkus. Perusahaan kotak hadiah tersebut hanya memiliki empat orang karyawan yaitu Hana, Karin, Helmi, dan Rossi. Upah seorang karyawan untuk masing-masing pekerjaan berbeda-beda seperti berikut:

Tugas/ Karyawan	Hana	Karin	Helmi	Rossi
Memotong kayu	Rp. 15.000	Rp. 14.000	Rp. 18.000	Rp. 17.000
Merekatkan kertas warna	Rp. 21.000	Rp. 16.000	Rp. 18.000	Rp. 22.000
Memberi hiasan	Rp. 21.000	Rp. 21.000	Rp. 24.000	Rp. 19.000
Membungku s	Rp. 22.000	Rp. 18.000	Rp. 20.000	Rp. 16.000

Tentukan besarnya biaya optimal yang dikeluarkan perusahaan kotak hadiah tersebut dengan kondisi satu pekerjaan hanya dikerjakan oleh satu karyawan?

7. suatu perusahaan kotak hadiah mempunyai lima lokasi penjualan untuk produknya yaitu di Strobery, Naughty, Cindy, Toko kado unik, dan Gramedia. Perusahaan kotak hadiah tersebut memiliki lima orang sales promotion yang akan ditugaskan ke masing-masing lokasi tersebut. Berdasarkan kemampuan masing-masing sales dan kondisi pasar. Berikut ini hasil penjualan yang diperkirakan akan

Lokasi	Karyawan			
	Ayu	Budi	Caca	Dion
Strobery,	Rp.100.000	Rp.120.000	Rp.120.000	Rp.80.000
Naughty	Rp.140.000	Rp.100.000	Rp.90.000	Rp.150.000
Cindy	Rp. 80.000	Rp. 80.000	Rp.70.000	Rp.90.000
Toko kado	Rp.130.000	Rp.150.000	Rp.80.000	Rp.160.000

Tentukan besarnya pendapatan perusahaan bila satu lokasi hanya di jaga oleh satu sales?

Langkah-langkah menyelesaikan masalah penugasan dengan Algoritma Hungarian adalah sebagai berikut:

8. Di daerah kota Kalimantan barat memiliki 5 sekolah yang diangap sekolah terbaik se Kalimantan barat , namun jarak tempuh seakolah tersebut rawan macet , untuk mengatasi macet dan biaya transportasi siswa untuk menuju sekolah tersebut pemerintah mengambil tindakan peraturan dalam kebijakan dalam pebagian wilayah siswa dengan sekolah

Bagian Daerah	Waktu tempuh rumah – sekolah (menit)			Populasi siswa
	SMAN 1	SMAN 2	SMAN 3	
Bagian utara	50	50	35	320
Bagian barat	45	20	50	210
Bagian timur	40	55	45	370
Bagian Selatan	60	75	55	215

Jika dalam data tersebuh SMAN 1 tidak diperbolehkan menerima siswa dari kota bagian Utara dikarenakan ketidak sediaan jalur kendaraan umum tentukan alokasi pembagian sekolah terhadap daerah diatas untuk wilayah tempuh minimal.

9. Seorang kepala tukang mendapat proyek sebuah Rumah sakit. Target proyek ini selesai 10 bulan. Pekerja yang dibutuhkan adalah sebagai tukang kayu, tukang cat, pembantu tukang, tukang bangunan. Kepala tukang kesulitan dalam memilih para pekerja, karena semua pekerja memiliki keahlian yang tidak jauh berbeda, tarif atau permintaan ongkos satu sama lain juga tidak jauh berbeda. Dalam hal ini kepala tukang ingin meminimalkan biaya yang keluar untuk ongkos para pekerja agar mendapatkan keuntungan yang lebih besar. Adapun para pekerja yang mengajukan diri sebagai pekerja dalam proyek

tersebut beserta ongkos yang mereka inginkan tertera dalam tabel berikut:

Pekerjaan/ Tukang	Asep	Ucup	Mamad
Tukang kayu	70	55	65
Tukang cat	55	65	50
Pembantu tukang	80	80	55
Tukang bangunan	50	70	72

Langkah-langkah menyelesaikan masalah penugasan tidak seimbang dengan Algoritma Hungarian adalah sebagai berikut:

10. Buat lah tabel dan langkah maksimasi dan minumasi dari data kelas mu dan minat mata pelajaran mu. Sertakan tabel dan cara mengerjakan dengan jelas sesuai contoh soal yang kamu pahami.

7.8. Kegiatan Pembelajaran 8. Latihan Mandiri

1. Diketahui masalah penugasan produksi kue perusahaan SIDI, yang mana dibantu oleh 4 karyawan diantaranya Ani, Winda, Siti dan Sinta, yang akan diberdayakan di bagian Adonan, Memasak, Memotong / Membentuk dan Mengemas, dengan rincian upah per hari Rp.5000,- sebagai berikut:

Karyawan	**Pekerjaan**			
	Adonan	**Memasak**	**Memotong**	**Mengemas**
Ani	65	50	60	70
Winda	55	45	60	55
Siti	50	60	75	70
Sinta	40	55	65	60

Tentukan pengalokasian optimal pekerjaan ke karyawan, agar diperoleh biaya upah paling murah. Selesaikan masalah penugasan di atas menggunakan metode Hungarian?

Penyelesaian:

a. Mencari biaya terkecil untuk setiap baris, kemudian menggunakannya untuk mengurangi semua biaya yang ada pada baris yang sama. Dengan langkah ini, maka diperoleh hasil:

Karyawan	**Pekerjaan**			
	Adonan	**Memasak**	**Memotong**	**Mengemas**
Ani	15	0	10	20
Winda	10	0	15	10
Siti	0	10	25	20
Sinta	0	15	25	20

b. Memastikan semua baris dan kolom sudah memiliki nilai nol. Dan ternyata kolom 4 dan 5 belum memiliki nilai nol. Dengan demikian perlu dicari lagi nilai terkecil pada kolom tersebut untuk selanjutnya digunakan untuk mengurangi semua nilai yang ada pada kolom tersebut (kolom yang sama). Dengan

Karyawan	**Pekerjaan**			
	Adonan	**Memasak**	**Memotong**	**Mengemas**
Ani	15	0	0	10
Winda	10	0	5	0
Siti	0	10	15	10
Sinta	0	15	15	10

c. Memastikan atau mengecek lagi tabel penugasan, apakah sudah memiliki nilai nol yang sesuai dengan jumlah sumber daya, yang juga tercermin dengan jumlah barisnya.

   Misal, jika yang ditugaskan adalah 4 karyawan, maka harus ditemukan nilai nol sebanyak 4 buah yang terletak di baris dan kolom berbeda. Sebaiknya dimulai dari baris yang hanya memiliki satu nilai nol. Langkah ini mengandung arti bahwa setiap karyawan hanya dapat memegang satu peran / pekerjaan. Perhatikan! Dari matrik di atas, ternyata nilai nol yang ditemukan pada baris 3 dan 4 (baris Wanto dan Baris Wanti), meskipun berbeda baris namun masih dalam kolom yang sama, sehingga dapat dipastikan masalah belum optimal dan perlu dilanjutkan ke langkah berikutnya.

d. Karena belum optimal, maka langkah selanjutnya adalah menarik garis yang menghubungkan minimal dua buah nilai nol, seperti diperlihatkan pada tabel di bawah ini:

Ani	15	0	0	10
Winda	10	0	5	0
Siti	0	10	15	10
Sinta	0	15	15	10

e. Perhatikan nilai-nilai yang belum terkena garis. Pilih nilai yang paling kecil (dari tabel di atas adalah nilai **10**), kemudian nilai **10** tersebut dipergunakan untuk mengurangi nilai-nilai lain yang belum terkena garis, dan gunakan untuk menambah nilai-nilai yang terkena **garis ganda**. Dengan langkah ini, maka diperoleh hasil:

Ani	25	0	0	10
Winda	20	0	5	0
Siti	0	10	5	0
Sinta	0	15	5	0

f. Apakah sudah ditemukan nilai nol sejumlah atau sebanyak sumber daya? yang juga tercermin dengan jumlah barisnya (mulai dari baris yang hanya memiliki satu nilai nol). Dan ternyata tabel penugasan di atas sudah berhasil ditemukan 4 buah nilai nol (sejumlah karyawan yang akan ditugaskan), yang berada di baris dan kolom berbeda, artinya tabel penugasan di atas sudah optimal.

Paijo, dialokasikan pada tugas Memotong =

Paijah, dialokasikan pada tugas Memasak =

Wanto, dialokasikan pada tugas Adonan =

Wanti, dialokasikan pada tugas Mengemas = 60

Total upah karyawan = 215

2. Suatu kantin UKI mempunyai empat pekerjaan yang berbeda, yaitu memasak, membungkus, merapikan piring, dan pembayaran. Kantin UKI tersebut hanya memiliki empat orang karyawan yaitu hanna, Karin, helmi dan rossi Upah seorang karyawan untuk masing-masing pekerjaan berbeda-beda seperti berikut

Tugas	karyawan			
	Hana	Karin	Helmi	Rossi
Memasak	25.000	24.000	28.000	27.000
Membungkus	11.000	6.000	8.000	12.000
Merapikan	17.000	15.000	14.000	12.000
Membayar	22.000	18.000	20.000	16.000

Tentukan besarnya biaya optimal yang dikeluarkan Kantin UKI tersebut dengan kondisi satu pekerjaan hanya dikerjakan oleh satu karyawan?

Langkah-langkah menyelesaikan masalah penugasan dengan Algoritma Hungarian adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi dan penyederhanaan masalah dalam tabel penugasan.

- Mencari biaya optimal = kasus minimalisasi
- Jumlah pekerjaan = jumlah karyawan, artinya kasus normal (tanpa dummy)

Tugas/karyawan	I	II	III	IV
A	25	24	28	27
B	11	6	8	12
C	17	15	14	12
D	22	18	20	16

2. Cari biaya terkecil untuk setiap baris, dan kemudian menggunakan biaya terkecil tersebut untuk dikurangi oleh semua biaya yang ada pada baris yang sama.

Tugas/karyawan	I	II	III	IV

A	25	24	28	27
B	11	6	8	12
C	17	15	14	12
D	22	18	20	16

Apabila ditemukan nol maka harus ditarik garis seminimum mungkin. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris/kolom berarti pemecahan sudah optimal.

Tugas/karyawan	I	II	III	IV
A	1	0	4	3
B	5	0	2	6
C	5	3	2	0
D	6	2	4	0

Ket : Jumlah garis yang dapat ditarik hanya 2, tidak sama dengan jumlah baris/kolom yang ada empat (4) = **belum optimal**.

3. Pada kolom tak terkena garis, pilih nilai terkecil, kemudian kurangi nilai lain pada kolom yang sama dengan nilai terkecil tersebut.

Tugas/karyawan	I	II	III	IV
A	1	0	4	3
B	5	0	2	6
C	5	3	2	0
D	6	2	4	0

4. Tarik garis seminimum mungkin, baik kearah vertikal maupun horizontal yang meliputi semua yang bernilai nol. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris/kolom berarti pemecahan sudah optimal.

Tugas/karyawan	I	II	III	IV
A	0	0	2	3

B	4	0	0	6
C	4	2	1	0
D	5	2	2	0

ket : Jumlah garis yang dapat ditarik hanya tiga (3), tidak sama dengan jumlah baris/kolom yang ada empat (4) = **belum optimal**.

5. Revisi tabel, yaitu dengan mengurangi sel-sel yang tidak terkena garis dengan nilai kecil, kemudian tambahkan nilai sel terkecil itu pada sel yang terkena garis 2x. Nilai yang terkena garis 1x = tetap.

Tugas/karyawan	I	II	III	IV
A	0	0	2	3
B	4	0	0	6
C	4	2	1	0
D	5	2	2	0

6. Tentukan apakah sudah terdapat nilai nol pada baris dan kolom yang berbeda, apabila sudah terdapat nol disetiap baris dan kolom yang berbeda maka sudah didapatkan hasil yang optimal. Atau jika jumlah garis sama dengan jumlah baris/kolom berarti pemecahan sudah optimal.

Tugas/karyawan	I	II	III	IV
A	0	0	2	4
B	4	0	0	7
C	3	1	0	0
D	4	1	1	0

Ket : Jumlah garis yang dapat ditarik adalah empat (4) = jumlah baris/kolom = **Optimal**

Hasil dari penyelesaian metode Algoritma Hungarian:
Alokasi pekerjaan untuk masing-masing karyawan adalah

- Pekerjaan A (Memasak) dikerjakan oleh II (Bou) dengan upah sebesar Rp.
- Pekerjaan B (Membungkus) dikerjakan oleh III (Uda) dengan upah sebesar Rp.
- Pekerjaan C (Merapikan) dikerjakan oleh I (Oppung) dengan upah sebesar Rp. 17.000
- Pekerjaan D (Pembayaran) dikerjakan oleh IV(Tulang) dengan upah sebesar Rp.

Jadi, total biaya optimal yang dikeluarkan oleh perusahaan kotak hadiah dengan pembagian tugas tersebut di atas sebesar Rp. …

3. Seorang kepala tukang mendapat proyek sebuah Rumah sakit. Target proyek ini selesai 10 bulan. Pekerja yang dibutuhkan adalah sebagai tukang kayu, tukang cat, pembantu tukang, tukang bangunan. Kepala tukang kesulitan dalam memilih para pekerja, karena semua pekerja memiliki keahlian yang tidak jauh berbeda, tarif atau permintaan ongkos satu sama lain juga tidak jauh berbeda. Dalam hal ini kepala tukang ingin meminimalkan biaya yang keluar untuk ongkos para pekerja agar mendapatkan keuntungan yang lebih besar. Adapun para pekerja yang mengajukan diri sebagai pekerja dalam proyek tersebut beserta ongkos yang mereka inginkan tertera dalam tabel berikut:

Pekerjaan/ Tukang	Asep	Ucup	Mamad
Tukang kayu	50	65	75
Tukang cat	65	80	30

Pembantu tukang	68	70	55
Tukang bangunan	64	60	62

Langkah-langkah menyelesaikan masalah penugasan tidak seimbang dengan Algoritma Hungarian adalah sebagai berikut:

1. Pada setiap kolom, pilih nilai terkecil, kemudian kurangi nilai lain pada kolom yang sama dengan nilai terkecil tersebut

Pekerjaan/ Tukang	**Asep**	**Ucup**	**Mamad**	**Dummy**
Tukang kayu	50	65	75	0
Tukang cat	65	80	30	0
Pembantu tukang	68	70	55	0
Tukang bangunan	64	60	62	0

2. Menentukan nilai nol pada baris dan kolom yang berbeda.

- Tiap baris dan kolom sudah memiliki nilai.
- Jumlah baris yang ditarik = jumlah baris dan kolom
- Optimal.

Pekerjaan/	**Asep**	**Ucup**	**Mamad**	**Dummy**

Tukang				
Tukang kayu	0	5	45	0
Tukang cat	15	20	0	0
Pembantu tukang	18	10	20	0
Tukang bangunan	14	0	23	0

3. Terdapat nol disetiap baris dan kolom yang berbeda maka sudah didapatkan hasil yang optimal.

Pekerjaan/ Tukang	**Asep**	**Ucup**	**Mamad**	**Dummy**
Tukang kayu	0	5	45	0
Tukang cat	15	20	0	0
Pembantu tukang	18	15	20	0
Tukang bangunan	14	0	32	0

Alokasi pekerjaan:

- Asep sebagai tukang kayu = Rp.

- Ucup sebagai tukang bangunan = Rp. 60.000
- Dummy sebagai pembantu tukang = Rp.
- Mamad sebagai tukang cat = Rp

Total ongkos pekerja = Rp. 140.000

4. Sebuah perusahaan kain yang membutuhkan 4 orang pegawai karyawan diantaranya ,endi, dido, handra, miko yang akan di tugaskan dibagian mengukur, memotong, menjahit, menyusun dengan rincian upah perhari Rp.15.000 sebagai berikut.

Karyawan	Pekerjaan			
	Mengukur	Memotong	menjahit	Menyusun
endi	650	650	500	670
Dido	550	660	550	600
handra	550	570	850	740
Miko	500	700	750	860

Tentukan pengalokasian optimal pekerjaan ke karyawan , agar diperoleh biaya upah paling murah. Selesaikan masalah penugasan diatas mengunakan metode Hungarian.

5. Sebuah perusahaan roti membutuh karyawan untuk bekerja sebagai pegawai di bagian marketing, manager, direktur dan ob ,

pekerjaan / karyawan	ob	manager	Direktur	Marketing
A	700	750	650	840

B	60	800	875	760
C	650	640	850	679
D	750	750	780	860

Berdasarakan data diatas .kita dapat menyelesaikan tugas penugasan dari salah satu perusahaan roti untuk menentukan penugasan yang tepat agar karyawan dapat mendapat kepuasan maksimum. Atau maksimasi.

6. Di daerah kota DKI Jakarta memiliki 5 sekolah yang diangap sekolah terbaik se DKI Jakarta , namun jarak tempuh seakolah tersebut rawan macet , untuk mengatasi macet dan biaya transportasi siswa untuk menuju sekolah tersebut pemerintah mengambil tindakan peraturan dalam kebijakan dalam pebagian wilayah siswa dengan sekolah

waktu tempuh dan populasi siswa pada suatu kota

Bagian Daerah	Waktu tempuh rumah – sekolah (menit)			Populasi siswa
	SMAN A	SMAN B	SMAN C	
utara	50	40	55	350
barat	60	30	30	250
timur	55	45	40	300
Selatan	40	65	50	405

Jika dalam dalam data tersebuh SMAN A tidak diperbolehkan menerima siswa dari kota bagian Utara dikarenakan ketidak sediaan jalur kendaraan umum tentukan alokasi pembagian sekolah terhadap daerah diatas untuk wilayah tempuh minimal.

Penyelesaian :

Dari data dan solah penyelesaian di atas kita dapat menarik kesimpulah bahwa penugasan tersebut adalah penugasan tidak seimbang. Dengan demikian kita dapat membuah daearah DUMMY pada kota tersebut dan mengubah waktu tempuh dari kota bagian Utara ke SMAN A menjadi bilangan besar –M..

Catatan :

semangkin banyak siswa yang memilih untuk menuju suatu sekolah tertentu dapaat berakibat juga untuk waktu tempuh yang semangkin bertambah. Dengan demikian kita dapat membuat tabel dengan terlebih dahulu untuk mengalihkan populasi siswa terhadap waktu tempuh .

Bagian Daerah	Waktu tempuh rumah- sekolah (menit)			
	SMAN A	SMAN B	SMAN C	DUMMY
utara				0
barat				0
timur				0
Selatan				0

Dari data tabel diatas kita dapat mengerjakan langkah seterusnya dengan mengunakan metode hongaria . yaitu dengan mengurangi setiap baris dengan nilai terkecil pada baris tersebut.

M			0
			0

			0
			0

Kemudaian kita dapat mengurangkan setiap kolom dengan nilai terkecil pada kolom.

M-10850			0
			0
			0
			0

Dari beberapa cara di atas , lengkapilah penyelesaiannya

7. Buatlah penugasan sesuai dengan jumlah guru sekolah mu dan jumlah kelas yang ada diajarnya dikelas . mengunakan kasus maksimasi dan minimasi

8. Dua pabrik batu bara terletak di Sulawesi dan di papua masing-masing dari keduanya dapat menghasilkan 300 ton setiap bulanya sedangkan perusahaan yang memerlukan batu bara di pulau jawa yaitu di 10 kota : (banten, Jakarta, Cirebon, tegal, pekalongan, semarang, kudus, Surabaya, malang, dan bayuwangi dari kota-kota tersebut , berurrut-urut memerlukan batu bara (dalam ton 50, 100, 50, 75, 60, 40, 40, 50, 30 dan 30)pengankutan batu bara dilakukan dengan dua tahap, yaitu dari Sulawesi dan papua ke pelabuhan dijakarta , semarang dan srabaya mengunakan kapal sedangkan dari pelabuhan ke kota-kota tujuan mengunakan truk . biaya pengangkutan tiap ton batu bara terlihat pada tabel berikut ini:

   Biaya pengiriman batu bara dengan kapal

	Jakarta	Semarang	Surabaya
Sulawesi	50	60	70

Papua	80	70	60

Biaya pengiriman batu bara Dengan truk

	ban t	Ja k	ci r	Te g	pe g	se m	ku d	su r	ma l	ba n
jak	20	5	2 5	30						
se m			2 5	2	15	5	10	20		
Sur						20	15	5	15	20

Buatlah system transit agar biaya biaya pengiriman batubara minimum!

9. Bagaimana jika system transit soal diatas tersebut bilamana kebutuhan batu bara ditegal, Surabaya dan banyuwangi masing-masing naik 35 ton sebulan , sementara kebutuhan dijakarta turun 30 ton sebulannya ?
10. Bagaimana system transit pada contoh soal diatas tentang alat berat bilamana jumlah alat berat dijakarta ada 10 buah dan disurabaya ada 6 buah?

MODUL 8

PROGRAM LINEAR BILANGAN BULAT

Pencapaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mampu memahami dengan baik dan benar konsep Program Linier Bilangan Bulat dengan metode Cutting Plane dan Branch and Bound, serta ampu membuat soal yang berkaitan dengan metode Cutting Plane dan Bransch	1. Persamaan Program Linear Bilangan Bulat 2. Metode Cutting Plane 3. Metode Branch and Bound

Tujuan Pembelajaran

1. Mampu memahami materi Program Linear Bilangan Bulat
2. Mampu mengerti dan memahami definisi dan konsep metode Cutting Plane
3. Mampu mengerti dan memahami definisi dan konsep metode Branch and Bound
4. Mampu menyelesaikan soal Program Linear Bilangan Bulat dengan metode Cutting Plane dan Branch and Bound

MODUL 8

PROGRAM LINEAR BILANGAN BULAT

8.1.Kegiatan Pembelajaran 1. Program Linier Bilangan Bulat

Pemrograman linier adalah salah satu teknik analisis dari kelompok teknik riset operasi yang memakai model matematika. Tujuannya adalah untuk mencari, memilih, dan menentukan alternatif yang terbaik dari antara sekian alternatif layak yang tersedia. Dikatakan linier karena peubah-peubah yang membentuk model pemrograman dianggap linier.

Pemrograman linier pada hakekatnya merupakan suatu teknik perencanaan yang bersifat analitis dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan masalah, kemudian dipilih mana yang terbaik diantaranya dalam menyusun strategi dan langkah-langkah kebijakan lebih lanjut tentang alokasi sumberdaya dan dana yang terbatas guna mencapai tujuan atau sasaran yang diinginkan secara optimal.

Dalam pemrograman linier variabel keputusan dan kendala dibatasi bilangan riil, namun seringkali suatu keputusan menginginkan variabel berupa bilangan bulat agar keputusan menjadi realistik, misalnya dalam penghitungan produksi sebuah perusahaan manufaktur, karena perusahaan tidak dapat memproduksi produknya dalam bentuk setengah jadi. Misal perusahaan perakitan mobil tidak bisa merakit 7,6 mobil A dan 3,5 mobil B perhari, tetapi akan lebih realistik jika perusahaan bisa merakit 7 mobil A dan 3 mobil B perhari. Untuk menyelesaikan masalah ini digunakan pemrograman integer (*Integer Programming*) yang merupakan bentuk lain dari pemrograman linier.

Integer Programming adalah suatu Pemrograman Linier dengan tambahan persyaratan bahwa semua atau beberapa variabel bernilai bulat nonnegative [9]. Ada beberapa metode yang bisa digunakan untuk mendapatkan solusi terhadap masalah Integer Programming yaitu: pendekatan pembulatan, metode grafik, *Cutting Plane* serta *Branch and Bound*.

Model Pemrograman Integer terbagi dalam 3 bentuk, yaitu:

a. Jika semua variabel bernilai integer (bulat positif) dinamakan *All Integer Programming*.
b. Jika variabel-variabel tertentu bernilai integer dinamakan *Mixed Integer Programming*.
c. Jika variabel bernilai nol atau satu dinamakan *Zero-one Integer Programming*.

8.2.Kegiatan Pembelajaran 2. Metode Cutting Plane

Metode cutting plane atau metode bidang pemotong diperkenalkan oleh Ralph Gomory pada tahun 1950-an sebagai metode untuk memecahkan pemrograman integer dan pemograman *mixed-integer*. Metode *cutting plane* merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan program linier pada bilangan bulat seperti, bilangan bulat murni ataupun campuran dengan penambahan batasan baru yang disebut Gomory. Batasan pada Gomory dapat diberikan jika nilai dari variabel keputusan tersebut belum bilangan bulat atau masih terdapat bernilai pecahan.

Batasan-batasan tersebut secara efektif akan menyingkirkan beberapa ruang penyelesaian yang tidak berisi titik bilangan bulat yang layak tetapi tidak pernah menyingkirkan satupun titik bilangan bulat yang layak. Dalam program ini solusi integer dapat ditemukan dengan menggunakan metode simpleks untuk menyelesaikan pemograman linear untuk menghasilkan solusi optimum dengan adanya bilangan bulat. Metode simpleks merupakan suatu penyelesaian basis yang fisibel ke penyelesaian dasar fisibel lainnya, dilakukan berulang-ulang (iteratif) sehingga tercapai suatu penyelesaian yang optimum.

Terdapat beberapa prosedur dalam metode *cutting plane*, sebagai berikut :

1. Menyelesaikan masalah dengan metode simpleks.
2. Apabila solusi yang dihasilkan adalah bilangan bulat berarti masalah tersebut selesai dengan solusi tersebut merupakan solusi bilangan bulat optimum. Akan tetapi, jika solusi variabel $(x_{1,}x_2, \dots, x_n)$ yang telah dihasilkan berarti bukan merupakan bilangan bulat karena bilangan bulat tersebut adalah pecahan campuran. Kemudian dengan adanya memotong bagian pecahannya dapat menimbulkan kendala dalam tabel simpleks.
3. Menyelesaikan kembali tabel simpleks yang telah ditambahkan pertidaksamaan Gomory dengan metode simpleks.
4. Diperiksa kembali solusi dari metode simpleks tersebut dan ulangi kembali langkah-langkah yang ada sehingga mendapatkan solusi metode simpleks, bilangan bulat.

Contoh Soal 8.2.1

Mira merupakan seorang pengusaha yang memiliki kelebihan uang \$250.000 dan akan diinvestasikan pada 3 alternatif, yaitu: kondominium, tanah dan obligasi. Mira ingin menginvestasikan uangnya dengan tujuan pengembalian terbesar diperoleh pada akhir tahun.

Data Jenis Investasi :

Jenis Investasi	Harga	Kendaraan	Keuntungan per tahun
Kondominium	\$ 50.000/unit	4 unit	\$ 9.000
Tanah	\$ 12.000/unit	15 are	\$ 1.500
Obligasi	\$ 8.000/unit	20 obligasi	\$ 1.000

Tabel 8.2.1.1 Daftar Data Investasi

Penyelesaian :

Formulasi masalah tersebut adalah:

Maksimumkan $Z = 9000x_1 + 1500x_2 + 1000x_3$

Dengan kendala $50.000x_1 + 12.000x_2 + 8.000x_3 \le 250.000$

$$x_1 \le 4$$

$$x_1 \leq 15$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0$$

$x_1, x_3 \geq 0$ dan integer

Untuk mendapatkan solusi yang integer dari masalah program linier seperti contoh soal di atas cukup digunakan metode simpleks yang biasa kemudian membulatkan solusi pecah optimum yang telah didapatkan.

Contoh Soal 8.2.2

Sebuah toko mebel membuat beberapa jenis barang, yang paling terkenal dari toko tersebut adalah sofa dan lemari. Masing – masing kursi dan lemari membutuhkan dua tahapan produksi, yaitu perakitan dan *finishing*/cat. Waktu perakitan satu set sofa adalah 2 jam dan perakitan 1 set lemari adalah 3 jam. Sedangkan, waktu finishing satu set sofa adalah 6 jam dan satu set lemari adalah 5 jam. Dikarenakan perbedaan keahlian, keterbatasan bahan, biaya, dan keberadaan pekerja, toko tersebut hanya membayar pekerja khusus perakitan untuk 12 jam kerja per minggu dan khusus pekerja *finishing* 30 jam per minggu. Satu set sofa tersebut dijual seharga 7 juta, sementara satu set lemari dijual seharga 6 juta. Tentukan banyaknya sofa dan lemari yang seharusnya dijual agar toko tersebut memiliki keuntungan yang maksimum !

Maks. $Z = 7x_1 + 6x_2$

dp. $2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_{1,} x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

Membuat variabel longgar pada model matematika

$Z - 7x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

dp. $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$

$6x_1 + 5x_2 + x_4 = 30$

Membuat tabel simpleks awal.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	**RHS**	**OBE**
z	1	-7	-6	0	0	0	
x_3	0	2	3	1	0	12	
x_4	0	6	5	0	1	30	

Tabel 8.2.1.2 Tabel Simpleks Awal

Dengan menilai fungsi tujuan, $z_1 - c_1 = [-7 - 6\ 0\ 0]$

Kolom x_1(terkecil) untuk menjadi basis menggantikan Min $\left\{\frac{12}{2}, \frac{30}{6}\right\} = 5$ (baris R_2), sehingga x_1 menggantikan x_4 sebagai basis.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	**RHS**	**OBE**
z	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{7}{6}$	35	$r_0 \rightarrow r_0 + 7r_2$
x_3	0	0	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	2	$r_1 \rightarrow r_1 - 2r_2$
x_4	0	1	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	5	$r_2 \rightarrow \frac{r_2}{6}$

Tabel 8.2.1.3 Tabel Simpleks Iterasi Kedua

Fungsi tujuan dinilai lagi pada iterasi berikutnya, diperoleh $z_j - c_j = \left[0\ -\frac{1}{6}\ \frac{7}{6}\right]$ sehingga x_2 sebagai basis masuk. Kolom x_2 akan menggantikan Min $\left\{\frac{2}{\frac{4}{3}}, \frac{5}{\frac{5}{6}}\right\} = \frac{3}{2}$(baris R_1), sehingga x_2 akan menggantikan x_3 sebagai basis.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	OBE
z	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{24}$	$\frac{141}{4}$	$r_0 \to r_0 + \frac{1}{6} r_1$
x_3	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$r_1 \to \frac{3}{4} r_1$
x_4	0	1	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{15}{4}$	$r_1 \to r_2 \frac{5}{6} r_1$

Tabel 8.2.1.4 Tabel Simpleks Iterasi Ketiga

Dari tabel diatas diperoleh $z_j - c_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{29}{24} \end{bmatrix}$ tidak ada bilangan yang bernilai negatif, sehingga penyelesaian dalam program linear telah selesai dengan solusi optimumnya yaitu, $x_1 =$ 3,75 dan $x_2 =$ 1,5 untuk Z maks. = 32,25. Akan tetapi, solusi yang seharusnya di dapatkan adalah bilangan bulat jadi, masih membutuhkan proses tambahan untuk mendapatkan solusi optimum yaitu berupa bilangan bulat. Berikut ini langkah-langkah yang harus diikuti dalam menggunakan metode *cutting plane*.

1. Baris pertama (r_1) dan buat koefisien variabel menjadi pechan campuran, seperti :

$$(1).x_2 + \left(\frac{3}{4}\right).x_3 + \left(\frac{1}{4}\right).x_4 = 1 + \frac{1}{2}$$

2. Pisahkan antara bilangan bulat dengan bilangan pecahan pada persamaan tersebut. Lalu, dilakukan -1 untuk menghasilkan pertidaksamaan baru (batasan Gomory).

$$-\left(\frac{3}{4}\right).x_3 + \left(\frac{1}{4}\right).x_4 \leq= -\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\leftrightarrow -\left(\frac{3}{4}\right).x_3 - \left(\frac{1}{4}\right).x_4 \leq= -\frac{1}{2}$$

3. Batasan Gomory tersebut dimasukkan ke dalam tabel simpleks sebagai kendala yang harus diselesaikan dengan metode simpleks.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
z	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{24}$	0	$\frac{141}{4}$	$r_0 \rightarrow r_0 + \frac{1}{6} r_1$
x_2	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$r_1 \rightarrow \frac{3}{4} r_1$
x_1	0	1	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{24}$	0	$\frac{15}{4}$	$r_1 \rightarrow r_2 \frac{5}{6} r_1$
x_5	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	

Tabel 8.2.1.5 Tabel Simpleks Iterasi Keempat

Pada tabel diatas dapat dinyatakan bahwa, x_5 sebagai variabel basis dan variabel *slack* atau variabel longgar karena memiliki nilai negatif yaitu, $-\frac{1}{2}$. Akan tetapi, hal tersebut tidak sesuai dengan ketentuan yang ada yaitu, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ sehingga TS-3 harus diselesaikan dengan metode simpleks. Oleh karena itu, agar x_5 tidak bernilai negatif maka harus diselesaikan kembali.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
z	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{24}$	0	$\frac{141}{4}$	$r_0 \rightarrow r_0 + \frac{1}{6} r_1$
x_2	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$r_1 \rightarrow \frac{3}{4} r_1$

x_1	0	1	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{24}$	0	$\frac{15}{4}$	$r_1 \rightarrow r_2 \frac{5}{6} r_1$
x_5	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$r_3 \rightarrow -\frac{3}{4} r_3$

Tabel 8.2.1.6 Tabel Simpleks Iterasi Kelima

Dengan menggunakan metode dual simpleks, diperoleh baris ketiga (r_3) dengan x_5 digantikan oleh Min

$$\left\{\frac{-\frac{1}{8}}{-\frac{3}{4}}, \frac{-\frac{29}{24}}{-\frac{1}{4}}, \frac{0}{1}\right\} = \frac{1}{6}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
z	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{24}$	0	$\frac{141}{4}$	$r_0 \rightarrow r_0 - \frac{1}{8} r_3$
x_2	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$r_1 \rightarrow r_1 - \frac{3}{4} r_3$
x_1	0	1	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{24}$	0	$\frac{15}{4}$	$r_1 \rightarrow r_2 + \frac{5}{8} r_3$
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Tabel 8.2.1.7 Tabel Simpleks Iterasi Keenam

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	OBE
z	1	0	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{211}{6}$	$r_0 \rightarrow r_0 - \frac{1}{8} r_3$

x_2	0	0	1	0	0	1	1	$r_1 \rightarrow r_1 - \frac{3}{4} r_3$
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{6}$	$r_1 \rightarrow r_2 + \frac{5}{8} r_3$
x_5	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Tabel 8.2.1.8 Tabel Simpleks Iterasi Ketujuh

Pada TS-6 kita telah mendapatkan x_2 berupa bilangan bulat, yaitu 1. Kemudian kita ulangi langkah 1 dengan membuat kendala Gomory pada kedua dari baris yang kedua (R_2) pada TS-6.

$$(1).x_1 + \left(\frac{1}{6}\right).x_4 + \left(\frac{5}{6}\right).x_5 = 4 + \frac{1}{6}$$

$$\leftrightarrow -\left(\frac{1}{6}\right).x_4 - \left(\frac{5}{6}\right).x_5 \leq -\frac{1}{6}$$

$$\leftrightarrow -\left(\frac{1}{6}\right).x_4 - \left(\frac{5}{6}\right).x_5 \leq -\frac{1}{6}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**RHS**	**OBE**
z	1	0	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{211}{6}$	
x_2	0	0	1	0	0	1	1	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{6}$	
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	

x_6	0	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	$r_4 \rightarrow -\frac{6}{5} r_4$

Tabel 8.2.1.9 Tabel Simpleks Iterasi Kedelapan

Karena x_6 masih bernilai negatif maka harus diselesaikan kembali dengan metode dual simpleks. Variabel x_6 keluar dan digantikan dengan $Min \left\{ \frac{-\frac{7}{6}}{-\frac{1}{6}}, \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{6}}, 0,1 \right\} = \frac{1}{5}$ yaitu x_5, sebagaimana ditampilkan dalam TS-8.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	OBE
z	1	0	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{211}{6}$	$r_0 \rightarrow r_0 - \frac{1}{8} r_3$
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	1	$r_1 \rightarrow r_1 - r_4$
x_1	0	1	0	0	0	0	1	4	$r_2 \rightarrow r_2 - \frac{5}{6} r_4$
x_3	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{14}{15}$	$r_3 \rightarrow r_3 + \frac{4}{3} r_4$
x_6	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	$r_4 \rightarrow -\frac{6}{5} r_4$

Tabel 8.2.1.10 Tabel Simpleks Iterasi Kesembilan

Dari tabel diatas, telah mendapatkan solusi optimum dengan mengambil kesimpulan akhir yaitu, $x_1 = 5$ dan $x_1 = 0$ dengan Z = 35. Solusi ini masih lebih baik apabila dibandingkan solusi pembulatan, yaitu = $x_1 = 3$ dan $x_2 = 1$ dengan Z = 27.

8.3.Kegiatan Pembelajaran 3. Metode Branch and Bound

Metode Branch and Bound telah menjadi kode komputer standar untuk *integer programming*, dan penerapan-penerapan dalam praktik menyarankan bahwa metode ini lebih efisien dibanding pendekatan Gomory (*Cutting Plane*). Metode ini dapat diterapkan baik untuk masalah pure maupun mixed integer programming.

Masalah penjadwalan pada mesin paralel diformulasikan sebagai program integer campuran (*mixed integer Programming*). Mixed integer Programming ini dapat digunakan secara optimal untuk menyelesaikan masalah minimisasi waktu penyelesaian maksimum pada mesin paralel. Akan tetapi, ketika jumlah mesin dan pekerjaan bertambah banyak, mixed integer programming menjadi terlalu besar untuk dipecahkan dalam waktu yang terbatas. Oleh karena itu, algoritma branch and bound dikembangkan untuk menyelesaikan permasalahan ini dengan lebih efisien untuk jumlah mesin dan pekerjaan yang besar.

Pendekatan solusi dari suatu masalah optimisasi Diskrit atau Kombinatorik dapat diperoleh dengan menggunakan metode Branch & Bound secara langsung pada permasalahan atau memformulasikan masalah ke bentuk pemrograman linier yang solusinya dikhususkan untuk bilangan bulat positif saja (Pemrograman Integer). Dapat tidaknya solusi optimal dari suatu permasalahan optimisasi Diskrit atau Kombinatorik bergantung pada kejelian seseorang dalam melihat ada-tidaknya potensi dari penggunaan metode Branch & Bound atau menemukan formulasi Pemrograman Linier untuk masalah yang bersangkutan.

DEFINISI DARI BRANCH AND BOUND

Branch and Bound adalah suatu pendekatan untuk penyelesaian suatu persoalan yang didasarkan pada ide pemisahan semua penyelesaian layak terhadap suatu persoalan ke dalam subpersoalan yang lebih kecil dan sifatnya saling lepas (*mutually exclusive*).

Metode Branch and Bound dimulai dengan menyelesaikan Pemrograman Linier relaksasi (mengabaikan batasan integer) dari pemrograman integer. Jika semua variabel bernilai integer pada penyelesaian optimal Pemrograman Linier relaksasi maka penyelesaian optimal untuk Pemrograman Linier relaksasi akan menjadi penyelesaian optimal untuk pemrograman integer.

Branching adalah langkah untuk membuat dua subpersoalan Pemrograman Linier yang sesuai dengan dua pembatas yang saling lepas.

Pencabangan dilakukan dengan cara memilih salah satu variabel $x_r$yang nilai optimal x_r tidak memenuhi batasan integer. Masing-masing subpersoalan disebut sebagai node pohon dan garis yang menghubungkan node pohon disebut sebagai arc pohon.

Bounding adalah langkah untuk menyelesaikan masing-masing subpersoalan dengan Pemrograman Linier relaksasi/mengabaikan batasan integer.

Untuk masalah maksimisasi, nilai fungsi tujuan optimal relaksasi adalah batas atas dari nilai integer optimal. Untuk masalah minimisasi, nilai fungsi tujuan optimal relaksasi adalah batas bawah dari nilai integer optimal.

TAHAPAN DALAM MENGGUNAKAN METODE BRANCH AND BOUND :

1. Tahap 1 : Diketahui

Penulisan persamaan yang terdapat pada soal, mulai dari persamaan biasa sampai persamaan maksimum/minimumnya.

2. Tahap 2 : Eliminasi dan Subtitusi

Pada tahap inilah diperlukan metode simpleks, akan tetapi siswa juga dapat menggunakan POM-QM untuk menyelesaikan permasalah persamaan program linier. Dalam menentukan simpul pertama siswa memilih bilangan dengan desimal paling besar.

3. Tahap 3 : Metode Branch and Bround

Tahap ini merupakan awal dari pembentukan batas atas dan bawah suatu persamaan program linier bilangan bulat, nantinya simpul pertama akan terbentuk ditahap ini. Dalam menentukan simpul pertama siswa memilih bilangan dengan desimal paling besar untuk menjasi batas baru 1.

4. Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

Pada tahap inilah siswa akan mencapai solusi paling tepat melalui simpul-simpul dan pencabangan yang dibuat. Pada simpul kedua dan ketiga batas barunya (batas baru 2) ditentukan melalui hasil dari batas berlainan dari batas baru. Misalnya batas baru 1 merupakan x_1 maka batas baru 2 dipengaruhi akan x_2, begitupun selanjutnya untuk simpul berikutnya sesuai dengan keperluan.

Contoh Soal 8.3.1

Pemilik suatu toko mesin berencana untuk mengembangkan usahanya dengan membeli beberapa mesin press dan mesin bubut baru. Pemilik memperkirakan bahwa setiap mesin press yang dibeli akan meningkatkan laba sebesar $100 per hari dan setiap mesin bubut akan meningkatkan laba sebesar $150 setiap hari. Jumlah mesin yang dapat dibeli pemilik dibatasi oleh harga mesin dan ruang yang tersedia di toko. Harga pembelian alat barang dan persyaratan ruang dijabarkan dalam tabel berikut.

Mesin	Kebutuhan Ruangan (kaki)	Harga Barang
Mesin Press	15	$8000
Mesin Bubut	30	$4000

Tabel 8.3.1.1 Tabel Harga dan Persyaratan Ruang barang

Sang pemilik toko memiliki *budget* sebesar $40.000 untuk membeli mesin-mesin tersebut dan 200 kaki persegi untuk luas ruangan yang tersedia. Pemilik toko ingin mengetahui Ia harus membeli berapa mesing press dan mesin bubut agar dapat meningkatkan keuntungannya dengan maksimal.

Penyelesaian :

Dalam contoh soal ini akan dijabarkan juga grafik dari persamaan program linier, penulisan grafik ini tidak diwajibkan penerepannya pada setiap soal. Penggambaran grafik ini diperlukan jika siswa mau melihat besar daerah penyelesaiannya saja melalui arsiran kosong dan penuh.

Tahap 1 : Diketahui

Maksimumkan Z = $100x_1$ + $150x_2$

dp. $800x_1 + 4000x_2 \leq \$40.000$

$15x_1 + 30x_2 \leq 200$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Dimana, $x_1 =$ mesin press $x_2 =$ mesin bubut

Tahap 2 : Eleminasi Substitusi

Cari nilai $x_1, x_2, dan\ Z$ dari persamaan yang terdapat di tahap 1.

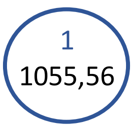
$800x_1 + 4000x_2 = 40.000$

$15x_1 + 30x_2 = 200$

Maka didapat, $x_1 = 2{,}22$ dan $x_2 = 5{,}56$ dengan $Z = 1055{,}56$

Tahap 3 : Metode Branch and Bound

Seperti yang sudah dijelaskan diawal materi merode ini menggunakan diagram yang terdiri dari simpul (bulat, persegi, dll) dan cabang-cabang sebagai kerangka kerja untuk proses pencarian solusi.



Batas Atas (BA) = $1055{,}56$ (x_1= 2,22; x_2 = 5,56)

Batas Bawah (BB) = 950 (x_1= 2; x_2 = 5)

Gambar 8.3.1.1 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Pertama

Walaupun pada simpul pertama hanya tertuliskan satu angka (BA) sebenarnya pada simpul ini terdapat dua batas. Dimana batas bawah merupakan nilai Z untuk solusi bilangan bulat dan berisafat minumum. Sementara batas atas merupakan nilai Z untuk solusi optimal paling maksimum, maka dari itu patokan kita mencari solusi dimulai dari BA. Akantetapi nilainya bukan bilangan bulat melainkan desimal. Untuk itu kita harus mencari nilai antara BA dan BB yang paling optimum, tidak perlu khawatir hal itu sangat mungkin untuk ditemukan. Dengan demikian nilai yang akan kita cari lebih besar dari BB dan lebih rendah dari BA.

Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

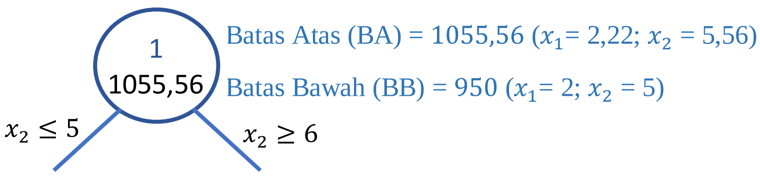
Simpul 2 dan 3

Saat ini solusi optimum merupakan 1055,56 dengan batas x_1= 2,22; x_2 = 5,56. Dari sini kita dapat memilih bilangan dengan pecahan paling besar sebagai variabel yang akan kita cabangkan ke simpul 3 dan 4. Tahap ini merupakan tahap awal dari metode branch and bound yakni membuat dua himpunan solusi (2 simpul) dari solusi sederhana (simpul awal).

Dengan demikian batas dengan pecahan paling besar ialah x_2 = 5,56 haruslah berupa bilangan bulat. Maka dari itu kita membuat batasan baru agar solusi tidak berada di bilangan desimal. Batas awal berada diantara angka 5 dan 6 karena batasnya 5,56 (5$\leq x_2 \leq$ 6). Sehingga batas baru tidak akan berupa bilangan antara 5 dan 6, bisa kita buat menjadi;

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 6 \end{array}}$$

Dengan kata lain bisa bernilai positif (mungkin bulat) selama lebih kecil dari 5 dan lebih besar dari 6. Dari sini otomatis kita akan menghasilkan solusi optumim alternatif lain yang nantinya akan bernilai bulat. Apabila kita buat model program linier untuk simpul kedua maka akan diperoleh sebagai berikut:



Gambar 8.3.1.2 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Kedua dan Ketiga

Kemudian permasalahan simpul kedua sebagai berikut;

Maksimumkan Z = $100x_1 + 150x_2$

dp. $800x_1 + 4000x_2 \leq \$40.000$

$15x_1 + 30x_2 \leq 200$

$x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Untuk mempermudah mencari nilai maksimum kita dapat menggunakan POM-QM dalam menyelesaikan masalah tiap cabang pada proses metode branch and bound. Pada simpul kedua tersebut didapatkan $x_1 = 2{,}5$ dan $x_2 = 5$ dengan $Z = 1000$.

Batas Atas (BA) = 1000 (x_1= 2,5; x_2 = 5)

Batas Bawah (BB) = 950 (x_1= 2; x_2 = 5)

Sedangkan untuk simpul ketiga, mode matematika yang telah ditambahkan kendala baru tersebut adalah sebagai berikut;

Maksimumkan Z = $100x_1 + 150x_2$

dp. $800x_1 + 4000x_2 \leq \$40.000$

$15x_1 + 30x_2 \leq 200$

$x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Dalam sampul ketiga didapatkan sub-solusi $x_1 = 1{,}33$ dan $x_2 = 6$ dengan $Z = 1033{,}33$.

Batas Atas (BA) = 1033,33 (x_1= 1,33; x_2 = 6)

Batas Bawah (BB) = 950 (x_1= 2; x_2 = 5)

Kedua sampul tersebut masih menghasilkan solusi bilangan bulat yang layak, maka kita harus terus membuat cabang dengan simpul baru. Perhatikan pada Gambar 8.3.2 menyatakan antara simpul kedua dan ketiga nilai maksimum terdapat pada simpul ketiga yakni 1033,33. Untuk itu kita akan membuat cabang baru dari simpul ketiga.

Secara umum, selalu buat cabang baru dari simpul dengan batas atas yang terbesar.

Simpul 4 dan 5

Dikarenakan pada simpul ketiga didapat nilai optimum berupa $x_1 = 1{,}33$ dan $x_2 = 6$ dengan $Z = 1033{,}33$,maka kita akan membuat cabang dengan batasan baru pada nilai x_1 (sebelumnya kita telah mengubah nilai x_2 terlebih dulu) sehingga diharapkan nilai x_1 yang dihasilkan bilangan bulat (walaupun tidak ada jaminan untuk itu). Batasan baru yang akan kita buat tentunya 1 dan 2 karena nilai $x_1 = 1{,}33$. ($1 \leq x_1 \leq 2$)

Untuk simpul keempat kita akan menambahkan batasan $x_1 \leq 1$ sehingga didapatkan model matematika sebagai berikut;

Maksimumkan Z = 100x_1 + 150x_2

dp. 800x_1 + 4000x_2 $\leq$ \$40.000

15x_1 + 30x_2 $\leq$ 200

$x_2 \geq 6$

$x_1 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Pada simpul keempat dengan metode simpleks didapatkan solusi $x_1 = 1$ dan $x_2 = 6{,}17$ dengan $Z = 1025$. Hasil pada simpul keempat masih juga keduanya tidak berupa bilangan bulat (x_1 dan x_2).

Batas Atas (BA) = 1025 (x_1= 1; x_2 = 6,17)

Batas Bawah (BB) = 950 (x_1= 2; x_2 = 5)

Untuk simpul kelima, kita akan menambahkan batasan $x_1 \leq 2$ sehingga didapatkan model matematika sebagai berikut;

Maksimumkan Z = 100x_1 + 150x_2

dp. 800x_1 + 4000x_2 ≤ \$40.000

15x_1 + 30x_2 ≤ 200

$x_2 \geq 6$

$x_1 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Lagi-lagi pada simpul kelima dengan metode simpleks didapatkan tidak ada solusi yang layak (nilai Z melebihi maksimum) untuk model tersebut dimana masih juga keduanya tidak berupa bilangan bulat (x_1 dan x_2).

Maka kita masih memerlukan proses pencabangan, dimana simpul keempat akan menjadi acuannya karena pada simpul kelima tidak didapatkan solusi yang layak.

Simpul 6 dan 7

Pada simpul keempat kita mendapatkan solusi $x_1 = 1$ dan $x_2 = 6{,}17$ dengan $Z = 1025$. Oleh karena itu batas baru tidak akan berupa bilangan antara 6 dan 7.

Sesuai dengan analisis tersebut untuk simpul keenam kita akan menambahkan batasan $x_2 \leq 6$, sehingga didapatkan model matematika sebagai berikut;

Maksimumkan Z = 100x_1 + 150x_2

dp. 800x_1 + 4000x_2 ≤ \$40.000

$15x_1 + 30x_2 \leq 200$

$x_2 \geq 6$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Dapat dilihat bahwa pada model matematika diatas terdapat dua pertidaksamaan untuk x_2 yaitu $x_2 \leq 6$ dan $x_2 \geq 6$, kedua pertidaksamaan ini berakibat $x_2 = 6$ yang merupakan bilangan bulat. Model matematika pada simpul keenam ini "memaksa" agar solusi yang dihasilkan berupa bilangan bulat.

Selama model tersebut memiliki penyelesaian dan setidaknya ada pasangan bilangan bulat pada daerah penyelesaiannya, maka akan selalu ditemukan solusi bilangan bulatnya. Pada simpul keenam ini didapatkan solusi $x_1 = 1$ dan $x_2 = 6$ dengan $Z = 1000$.

Batas Atas (BA) = 1000 (x_1= 1; x_2 = 6)

Batas Bawah (BB) = 950 (x_1= 2; x_2 = 5)

Sedangkan untuk simpul ketujuh kita akan menambahkan batasan $x_2 \geq 7$, sehingga didapatkan model matematika sebagai berikut;

Maksimumkan Z = $100x_1 + 150x_2$

dp. $800x_1 + 4000x_2 \leq \$40.000$

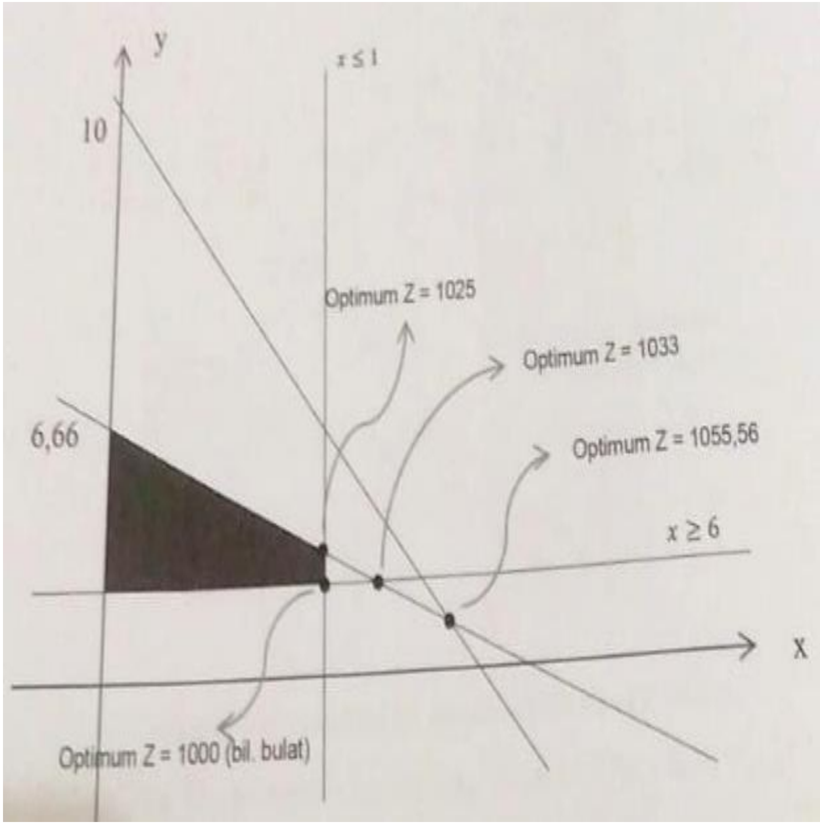
$15x_1 + 30x_2 \leq 200$

$x_2 \geq 6$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \geq 7$

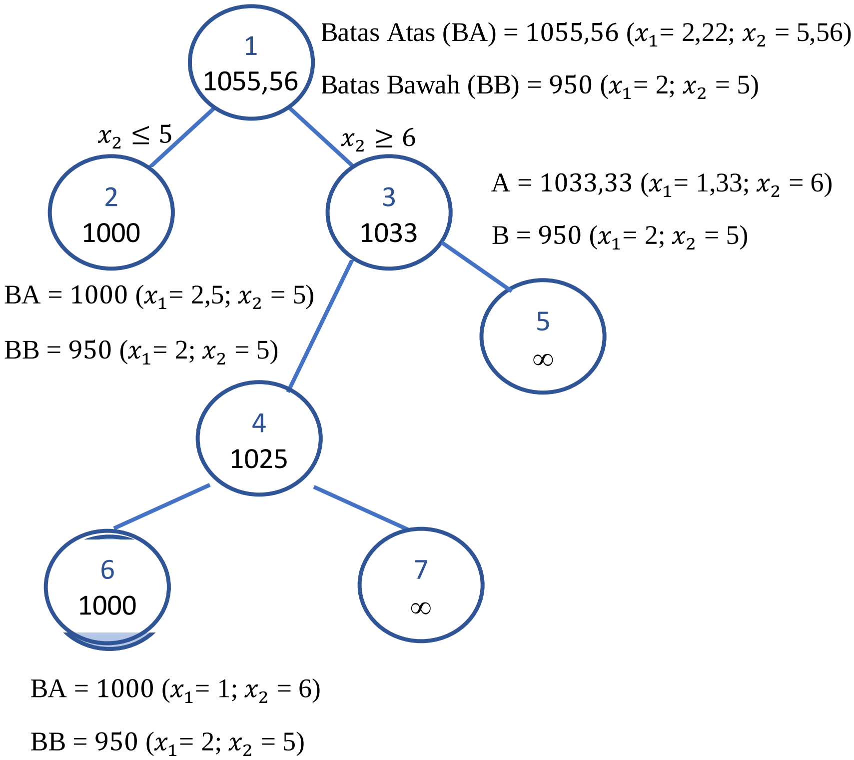
$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulatPada simpul ketujuh dengan metode simpleks didapatkan tidak ada solusi yang layak (nilai Z melebihi maksimum) untuk model tersebut dimana masih juga keduanya tidak berupa bilangan bulat (x_1 dan x_2).



Gambar 8.3.1.3 Grafik Titik Optimum dan Daerah Penyelesaian

Dari hasil penyelesaian simpul keenam dan ketujuh kita telah menemukan solusi bilangan bulat, yakni terdapat pada simpul keenam. Kita dapat mengambil kesimpulan solusi bilangan bulat untuk contoh soal 8.3.1 adalah x_1= 1 dan x_2 = 6 dengan Z = 1000. Hasil ini lebih baik jika dibandingkan dengan nilai minimum x_1= 2 dan x_2 = 5 dengan Z = 950.

Perhatikan kembali gambar simpul pertama sampai ketujuh pada gambar dibawah ini, pahami dan cobalah gambar dibuku tulismu.



Gambar 8.3.1.4 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Kedua dan Ketiga.

Contoh Soal 8.3.2

Pada contoh dibawah ini akan dijelaskan lebih singkat dari sebelumnya tanpa penjabaran detail, untuk itu pahami dana mengertilah contoh soal pertama.

Maksimumkan Z = $5x_1 + 8x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Carilah nilai maksimumnya dengan menggunakan metode branch and bound!

Penyelesaian :

Tahap 1 : Diketahui (sudah terjabarkan langsung disoal)

Tahap 2 : Eleminasi Substitusi

Cari nilai $x_1, x_2, dan\ Z$ dari persamaan yang terdapat di tahap 1.

$x_1 + x_2 = 6$

$5x_1 + 9x_2 = 45$

Maka didapat, $x_1 = 2{,}25$ dan $x_2 = 3{,}75$ dengan $Z = 41{,}25$

Tahap 3 : Metode Branch and Bound

Batas Atas (BA) = 41,25 (x_1= 2,25; x_2 = 3,75)

Batas Bawah (BB) = 34 (x_1= 2; x_2 = 3)

Gambar 8.3.2.1 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Pertama

Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

Simpul 2 dan 3

Dengan acuan $x_2 \leq 3$ dan $x_2 \geq 4$

Maksimumkan Z = $5x_1 + 8x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Simpul dua memperoleh solusi $x_1 = 3$ dan $x_2 = 3$ dengan $Z = 39$

Batas Atas (BA) = 39 (x_1= 3; x_2 = 3)

Batas Bawah (BB) = 34 (x_1= 2; x_2 = 3)

Maksimumkan Z = 5x_1 + 8x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Simpul ketiga memperoleh solusi $x_1 = 1{,}8$ dan $x_2 = 4$ dengan $Z = 41$

Batas Atas (BA) = 41 (x_1= 1,8; x_2 = 4)

Batas Bawah (BB) = 34 (x_1= 2; x_2 = 3)

Simpul 4 dan 5

Dengan acuan $x_1 \leq 1$ dan $x_1 \geq 2$

Maksimumkan Z = 5x_1 + 8x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4$

$x_1 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Simpul keempat memperoleh solusi $x_1 = 1$ dan $x_2 = 4{,}44$ dengan $Z = 40{,}55$

Batas Atas (BA) = 40,55 (x_1= 1; x_2 = 4,44)

Batas Bawah (BB) = 34 (x_1= 2; x_2 = 3)

Maksimumkan Z = 5x_1 + 8x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Pada simpul kelima dengan metode simpleks didapatkan tidak ada solusi yang layak (nilai Z melebihi maksimum) untuk model tersebut dimana masih juga keduanya tidak berupa bilangan bulat (x_1 dan x_2).

Simpul 6 dan 7

Dengan acuan $x_2 \leq 4$ dan $x_2 \geq 5$

Maksimumkan Z = 5x_1 + 8x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Simpul keenam memperoleh solusi $x_1 = 1$ dan $x_2 = 4$ (ada dua pertidaksamaan dengan angka yang sama) dengan $Z = 37$

Batas Atas (BA) = 37 (x_1= 1; x_2 = 4)

Batas Bawah (BB) = 34 (x_1= 2; x_2 = 3)

Maksimumkan Z = 5x_1 + 8x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_2 \geq 4$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \geq 5$

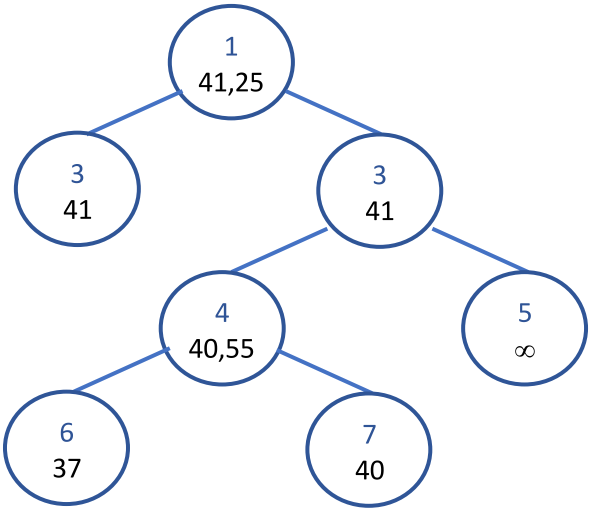
$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Simpul ketujuh memperoleh solusi $x_1 = 0$ dan $x_2 = 5$ dengan $Z = 40$

Batas Atas (BA) = 40 (x_1= 0; x_2 = 5)

Batas Bawah (BB) = 34 (x_1= 2; x_2 = 3)

Dengan demikian solusi yang paling tepat terdapat pada simpul ketujuh yakni $x_1 = 0$ dan $x_2 = 5$ dengan $Z = 40$.



Gambar 8.3.2.2 Solusi Metode Branch and Bound

8.4.Kegiatan Pembelajaran 4. Rangkuman

A. Metode cutting plane

Metode cutting plane atau metode bidang pemotong diperkenalkan oleh Ralph Gomory pada tahun 1950-an sebagai metode untuk memecahkan pemograman integer dan pemograman *mixed-integer*. Metode *cutting plane* merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan program linier pada bilangan bulat seperti, bilangan bulat murni ataupun campuran dengan penambahan batasan baru yang disebut Gomory.

Terdapat beberapa prosedur dalam metode *cutting plane*, sebagai berikut :

1. Menyelesaikan masalah dengan metode simpleks.
2. Apabila solusi yang dihasilkan adalah bilangan bulat berarti masalah tersebut selesai dengan solusi tersebut merupakan solusi bilangan bulat optimum. Akan tetapi, jika solusi variabel $(x_{1,}x_2, \dots, x_n)$ yang telah dihasilkan berarti bukan merupakan bilangan bulat karena bilangan bulat tersebut adalah pecahan campuran. Kemudian dengan adanya memotong bagian pecahannya dapat menimbulkan kendala dalam tabel simpleks.
3. Menyelesaikan kembali tabel simpleks yang telah ditambahkan pertidaksamaan Gomory dengan metode simpleks.
4. Diperiksa kembali solusi dari metode simpleks tersebut dan ulangi kembali langkah-langkah yang ada sehingga mendapatkan solusi metode simpleks, bilangan bulat.

B. Metode Branch and Bound

Branch and Bound adalah suatu pendekatan untuk penyelesaian suatu persoalan yang didasarkan pada ide pemisahan semua penyelesaian layak terhadap suatu persoalan ke dalam subpersoalan yang lebih kecil dan sifatnya saling lepas (*mutually exclusive*). *Branching* adalah langkah untuk membuat dua subpersoalan Pemrograman Linier yang sesuai dengan dua pembatas yang saling lepas. *Bounding* adalah langkah untuk menyelesaikan masing-masing subpersoalan dengan Pemrograman Linier relaksasi/mengabaikan batasan integer. Tahapan dalam menggunakan metode Branch and Bound, sebagai berikut :

Tahap 1 : **Diketahui**

Penulisan persamaan yang terdapat pada soal, mulai dari persamaan biasa sampai persamaan maksimum/minimumnya.

Tahap 2 : **Eliminasi dan Subtitusi**

Pada tahap inilah diperlukan metode simpleks, akan tetapi siswa juga dapat menggunakan POM-QM untuk menyelesaikan permasalah persamaan program linier. Dalam menentukan simpul pertama siswa memilih bilangan dengan desimal paling besar.

Tahap 3 : **Metode Branch and Bround**

Tahap ini merupakan awal dari pembentukan batas atas dan bawah suatu persamaan program linier bilangan bulat, nantinya simpul pertama akan terbentuk ditahap ini. Dalam menentukan simpul pertama siswa memilih bilangan dengan desimal paling besar untuk menjasi batas baru 1.

Tahap 4 : **Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround**

Pada tahap inilah siswa akan mencapai solusi paling tepat melalui simpul-simpul dan pencabangan yang dibuat. Pada simpul kedua dan ketiga batas barunya (batas baru 2) ditentukan melalui hasil dari batas berlainan dari batas baru. Misalnya batas baru 1 merupakan x_1 maka batas baru 2 dipengaruhi akan x_2, begitupun selanjutnya untuk simpul berikutnya sesuai dengan keperluan.

8.5.Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Diskusi Kelompok

Bagi kelompokmu sesuai dengan perintah Guru, kemudian selesaikanlah bersama-sama soal dibawah ini melalui diskusi singkat bersama teman sekelompokmu!

1. Javier pemilik suatu toko roti berencana untuk mengembangkan usahanya dengan membeli beberapa coklat dan tepung baru. Pemilik memperkirakan bahwa setiap coklat yang dibeli akan meningkatkan laba sebesar $2 per hari dan setiap tepung akan meningkatkan laba sebesar $3 setiap hari. Jumlah bahan baku yang dapat dibeli pemilik dibatasi oleh harganya masing-masing dan ruang yang tersedia di toko. Harga pembelian barang dan persyaratan ruang dijabarkan dalam tabel berikut.

Mesin	Kebutuhan Ruangan	Harga Barang
Coklat	2	$35
Tepung	4	$44

Tabel 8.5.1 Tabel Harga dan Persyaratan Ruang barang

Sang pemilik toko memiliki *budget* sebesar $2.020 untuk membeli barang-barang tersebut dan 132 kaki persegi untuk luas ruangan yang tersedia. Javier ingin mengetahui Ia harus membeli berapa coklat dan tepung agar dapat meningkatkan keuntungannya dengan maksimal.

Penyelesaian :

Tahap 1 : Diketahui

Maksimumkan Z = $\ldots x_1 + 3x_2$

dp. $35x_1 + \ldots x_2 \leq \$\ldots$

$\ldots x_1 + 4x_2 \leq \ldots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Dimana, $x_1 = \ldots x_2 = \text{tepung}$

Tahap 2 : Eleminasi Substitusi

Cari nilai $x_1, x_2, dan\ Z$ dari persamaan yang terdapat di tahap 1.

$35x_1$ + …x_2 $=$ $…

… x_1 + $4x_2$ $=$ …

Maka didapat, $x_1 = 43{,}69$ dan $x_2 = …$ dengan $Z = …$

Tahap 3 : Metode Branch and Bound

1
…

Batas Atas (BA) = … (x_1= 43,69; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= … ; x_2 = 11)

Gambar 8.5.1 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Pertama

Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

Simpul 2 dan 3

Dengan demikian batas yang diambil $x_1 = …$, maka batas barunya kurang dari … dan lebih dari 44

Maksimumkan Z = …x_1 + $3x_2$

dp. $35x_1$ + …$x_2 \leq$ $…

… x_1 + $4x_2 \leq$ …

$x_1 \leq \cdots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Untuk mempermudah mencari nilai maksimum kita dapat menggunakan POM-QM dalam me nyelesaikan masalah tiap cabang pada proses metode branch and bound. Pada simpul kedua tersebut didapatkan $x_1 = 43$ dan $x_2 = …$ dengan $Z = …$

Batas Atas (BA) = … (x_1= 43; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= … ; x_2 = 11)

Sedangkan untuk simpul ketiga, mode matematika yang telah ditambahkan kendala baru tersebut adalah sebagai berikut;

Maksimumkan Z = …x_1 + 3x_2

dp. 35x_1 + …x_2 ≤ $…

… x_1 + 4x_2 ≤ …

$x_1 \geq 44$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Dalam sampul ketiga didapatkan sub-solusi $x_1 = 44$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = \ldots$

Pada sampul ini tidak ada solusi yang layak (nilai Z melebihi maksimum) untuk model tersebut dimana masih juga keduanya tidak berupa bilangan bulat (x_1 dan x_2).

Simpul 4 dan 5

Dikarenakan hanya pada simpul kedua yang masih layak diterima solusinya maka batasan baru yang akan kita buat tentunya 11 dan … karena nilai $x_2 = \ldots$ $(11 \leq x_1 \leq \ldots)$

Untuk simpul keempat kita akan menambahkan batasan $x_2 \leq 11$ sehingga didapatkan model matematika sebagai berikut;

Maksimumkan Z = …x_1 + 3x_2

dp. 35x_1 + …x_2 ≤ $…

… x_1 + 4x_2 ≤ …

$x_1 \leq \cdots$

$x_2 \leq 11$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Pada simpul keempat dengan metode simpleks didapatkan solusi $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = 11$ dengan $Z = \ldots$

Hasil pada simpul keempat masih juga … (nilai Z melebihi maksimum) untuk model tersebut dimana masih juga keduanya tidak berupa bilangan bulat (x_1 dan x_2).

Untuk simpul kelima, kita akan menambahkan batasan $x_2 \geq \ldots$ sehingga didapatkan model matematika sebagai berikut;

Maksimumkan Z = $\ldots x_1 + 3x_2$

dp. $35x_1 + \ldots x_2 \leq \$\ldots$

$\ldots x_1 + 4x_2 \leq \ldots$

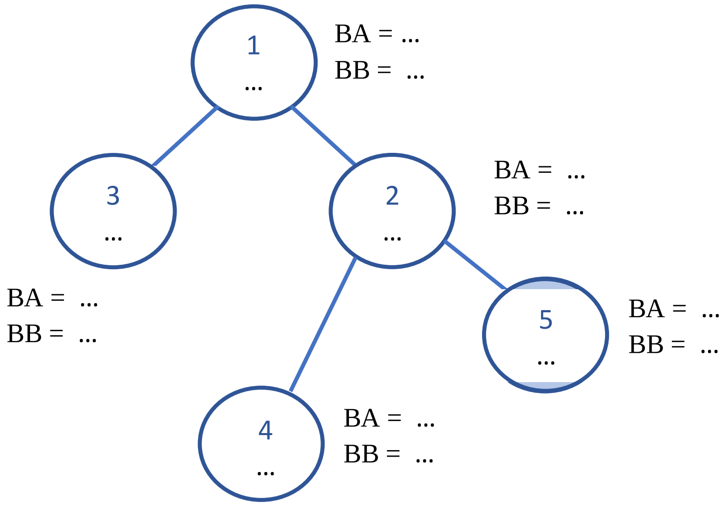
$x_1 \leq \cdots$

$x_2 \geq \cdots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Pada simpul kelima dengan metode simpleks didapatkan solusi $x_1 = 42$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = \ldots$ dengan demikian simpul lima merupakan solusi paling tepat.

Jika kamu dan kelompkmu berhasil menyelesaikan soal diatas lengkapilah titik-titik dibawah ini sesuai dengan jawaban yang kamu kerjakan!



Gambar 8.5.2 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Kedua dan Ketiga

2. Maksimumkan Z = 10x_1 + 20x_2

dp. x_1 + x_2 $\leq$ 6

2x_1 + 5x_2 $\leq$ 25

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Carilah nilai maksimumnya dengan menggunakan metode branch and bound!

Penyelesaian :

Tahap 1 : Diketahui (sudah terjabarkan langsung disoal)

Tahap 2 : Eleminasi Substitusi

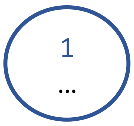
Cari nilai $x_1, x_2, dan\ Z$ dari persamaan yang terdapat di tahap 1.

x_1 + $x_2 = 6$

2x_1 + 5$x_2 = 25$

Maka didapat, $x_1 = 1{,}67$ dan $x_2 = 4{,}33$ dengan $Z = 103{,}3$

Tahap 3 : Metode Branch and Bound



Batas Atas (BA) = … (x_1= 1,67 ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Gambar 8.5.3 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Pertama

Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

Simpul 2 dan 3

Dengan acuan $x_1 \leq 1$ dan $x_1 \geq 2$

Maksimumkan Z = 10x_1 + 20x_2

dp. x_1 + x_2 $\leq$ 6

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul dua ialah $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 102$

Batas Atas (BA) = 102 (x_1= 1; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Sementara pada simpul ketiga problematika persamaannya;

Maksimumkan Z = $10x_1 + 20x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi simpul ketiga ialah $x_1 = 2$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 94$

Batas Atas (BA) = 94 (x_1= … ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Simpul 4 dan 5

Dikarenakan simpul … memperoleh solusi yang lebih maksimum maka acuannya $x_2 \leq 4$ dan $x_2 \geq \cdots$

Maksimumkan Z = $10x_1 + 20x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \leq \ldots$

$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Simpul keempat memperoleh solusi $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = 4$ dengan $Z = 105$

Batas Atas (BA) = ... (x_1= … ; x_2 = 4)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Maksimumkan Z = 10x_1 + 20x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \leq \ldots$

$x_2 \geq \cdots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

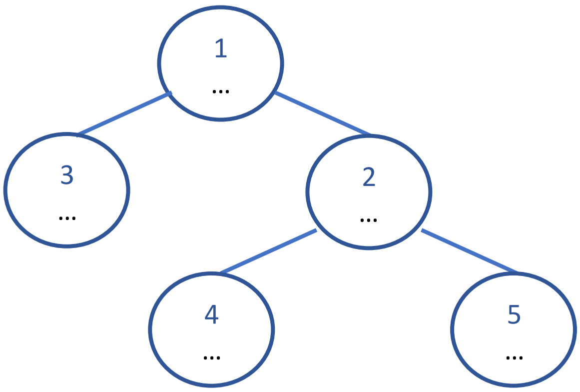
Simpul kelima memperoleh solusi $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 100$

Batas Atas (BA) = 100 (x_1= … ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Jika kita lihat seksama solusi yang diperoleh simpul kelima merupakan simpulan paling tepat karena memiliki hasil sub-optimum dengan sepasang bilangan bulat.

Isilah kembali titik-titik dibawah ini sesuai dengan apa yang kelompok kamu kerjakan!



Gambar 8.5.4 Solusi Metode Branch and Bound

3. Maksimumkan Z = x_1 + $2x_2$

dp. $10x_1$ + $7x_2 \leq 70$

$5x_1$ + $10x_2 \leq 50$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Carilah nilai maksimumnya dengan menggunakan metode branch and bound!

Penyelesaian :

Tahap 1 : Diketahui (sudah terjabarkan langsung disoal)

Tahap 2 : Eleminasi Substitusi

Cari nilai $x_1, x_2, dan\ Z$ dari persamaan yang terdapat di tahap 1.

$10x_1$ + $7x_2 = 70$

$5x_1$ + $10x_2 = 50$

Maka didapat, $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = 2{,}31$ dengan $Z = \ldots$

Tahap 3 : Metode Branch and Bound

1

…

Batas Atas (BA) = … (x_1= … ; x_2 = 2,31)

Batas Bawah (BB) = 9 (x_1= 5; x_2 = …)

Gambar 8.5.5 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Pertama

Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

Simpul 2 dan 3

Dengan acuan $x_1 \leq \ldots$ dan $x_1 \geq 6$

Maksimumkan Z = x_1 + $2x_2$

dp. $10x_1$ + $7x_2 \leq 70$

$5x_1 + 10x_2 \leq 50$

$x_1 \leq \ldots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul dua ialah $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 10$

Batas Atas (BA) = 10 ($x_1 = \ldots$; $x_2 = \ldots$)

Batas Bawah (BB) = 9 ($x_1 = 5$; $x_2 = \ldots$)

Sementara pada simpul ketiga problematika persamaannya;

Maksimumkan Z = $x_1 + 2x_2$

dp. $10x_1 + 7x_2 \leq 70$

$5x_1 + 10x_2 \leq 50$

$x_1 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

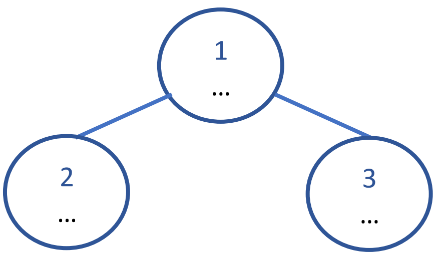
Solusi dari simpul dua ialah $x_1 = 6$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 10$

Batas Atas (BA) = 10 ($x_1 = 6$; $x_2 = \ldots$)

Batas Bawah (BB) = 9 ($x_1 = 5$; $x_2 = \ldots$)

Jika kita lihat seksama solusi yang diperoleh simpul ketiga merupakan simpulan paling tepat karena memiliki hasil sub-optimum dengan sepasang bilangan bulat.

Isilah kembali titik-titik dibawah ini sesuai dengan apa yang kelompok kamu kerjakan!



Gambar 8.5.6 Solusi Metode Branch and Bound

4. Maksimum dan Minimumkan Z = $2x_1 + 4x_2$

    dp. $12x_1 + 25x_2 \leq 100$

    $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

    $x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Carilah nilai maksimum dan minimumnya dengan menggunakan metode branch and bound!

Penyelesaian :

Tahap 1 : Diketahui (sudah terjabarkan langsung disoal)

Tahap 2 : Eleminasi Substitusi

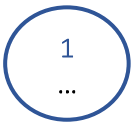
Cari nilai $x_1, x_2, dan\ Z$ dari persamaan yang terdapat di tahap 1.

$12x_1 + 25x_2 = 100$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

Maka didapat, $x_1 = 1{,}96$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = \ldots$

Tahap 3 : Metode Branch and Bound



Batas Atas (BA) = … (x_1= 1,96 ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …) (batas minimum)

Gambar 8.5.7 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Pertama

Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

Simpul 2 dan 3

Dengan acuan $x_1 \leq 1$ dan $x_1 \geq \ldots$ kita akan mencari nilai maksimumnya.

Maksimumkan Z = $2x_1 + 4x_2$

dp. $12x_1 + 25x_2 \leq 100$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul dua ialah $x_1 = 1$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 16{,}08$

Batas Atas (BA) = 16,08 (x_1= 1; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …), merupakan nilai minimum dari persamaan ini.

Sementara pada simpul ketiga problematika persamaannya;

Maksimumkan Z = $2x_1 + 4x_2$

dp. $12x_1 + 25x_2 \leq 100$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 \geq \ldots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul ketiga ialah $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = 3{,}04$ dengan $Z = \ldots$

Batas Atas (BA) = ... (x_1= … ; x_2 = 3,04)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …), merupakan nilai minimum dari persamaan ini.

Simpul 4 dan 5

Dikarenakan simpul … memperoleh solusi yang lebih maksimum maka acuannya $x_2 \leq \ldots$ dan $x_2 \geq \cdots$

Maksimumkan Z = $2x_1 + 4x_2$

dp. $12x_1 + 25x_2 \leq 100$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 \geq \ldots$

$x_2 \leq \ldots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul keempat ialah $x_1 = 2{,}08$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = \ldots$

Batas Atas (BA) = ... (x_1= 2,08 ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …), merupakan nilai minimum dari persamaan ini.

Selanjutnya untuk simpul kelima problem matematikanya;

Maksimumkan Z = $2x_1$ + $4x_2$

dp. $12x_1 + 25x_2 \leq 100$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 \geq \ldots$

$x_2 \geq \cdots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul keempat ialah $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 16$

Batas Atas (BA) = 16 (x_1= … ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …), merupakan nilai minimum dari persamaan ini.

Simpul 6 dan 7

Dikarenakan simpul … memperoleh solusi yang lebih maksimum maka acuannya $x_1 \leq \ldots$ dan $x_1 \geq \cdots$

Maksimumkan Z = $2x_1$ + $4x_2$

dp. $12x_1 + 25x_2 \leq 100$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 \geq \ldots$

$x_2 \leq \ldots$

$x_1 \leq \ldots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul keenam ialah $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = 3{,}04$ dengan $Z = 16{,}16$

Batas Atas (BA) = 16,16 (x_1= … ; x_2 = 3,04)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …), merupakan nilai minimum dari persamaan ini.

Untuk simpul ketujuh problem matematikanya;

Maksimumkan Z = $2x_1$ + $4x_2$

dp. $12x_1 + 25x_2 \leq 100$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 \geq \ldots$

$x_2 \leq \ldots$

$x_1 \geq \cdots$

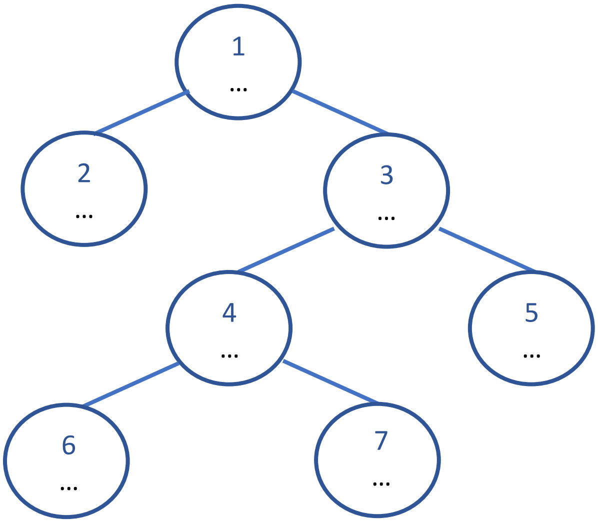
$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul keempat ialah $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = 2{,}56$ dengan $Z = \ldots$

Pada sampul ini tidak ada solusi yang layak (nilai Z melebihi sub-simpul sebelumnya) untuk model tersebut dimana masih juga keduanya tidak berupa bilangan bulat (x_1 dan x_2).

Dikarenakan simpul keenam merupaka satu-satunya simpul yang bisa dicabangkan lagi, maka hasilnya akan berakhir seperti simpul kelima. Dengan demikian simpul kelima merupakan solusi paling tepat, dimana kedua batasnya merupakan bilangan bulat yang memiliki nilai sub-optimum.

Isilah kembali titik-titik dibawah ini sesuai dengan apa yang kelompok kamu kerjakan!



Gambar 8.5.8 Solusi Metode Branch and Bound

5. Minimumkan Z = $10x_1 + 10x_2$

dp. $x_1 + 5x_2 \leq 16$

$4x_1 + 2x_2 \leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Carilah nilai minimumnya dengan menggunakan metode branch and bound!

Penyelesaian :

Tahap 1 : Diketahui (sudah terjabarkan langsung disoal)

Tahap 2 : Eleminasi Substitusi

Cari nilai $x_1, x_2, dan\ Z$ dari persamaan yang terdapat di tahap 1.

$x_1 + x_2 = 6$

$2x_1 + 5x_2 = 25$

Maka didapat, $x_1 = 1{,}67$ dan $x_2 = 4{,}33$ dengan $Z = 103{,}3$

Tahap 3 : Metode Branch and Bound

1

...

Batas Atas (BA) = … (x_1= 1,67 ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Gambar 8.5.9 Solusi Metode Branch and Bound pada Simpul Pertama

Tahap 4 : Pencarian Solusi dengan Simpul Branch and Bround

Simpul 2 dan 3

Dengan acuan $x_1 \leq 1$ dan $x_1 \geq 2$

Maksimumkan Z = $10x_1$ + $20x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi dari simpul dua ialah $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 102$

Batas Atas (BA) = 102 (x_1= 1; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Sementara pada simpul ketiga problematika persamaannya;

Maksimumkan Z = $10x_1$ + $20x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Solusi simpul ketiga ialah $x_1 = 2$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 94$

Batas Atas (BA) = 94 (x_1= … ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Simpul 4 dan 5

Dikarenakan simpul … memperoleh solusi yang lebih maksimum maka acuannya $x_2 \leq 4$ dan $x_2 \geq \cdots$

Maksimumkan Z = 10x_1 + 20x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \leq \ldots$

$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Simpul keempat memperoleh solusi $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = 4$ dengan $Z = 105$

Batas Atas (BA) = ... (x_1= … ; x_2 = 4)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Maksimumkan Z = 10x_1 + 20x_2

dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 5x_2 \leq 25$

$x_1 \leq \ldots$

$x_2 \geq \cdots$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

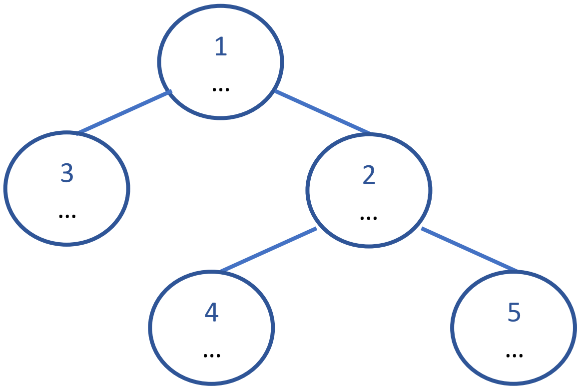
Simpul kelima memperoleh solusi $x_1 = \ldots$ dan $x_2 = \ldots$ dengan $Z = 100$

Batas Atas (BA) = 100 (x_1= … ; x_2 = …)

Batas Bawah (BB) = … (x_1= 1 ; x_2 = …)

Jika kita lihat seksama solusi yang diperoleh simpul kelima merupakan simpulan paling tepat karena memiliki hasil sub-optimum dengan sepasang bilangan bulat.

Isilah kembali titik-titik dibawah ini sesuai dengan apa yang kelompok kamu kerjakan!



Gambar 8.5.10 Solusi Metode Branch and Bound

6. Maksimumkan Z = $5x_1$ + $4x_2$

dp. $x_1 + x_2 \leq 5$

$10x_1 + 6x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

Carilah nilai maksimumnya dengan menggunakan metode cutting plane!

Penyelesaian :

Iterasi I

Langkah 1 → k = 0

Langkah 2 → Kembali ke awal dengan daerah layak pemasalahan ke-0, yaitu LP_0

Maksimalkan : $z - 5x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$

Kendala : $x_1 + x_2 + s_1 = 5$

$$10x_1 + 6x_2 + s_2 = 45$$

Tabel awal :

x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	1	1	0	5
10	6	0	1	45
-5	-4	0	0	0

Tabel 8.5.2 Tabel Simpleks Iterasi Awal 1

Menggunakan metode simpleks pada bagian A diperoleh untuk masalah diatas, adalah :

$z_0 = 23{,}75$, $x_1 = 3{,}75$, dan $x_2 = 1{,}25$

x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	1	2,5	-0,25	…
1	0	-1,5	0,15	…
0	0	2,5	0,25	…

Tabel 8.5.3 Tabel Simpleks Iterasi Awal 2

Langkah 3 → Bilangan yang dihasilkan tidak bulat, saat kendala diubah ke-1, menjadi :

$$x_2 + 2s_1 + 0{,}5s_1 - s_2 + 0{,}75s_2 = 1 + 0{,}25$$

Langkah 4 → Bentuk persamaan menjadi :

$$x_2 + 2s_1 - s_2 - 1 = 0{,}25 - 0{,}5s_1 - 0{,}75s_2$$

Langkah 5 → Bentuk persamaan baru menjadi :

$$0{,}25 - 0{,}5s_1 - 0{,}75s_2 \leq 0$$

Lalu, ubah k = 1

Iterasi II

Langkah 1

Selesaikan permasalahan linear awal dengan daerah layak permasalahan ke-1, yaitu LP_1

Bentuk standartnya adalah;

Maksimumkan : $z - 5x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0$

Kendala;

$x_1 + x_2 + s_1 = 5$

$10x_1 + 6x_2 + s_2 = 45$

$0{,}5s_1 - 0{,}75s_2 + s_3 = -0{,}25$

Tabel awal adalah :

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
1	1	1	0	0	5
10	6	0	1	0	45
0	0	-0,5	-0,75	1	-0,25
-5	-4	0	0	0	0

Tabel 8.5.4 Tabel Simpleks Iterasi Kedua 1

Langkah 2 → Menggunakan metode dual simpleks pada bagian C, diperoleh masalah diatas :

$z_0 = 23{,}6667$

$x_1 = 3{,}6667$

$x_2 = 1{,}3333$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	0	0,667	…	0	0,3333
1	0	-1,667	…	0	…
0	1	2,667	…	1	….

0	0	2,333	…	0	…

Tabel 8.5.5 Tabel Simpleks Iterasi Kedua 2

Langkah 3 → Bilangan yang dihasilkan tidak bulat, saat kendala diubah ke-1, menjadi :

$$0{,}6667s_1 + s_2 - 2s_3 + 0{,}6667s_3 = 0{,}3333$$

Langkah 4 → Bentuk persamaan, diperoleh :

$$s_2 - 2s_3 = 0{,}3333 - \cdots s_1 - \cdots s_3$$

Langkah 5 → Terdapat kendala baru, yaitu :

$$0{,}3333 - 0{,}6667s_1 - 0{,}6667s_3 \leq 0$$

Lalu, ubah k = 2

Iterasi III

Persamaan linear awal dengan daerah permasalahan ke-2, yaitu : LP_2. Bentuk standar, maksimalkan :

$$z - 5x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 - 0s_4 = 0$$

7. Maksimum $Z = 7x_1 + 10x_2$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ and integer}$$

Carilah nilai maksimumnya dengan metode cutting plane!

Penyelesaian :

Langkah Awal

- Optimum LP tableau:

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	Solution
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	$66\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$4\frac{1}{2}$

- Sources row:

$$z + \frac{63}{22}x_3 + \frac{31}{22}x_4 = 66\frac{1}{2} \qquad (z\text{-equation})$$

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\frac{1}{2} \qquad (x_2\text{-equation})$$

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4\frac{1}{2} \qquad (x_1\text{-equation})$$

- Factoring: x_2-*equation*
  - *factored as:* $x_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = 3 + \frac{1}{2}$
- Factorial cut:

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

- Cut's equation form:

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + s_1 = -\frac{1}{2}, \quad s_1 \geq 0 \qquad (\text{Cut I})$$

Langkah 1 :

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	…	$66\frac{1}{22}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	…	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	….	$4\frac{1}{2}$
s_1	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	….	$-\frac{1}{2}$

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	…	$66\frac{1}{22}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	…	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	….	$4\frac{1}{2}$
s_1	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	….	$-\frac{1}{2}$

Tabel 8.5.6 Tabel Simpleks Iterasi Awal 1

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
z	0	0	…	1	9	62
x_2	0	1	….	0	3	3
x_1	1	0	…	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$4\frac{3}{7}$
x_3	0	0	…	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

Tabel 8.5.7 Tabel Simpleks Iterasi Awal 2

Maka, langkah akhirnya;

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Solution
z	0	0	0	0	3	7	58
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	−1	1	4
x_3	0	0	1	0	−4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	−7	4

a. Maksimum : $Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$
Menjadi;

$$4x_1 - 4x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ and integer}$$

b. Maksimum : $Z = 3 + x_2 + 3x_3$
Menjadi;

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$4x_2 - 3x_3 \leq 2$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ and integer}$$

8.6.Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Latihan Mandiri

Perhatikan dengan teliti dan kerjakanlah secara individu soal-soal dibawah ini!

1. Javier berjualan alat tulis untuk mencari dana kegiatan organisasi yang rutin dilakukan saat ini. Ia berniat menjual pulpen dengan modal 5000/pcs dan pensil seharga 3500/pcs. Javier berniat meningkatkan labanya sebesar 1000 untuk pensil dan 2000 untuk pupen. Sementara modal yang Ia miliki saat ini hanya 62.000 dengan total pemesenan 80pcs. Tentukan keuntungan maksimum dan minimum yang akan diperoleh Javier!
2. Anna merupakan remaja mandiri yang mencari uang saku melalui usaha masker online. Kebutuhan Anna disekolah akhir-akhir ini meningkat dikarenakan Ia sibuk ujian masuk perguruan tinggi. Untukitu Anna ingin memperbanyak stok masker jualannya, sehingga keuntungan yang Ia dapat bertambah $2 untuk masker organik dan $3 masker rorec. Harga dari setiap masker yang akan dijual senilai $5 masker organik/ 10pcs, dan $8 masker rorec/ 20pcs, sementara Anna saat ini memiliki uang $100 dengan memperkirakan 215pcs pemesanan. Dengan modul tersebut berapakah keuntungan maksimum yang akan didapat Anna!
3. Carilah nilai maksimum dari Z = $5x_1 + 10x_2$

   dp. $x_1 + x_2 \leq 10$

   $2x_1 + 5x_2 \leq 37$

   $x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat
4. Carilah nilai minimum dari Z = $100x_1 + 150x_2$

   dp. $x_1 + x_2 \leq 6$

   $2x_1 + 5x_2 \leq 37$

   $x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

5. Carilah nilai minimum dan maksimum dari ;
   Z = 20x_1 + 30x_2

   dp. $x_1 + 2x_2 \leq 9$

   $2x_1 + 7x_2 \leq 67$

   $x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

6. Carilah nilai maksimum dan minimum dari ;
   Z = 5x_1 + 10x_2

   dp. $30x_1 + 20x_2 \leq 120$

   $50x_1 + 60x_2 \leq 300$

   $x_1, x_2 \geq 0$ dan bilangan bulat

7. Perusahaan Conny merupakan perusahaan yang bergerak pada bidang, bisnis rumah makan cepat saji (*fast food*). Perusahaan ini berkembang dengan pesat sehingga ingin membuka cabang baru di beberapa kota besar di Indonesia salah satunya adalah, Bali. Di kota Bali terdapat delapan lokasi potensial yang dapat dipilih oleh perusahaan tersebut. Lokasi cabang yang dipilih harus bisa memastikan bahwa jika ada konsumen yang memesan maka pesanan harus sudah sampai ke konsumen tidak lebih dari 30 menit setelah pesanan diterima.Waktu yang diperlukan 10 menit untuk menyiapkan pesanan konsumen. Perusahaan berusaha untuk membuka cabang sesedikit mungkin namun bisa mengatur semua permintaan di kota Bali. Berikut data lokasi dan waktu tempuh ke setiap daerah.

ke-	1	2	3	4	5	6	7
1	0	10	20	12	20	15	14
2	10	0	25	35	20	10	23
3	20	25	0	15	15	20	17
4	12	35	15	0	15	25	20
5	20	20	15	15	0	14	25
6	15	10	20	25	14	0	24
7	14	23	17	20	25	24	0

Modelkan masalah tersebut!

8. Selain waktu tempuh, perusahaan juga memilih lokasi berdasarkan besarnya kapasitas cabang dan besarnya permintaan pada setiap lokasi. Kapasitas cabang yang bisa didirikan disetiap daerah dan permintaan adalah sebagai berikut:
   a) Modifikasi model anda!
   b) Tentukan nilai-nilai parameter yang bisa anda coba untuk melakukan validasi!
   c) Tentukan solusi dari nilai-nilai parameter yang anda cobakan tadi berdasarkan intuisi anda!

Lokasi	Kapasitas	Permintaan
1	2000	4000
2	1500	3000
3	3000	1000
4	2000	1000
5	2500	1500
6	2000	2000
7	1000	1000

9. Perhatikan model matematika berikut !
   Maksimumkan $Z = 5x_1 + 4x_2$
   dp. $3x_1 + 4x_2 \leq 10$
   $x_1,\ x_2 \geq 0$
   a. Tentukan solusi dari model matematika di atas dengan menggunakan metode *Gomory cut*

10. Tentukan solusi bilangan bulat untuk model matematika berikut. Maksimumkan $Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3$
    dp. $5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 20$
    $x_1 + 3x_2 \leq 12$
    $x_1,\ x_2, x_3 \geq 0$ dengan x_2 bilangan bulat

DAFTAR PUSTAKA

Achmad Basuki. 2003. Strategi Menggunakan Algoritma Genetika. Surabaya : PENS-ITS. B. Susanta. 1994.

Arthur, Geoffrion M. 1967. Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas Method.

Applied Mathematical Programming. Cambridge : Addison-Wesley Publishing Company. Bronson, R. & Naadimuthu, G. (1997).

Balas additive algorithm. Implisit Enumeration for 0-1 Integer Linear Programming. 1-8. [Anonim]. Integer Programming. Capital Budgeting Problem. 194-210 [BINUS] Universitas Bina Nusantara, FMIPA. 2008.

Clustering with Genetic Algorithms. Tesis Master. Australia : University of Western Australia. Datta, S., Garai, C. and Das, C. 2012. Efficient Genetic Algorithm on Linear Programming Problem for Fittest Chromosomes. Journal of Global Research in Computer Science. Vol. 3, No. 6, 1-7. 83 Desi Mariani. 2003.

Dynamic Programming and strong bounds for 0-1 knapsack problem. DEIS: University of Bologna. Merisa, Sulasmina. 2010.

Pemecahan Masalah Knapsack dengan Metode Branch and Bound. [Skripsi] Universitas Andalas. Siagian, P. 2006.

Society for Industrial and Apllied Mathematics. 9:178-190 Benjamin, Lev dan Weiss, Howard J. 1982.

Introduction To Mathematical Programming. Temple University school of Business. Martello Silvano, Psinger, David dan Toth, Paolo. 2000.

Penelitian Operasional Teori dan Praktek. Universitas Indonesia. Shena Permata, Anggi. 2007.

Pemecahan Masalah Knapsack dengan Menggunakan Algoritma Branch and Bound. [Skripsi] Institut Teknologi Bandung. Susanta, B. 1994.

Program Linear. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Dikti. Susi, Astuti H. 1999.

Penyelesaian optimum pemrograman linier biner(0-1) dengan algoritma balas. [skripsi]Universitas Diponegoro. Taha H.A.2007. Operations Research an introduction eighth edition: University of Arkansas, Fayetteville. Wahyujati, Ajie. 2009.

Operation Research 2. Jakarta. Yamit, Zulian. 1991.

Dynamic Programming 0-1 Knapsack Problem. FMIPA BINUS, Jakarta Barat. Universitas Sumatera Utara

Dictonary of Mathematics Second Edition. New York: McGraw-Hill. Premalatha, C. 2015.

Genetic Algorithm for Optimization Problems. International Journal of Research and Current Development. Vol. 1(1): 30-37. Purcell, E.J.& D.Verberg. 1987

Linear Programming. Yogyakarta: Bagian Penerbitan FE. Universitas Sumatera Utara [Anonim]. 1999.

Regresi Kuadrat Terkecil untuk Kalibrasi Bangunan Ukur Debit. Yogyakarta. Eddy Herjanto. 2008. Sains Manajemen. Jakarta: Grasindo. Gupta, S., & Panwar, P. 2013. Solving Travelling Salesman Problem Using Genetic Algorithm. International Journal of Research in computer Science and Software Engineering. Vol. 3, 376-380.

Kalkulus dan Geometri Analitis Terjemahan I N.Susila., B. Kartasasmita, dan Rawuh. Jakarta: Erlangga. Rao, S. 1984.

Sekilas Tentang Algoritma Genetika dan Aplikasinya pada Optimasi Jaringan Pipa Air Bersih. Bandung : ITB. Chambers, Lance. 2000.

Perbandingan Pendekatan Separable Programming dengan The Kuhn-Tucker Conditions dalam Pemecahan Masalah Nonlinear. Jurnal Teknik dan Ilmu Komputer. Vol. 01 No. 2. Budi Sukmawan. 2003.

Program Linear. Yogyakarta: Departemaen Pendidikan & Kebudayaan. Bazaraa M. S., H. D. Sherali and C. M. Shetty. 2006.

Nonlinear Programming. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons Inc. Bradley, Hax and Magnanti. 1976.

Schaum's Outline of Theory and Problems of Operations Research Second Edition. United States : McGraw-Hill. Budi Marpaung. 2012.

The Practical Handbook of Genetic Algorithms Application. CRC Press LLC N. W. Corporate Blvd. Boca Raton. Florida 33431 Cole, R. M. 1998.

Pemrograman Terpisahkan (Separable Programming). Bogor: Skripsi FMIPA IPB. Djoko Luknanto. 1992.

Hendra Gunawan. 2009. Pengantar Analisis Real. Bandung : 2000 Dewey Classification. Hillier, F.S and Gerald, L. Lieberman. 2001. Introduction to Operation Research 7 th ed. Singapore : McGraw-Hill, Inc. Jain, S. 2012.

Modified Gauss Elimination Technique for Separable Nonlinear Programming Problem. International Journal Industrial Mathematics. Vol. 4, No. 3. Licker, M. D. 2003.

.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd. Lahir di Sitampurung 26 November 1986, Taput, Propinsi Sumatra Utara. Saya merupakan anak kelima dari lima bersaudara. Penulis lahir dari pasangan suami istri Bapak Togu Lumbantoruan dan Ibu Ratima Br. Sianturi. Penulis sekarang bertempat tinggal di Jalan Matador Perum Gria Marza Blok C RT 01/RW 07 Jatirangga Cibubur, Jatisampurna, Bekasi. Penulis menyelesaikan Pendidikan Dasar di Sekolah Dasar Negeri 2 Sitampurung dan lulus pada Tahun 1999, lalu melanjutkan Sekolah Menengah Pertama di SLTP Negeri 2 Siborong-borong dan lulus pada Tahun 2002, melanjutkan Pendidikan di SMA PGRI 20 Siborong-borong lulus pada Tahun 2005, kemudian melanjutkan jenjang Pendidikan S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia (UKI) Jakarta dan lulus pada Tahun 2009, pada Tahun 2014 kemudian saya melanjutkan jenjang Pendidikan S2 di Universitas Negeri Jakarta (UNJ) Program Studi Mengister Pendidikan Matematika dan lulus pada Tahun 2017.

Saat ini penulis mengajar di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Kristen Indonesia (UKI) . Bahan ajar Pemograman Linear adalah salah satu bahan ajar yang ditulis untuk mempermudah proses belajar mengajar di dalam kelas. Harapan saya dengan di bantu bahan ajar ini para Dosen dan Mahasiswa akan lebih mudah memahami serta memperoleh hasil yang lebih baik. Saya sangat mengharapkan saran dan kritikan yang bersifat membangun untuk kemajuan bersama. Terimakasih, salam

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd