BMP.UKI:JHS-O1-PD-PM-III-2019

BUKU MATERI PEMBELAJARAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL

Disusun Oleh :
Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd

Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Kristen Indonesia

2019

KATA PENGANTAR

Mengucap syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena pertolongan-Nya saya dapat menyelesaikan Buku Materi Pembelajaran “PERSAMAAN DIFERENSIAL”. Meskipun banyak rintangan dan hambatan dalam proses pembuatan Buku Materi Pembelajaran ini, tetapi Puji Tuhan di dalam pembuatan Buku Materi Pembelajaran ini saya berhasil menyelesaikannya dengan baik.

Adapun tujuan penyusunan ini adalah untuk memenuhi kebutuhan dasar pembaca dan mahasiswa. Penyusunan Buku Materi Pembelajaran ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penulis menyadari bahwa Buku Materi Pembelajaran ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan Buku Materi Pembelajaran ini. Semoga Buku Materi Pembelajaran ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya mahasiswa. Akhir kata saya ucapkan terimakasih dan salam buat kita semua.

Jakarta,10 September 2019

Petunjuk Penggunaan Buku Materi Pembelajaran **(BMP)**

Penjelasan/Petujuk Bagi Mahasiswa

1. Bacalah Buku Materi Pembelajaran ini dengan seksama mulai dari kata pengantar sampai dengan latihan soal, kemudian pahami seluruh materi yang termuat di dalamnya.
2. Bacalah dengan seksama tujuan akhir antara untuk mengetahui apa yang akan diperoleh setelah mempelajari materi ini.
3. Buku Materi Pembelajaran ini memuat informasi tentang apa yang harus Anda lakukan untuk mencapai tujuan antara pembelajaran.
4. Pelajari dengan seksama materi tiap kegiatan belajar, jika ada informasi yang kurang jelas atau mengalami kesulitan dalam mempelajari setiap materi, sebaiknya berkonsultasi pada pengajar.
5. Perhatikan langkah-langkah dalam melakukan pekerjaan dengan benar untuk mempermudah dalam memahami suatu proses pekerjaan.
6. Kerjakan soal-soal dalam cek kemampuan untuk mengukur sampai sejauh mana pengetahuan yang telah Anda miliki.
7. Selesaikan semua latihan soal yang terdapat di dalam modul ini agar pemahaman anda berkembang dengan baik.
8. Setiap mempelajari satu sub kompetensi, anda harus mulai dari menguasai pengertian-pengertian dalam uraian materi, melaksanakan tugas-tugas dan mengerjakan latihan soal.
9. Dalam menyelesaikan latihan soal, anda tidak diperkenankan berdiskusi dengan teman anda sebelum selesai mengerjakan latihan soal dan diskusi kelompok.
10. Membahas hasil pekerjaan anda dengan teman sekelas dalam bentuk kelompok dan kerjakan soal diskusi kelompok

Kontrak Perkuliahan Matematika Dasar

Dengan ini kami bersepakat bahwa;

1. Batas keterlambatan masuk kuliah adalah 15 menit, jika **mahasiswa** terlambat maka mahasiswa diperkenankan masuk kelas namun **TIDAK** dapat mengisi presensi kuliah. Sebaliknya, jika **dosen** terlambat 15 menit maka seluruh mahasiswa boleh mengisi presensi kuliah. Selanjutnya, apabila keterlambatan lebih dari 15 menit maka dosen akan memberikan tugas mandiri dan mahasiswa mengisi presensi kuliah (presensi kuliah tidak berlaku bagi mahasiswa yang tidak hadir).
2. Apabila mahasiswa dan dosen tidak dapat hadir (karena sakit, ijin, atau keperluan tertentu), maka yang bersangkutan WAJIB memberikan informasi satu hari sebelumnya (jika mahasiswa) kepada dosen pengampu mata kuliah (Jitu Halomoan Lumbantoruan, M.Pd (081219553697))

   Catatan: apabila sakit (sertakan surat dari dokter) dan jika izin (sertakan surat dari orangtua/lembaga).

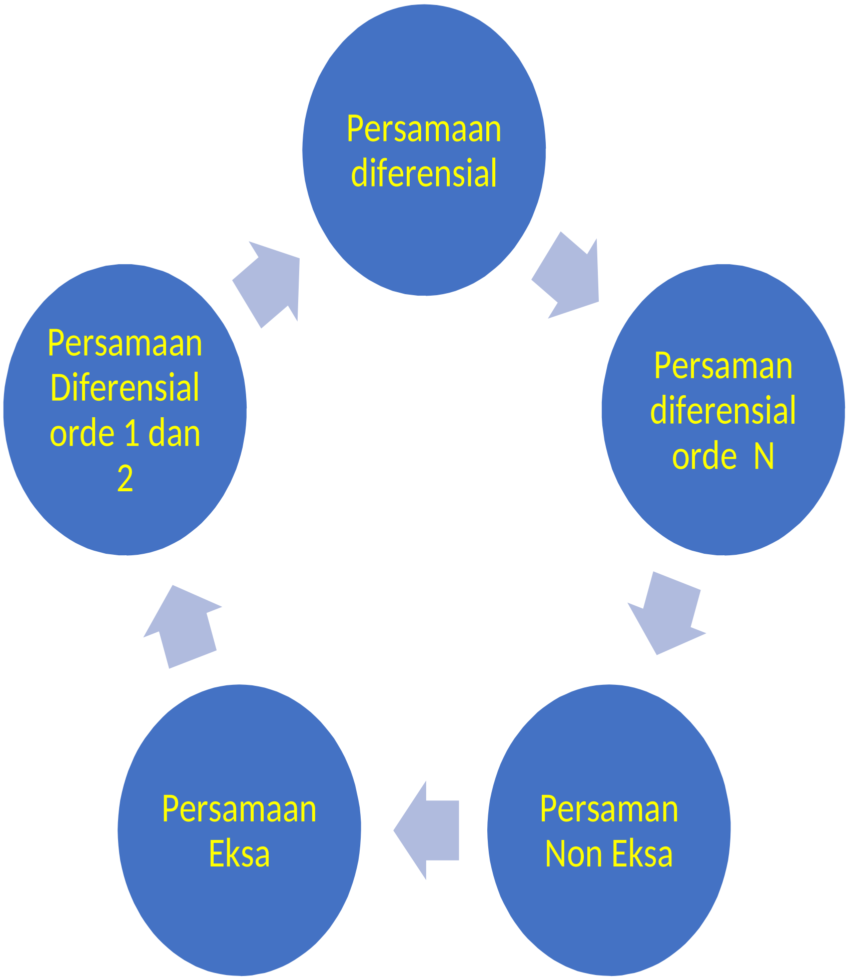
   1) Mahasiswa **TIDAK DIPERKENANKAN** untuk memakai kaos dan blus (oblong atau berkerah) dan harus menggunakan kemeja dan celana bahan/rok (untuk wanita).
   2) Pengumpulan tugas harus tepat waktu sesuai dengan arahan dosen. Apabila ada tugas (mandiri atau kelompok) yang diberikan dosen kepada mahasiswa, maka dosen ybs akan mengirimkannya kepada ketua kelas *(Kaleb,Bintangi@gmail.com).*Demikian kesepakatan ini kami buat, semoga kami melakukannya dengan baik tanpa ada paksaan dari pihak manapun. Tuhan memberkati.

Mengetahui, Jakarta, 10 Agustus 2019

Kaprodi Pendidikan Matematika Dosen Pengampu,

St

Peta Kompetensi Mata Kuliah Persamaan



DAFTAR ISI

DAFTAR GRAFIK

‘

DAFTAR TABEL

MODUL 1

KONSEP DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mahasiswa diharapkan mampu mengetahui bentuk-bentuk persamaan diferensial orde satu dan mampu menyelesaikan soal persamaan diferensial dengan menggunakannya di dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan PD	**1.** Pengidentifikasian ordo dan tingkat P.D **2.** Penentuan penyelesaian umum dan khusus P.D **3.** Pembuatan P.D dari suatu fungsi proimitif yang ditentukan.

Tujuan Pembelajaran

1. Mampu memahami definisi Persamaan Diferensial
2. Mampu memahami klasifikasi Persamaan Diferensial
3. Mampu memahami bentuk bentuk solusi Persamaan Diferensial
4. Mampu memahami pembentukan Persamaan Diferensial

MODUL 1

KONSEP DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

1.1 Definisi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap variabel-variabel bebas. Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial;

1. $x^2 \frac{d^z y}{dx^z} - 6x \frac{dy}{dx} = 0,$

$variabel\, bebas = x\,;\, variabel\, tak\, bebas = y$

2. $y' = e^x + \sin x,\, variabel$ XE "variabel"
   $bebas = x\,;\, variabel\, tak\, bebas = y$

3. $\frac{d^2 q}{dt^2} - 3\frac{dq}{dt} + 10q = 4,$

   $variabel\, bebas = t\,;\, variabel\, tak\, bebas = q$

4. $\frac{d^z v}{dx^z} + \frac{d^z v}{dy^z} = 0,$

$variabel\, bebas = x, y\,;\, variabel\, tak\, bebas = v$

Persamaan diferensial sangat penting di dalam matematika untuk rekayasa sebab banyak hukum dan hubungan fisik muncul secara matematis dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial (disingkat PD) diklasifikasikan dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial. Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) disingkat PDB adalah suatu persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu variabel bebas. Jika $y(x)$ adalah suatu fungsi satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan *y* dinamakan variabel tak bebas. Persamaan (1), (2), (3) adalah contoh PDB. Persamaan Diferensial Parsial (disingkat PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang mempunyai dua atau lebih variabel bebas. Orde persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan tersebut.

Contoh 1.1.1. 1. $x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$,adalah PDB orde satu

2. $xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$,adalah PDB orde dua

3. $\frac{d^3y}{dx^3} - y^2\frac{dy}{dx} + e^{4x} = 0$,adalah PDB orde tiga

4. $\frac{dx}{dy} = x^3 - y^2$,adalah PDB orde satu

5. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y^2 = 4$,adalah PDB orde dua

6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{d^2y}{dx^2} = 3$,adalah PDB orde dua

Persamaan diatas dapat ditulis dengan notasi lain yaitu;

1. $x\,y' - y^2 = 0$ adalah PDB orde satu
2. $xyy' - y^2 \sin x = 0$ adalah PDB orde dua
3. $y''' - y\,y' + e^{4x} = 0$ adalah PDB orde tiga
4. $x' = x^2 - y^2\ adalah\ PDB\ orde\ satu$
5. $(y'')^3 + y^2 = 4$ adalah PDB orde dua
6. $y'' - 2y'' = 3$ adalah PDB orde dua

Derajat (degree) dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial.

Contoh 1.1.2.

1. $x(y'')^3+(y')^4-y=0$, adalah PDB orde 2 derajat 3

2. $x^2y''+2xy'+2y=3x^3$, adalah PDB orde dua derajat satu

3. $(y''')^2+(y'')^3+2xy=6$, adalah PDB orde tiga derajat dua

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3, adalah\, PDP\, orde\, satu\, derajat\, satu$

Syarat tambahan pada persamaan diferensial, untuk satu nilai variabel bebas yang mempunyai satu atau lebih nilai syarat disebut syarat awal (*Initian Conditions)*. Persamaan Diferensial dengan syarat awal dikatakan sebagai suatu masalah nilai awal (*initial-value problem*). Jika syarat yang diberikan pada PD lebih dari satu nilai variabel bebas, disebut syarat batas dan merupakan Persamaan Diferensial dengan masalah nilai batas (*boundary-value problem*).

Contoh 1.1.3.

1. $4y''+23y'=e^x; y(2)=1; y(2)=5$
   adalah PD dengan masalah nilai awal karena dua syarat pada $x$yang sama yaitu $x=2$
2. $4y''+23y'=e^x; y(1)=1; y(2)=5$
   adalah PD dengan masalah nilai batas karena dua syarat pada $x$yang berbeda yaitu $x=1$ dan $x=2$
3. $2y'''+25y''=e^x; y(3)=2; y(2)=5$
   adalah PD dengan masalah nilai batas karena dua syarat pada x yang berbeda yaitu $x=3$ dan $x=2$
4. $2y'''+25y''=e^x; y(3)=2; y(3)=5$
   adalah PD dengan masalah nilai awal karena dua syarat pada $x$yang sama yaitu $x=2$
5. $3y''+23y'=e^x; y(2)=1; y(2)=4$
   adalah PD dengan masalah nilai awal karena dua syarat

pada $x$yang sama yaitu $x=2$

1.2 asifikasi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial biasa orde-n dikatakan linier bila dapat dinyatakan dalam bentuk :

$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=F(x)$,Dengan $a_0(x)\neq 0$

Jika tidak maka persamaan diferensial dikatakan tidak linear.

1. Jika koefisien $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ konstan maka disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan, jika tidak disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel.
2. Jika $F(x)=0$, maka disebut persamaan diferensial linear homogen, jika $F(x)\neq 0$ disebut tidak homogen.

Contoh 1.2.1.

Persamaan Diferensial	Klasifikasi Persamaan Diferensial
1. $2y'''+5y'+2xy=\cos(x)$	PD Linier, PD biasa ,PD-orde 2
2. $2yy'''+5y'+2xy=\cos(x)$	PD Non Linier
3. $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(z)$	PD Non Linier disebabkan adanya suku *cos (z)*
4. $y''-2y'+y=0$	PD Linier, PD biasa, orde dua
5. $\frac{d^4 y}{dx^2}+\sin y=0$	PD Non Linier, orde dua
6. $x^3\frac{d^3 y}{dx^3}-4x\frac{dy}{dx}+6y=e^x$	PD Linier, orde tiga

1.3 ısi Persamaan Diferensial

Pengertian Solusi. Solusi dari suatu persamaan differensial adalah persamaan yang memuat variabel-variabel dari persamaan differensial dan memenuhi persamaan differensial yang diberikan. Jika f(x) merupakan solusi dari persamaan differensial, maka f(x) dan turunan-turunannya akan memenihi persamaan differensial tersebut. Dalam hal ini $f(x)$ disebut integral atau primitive dari persamaan differensial itu. Sedangkan yang dimaksud dengan solusi umum dari persamaan differensial order n adalah solusi dari persamaan differensial tersebut yang memuat n konstanta sebarang yang bebas liniear. Jika dari solusi umum itu, semua konstanta yang terdapat di dalamnya massing-masing diberi nilai tertentu, maka akan diperoleh solusi yang disebut solusi khusus persamaan differensial.

Contoh 1.3.1

1. Tunjukan bahwa $y=x^3+Ax+B$ merupakan solusi dari persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{x^2}=6x$$

Jawab

$$y=x^3+Ax+B\,, maka\,\frac{dy}{dx}=3x^2+A\, dan\,\frac{d^2y}{dx^2}=6x$$

$y=x^3+Ax+B$ merupakan solusi dari

$$\frac{d^2y}{x^2}=6x$$

$A=1, B=2$

Maka akan diperoleh solusi khusus yaitu $y=x^3+x+2$

Soluti Eksplisit Dan Implisit

2. Tunjukan bahwa $y=x^4+Ax+B$ merupakan solusi dari persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{x^2}=12x^2$$

Jawab

$y = x^4 + Ax + B\,, maka\, \frac{dy}{dx} = 4x^3 + A\; dan\, \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$

$y = x^4 + Ax + B$ merupakan solusi dari

$\frac{d^2y}{x^2} = 12x^2$

$A = 2, B = 3$

Maka akan diperoleh solusi khusus yaitu $y = x^4 + 2x + 3$

3. Tunjukan bahwa $y = x^5 + Ax + B$ merupakan solusi dari persamaan differensial

$\frac{d^2y}{x^2} = 20x^3$

Jawab

$y = x^5 + Ax + B\,, maka\, \frac{dy}{dx} = 5x^4 + A\; dan\, \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3$

$y = x^5 + Ax + B$ merupakan solusi dari

$\frac{d^2y}{x^2} = 20x^3$

$A = 3, B = 4$

Maka akan diperoleh solusi khusus yaitu $y = x^5 + 3x + 4$

4. Tunjukan bahwa $y = x^6 + Ax + B$ merupakan solusi dari persamaan differensial

$\frac{d^2y}{x^2} = 30x^4$

Jawab

$y = x^6 + Ax + B\,, maka\, \frac{dy}{dx} = 6x^5 + A\; dan\, \frac{d^2y}{dx^2} = 30x^4$

$y = x^6 + Ax + B$ merupakan solusi dari

$\frac{d^2y}{x^2} = 30x^4$

$A = 4, B = 5$

Maka akan diperoleh solusi khusus yaitu $y = x^6 + 4x + 5$

Definisi; Perhatikan persamaan differensial orde *n* berikut :

$F[x, y, y', y'', \ldots, y^n] = 0$

Dengan F adalah fungsi real yang memiliki (n+2) argument, yakni $x, y, y', y'', \ldots, y^n$

1. Misalkan f adalah fungsi bilangan real yang terdefinisi untuk semua x dalam suatu interval I dan mempunyai turunan ke-n untuk semua x yang ada di I. Fungsi F disebut solusi eksplisit dari persamaan (1) dalam selang I jika fungsi f memenuhi dua syarat berikut ini :
   a. $F[x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^n(x)¿, yang\, terdefinisi\, \forall x \in I]$
   .... (A)
   b. $F[x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^n(x)] = 0, \forall x \in I$
   .... (B)

   Hal ini berarti bahwa substitusi $f(x)$dan variasi turunan untuk y dan turunannya yang berkorespondensi ke persamaan (1) akan membuat persamaan (I) menjadi suatu identitas di interval I.

2. Suatu relasi $g(x, y) = 0$, disebut solusi implisit dari persamaan (1) jika relasi ini mendefinisikan sedikitnya satu fungsi bilangan real f dengan variabel x di interval I sedemikian sehingga fungsi ini adalah solusi eksplisit dari persamaan (1) pada interval ini.

Solusi Penyelesaian PDB. Beberapa jenis solusi PD akan dijabarkan sebagai berikut:

1. Solusi PD bentuk eksplisit yaitu solusi PD dengan fungsi yang mana variabel bebas dan variabel tak bebas dapat dibedakan dengan jelas. Solusi eksplisit dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$. Contoh. $y = x^2 + 5x + 4$
2. Solusi PD bentuk implisit yaitu solusi PD dengan fungsi yang mana variabel bebas dengan variabel tak bebas tidak dapat dibedakan secara jelas. Fungsi implisit ditulis dalam bentuk $f(x, y) = 0$. Contoh. $x^2 + y^2 = 25$

Penyelesaian implisit dan penyelesaian eksplisit, keduanya secara singkat biasa disebut penyelesaian PDB.

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) terbagi dalam tiga jenis solusi yaitu:

1. Solusi Umum (Penyelesaian Umum): solusi PDB yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya c.

   Contoh 1.3.2.

   1. PD
   $$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}$$
   mempunyai penyelesaian umum $y=Cx^3$
   2. PD
   $$\frac{dy}{dx}=\frac{4y}{x}$$
   mempunyai penyelesaian umum $y=Cx^4$
   3. PD
   $$\frac{dy}{dx}=\frac{5y}{x}$$
   mempunyai penyelesaian umum $y=Cx^5$
   4. PD
   $$\frac{dy}{dx}=\frac{6y}{x}$$
   mempunyai penyelesaian umum $y=Cx^6$
   5. PD
   $$\frac{dy}{dx}=\frac{7y}{x}$$
   mempunyai penyelesaian umum $y=Cx^7$

2. Solusi Khusus/Partikulir (Penyelesaian Khusus/Partikulir): solusi yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada suatu PDB.

   Contoh 1.3.3.

   1. PD
   $$\frac{dy}{dx}=3x^2$$
   dengan syarat $x(0)=4$, mempunyai penyelesaian

khusus $y=x^3+4$

2. PD

$\frac{dy}{dx}=4x^3$

dengan syarat $x(0)=5$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^4+5$

3. PD

$\frac{dy}{dx}=5x^4$

dengan syarat $x(0)=6$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^5+6$

4. PD

$\frac{dy}{dx}=6x^5$

dengan syarat $x(0)=7$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^6+7$

3. Solusi Singular (Penyelesaian Singular): solusi yang tidak diperoleh dari hasil mensubstitusikan suatu nilai konstanta pada solusi umumnya.

   Contoh 1.3.4.

   1. $y=cx+c^2$ diketahui sebagai solusi umum dari PDB: $(y')^2+xy'=y$, tetapi disisi lain PDB tersebut mempunyai penyelesaian lain:

   $$y=\frac{-1}{4}x^2,$$

   penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian singular.

   2. $y=cx+c^3$ diketahui sebagai solusi umum dari PDB: $(y')^3+xy'=y$, tetapi disisi lain PDB tersebut mempunyai penyelesaian lain:

   $$y=\frac{-1}{6}x^3,$$

   penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian singular.

3. $y=cx+c^4$ diketahui sebagai solusi umum dari PDB: $(y')^4+x\,y'=y$, tetapi disisi lain PDB tersebut mempunyai penyelesaian lain:

$$y=\frac{-1}{8}x^4,$$

penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian singular.

4. $y=cx+c^5$ diketahui sebagai solusi umum dari PDB: $(y')^5+x\,y'=y$, tetapi disisi lain PDB tersebut mempunyai penyelesaian lain:

$$y=\frac{-1}{10}x^5,$$

penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian singular.

Metode Penyelesaian**.** Metode yang digunakan untuk mencari solusi (menyelesaikan) Persamaan Diferensial antara lain:

1. Metode Analitik: Metoda ini menghasilkan dua bentuk solusi yaitu bentuk eksplisit dan implisit. Untuk masalah-masalah yang komplek metode analitik ini jarang digunakan karena memerlukan analisis yang cukup rumit.
2. Metode Kualitatif: Solusi PDB didapatkan dengan perkiraan pada pengamatan pola medan gradien. Metode ini memberikan gambaran secara geometris dari solusi PDB. Metode ini meskipun dapat memberikan pemahaman kelakuan solusi suatu PDB namun fungsi asli dari solusinya tidak diketahui dan metode ini tidak digunakan untuk kasus yang komplek.
3. Metode Numerik. Solusi yang diperoleh dari metode ini adalah solusi hampiran (solusi pendekatan). Dengan bantuan program komputer, metode ini dapat menyelesaikan PDB dari tingkat sederhana sampai pada masalah yang komplek.

1.4 Masalah Nilai Awal (MNA)

Setelah mengenal solusi persamaan differensial dan jenisnya, maka muncul pertanyaan berikutnya : apakah setiap persamaan differensial mempunyai solusi? Jika persamaan differensial tersebut mempunyai solusi apakah solusinya tunggal? Sebelum menjawab pertanyaan-pertanyaan diatas dijelaskan dahulu tentang apa yang disebut dengan masalah nilai awal (*initial value problem)*. Pada solusi umum suatu persamaan differensial, dalam banyak kasus kita bisa mencantumkan *n* konstanta jika diketahui *n* nilai-nilai $y(x_0).y'(x_0),\dots,y^{(n-1)}(x_0)$

Defenisi;

Masalah nilai awal untuk persamaan diferensial order-n $f(x,y,y',y'',\dots,y^{n})=0$ yaitu menentukan solusi persamaan differensial tersebut pada interval I yang memenuhi n syarat awal di $x_0 \in I$ subset dari real

$$y(x_0)=y_0$$

$$y'(x_0)=y_1$$

$$y^{(n-1)}(x_0)=y_{(n-1)}$$

Dimana $y_0,y_1,\dots,y_{n-1}$ konstanta yang diberikan. Jika syarat awal $x_0 \in I$, berbeda beda misalnya $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$, maka masalah nilai awal disebut masalah nilai batas, masalah nilai batas sering disebut masalah syarat batas.

Contoh 1.4.1.

1. Carilah suatu solusi f dari persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

sedemikian sehingga di titik x = 1, solusi ini mempunyai nilai 4.

Jawab

Diketahui

$\frac{dy}{dx}=2x\,, maka\, dy=2x\, dx\, sehingga$

$\int dy=\int 2xdx\;y=x^2+c$
Untuk x = 1 dan y = 4
maka nilai C yang memenuhi adalah
$y=x^2+C$
$4=1^2+C$
$c=3$
Jadi solusi dari
$\frac{dy}{dx}=2x$
nilai awal x = 0 dan $f(1)$ = 4 adalah $y=x^2+3$

2. Carilah suatu solusi f dari persamaan differensial

$\frac{dy}{dx}=3x^2$

sedemikian sehingga di titik x = 2, solusi ini mempunyai nilai 10.

Jawab

Diketahui

$\frac{dy}{dx}=3x^2, maka\, dy=3x^2\, dx\, sehingga$

$\int dy=\int 3x^2\, dx\;y=x^3+c$
Untuk x = 2 dan y = 10
maka nilai C yang memenuhi adalah
$y=x^3+C$
$10=2^3+C$
$c=2$
Jadi solusi dari
$\frac{dy}{dx}=3x^2$
nilai awal x = 0 dan $f(2)$ = 10 adalah $y=x^3+2$

3. Carilah suatu solusi f dari persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx}=4x^3$$

sedemikian sehingga di titil x = 3, solusi ini mempunyai nilai 15.

Jawab

Diketahui

$$\frac{dy}{dx}=4x^3, maka\, dy=4x^3\, dx\, sehingga$$

$$\int dy=\int 4x^3 dx\; y=x^4+c$$

Untuk x = 3 dan y = 15

maka nilai C yang memenuhi adalah

$15=x^4+C$

$15=3^4+C$

$c=-66$

Jadi solusi dari

$$\frac{dy}{dx}=4x^3$$

nilai awal x = 0 dan $f(3)$ = 15 adalah $y=x^4-66$

4. Carilah suatu solusi f dari persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx}=5x^4$$

sedemikian sehingga di titik x = 2, solusi ini mempunyai nilai 30.

Jawab

Diketahui

$$\frac{dy}{dx}=5x^4, maka\, dy=5x^4\, dx\, sehingga$$

$$\int dy=\int 5x^4 dx\; y=x^5+c$$

Untuk x = 2 dan y = 30

maka nilai C yang memenuhi adalah

$30 = x^5 + C$

$30 = 2^5 + C$

$c = -2$

Jadi solusi dari

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

nilai awal x = 0 dan $f(2)$ = 30 adalah $y = x^5 - 2$

.

Teorema A: Eksistensi Dan Keunikan

Hipotesis: Diberikan persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dengan

1. Fungsi f adalah fungsi yang kontinu dari x dan y dibeberapa domain D pada nidang *xy*
2. Turunan parsial
   $$\frac{\partial f}{\partial y}$$
   juga fungsi kontinu dari *x* dan *y* di domain D, dan misalkan (x_0, y_0) adalah titik di domain D.

Maka ada solusi unik (tunggal) dari persamaan differensial yaitu $\varnothing$ yang didefinisikan pada beberapa interval $|x - x_0| \leq h$, dengan h cukup kecil, yang memenuhi kondisi $\phi(x_0) = y_0$

Contoh 1.4.2

1. Apakah masalah nilai awal

   $$\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3 . \ y(1) = 6$$

   mempunyai solusi yang tunggal

   Jawab

   $$f(x, y) = x^2 - xy^3 \ d\, an \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2,$$

merupakan fungsi yang kontinu dalam segiempat yang memuat titik (1,6). Berarti hipotesis dari teorema 1 dipenuhi. Akibatnya masalah nilai awal mempunyai solusi tunggal dalam suatu interval di sekitar x=1 dengan bentuk $|x-1| \leq h$ dengan h cukup kecil.

2. Apakah masalah nilai awal

   $$\frac{dy}{dx} = x^3 - xy^4 .\ y(2) = 7$$

   mempunyai solusi yang tunggal?

   Jawab

   $$f(x, y) = x^3 - xy^4\ d\,an\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy^3,$$

   merupakan fungsi yang kontinu dalam segiempat yang memuat titik (2,7). Berarti hipotesis dari teorema 1 dipenuhi.

3. Apakah masalah nilai awal

   $$\frac{dy}{dx} = x^5 - xy^6 .\ y(3) = 8$$

   mempunyai solusi yang tunggal?

   Jawab

   $$f(x, y) = x^5 - xy^6\ d\,an\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy^5,$$

   merupakan fungsi yang kontinu dalam segiempat yang memuat titik (3,8). Berarti hipotesis dari teorema 1 dipenuhi.

4. Apakah masalah nilai awal

   $$\frac{dy}{dx} = x^7 - xy^8 .\ y(4) = 9$$

   mempunyai solusi yang tunggal?

   Jawab

$$f(x, y)=x^7-xy^8 \, d\,an \frac{\partial f}{\partial y}=8xy^7,$$

merupakan fungsi yang kontinu dalam segiempat yang memuat titik (4,9). Berarti hipotesis dari teorema 1 dipenuhi

Contoh 1.4.3.

1. Apakah masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx}-3y^{\frac{2}{3}}, y(2)=0$$

mempunyai solusi yang tunggal

Jawab

$$f(x, y)=3y^{\frac{2}{3}} \, sehingga \frac{\partial f}{\partial y}=2y^{\frac{-1}{3}}$$

akan tetapi

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

tidak kontinu dan tidak didefinisikan di

y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik (2,0) dimana

$$f \, dan \frac{\partial f}{\partial y}$$

keduanya kontinu. Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tidak mempunyai solusi.

2. Apakah masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}, y(2)=0$$

mempunyai solusi yang tunggal

Jawab

$$f(x, y)=3y^{\frac{2}{3}} \, sehingga \frac{\partial f}{\partial y}=2y^{\frac{-1}{3}}$$

akan tetapi

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

tidak kontinu dan tidak didefinisikan di

y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik (2,0) dimana

$$f\, dan \frac{\partial f}{\partial y}$$

keduanya kontinu. Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tidak mempunyai solusi.

3. Apakah masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = 4y^{\frac{3}{4}}, y(3) = 0$$

mempunyai solusi yang tunggal

Jawab

$$f(x, y) = 4y^{\frac{3}{4}} sehingga \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^{\frac{-1}{4}}$$

akan tetapi

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

tidak kontinu dan tidak didefinisikan di

y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik (3,0) dimana

$$f\, dan \frac{\partial f}{\partial y}$$

keduanya kontinu. Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tidak mempunyai solusi.

4. Apakah masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx}=5\,y^{\frac{4}{5}},\ y(4)=0$$

mempunyai solusi yang tunggal

Jawab

$$f(x,y)=5\,y^{\frac{4}{5}}\ sehingga\ \frac{\partial f}{\partial y}=4\,y^{\frac{-1}{5}}$$

akan tetapi

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

tidak kontinu dan tidak didefinisikan di

y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik (4,0) dimana

$$f\ dan\ \frac{\partial f}{\partial y}$$

keduanya kontinu. Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tidak mempunyai solusi.

5. Apakah masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx}=10\,y^{\frac{9}{10}},\ y(9)=0$$

mempunyai solusi yang tunggal

Jawab

$$f(x,y)=10\,y^{\frac{9}{10}}\ sehingga\ \frac{\partial f}{\partial y}=9\,y^{\frac{-1}{10}}$$

akan tetapi

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

tidak kontinu dan tidak didefinisikan di y = 0. Akibatnya tidak ada segiempat yang memut titik (9,0) dimana

$$f \, dan \frac{\partial f}{\partial y}$$

keduanya kontinu. Karena hipotesis teoremaa 1 tidak dipenuhi, maka masalah nilai awal tidak mempunyai solusi.

Rangkuman

1. Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap variabel-variabel bebas.
2. Persamaan diferensial (disingkat PD) diklasifikasikan dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial. Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) disingkat PDB adalah suatu persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu variabel bebas.
3. Persamaan Diferensial Parsial (disingkat PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang mempunyai dua atau lebih variabel bebas.
4. Orde persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan tersebut.
5. Derajat (degree) dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial.
6. Syarat awal pada persamaan diferensial adalah satu nilai variabel bebas yang mempunyai satu atau lebih nilai syarat (Masalah nilai awal).
7. Syarat batas adalah syarat yang diberikan pada persamaan differensial lebih dari satu nilai variabel bebas(Masalah nilai batas).
8. Persamaan diferensial biasa orde-n dikatakan linier bila dapat dinyatakan dalam bentuk :
   $a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=F(x)$,Dengan $a_0(x)\neq 0$
   Jika tidak maka persamaan diferensial dikatakan tidak linear.
9. Solusi dari suatu persamaan differensial adalah persamaan yang memuat variabel-variabel dari persamaan differensial dan memenuhi persamaan differensial yang diberikan.
10. Solusi umum dari persamaan differensial order n adalah solusi dari persamaan differensial tersebut yang memuat n konstanta sebarang yang bebas liniear. Jika dari solusi

umum itu, semua konstanta yang terdapat di dalamnya massing-masing diberi nilai tertentu, maka akan diperoleh solusi yang disebut solusi khusus persamaan differensial.

11. Jenis solusi persamaan differensial ada dua, yaitu :
Solusi PD bentuk eksplisit yaitu solusi PD dengan fungsi yang mana variabel bebas dan variabel tak bebas dapat dibedakan dengan jelas. Solusi eksplisit dinyatakan dalam bentuk $y=f(x)$.
Solusi PD bentuk implisit yaitu solusi PD dengan fungsi yang mana variabel bebas dengan variabel tak bebas tidak dapat dibedakan secara jelas. Fungsi implisit ditulis dalam bentuk $f(x,y)=0$.

12. Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) terbagi dalam tiga jenis solusi yaitu:
3. Solusi Umum (Penyelesaian Umum): solusi PDB yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya c.
4. Solusi Khusus/Partikulir (Penyelesaian Khusus/Partikulir): solusi yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada suatu PDB.
5. Solusi Singular (Penyelesaian Singular): solusi yang tidak diperoleh dari hasil mensubstitusikan suatu nilai konstanta pada solusi umumnya.

13. Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial antara lain:
1. Metode Analitik : Metoda ini menghasilkan dua bentuk solusi yaitu bentuk eksplisit dan implisit.
2. Metode Kualitatif : Solusi PDB didapatkan dengan perkiraan pada pengamatan pola medan gradien.
3. Metode Numerik : Solusi yang diperoleh dari metode ini adalah solusi hampiran (solusi pendekatan).

14. Masalah nilai awal untuk persamaan diferensial order-n $f(x,y,y',y'',\ldots,y^n)=0$ yaitu menentukan solusi persamaan differensial tersebut pada interval I yang memenuhi n syarat awal di $x_0 \in I$ subset dari real

$$y(x_0)=y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}$$

Dimana $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ konstanta yang diberikan. Jika syarat awal $x_0 \in I$, berbeda beda misalnya $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, maka masalah nilai awal disebut masalah nilai batas, masalah nilai batas sering disebut masalah syarat batas.

Diskusi Kelompok

Untuk soal 1- 5 klasifikasikan persamaan differensial di bawah ini.

1. $x^2 y'' - 2xy'' + (x^2 - 3) y = 0$

   Jawab :

   Klasifikasi persamaan differensial dari $x^2 y'' - 2xy'' + (x^2 - 3) y = 0$ adalah

   a. Orde : 2
   b. Derajat : ….
   c. Koefisien : Variabel
   d. Kehomogenan : ….

2. $y'' + 3t^3 y'' - \cos t = 0$

   Jawab :

   Klasifikasi persamaan differensial dari $y'' + 3t^3 y'' - \cos t = 0$ adalah

   a. Orde : ….
   b. Derajat : 1
   c. Koefisien : ….
   d. Kehomogenan : Homogen

3. $y''' + 3(y'')^2 + y' = \sin x$

   Jawab :

   Klasifikasi persamaan differensial dari $y''' + 3(y'')^2 + y' = \sin x$ adalah

   a. Orde : ….
   b. Derajat : 2
   c. Koefisien : ….
   d. Kehomogenan : ….

4. $x^2 y'' + 2 + 2x\, y' + 2y = 3x^3$

   Jawab :

Klasifikasi persamaan differensial dari $x^2 y'' + 2 + 2x y' + 2y = 3x^3$ adalah

a. Orde : ….
b. Derajat : ….
c. Koefisien : ….
d. Kehomogenan : Non Homogen

5. $y' - y^5 = \cos x$

Jawab :

Klasifikasi persamaan differensial dari $y' - y^5 = \cos x$ adalah

a. Orde : ….
b. Derajat : ….
c. Koefisien : Konstanta
d. Kehomogenan : ….

6. Selidikilah apakah $f(x) - 2\sin x + 3\cos x$ merupakan solusi eksplisit untuk persamaan diferensial

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y = 0$$

untuk $x \in R$

7. Tunjukan bahwa $x^3 + 3x y^2 = 1$ adalah solusi implisit dari persamaan diferensial

$$2xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$$

pada interval $0 < x < 1$

8. Tunjukan bahwa $5x^2 y^2 - 2x^3 y^2 = 1$ adalah solusi implisit dari persamaan diferensial

$$x \frac{dy}{dx} + y = x^3 y^3$$

pada interval $0 < x < \frac{5}{2}$

9. Tunjukan bahwa tiap fungsi f yang didefinisikan oleh $f(x) = (x^3 + c) e^{-3x}$ dengan c adalah suatu konstanta, adalah

solusi dari persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx}+3y=3x^2e^{-3x}$$

10. Tunjukan bahwa tiap fungsi f yang didefinisikan oleh $f(x)=2+ce^{-2x^2}$, dengan c adalah suatu konstanta, adalah solusi dari persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx}+4xy=8x$$

Untuk soal 11 - 15 ubahlah persamaan differensial dibawah ini dengan notasi lain

11. $\frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0$

    Jawab :

    Notasi lain dari $\frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0$ adalah

    $y^{....}+....^2=0$

12. $\sin xy\frac{dy}{dx}+\cos\frac{d^2y}{dx^2}=0$

    Jawab :

    Notasi lain dari adalah $\sin xy\frac{dy}{dx}+\cos\frac{d^2y}{dx^2}=0$

    $\sin xy\,...^{....}+\cos....^{.....}=0$

13. $\frac{d^4y}{dx^4}+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+5y=0$

    Jawab :

    Notasi lain dari $\frac{d^4y}{dx^4}+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+5y=0$adalah

    $y^{....}+3(....^2)^5+5y=0$

14. $\frac{dy}{dx}+x^2y=xe^x$

Jawab :

Notasi lain dari $\frac{dy}{dx}+x^2 y=xe^x$adalah

$\ldots.'+x^2 y=xe^x$

15. $\frac{d^3 y}{dx^3}+4\frac{d^2 y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3y=\sin x$

Jawab :

Notasi lain dari $\frac{d^3 y}{dx^3}+4\frac{d^2 y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3y=\sin x$adalah

$y^{\cdots\cdot}+4\ldots^{\cdots\cdot}-5y^{\cdots\cdot}+3y=\sin x$

Untuk soal 16 - 20, carilah penyelesaian khususnya.

16. *PD*

$\frac{dy}{dx}=19x^{20}$

dengan syarat $x(0)=6$.

Jawab:

Dengan syarat $x(0)=6$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^{\cdots}+\ldots$

17. *PD*

$\frac{dy}{dx}=21x^{21}$

dengan syarat $x(0)=12$.

Jawab:

Dengan syarat $x(0)=12$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^{\cdots}+\ldots$

18. *PD*

$\frac{dy}{dx}=22x^{22}$

dengan syarat $x(0)=36$.

Jawab:

Dengan syarat $x(0)=36$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^{\cdots}+\ldots$

19. PD

$$\frac{dy}{dx}=23x^{23}$$

dengan syarat $x(0)=72$.

Jawab:

Dengan syarat $x(0)=72$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^{\cdots}+\ldots$

20. PD

$$\frac{dy}{dx}=24x^{24}$$

dengan syarat $x(0)=144$.

Jawab:

Dengan syarat $x(0)=144$, mempunyai penyelesaian khusus $y=x^{\cdots}+\ldots$

Untuk soal 21- 25 carilah suatu solusi f dari persamaan diferensial

21. PD:

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

sedemikian sehingga di titik x = 2, solusi ini mempunyai nilai 20.

Jawab:

Diketahui

$\frac{dy}{dx}=2x, maka\, dy=2x\, dx\, sehingga$

$\int dy=\int 2xdx\ y=x^{\cdots}+c$

Untuk x = … dan y = …

maka nilai C yang memenuhi adalah

$y=x^{\cdots}+C$

$\ldots=2^{\cdots}+C$

$c=16$

Jadi solusi dari
$\frac{dy}{dx}=2x$
nilai awal x = 0 dan $f(2)$ = 20 adalah $y=x^{\cdots}+\ldots$

22. PD:

$\frac{dy}{dx}=3x^2$

sedemikian sehingga di titik x = 3, solusi ini mempunyai nilai 72.

Jawab:

Diketahui

$\frac{dy}{dx}=3x^2, maka\, dy=3x^2\, dx\, sehingga$

$\int dy=\int 3x^2\, dx\; y=x^{\cdots}+c$
Untuk x = … dan y = …
maka nilai C yang memenuhi adalah
$y=x^{\cdots}+C$
$\ldots=3^{\cdots}+C$
$c=45$
Jadi solusi dari
$\frac{dy}{dx}=3x^2$

nilai awal x = 0 dan $f(3)$ = 72 adalah $y=x^{\cdots}+\ldots$

23. PD:

$\frac{dy}{dx}=13x^{14}$

sedemikian sehingga di titik x = 1, solusi ini mempunyai nilai 10.

Jawab:

Diketahui

$$\frac{dy}{dx}=14x^{13}, maka\ dy=14x^{13}dx\ sehingga$$

$$\int dy=\int 14x^{13}dx\ y=x^{\cdots}+c$$

Untuk x = … dan y = …
maka nilai C yang memenuhi adalah

$y=x^{\cdots}+C$
$\ldots=1^{\cdots}+C$
$c=9$

Jadi solusi dari

$$\frac{dy}{dx}=14x^{13}$$

nilai awal x = 0 dan $f(1)$ = 10 adalah $y=x^{\cdots}+\ldots$

24. $PD:$

$$\frac{dy}{dx}=11x^{12}$$

sedemikian sehingga di titik x = 2, solusi ini mempunyai nilai 400.

Jawab:

Diketahui

$$\frac{dy}{dx}=12x^{11}, maka\ dy=12x^{11}dx\ sehingga$$

$$\int dy=\int 12x^{11}dx\ y=x^{\cdots}+c$$

Untuk x = … dan y = …
maka nilai C yang memenuhi adalah

$y=x^{\cdots}+C$
$\ldots=2^{\cdots}+C$
$c=3696$

Jadi solusi dari

$$\frac{dy}{dx}=12x^{11}$$

nilai awal x = 0 dan $f(2)$ = 400 adalah $y=x^{\cdots}+\ldots$

25. $PD:$

$$\frac{dy}{dx}=33\,x^{32}$$

sedemikian sehingga di titik x = 1, solusi ini mempunyai nilai 2.

Jawab:

Diketahui

$\frac{dy}{dx}=33\,x^{32}\,, maka\, dy=33\,x^{32}\,dx\, sehingga$

$\int dy=\int 33\,x^{32}\,dx\; y=x^{\cdots}+c$

Untuk x = … dan y = …

maka nilai C yang memenuhi adalah

$y=x^{\cdots}+C$

$\ldots=1^{\cdots}+C$

$c=1$

Jadi solusi dari

$\frac{dy}{dx}=33\,x^{32}$

nilai awal x = 0 dan $f(1)$ = 2 adalah $y=x^{\cdots}+\ldots$

Latihan Mandiri

Untuk soal 1 – 5 klasifikasian persamaan differensial berikut sebagai persamaan differensial biasa (PDB) atau persamaan differensial parsial (PDP). Nyatakan variabel bebas dan tak bebas nya.

1. $t\,y' - y = 2t^4$
2. $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + y^2 = 0$
3. $\cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + y^2 = 0$
4. $y'' + 7y = 0$
5. $y''' + 3y' - 4y = 0$
6. Buktikan bahwa
   $y = e^{2x}\, solusi \frac{dy}{dx} = 2y$
   pada interval $(-\infty, \infty)$
7. Buktikan bahwa
   $y^2 + x - 3 = 0\, solusi \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$
   pada interval $(-\infty, \infty)$
8. Tunjukan bahwa $x^3 + 3x\,y^2 = 1$ merupakan solusi implisit persamaan differensial
   $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$
   pada interval 0 < x < 1
9. Tunjukan bahwa setiap fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = (x^2 + c)e^{-3x}$, dengan c merupakan konstanta sebarang merupakan solusi persamaan differensial
   $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

Dalam soal 10 – 22 , buktikan fungsi yang diberikan merupakan solusi persamaan differensial yang diberikan disebelahnya :

10. $y=\sin x+x^2\; y''+y=x^2+2$
11. $x=\cos t-2\sin t\; x''+x=0$
12. $y=A\cos x+B\sin x \qquad y''+y=0$
13. $y=e^{2x}-3e^{-x} \qquad y''-y'-2y=0$
14. $y=x+y^2\; y'=\frac{x}{y}$
15. $0=y\left(x^2+c\right)+2\; y'=xy^2$
16. $e^{xy}+y=x-1\; y'=\frac{e^{-xy}-y}{e^{-xy}+x}$
17. . $y-\ln y=x^2+1\; y''=\frac{2xy}{y-1}$
18. $\sin y+xy-x^3=2\; y''=\frac{6xy'+(y')^3\sin y-2(y')^2}{3x^2-y}$
19. $(x)=x+3e^{-x}\; \frac{dy}{dx}+y=x+1$
20. $(x)=2e^{3x}-5e^{+x}\; \frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=0$
21. . $(x)=e^x+2x^2+6x\; \frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}+2y=4x^2$
22. . $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\; \left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0$

23. Tentukan nilai m *sehingga* $\phi(x)=e^{mx}$ solusi persamaan differensial
    a. $y''+6y'+5y=0$
    b. $y'''+3y''+2y'=0$
    c. $y'''-3y''-4y'+12y=0$
24. Fungsi $(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ *solusi* $y''-y'-2y=0$ untuk sebarang konstanta $c_1\, dan\, c_2$. Tentukan $c_1\, dan\, c_2$ yang memenuhi syarat awal
    a. $y(0)=2, \qquad y'(0)=1$
    b. $y(0)=1, \qquad y'(0)=0$

Dalam soal 25 – 27 selidikilah apakah masalah nilai awal mempunyai solusi yang tunggal,

25. $\frac{dy}{dx}=x^3-y^3, y(0)=6$

26. $\frac{dy}{d\theta}-\theta y=\sin^2\theta, y(\pi)=5$

27. $\frac{dy}{dx}+\cos y=\sin x, y(\pi)=0$

Untuk soal 28-31, carilah penyelesaian khususnya, dengan syarat $x(0)=3$.

28. PD :

$$\frac{dy}{dx}=37x^{36}$$

29. PD :

$$\frac{dy}{dx}=79x^{78}$$

30. PD :

$$\frac{dy}{dx}=120x^{119}$$

31. PD :

$$\frac{dy}{dx}=2000x^{1999}$$

Pada soal no 32-35, carilah suatu solusi f dari persamaan diferensialnya sedemikian sehingga di titik x = 2.

32. PD:

$$\frac{dy}{dx}=4x^3$$

solusi ini mempunyai nilai 3.

33. PD:

$$\frac{dy}{dx}=5x^4$$

solusi ini mempunyai nilai 9.

34. PD:

$$\frac{dy}{dx}=6x^7$$

solusi ini mempunyai nilai 27.

35. . PD:

$$\frac{dy}{dx}=7x^8$$

solusi ini mempunyai nilai 81.

MODUL 2

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

Capaian Pembelajaran	Uraian
Mahasiswa dapat memahami bentuk-bentuk persamaan diferensial orde satu berpangkat/ derejat satu satu dan mampu menyelesaikan serta menggunakannya pada masalah-masalah yang berkaitan sebelumnya	Mahasiswa dapat : 1. Menyelesaikan P.D yang variabelnya terpisah 2. Menyelesaikan P.D yang homogen 3. Menyelesaikan P.D yang tidak homogen dengan transformasi 4. Menentukan penyelesaian umum P.D eksak 5. Menentukan faktor integrasi untuk P.D yang tidak eksak 6. Menyelesaikan P.D yang tidak eksak dengan menggunakan faktor integrasi

MODUL 2

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

2.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Persamaan Diferensial Orde Pertama yang Umum

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan suatu fungsi yang tidak di ketahui kita sebut persamaan diferensial. Khususnya, suatu persamaan berbentuk

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$$

Dalam mana $y^{(k)}$ menyatakan turunan y terhadap x yang ke k, disebut persamaan diferensial biasa berorde n. Contoh-contoh berorde 1, 2 dan 3 adalah

$$y' + 2\sin x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - e^x = 0$$

Jika, pada waktu $f(x)$ disubstitusikan untuk y dalam persamaan diferensial, persamaan yang dihasilkan merupakan suatu kesamaan untuk semua x dalam suatu selang, maka $f(x)$ disebut penyelesaian persamaan diferensial.

Jadi $f(x)=2\cos x+10$ adalah suatu penyelesaian terhadap $y'+2\sin x=0$

$karena, f(x)'+2\sin x=-2\sin x+2\sin x=0$

Untuk semua x. Kita sebut $2\cos x+C$ penyelesaian umum dari persamaan yang diberikan, karena dapat diperlihatkan bahwa setiap penyelesaian dapat dituliskan dalam bentuk ini. Berlawanan dengan itu, $2\cos x+10$ disebut suatu penyelesaian khusus dari persamaan. Persamaan-persamaan yang sekarang kita pandang dapat dibuat dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

Suatu pesamaan jenis ini dalam prinsip selalau dapat diselesaikan. Pertama-tama kita mengalirkan kedua ruas dengan faktor integral

$$e^{\int P(x)dx}$$

Yang menghasilkan

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Kemudian kita kenali ruas kiri sebagai turunan dari

$$y\,e^{\int P(x)dx}$$

sehingga persamaan mengambil bentuk

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Pengintegralan kedua ruas menghasilkan

$$ye^{\int P(x)dx}=\int (Q(x)e^{\int P(x)dx}¿)dx¿$$

Sehingga

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int (Q(x) e^{\int P(x)dx} ¿) dx ¿$$

Contoh 2.1.1 Selesaikan

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

Penyelesaian: faktor integral kita adalah

$$e^{\int \left(\frac{2}{x}\right)dx} = e^{2\ln|x|}$$

$$e^{\ln x^2} = x^2$$

(Kita ambil konstanta sembarang dari penintegralan $\int P(x)dx$ bernilai 0 karna pada akhirnya ia akan di coret.) dengan mengalikan kedua ruas persamaan awal dengan x^2, kita peroleh

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = \sin 3x$$

Atau

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = \sin 3x$$

Pengintegralan kedua pihak mengasilkan

$$x^2 y = \int \sin 3x \, dx = \frac{-1}{3} \cos 3x + C$$

atau

$$y = \left(\frac{-1}{3} \cos 3x + C\right) x^{-2}$$

Contoh 2.1.2 Tentukan penyelesaian khusus dari

$$\frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}$$

Yang memenuhi $y = 4$ bilamana $x = 0$.

Penyelesaian: faktor integral yang cocok adalah,

$e^{\int -3dx} = e^{-3x}$

Dari perkalian dengan faktor ini, persamaan kita mengambil bentuk

$$\frac{dy}{dx}\left(e^{-3x} y\right) = x$$

$$e^{-3x} y = \int x\,dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

Jadi, penyelesain umum adalah

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + C\,e^{3x}$$

Dengan mensubtitusikan $y=4$ bilamana $x=0$ membuat $C=4$.

Penyelesaian khusus yang di inginkan adalah

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + 4 e^{3x}$$

$1.\, Selesaikan\; y' + xy = x$

Penyelesaian :

faktor pengintegralnya adalah

$e^{\int x\,dx} = e^{¿¿}$.

$$y\,e^{\int p(x)dx} = \int Q(x)\,e^{\int p(x)dx} dx$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2} y' + e^{\frac{1}{2}x^2} xy = e^{\frac{1}{2}x^2} x$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}x^2} y\right) = e^{\frac{1}{2}x^2} x$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2} y = \int e^{\frac{1}{2}x^2} x\,dx = e^{\frac{1}{2}x^2} + C$$

$$y=1+Ce^{\frac{-1}{2}x^2}$$

$$2. \, Selesaikan \frac{dy}{dx}+2xy=4x$$

Penyelesaian :

faktor integralnya adalah $e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$.

$$y e^{\int p(x)dx}=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$y e^{x^2}=\int 4xe^{x^2}dx+C$$

$$y e^{x^2}=\int 4xe^{x^2}\frac{dx^2}{2x}+C$$

$$y e^{x^2}=\int 2e^{x^2}d(x^2)+C$$

$$y e^{x^2}=2e^{x^2}+C$$

$$y=2+Ce^{-x^2}$$

$$3. \, Selesaikan \, xy'-2y=x^3e^x$$

Penyelesaian :

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^3e^x \left(di\,bagi\,dengan\,x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^2e^x$$

$$faktor\,Integralnya\,adalah\,e^{\int \frac{-2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$$

$$y e^{\int p(x)dx}=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$y\frac{1}{x^2}=\int \left(x\text{¿¿}2e^x\text{¿}\right)\frac{1}{x^2}dx+C\text{¿¿}$$

$$y\frac{1}{x^2}=\int e^x\,dx+C$$

$$y\frac{1}{x^2}=e^x+C$$

$$y=x^2e^x+Cx^2$$

2.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Jika persamaan eksak $M\,dx+N\,dy=0$mempunyai sifat bahwa M fungsi x saja dan N fungsi y saja, maka

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

Ini adalah bentuk paling sederhana dari persamaan diferensial eksak, dan dikatakan bahwa variable – variabelnya terpisah. Penyelesaian umum dapat ditulis :

$$\int M\,dx \int Ndy=c$$

Contoh 2.2.1 Selesaikan

$$y^{'}=\frac{y}{k}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} atau \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$$

$$\int \frac{dy}{y}-\int \frac{dx}{x}=0\,dan\ln y-\ln x=c_1$$

$$\ln \frac{dy}{y}=c_1,\frac{y}{x}=e^{c_1}=c\,dan\,y=c_x$$

Penyelesaian berlaku untuk semua (x,y) kecuali x = 0.

Contoh 2.2.2 *Selesaikan*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1+y^3}{xy^2\left(1+x^2\right)}=0$$

Penyelesaian

$$\frac{y^2\,dy}{1+y^3}+\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx=0$$

dan variabel-variabelnya terpisah. Maka

$$\frac{y^2\,dy}{1+y^3}+\frac{dx}{x}-\frac{xdx}{1+x^2}=¿$$

$$\rightarrow\frac{1}{3}\ln\left|1+y^3\right|\left|+\ln\right|\left|x\right|-\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=c_1$$

$$2\ln\left|1+y^3\right|+6\ln\left|x\right|-3\ln\left(1+x^2\right)=6c_1=c_2$$

$$\ln x^6¿¿¿$$

$$1.\,Selesaikan\,\frac{dy}{dx}=-2xy$$

Penyelesaian :

$$\int\frac{dy}{dx}=\int-2xy$$

$$\ln y=-x^2+C$$

$$y=e^{-x^2}+C$$

$$y=C\,.\,e^{-x^2}$$

$$2.\,Selesaikan\,xy\,\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y+1}$$

Penyelesaian :

Persamaan diatas dapat ditulis menjadi:

$$y(y+1)\,dy=\frac{x+1}{x}\,dx$$

$$(y^2+y)\,dy=\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int (y^2+y)\,dy=\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+C_1=x+\ln|x|+C_2$$

$$\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2-x-\ln|x|=C$$

3. $Selesaikan\,(2x+xy^2)\,dx+(y+x^2y)\,dy=0$

Penyelesaian :

$$x(2+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx+\int \frac{y}{2+y^2}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(2+y^2)=C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(2+y^2)\right]=C$$

$$\left[(1+x^2)(2+y^2)\right]=2C$$

$$(1+x^2)(2+y^2)=e^{2C}$$

$$(1+x^2)(2+y^2)=C$$

2.3 Kegiatan Pembelajaran 3 Persamaan Diferensial Homogen

Fungsi f (x,y) disebut homogen dengan derajad *n* dalam variabel-variabelnya jika $f(\lambda x \lambda y)=\lambda^n, f(x,y)$. Persamaan $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$disebut homogen jika M (x,y) dan (x,y) homogen dengan derajat sama. Untuk persamaan homogen dilakukan substitusi $y=vx, dy=v\,dx+x\,dv$. Dengan substitusi ini persamaan homogen diubah menjadi bentuk variabel-variabel terpisah *x* dan *v*.

$Contoh\,2.3.1\,Selesaikan\; y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$

$Penyelesaian\; y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{v}+v\,, substitusi\; y=vx$

$dy=\left(\frac{1}{v}+v\right)dx=x\,dv+v\,dx$

$v\,dv-\frac{dx}{x}=0, \frac{1}{2}v^2-\ln|x|=c_1$

$y^2=x^2\ln x^2+c\,x^2 untuk\; y\neq 0\, dan\, x\neq 0$

Contoh 2.3.2 Selesaikan

$x\sin\frac{y}{x}(y\,dx+x\,dy)+y\cos\frac{y}{y}(x\,dy+y\,dx)=0$

Penyelesaian : Persamaan ini homogen derajat dua. Subsitusi

$y=vx$

$x\sin v(vxdx+x^2dv+vxdx)$

$+vx\cos v\left(x^2dv+vxdx-vxdx=0\right)$

$$\sin v\left(2v\,dx+x\,dv\right)+xv\cos v\,dv=0$$

$$\frac{\sin v+\cos v}{v\sin v}dv+2\frac{dx}{x}=0$$

Maka

$\ln|v\sin v|+2\ln|x|=\ln c\,dan\,x^2¿¿¿$

Menghasilkan

$xy\sin\frac{y}{x}=C$

$1.\,Selesaikan\left(2x-4y+5\right)y'+x-2y+3+0$

Penyeleaian :

$misalkan\,v=x-2y\;yang\,berarti\;juga\;y$

$¿\frac{1}{2}\left(x-v\right),sehingga\;y'=\frac{1}{2}\left(1-v'\right)$

substitusikan ke:

$\left(2v+5\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-v'\right)\right)=-v-3$

$2v-2vv'+5+5v'=-2v-6$

$-\left(2v+5\right)v'=-4v-11$

$\left(2v+5\right)v'=4v+11$

$\frac{4v+10}{4v+11}dv=2\,dx$

$$\left(1-\frac{1}{4v+11}\right)dv=2\,dx$$

Integrasikan kedua ruas untuk mendapatkan :

$$v-\frac{1}{4}\ln|4v+11|=2x+C_1$$

$substitusikan\,kembali\; v=x-2y$,

$$(x-2y)-\frac{1}{4}\ln|4(x-2y)+11|=2x+C_1$$

$$4x+8y+\ln|4x-8y+11|=C$$

2. $Periksa\,apakah\,(3y-4x)\,dx+(y-x)\,dy=0\,homogen\,atau\,tidak.$

Penyelesaian :

$$(3y-4x)\,dx+(y-x)\,dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3y-4x)}{(y-x)}$$

$$\frac{x\left(3\frac{y}{x}-4\right)}{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{3\frac{y}{x}-4}{1-\frac{y}{x}}=\frac{dy}{dx}$$

karena persamaan diatas dapat ditulis kembali sebagai

$v=\frac{y}{x}$, maka persamaan ini homogen

$3.\, Selesaikan\; y' = \frac{y+x}{y-x}, y(0) = 2$

Penyelesaian :

Misalkan $u = y - x$ $berarti\; y = u + x, y' = u' + 1$

Substitusika ke persamaan :

$$(u' + 1) = \frac{(u+x)+x}{u}$$

$$u u' + u = u + 2x$$

$$u\, du = 2x\, dx$$

$$\frac{1}{2} u^2 = x^2 + C_1$$

$$u^2 = 2x^2 + C$$

$Substitusikan u = y - x$

$$(y-x)^2 = 2x^2 + C$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = C$$

$Substitusikan\; y(0) = 2, maka$

$$2^2 - 2(0)(2) - 0^2 = 4$$

$diperoleh\; C = 4, sehingga:$

$$y^2 - 2xy - x^2 = 4$$

Rangkuman

Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan hubungan antara variabel bebas misalnya (x), variabel terkait misalnya (y) dan satu atau lebih koefisien diferensial antara keduanya misalnya (dy/dx).Persamaan Diferensial menurut banyaknya variabel terikat yaitu

#Persamaan Diferensial Biasa yaitu jika hanya memiliki satu variabel bebas

#Persamaan Diferensial Parsial yaitu jika memiliki lebih dari satu variabel terikat

Persamaan Diferensial Orde Satu hanya melibatkan turunan kesatu atau pertama atau bisa dikatakan suatu fungsi yang memuat satu variabel bebas (x) dan satu variabel yang tak bebas (y) beserta turunan pertamanya (y') yang dikaitkan secara *eksplisit* atau *implisit*. Solusi umum Persamaan Diferensial adalah fungsi yang memuat konstanta C dan memenuhi Persamaan Diferensial tersebut. Solusi khusus adalah solusi yang diperoleh dari solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil nilai C suatu bilangan tertentu atau solusi yang memenuhi syarat yang diberikan, misalnya syarat awal.

Persamaan Diferensial yang solusi umumnya diberikan oleh fungsi $g(x, y, C)=0$ dapat ditentukan dengan mengeliminasi C dari kedua persaman:

$$\begin{cases} g(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{d}{dx} g(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Ada beberapa metode penyelesaian persamaan diferensial orde satu yaitu Metode Integral Langsung, Metode Pemisahan Variabel, Metode Subtitusi

Metode Integral Langsung digunakan jika persamaan diferensial dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$ artinya bentuk persamaannya dapat diintegralkan secara langsung sehingga diperoleh $\int dy = \int f(x)\, dx \to y = F(x) + C$

Metode Pemisahan Variabel digunakan jika persamaan diferensial mempunyai dua variabel dan dapat dipisahkan pada ruas yang berbeda dan dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$\to$ dengan catatan $f(x, y)$ dapat dipisahkan menjadi $f(x)$ dan $g(y)$

Sehingga diperoleh $\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx \to y = F(x) + C$

Metode Subtitusi biasanya digunakan pada persamaan diferensial homogen yang mempunyai dua variabel tetapi tidak dapat dipisahkan secara langsung pada ruas yang berbeda.Untuk menyelesaikan perlu diubah agar variabelnya dapat dipisahkan, biasanya diambil subtitusi

$$y = v \cdot x \to \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Penyelesaian selanjutnya sama dengan Metode Pemisahan Variabel.

Diskusi Kelompok

$$1. \frac{dy}{dx} + 4y = x - 2x^2$$

Penyelesaian:

faktor integral adalah :

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cdots} = e^{\cdots}$$

$$e^{\int p(x)dx} y = \int Q(x) e^{\int p(x)dx} + C$$

$$e^{\cdots} y = \int x - \cdots e^{\cdots} + C$$

$$y = \left(\frac{\cdots - 2x^2}{4} - \frac{1 - \cdots}{\cdots} - \frac{1}{\cdots} \right) + \frac{C}{\cdots^{\cdots}}$$

$$y = \left(\frac{\cdots - 8x^2 - \cdots + \cdots - 1}{\cdots} \right) + \frac{C}{e^{4x}}$$

$$y = \left(\frac{\cdots - \cdots - \cdots}{8} \right) + \frac{C}{e^{4x}}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = -2xy$$

Penyelesaian :

$$\int \frac{dy}{dx} = \int -2\,xy$$

$$\ln y = -\cdots^{\cdots} + C$$

$$y = e^{-\cdots} + C$$

$$y = C\,.\,e^{-\cdots}$$

3. $y' + y = (1+x)^2$

Penyeleaian :

$$\frac{dy}{dx} + y = (1+x)^2$$

Faktor Integral adalah

$$e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 1} = e^{\cdots}$$

$$e^{\int p(x)\,dx}\, y = \int Q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} + C$$

$$e^{\cdots}\, y = \int (1+x)^{\cdots}\, e^{x} + C$$

$$e^{\cdots}\, y = \int e^{\cdots}(1+x)^{\cdots} - 2\,e^{x}(\cdots + x) + 2\,e^{x} + C$$

$$y = (1+x)^{\cdots} - 2(\cdots + x) + 2 + \frac{c}{e^{x}}$$

4. $x\,y' + y = 3$

Penyelesaian :

Persamaan diubah menjadi:

$$x\frac{dy}{dx} = 3 - y\; kalikan\, kedua\, ruas\, dengan\, \frac{dx}{x(3-y)}$$

$$\frac{1}{\cdots - \cdots}\, dy = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{3-y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\ln(\cdots-\cdots)\,dy = \ln\cdots + \ln\cdots = \ln\cdots$$

$$\ln(3-y)^{-\cdots} = \ln\cdots$$

$$(3-y)^{-\cdots} = Cx$$

5. $y^2(y+1)\,dx + y^2(y-1)\,dy = 0$

Penyelesaian :

Persamaan diatas diubah menjadi:

$$\frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{y+1}\,dy = 0$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{y+1}\,dy = \ln \vee \cdots \vee ¿$$

$$\ln|\cdots-\cdots| + \ln|\cdots+\cdots| = \ln \vee \cdots \vee ¿$$

$$\ln|(\cdots-\cdots)(\cdots+\cdots)| = \ln \vee \cdots \vee ¿$$

$$(\cdots-1)(\cdots+1) = \cdots$$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3x^2}{y^2}$ *untuk* $y=6$ *ketika* $x=0$

Penyelesaian :

Persamaan diatas kita ubah menjadi $y^2\,dy = (x+3x^2)\,dx$

$$y^2\,dy = (x+3x^2)\,dx$$

$$\frac{1}{\cdots}y^3 = \cdots x^2 + \cdots + C_0 \; dikalikan\, 3$$

$$y^3 = \frac{\cdots}{\cdots}x^2 + \cdots x^{\cdots} + C$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{\cdots}{\cdots}x^2+\cdots x^3+C}$$

Substitusikan y = 6dan x = 0, sehingga diperoleh :

$\cdots=\sqrt[3]{\cdots+\cdots+C}\rightarrow C=\cdots^3=216$

Jadi, penyelesaiannya adalah :

$$y=\sqrt[3]{\frac{\cdots}{2}x^2+\cdots x^3+216}$$

$7.\ 2(y+3)dx-xy\,dy=0$

Penyelesaian :

$$2(y+3)dx-xy\,dy=0$$

$$\frac{2}{x}dx+\frac{y}{y+3}dy=0$$

$$\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{\cdots}{\cdots+\cdots}dy=0$$

$$\cdots\ln x+\int\frac{\cdots+\cdots-\cdots}{\cdots+\cdots}dy=\cdots$$

$$2\ln x+\int\frac{\cdots+\cdots}{\cdots+\cdots}dy-\int\frac{\cdots}{y+\cdots}dy=\cdots$$

$$2\ln x+\cdots-\int\frac{\cdots}{y+\cdots}\frac{\cdots(y+\cdots)}{\cdots}=C$$

$$2\ln x+y-3\ln(y+3)=C$$

$$2\ln x+y-\ln(y+3)^3=C$$

$8.\ Periksa\,apakah\,(3y-4x)dx+(y-x)dy=0$

homogen atau tidak.

Penyelesaian :

$$(3y-4x)\,dx+(y-x)\,dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cdots y-\cdots x)}{(y-x)}$$

$$\frac{\cdots\left(\cdots\frac{y}{x}-\cdots\right)}{\cdots\left(\cdots-\frac{y}{x}\right)}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\cdots\frac{y}{x}-\cdots}{1-\frac{\cdots}{\cdots}}=\frac{dy}{dx}$$

karena persamaan diatas dapat ditulis kembali sebagai

$v=\frac{y}{x}$ maka persamaan ini homogen

9.Apakah PD $(3y-4x)\,dx+(y-x)\,dy=0$ homogen atau tidak?

$$(3y-4x)\,dx+(y-x)\,dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ldots-4x}{x-y}$$

$$\frac{x\left(3.\frac{y}{x}-4\right)}{x\left(\ldots-\frac{y}{x}\right)}=\frac{\ldots}{dx}$$

$$3.\ \frac{\frac{y}{x}-\ldots}{1-\frac{y}{x}}=\frac{dy}{\ldots}$$ Karena variabel PD di atas dapat ditulis kembali sebagai $v=\frac{y}{x}$, maka PD ini homogen.

10.Selesaikan Persamaan Diferensial

$(x^2+y^2)dx+2xydy=0$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2+y^2}{2xy}=\frac{-\{1+\left(\frac{\ldots}{x}\right)^2}{2(\frac{y}{\ldots})}$$

Subtitusi $y=vx$ dan $dy=vdx+xdv$ maka Persamaan Diferensial menjadi

$(\ldots+v^2)dx+2v(vdx+xdv)=0$

$$\frac{2vdv}{1+3v^2}+\frac{\ldots}{x}=0$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{d(\ldots+3V^2)}{1+\ldots}+\int\frac{dx}{\ldots}=C$$

$\ln(1+3v^2)x^3=C$

maka Persamaan Umum Persamaan Diferensial

$$\left(\ldots+3\frac{y^2}{x^2}\right)x^3=C$$

Latihan Mandiri

A. 1-14. selesaikan persamaan diferensial orde-pertama

1. $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

2. $(x+1)\frac{dy}{dx}+y=x^2-1$

3. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=ax, |x|<1$

4. $y'+y\tan x=sec\, x$

5. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=xe^x$

6. $y'-ay=f(x)$

7. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x}$

8. $y'+\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

9. $y'+yf(x)=f(x)$

10. $\frac{dy}{dx}+2y=x$

11. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=3x^3;\ y=3\, bilamana\, x=1$

12. $y'=e^{2x}-3y;\ y=1\, bilamana\, x=0$

13. $x\,y' + (1+x)\,y = e^{-x}\,;\, y = 0\ bilamana\ x = 1$

14. $\sin x \dfrac{dy}{dx} + 2\,y\cos x = \sin 2x\,;\, y = 2\ bilamana\ x = \dfrac{\pi}{6}$

B. 15-45. Selesaikan persamaan diferensial di bawah ini

15. $x^3\,dx + (y+1)^2\,dy = 0$

16. $x^2(y+1)\,dx\,y^2(x-1)\,dy = 0$

17. $x\,dx + 5\,x3\,y\,dy = 0$

18. $x\,dx + 5\,x9\,y\,dy = 0$

19. $x\,dx + 5\,y\,dy = 0$

20. $(x+3\,y)\,dx + (3\,x-9\,y)\,dy = 0$

21. $xy2\,dx + 5\,x3\,y\,dy = 0$

22. $\sin x\cos y\,dx + 5\cos x\sin y\,dy = 0$

23. $(2\,x+3\,y)\,dx + (3\,x+8\,y)\,dy = 0$

24. $(7\,x+3\,y)\,dx + (3\,x+2\,y)\,dy = 0$

25. $xy\,' = e - xy - y\,(xy = v)$

26. $y\,' = (y-x)2\,(y-x = v)$

27. $y' = \dfrac{y-x+1}{y-x+5}\,(y-x = v).$

28. $y' = \dfrac{2x}{y+1} \rightarrow (y+1)\,y' = 2$

29. $y' = (1+x)(1+y)$

30. $y' = \frac{y^2 + x y^2}{x^2 y - x^2}$

31. $y \tan x \,.\, y' = (4+y^2) sec^2 x$

32. $(x^2 + y^2)\, y' = xy$

33. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(y+1)}$

34. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{2x}$

35. $(2x+y)\, dx + (x+3y)\, dy = 0$

36. $\frac{x\, dy}{dx} - 2y = -x$

37. $y' + x\sqrt{y} = y$

38. $x^5 dx + (y+2)^2 dy = 0$

39. $(1+2y)\, dx + (x-4)\, dy = 0$

40. $xy\, dx + (1+x^2)\, dy = 0$

41. $(xy+x)\, dx + (xy-x)\, dy = 0$

42. $2x\, dy - 2y\, dx = 0$

43. $(x+2y)\, dx + (2x+3y)\, dy = 0$

44. $(y^2 - x^2)\, dx + xy\, dy = 0$

45. $(x^3 + y^3)\, dx + 3x y^2\, dy = 0$

C. 46-50. Tentukan solusi dari persamaan diferensial

46. $x^2 y' = \dfrac{x^2+1}{3y^2+1}$

47. $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2t},\ y(0) = 3$

48. $y' - y^2 t \sin(t^2) = 0$

49. $y' = \dfrac{x^2}{1+2y^2}$

50. $y' = 2x\sqrt{y-1}$

51. $\dfrac{dy}{dx} + xy = 4x$

52. $y' + 2xy = 2x$

53. $x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

54. $\dfrac{dy}{dx} = -2xy$

55. $4xy\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$

56. $2(y+3)\,dx - xy\,dy$

57. $y\,dx + (1+x^2)$

58. $(x^2+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$

59. $(x^2+2y^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$

60. $(y\sin 2x - \cos x)\,dx + (1+\sin^2 x)\,dy = 0$

MODUL 3

PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSA

Capaian Kompetensi	Uraian Materi
Mampu memahami defenisi dan menganalisa persamaan diferensial dengan baik dan mampu membuktikan persamaan Eksa dan Non Eksa	Mahasiswa dapat : 1. Menentukan penyelesaian umum P.D eksak 2. Menentukan faktor integrasi untuk P.D yang tidak eksak 3. Menyelesaikan P.D yang tidak eksak dengan menggunakan faktor integrasi 4. Dapat mencari primitif dari P.D linear yang homogen dengan koofisien konstan dan akar-akarnya bilangan real 5. Dapat mencari primitif dari P.D linear yang homogen dengan koofisien konstan dan akar-akarnya bilangan kompleks

MODUL3

PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSA

3.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Persamaan Diferensial Eksak

Suatu persamaan diferensial dengan bentuk :

$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$

Dikatakan persamaan diferensial eksak, jika ada suatu fungsi f (x,y) yang diferensial totalnya sama dengan $P(x,y)\,dy+Q(x,y)\,dy$, yaitu dengan meniadakan lambang x dan y; $df=P\,dx+Q\,dy$

Uji kepastian :

Jika P dan Q merupakan fungsi kontinu dan memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada sebuah segiempat bidang xy, maka $P(x,y)\,dy+Q(x,y)\,dy=0$ adalah eksak hanya jika $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Metode Solusi
Untuk menetukan solusi dari $P(x,y)\,dy+Q(x,y)\,dy=0$, maka diberikan oleh penyelesaian umum $f(x,y)=c$
Langkah-langkah menemukan suatu fungsi f(x,y) adalah :

Langkah 1
Perhatikan bahwa :

$\frac{\partial f}{\partial x}=P(x,y)\,dan\,\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$

Langkah 2

Integrasikan (menjadi integral) dari $P(x,y)$terhadap x dengan y tetap.

$\frac{\partial f}{\partial x}dx=P(x,y)\,dx$

$f(x,y)=\left[\int^{x} P(x,y)dx\right]+\varnothing(y)$

Dimana $\varnothing(y)$ adalah fungsi sembarang dari y saja.

Langkah 3

Fungsi $f(x, y)$ pada langkah ke-2 didiferensial parsial terhadap y yang

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{x} P(x, y) dx\right]+\frac{\partial \varnothing}{\partial y}$$

Langkah 4

Karena $\frac{\partial f}{\partial y}=P(x, y) maka$

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial y}=P(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{x} P(x, y) dx\right]$$

Dari sini $\varnothing(y)$ akan diperoleh.

Langkah 5

$\varnothing(y)$ yang baru saja diperoleh, disubsitusikan ke $f(x, y)$ dalam langkah ke-2. Dengan demikian $f(x, y)=C$ dapat diperoleh.

Bentuk Umum

$P(x, y) dx+Q(x, y) dy=0 \ldots \ldots \ldots (¿)$

Adalah persamaan diferensial eksak bila ruas kiri adalah diferensial dari f(x,y) = 0Persamaan diferensial eksak adalah suatu persamaan diferensial tingkat satu dan berpangkat satu. Disebut persamaan diferensial eksak jika ruas kirinya adalah diferensial total atau diferensial eksak. Masalah ± masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Jika model matematika berbentuk persamaan diferensial. Definisi Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung suatu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui dinamakan persamaan diferensial.

$$df(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x} dx+\frac{\partial f}{\partial y} dy=0$$

Dari suatu fungsi u(x, y). Maka persamaan dideferensial dapat ditulis dengan $du=0$

$$P=\frac{\partial f}{\partial x}, Q=\frac{\partial f}{\partial y}$$

Maka:Misal P dan Q terdifinisikan dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontingen dalam suatu daerah dibidang xy yang batas-batasnya berupa kurva tutup yang tidak mempunyai irisan mandiri. Maka diperoleh

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\delta^{2} f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\delta^2 f}{\partial x \partial y}$$

Jika persamaan (*) merupakan persaman diferensial eksak, maka berlaku $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Jika $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ maka persamaan (*) merupakan persamaan diferensial eksak.

Jika eksak, maka fungsi u (x,y) dapat ditemukan dengan perkiraan atau dengan cara sistematis seperti berikut.

Dari $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, dengan pengintegralan terhadap x

Diperoleh $u = \int Mdx + k(y)$ dalam pengintegralan ini, y dipandang sebagai suatu konstan, dan k(y) berperan sebagai konstan integrasi.

1. Kasus tidak Eksak. $ydx - xdy = 0$

Terlihat bahwa $M = y \, dan \, N = x$. Sehingga : $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, Tetapi $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$

Jadi persamaan Diferensial tidak eksak. Dalam kasus demikian metode itu tidak berlaku :

$$u = \int Mdx + k(y) = xy + k(y)$$

$Sehingga \frac{\partial u}{\partial y} = x + k(y)$ (i)

Ini harus sama dengan : $N = x$,Hal ini tidak mungkin, karena k(y) hanya fungsi dari y saja. Jika digunakan (i) juga akan menghasilkan hal yang sama. Untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial tak eksak yang demikian ini diperlukan metode yang lain.

Jika suatu persamaan diferensial itu eksak, maka kita bisa mengubah menjadi tak eksak dengan membagi dengan suatu fungsi tertentu. Sebagai contoh .

$$xdx + ydy = 0$$

Adalah persamaan diferensial eksak, tetapi dengan membagi dengan y akan diperoleh Persamaan Diferensial tak eksak.

$$\frac{x}{ydx} + dy = 0$$

Demikian juga suatu Persamaan Diferensial tak eksak, mungkin bisa diubah menjadi eksak dengan dibagi atau dikalikan dengan suatu fungsi tertentu (yang cocok). Metode ini akan dibahas dalam pasal berikutnya.

1. Jika $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\, PD\ Eksak$
   Maka F_x = M dan F_y = N
   Sehingga $F(x,y)=\int M(x,y)dx=P(x,y)+C(y)$
   Dan $Fy(x,y)=\int M(x,y)dx=Py(x,y)+C(y)=N(x,y)$
   Sehingga $C(y)=\int [N(x,y)-Py(x,y)]dy$

   $F(x,y)$ dapat juga dicari dengan cara mengintegralkan $N(x,y)$ terhadap y.
2. Jika $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\, PD\ Eksak$,yaitu $My\neq Nx$, kita dapat mencari fungsi u(x,y), sehingga $u\,M\,dx+uNdy=0$, menjadi PD eksak yaitu $(u\,M)y=(u\,N)x$. Fungsi u(x,y) disebut factor pengintegralan.
3. Jika $\frac{1}{N}(My-Nx)\, fungsi$dari x saja, maka fungsi u(x) selalu dapat dicari yaitu: $u(x)=e^{\int \frac{1}{N}(My-Nx)dx}$
4. Jika $\frac{1}{N}(My-Nx)$ fungsi dari y saja, maka fungsi u(y) selalu dapat dicari,yaitu : $u(y)=e^{-\int \frac{1}{N}(My-Nx)dx}$

Contoh Soal 3.1.1

1. $y\,dx+x\,dy=0$
   $misal: M(x,y)=y\rightarrow\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1$
   $N(x,y)=x,\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, maka\ diatas\ merupakan\ PD\ Eksak$
2. $(2x+3y)dx+(3x+4y)dy=0$

P = 2x + 3y   Q = 3x + 4y

$\frac{\partial P}{\partial y}=3\frac{\partial Q}{\partial x}=3$

$P=\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y, Q=\frac{\partial f}{\partial y}=3x+4y$

$f(x,y)=\int (2x+3y)dx+C(y)$

¿ $x^2+3xy+C(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=3x+C$(y)=3x+4

C(y)=4 , C left (y right) = int {4ydy=2 {y} ^ {2} +C

$f(x,y)=x^2+3xy+2y^2=C,\ x^2+3xy+2y^2=C$

3. $3x^2y^2dx+(2x^3y+4x^3)dy=0$

   Pembuktian Persamaan Diferensial Eksak

   $P(x,y)=3x^2y^2\frac{\partial P}{\partial y}=6x^2y$
   $Q(x,y)=2x^3y+4x^3\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y$

   Karena $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, maka persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial eksak.

4. $(y^2e^x+xy)dx+\left(4ye^x+\frac{3}{2}x^2+4y\right)dy=0$

   Penyelesaian :

   $M(x,y)=y^2ex^x+xy\,dan\,N(x,y)=4ye^x+\frac{3}{2}x^2+y$
   $My(x,y)=2ye^x+x\,dan\,N(x)(x,y)4e^x+3x$
   $My-Nx=2ye'+x-ye^x-3x=2ye^x-2x\neq 0$
   $\frac{My-Nx}{M}=\left(\frac{-2(ye^x+x)}{y(ye^x+x)}\right)=\frac{-2}{y}$
   $4(y)=\frac{My-Nx}{M}=\frac{2}{y}$
   $1(y)=e\int q(y)dy=e\int\frac{2}{y}dy$
   ¿$e^2\ln y=y^2$
   $y^2\left[(y^2e^x+xy)dx+\left(4ye^x+\frac{3}{2}x^2+4y\right)dy\right]=0$
   $(y^4e^x+xy^3)dx+\left(4y^3ex+\frac{3}{2}x^2y^2+4y^3\right)dy=0$
   $My(x,y)=Nx(x,y)=4y^3e^x+3xy^2$
   $f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)=\int(y^4e^x+xy^3)dx+g(y)$
   ¿$y^4e^x+\frac{1}{2}x^2y^3+g(y)$
   $4y^3e^x+\frac{3}{2}x^2+y'(y)=4y^3e^x+\frac{3}{2}x^2y^2+4y^2$
   $y'(y)=4y^3e^x+\frac{3}{2}x^2y^2+4y^3+4y^2e^x-\frac{3}{2}x^2y^2$
   ¿$4y^3$

$g(y)=\int 4y^3 dy$

$¿4^4+k$

$y^4 e^x+\frac{1}{2}x^2 y^2+4^4=k$

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{-3xy+y^2}{x^2+xy}$

   Penyelesaian :

   $U(x,y)=x^3 y+\frac{x^2}{2}y^2=c$

6. $\sin(x+y)dx+¿¿$

   Penyelesaian :

   $M=\sin(x+y)$

   $N=¿$

   $\frac{\partial M}{\partial y}=\cos(x+y)$

   $\frac{\partial N}{\partial x}=\cos(x+y)$

   $U=\int M\,dx+k(y)=\int \cos(x+y)dx+k(y)$

   $\frac{\partial U}{\partial y}=-\sin(x+y)+k(y)$

   $\frac{dk}{dy}=5y^2-3y$

   $k(y)=\frac{5}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2+c$

   $U(x,y)=-\sin(x+y)+\frac{5}{3}y^2+\frac{3}{2}y^2+c$

Mencari Solusi Umum

Langkah 1 (mencari $f(x,y)$

$f(x,y)=[[\int^x P(x,y)dx]+\varnothing(y)]$

$¿\int^x 3x^2 y^2 dx+\varnothing(y)$

$¿x^3 y^2+\varnothing(y)$

Langkah 2

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[[\int^x P(x,y)dx]+\varnothing(y)]+\frac{\partial \varnothing}{\partial y}$

$¿\frac{\partial}{\partial y}[\int^x 3x^2 y^2 dx]+\frac{\partial \varnothing}{\partial y}$

$¿2x^3 y+\frac{\partial}{\partial y}\varnothing(y)$

Langkah 3 (mencari $\varnothing(y)$)

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

$$2x^3y+\frac{\partial}{\partial y}\varnothing(y)=2x^3y+4y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\varnothing(y)=2x^3y+4y^3-2x^3y$$

$$\varnothing(y)=\int 4y^3dy$$

$$¿\,y^4+k$$

Langkah 4 (Solusi umum)

$$f(x,y)=x^3y^2+\varnothing(y)$$

$$¿\,x^3y^2+y^4=k$$

Maka solusi umumnya adalah $x^3y^2+y^4=C\,dengan\,nilai\,C=k$

3.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Persamaan Diferensial Faktor Integrasi

Secara umum persamaan $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ tidak eksak .Terkadang mungkin mengubah menjadi persamaan diferensial eksak melalui perkalian yang eksak. Oleh karena itu, fungsi untuk mengubah Persamaan Diferensial tidak eksak ke bentuk persamaan diferensial eksak adalah faktor integrasi (Faktor pengkali/Gabung).

Bentuk Umum

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\ldots\ldots\ldots(¿)$

Jika persamaan (*) tidak eksak, maka dapat dijadikan persamaan diferensial eksak. Caranya yaitu kalikan persamaan (*) dengan suatu fungsi tertentu, misalkan $u(x,y)$ yang dinamakan Faktor Integrasi. Sehingga persamaan (*) menjadi :

$$uP(x,y)dx+uQ(x,y)dy=0\ldots\ldots\ldots¿$$

Persamaan (**) sudah menjadi PDE, selanjutnya selesaikan persamaan tersebut sesuai dengan prosedur yang berlaku.

Bila diberikan suatu persamaan diferensial yang tidak eksak, maka faktor integrasi dapat dicari dengan beberapa kemungkinan berikut.

Faktor integrasi hanya tergantung dari fungsi x, maka fungsi x dapat dicari dengan cara :

$$\left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) = f(x)$$

Maka faktor integrasi dapat ditentukan dengan cara; $e \int f(x) dx$

Faktor integrasi hanya tergantung dari fungsi y, maka fungsi y dapat dicari dengan :

$$\left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} \right) = g(y)$$

Maka faktor integrasi dapat ditentukan dengan cara :

$$e \int g(y) dy$$

Bila faktor integrasi sudah diperoleh kalikan terhadap pers (*) untuk mengasilkan pers (**) sehingga terbentuk PDE.

Berikut ini akan dipaparkan syarat perlu dimana P dan Q memenuhi syarat persamaan dan factor pengintegralan μ merupakan suatu fungsi yang hanya bergantung pada x saja, maka :

$$(\mu M) y = \mu My \; dan \, (\mu N) x = \mu Nx + N\mu x$$

Karena persamaan diatas adalah persamaan diferensial eksak maka $(\mu M) y = (\mu N) x$ Hal ini akan diperoleh apabila :

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{My - Nx}{N} \mu$$

Jika $\frac{My - Nx}{N}$ adalah fungsi dari x saja, maka terdapat suatu factor pengintegralan μyang juga bergantung pada x saja. Dengan demikian fungsi μdapat ditentukan dengan menggunakan metode yang berlaku untuk persamaan linear. Selanjutnya hal serupa dapat ditentukan untuk menentukan syarat cukup untuk P dan Q memenuhi persamaan yang memiliki factor pengintegralan yang hanya tergantung pada y atau x dan y.

Macam-macam Integrasi

Ada beberapa macam factor integrasinya, yaitu :

Jika, $\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}}{Q}=f(x)\, dimana\, f(x)$ merupakan fungsi dari x saja

Faktor Integrasinya : $e^{\int f(y)dx}$

Jika, $\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}}{-P}=g(y)\, dimana\, g(y)$ merupakan fungsi dari y saja

Faktor Integrasinya : $e^{\int g(y)dy}$

Jika, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ merupakan Persamaan Diferensial Homogen dan $xP+yQ\neq 0$

Faktor Integrasinya : $\frac{1}{xP+yQ}$

Jika, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ dapat diubah kebentuk

$y f(x,y)dx+x g(x,y)dy=0\, dan\, f(x,y)\neq g(x,y)$

Contoh 3.2.1

1. Selesaikan persamaan diferensial $(x^2+y^2+x)dx+xy, dy=0$

   Penyelesaian :

   $f(x,y)=x^2+y^2+x\, dan\, \varphi(x,y)=xy.$

   $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi}=\frac{2y-y}{xy}=\frac{1}{y}=f(x).$ Jadi $v=e\frac{dx}{x}=e\ln x=x.$

   $x(x^2+y^2+x)dx+x^2 y\, dy=0$ adalah persamaan diferensial eksak.

   Penyelesaian umum ialah $f(x,y)=c, dimana$

$\frac{\partial F}{\partial x}=x(x^2+y^2+x).........(1)$

$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2 y........................(2)$

Jika kedua ruas persamaan (2) diintegrasikan ke y, diperoleh

$f(x,y)=\int x^2 y\, dy=\frac{1}{2}x^2 y^2+\varphi(x)$

Jika diturunkan parsial ke x, didapat

$\frac{\partial F}{\partial x}=x y^2+\varphi^1(x)=x(x^2+y^2+x).$ Jadi, $\varphi(x)=x^3+x^2 atau$

$\varphi(x)=\int(x^3 * x^2)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C_1$

$\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3=C$

2. Tentukan persamaan berikut eksak atau tidak $2y\,dx+x\,dy=0$

   Penyelesaian:

   $M(x,y)=2y$

   $N(x,y)=x$ persamaan diferensial tidak eksak karena 2 = 1

   Jika PD tersebut dikalikan dengan x maka akan dapat $x(2y)dx+x(x)dy=0$

   $2xy\,dx+x\,dy=0$

   $2x=2x$ persamaan diferensial eksak karena PD diatas menjadi eksak setelah dikalikan
   dengan x, x inilah yang disebut dengan factor integral yang kita singkat dengan $V(x,y), VM+VN=0$

3. $(5x^2+2xy^3)dx+(5x^2y^2-2y^3)dy=0$
   Penyelesaian :
   $M(x,y)=(5x^2+2xy^3)\,dan\,N(x,y)=(3x^2y^2-2y^3)$
   $f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$
   ¿ $\int(5x^2+2xy^3)dx+g(y)$
   ¿ $\frac{5}{3}x^3+x^2y^2+g(y)$
   $fy(x,y)=N(x,y)$
   $\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{5}{3}x^3+x^2y^3+g(y)\right)=3x^2y^2-2y^3$
   $g'(y)=-2y^3$
   $g(y)=\int -2y^3\,dy=\frac{1}{2}y^4+c$
   ¿ $\frac{5}{3}x^3+x^2y^3-\frac{1}{2}y^4=c$

4. $(4x^3+x^2-y^2)dx+2xy\,dy=0$
   Penyelesaian :
   $M(x,y)=4x^3+x^2-y^2\,dan\,N(x,y)=2xy$
   $Ny(x,y)=-2y\,dan\,Nx(x,y)=2y$

   $My-Nx=2-y-2y=-4x\neq 0$

$p(x)=\frac{My-Mx}{N}=\frac{-2}{x}$

$1(x)=e\int p(x)dx=e\int\frac{-2}{x}dx$

$¿e^{-2}Inx=\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^4}\left[\left(4x^3+x^2-y^2\right)dx+2xy\,dy\right]=0$

$\left(4x+1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$

$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)=\int\left(4x+1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+g(y)$

$¿2x^2+x+\frac{y^2}{x}+g(y)=0$

$fy(x,y)=N(x,y)$

$\frac{2y}{x}+g^{'}(y)=\frac{2y}{x}$

$g^{'}(y)=0$

$g(x)k$

$2x^2+x+\frac{y^2}{x}atau\,2x^3+x^2+y^2=kx$

5. $M(x,y)=3y^2-5x^2y\,dan\,M(x,y)=5xy^2-9x^2$

Penyelesaian :

$My(x,y)=9y^2-5x^2\,dan\,Nx(x,y)=5y^2-9x^2$

$My-Nx=9y^2-5x^2-9x^2=4\left(x^2+y^2\right)\neq 0$

$\frac{Mx-Nx}{yN-xM}=\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{y\left(5xy^2-3x^3\right)-x\left(3x^3-5x^2y\right)}$

$¿\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{2x\left(x^2+y^2\right)}=\frac{2}{xy}$

$1(z)=\frac{My-Nx}{yN-xM}=\frac{2}{xy}=\frac{2}{z}$

$1(z)=e\int L(z)dz=e\int\frac{2}{z}dz$

$¿e^2Lnz=z^2=(xy)^2$

$(xy)^2\left[\left(3y^2-5x^2y\right)dx+\left(5xy^2-3x^3dy\right)\right]=0$

$\left(3x^2y^5-5x^4y^3\right)dx+\left(5x^3y^4-3x^5y^2\right)dy=0$

$My(x,y)=Nx(x,y)=15x^2y^4-15x^4y^2$

$f(x,y)=\int N(x,y)dy+g(x)$

$¿\int\left(5x^3y^4-3x^5y^2\right)dy+g(x)$

$¿x^3y^2-x^5y^3+g(x)$

$$fx(x,y)=M(x,y)$$
$$3x^2y^2-5x^4y^3-g'(x)=3x^2y^5-5x^4y^3$$
$$g'(x)=3x^2y^5-5x^4y^3-3x^2y^5-5x^4y^3$$
$$¿0$$
$$g(x)=k$$
$$x^3y^5-x^5y^3=k$$

RANGKUMAN

Definisi Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung suatu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui dinamakan persamaan diferensial.

Jika suatu persamaan diferensial itu eksak, maka kita bisa mengubah menjadi tak eksak dengan membagi dengan suatu fungsi tertentu.

Fungsi untuk mengubah Persamaan Diferensial tidak eksak ke bentuk persamaan diferensial eksak adalah faktor integrasi (Faktor pengkali/Gabung).

Fungsi μdapat ditentukan dengan menggunakan metode yang berlaku untuk persamaan linear.

DISKUSI KELOMPOK

1. $(x+2y)dx+(4x+2x)dy=0$

   Jawab.

   - $f(x,y)=\int N(x,y)dx+Q(x)$
     $¿\int(4y+2x)dx+Q(x)$
     $¿\ldots^{\cdots}+\ldots+Q(x)$
     $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+Q'(x)$
     $x+2x=\ldots+\ldots^{\cdots}(\ldots)$
     $Q'=\ldots$
     $Qx=\int\ldots dx$
     $¿\frac{\cdots}{\cdots}\ldots^{\cdots}$
     $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2xy+2y^2$
   - $f(x,y)=\int M(x,y)dx+Q(y)$
     $¿\int(x+2x)dx+Q(x)$
     $¿\frac{\cdots}{\cdots}\ldots^{\cdots}+\ldots+\ldots$
     $\frac{\partial f}{\partial y}=2x+Q'(x)$
     $4x+2x=\ldots+\ldots$

$$Q'(x)=4y$$
$$Q(x)=\int 4y\,dy$$
$$¿\ldots^{\cdots}$$
$$f(x,y)=\frac{1}{2}\ldots^{\cdots}+\ldots+\ldots^{\cdots\cdot}$$

2. $(5xy+4y^2+1)dx+(x^2+2xy)dy=0$

Jawab.

$M=5xy+4y^2$

$N=x^2+2xy$

Sehingga hasil turunan parsialnya adalah

$$\frac{\partial M}{\partial y}=5x+dy$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=\ldots+\ldots$$
$$p(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$
$$p(x)=\frac{1}{x^2+\ldots}(\ldots+\ldots-(2x+2y))$$
$$p(x)=\frac{\ldots}{\ldots^{\cdots}+2xy}(3x+6y)$$
$$p(x)=\frac{3}{\ldots(\ldots+\ldots)}(3x+6y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ldots^{\cdots}+\ldots^{\cdots}\ldots^{\cdots}+\ldots^{\cdots}$$

dan

$$\frac{\partial f}{\partial y}=5x^2+2x^4y$$
$$f=\ldots^{\cdots}+\ldots^{\cdots}+\frac{1}{4}x^4+c_1=c_0$$

3. $(2xy+x^2)dx+(x^2+y^2)=0$

Jawab.

$$M(x,y)=2xy+x^2\rightarrow\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y$$
$$N(x,y)=(x^2+y^2)\rightarrow\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2y$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\,dan\,\frac{\ldots(\ldots)}{\ldots}=\ldots(\ldots)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=(x^2+y^2)$$
$$f(x,y)=\int\ldots^{\cdots}+\ldots^{\cdots}dy$$
$$¿\ldots^{\cdots}+\ldots+f(x)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=(\ldots^{\cdots}+2y+f(x)=2xy+\ldots^{\cdots})$$
$$2xy+f'(x)=2xy+\ldots^{\cdots}$$
$$f(x)=x^2$$
$$f(x)=\frac{1}{3}\ldots^{\cdots}$$
$$f(x,y)\ldots^{\cdots}+2y+\frac{\cdots}{\cdots}x^3+c$$

4. $p(x,y)dx+Q(x,y)=0$

   Jawab.

   $$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$$

   Misalkan $f(x,y)=c$

   $$\frac{\ldots(\ldots)}{\ldots}=p(x,y)$$
   $$\frac{\cdots}{\cdots}=\ldots(\ldots)$$

5. $(2x+y+Inx)dx+x^2dy=0$

   Jawab.

   $$M(x,y)=2xy+Inx=\frac{\ldots(\ldots)}{\ldots}=\ldots$$
   $$N(\ldots)=\ldots^{\cdots}+\ldots=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x$$
   $$\partial\frac{M(x,y)}{\partial y}=\frac{\ldots(\ldots)}{\ldots}$$

6. $(x^2+3xy)dx+(Ax^2+4y)dy=0$

   Jawab.

   $$M=\frac{x+ky}{x+ky}\,dan\,N=\frac{\ldots}{\ldots+\ldots}$$
   $$\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$$
   $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{k(x+ky)-(x+ky+1)k}{(x+ky)^2}=\frac{-k}{(x+ky)^2}$$
   $$\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\ldots-\ldots(-\ldots)}{(\ldots+\ldots)^{\cdots}}=\frac{k}{(\ldots+\ldots)^{\cdots}}$$

7. $(3x+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$

   Jawab.

   $$\frac{\cdots}{\cdots}=4x\,dan\,\frac{\partial M}{\partial x}=\ldots$$
   $$\frac{\partial f}{\partial x}=\ldots^{\cdots}+\ldots$$

   Dan

   $$\partial f=2x^2+2y$$

∂y

$\frac{\dots}{\dots} = \dots^{\dots} + \sim (x, y)$

8. $(2x^2 + y)\, dx + (x^2 y - x)\, dy = 0$

   Jawab.

   $M = 2x^2 + y \, dan \, N = x^2 y - x$

   $\frac{\dots}{\dots} = 1 \frac{\partial M}{dx} = 2xy - 1 \rightarrow tidak \, eksak$

   Agar menjadi eksak

   $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{1}{\dots^{\dots} - x}(1 - 2xy - 1)$

   $\frac{2 - 2xy}{\dots^{\dots} - x} = \frac{2(\dots - \dots)}{x(xy - 1)} = \frac{2}{x}$

   $\frac{1}{x^2}(\dots^{\dots} + y)\, dx + \frac{\dots}{\dots}(\dots^{\dots})\, dy = 0$

   $\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$

   $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$

   $0(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y)$

   $¿ \int \left(2x \frac{\dots}{\dots^{\dots}}\right) dx \, g(y)$

   $¿ \dots - \frac{\dots}{\dots} x \, g(y)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x - \frac{y}{x}\right) + g(y) = y - \frac{1}{x}$

$\frac{-1}{x} + g'(y) = y - \frac{\dots}{\dots}$

$\dots - \frac{\dots}{\dots} + \frac{1}{2} y^2 + c_1 = c_2$

$2x - \frac{y}{x} + \frac{1}{2} y^2 = c$

9. $(2xy + x^2)\, dx \, (x^2 + y^2) = 0$

   Jawab.

   $M(x, y) = (2xy + x^2) \rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$

   $N(x, y) = (\dots^{\dots} + \dots^{\dots}) \rightarrow \frac{\dots(\dots)}{\dots}$

   $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \, dan \, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = M(x, y)$

   $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = (\dots^{\dots} + \dots^{\dots})$

$f(x,y)=\int x^2+y^2 dy$

$¿\ldots^{\cdots} y+\ldots ¿$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y+2xy+f(x)=2xy+x^2)$

$3xy+f(x)=2xy+x^2$

$f(x)=x^2$

$f(x)=\frac{\cdots}{\cdots} y+2y+\frac{\cdots}{\cdots}\ldots^{\cdots}+c$

10. $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

Jawab.

$M(x,y)=x+y \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1$

$N(x,y)=x-y \rightarrow \frac{\ldots(\ldots)}{\ldots}=\ldots$

$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$

$¿\int (x+y)dx+g(y)$

$¿\frac{1}{2}x^2+xy+g(y)$

$\frac{\partial k(x,y)}{\partial y}=M(x,y)$

$\ldots+\ldots(\ldots)=N(\ldots)$

$\ldots+g(y)=x-y$

$g(y)=-y$

$\ldots^{\cdots}+\ldots-\ldots^{\cdots}=c$

11. $x\frac{dy}{dx}-5y=x^7$

Jawab.

$x\frac{dy}{dx}-5y=x^7$

$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{5y}{x}=x^6$

$p=\frac{-5}{x}$

$q=x^6$

$y \cdot f1=\int q \cdot f1 \cdot dx$

$y \cdot f=\int q.f1 \cdot dx$

$y \cdot \frac{1}{\ldots^{\cdots}}=\int \ldots^{\cdots} \cdot \frac{1}{\ldots^{\cdots}} \cdot dx \leftrightarrow \frac{\cdots}{x^5}=\int x\,dx$

$\frac{\cdots}{x^5}=\frac{1}{2}\ldots^{\cdots}+c$

$$y=\frac{1}{2}x^7+c\cdot x^5$$

12. $\frac{d^2}{dx}-\frac{5\,dy}{dx}+6\,y=0$

Jawab.

$$m^2-5\,m+6=0$$
$$(m-\ldots)(m-\ldots)=0$$
$$m=\ldots V\, m=\ldots, m_1\neq m_2$$
$$y=c_1 e^{m_1}+c_2{}^{m_2{}^x}$$
$$y=c_1 e^{2x}+c_2 e^{3x}$$

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{2\,x}{(y+1)}$

Jawab.

$$(y+1)\frac{dy}{dx}=2\,x$$
$$\int(\ldots+\ldots)\frac{dy}{dx}dx=\int\ldots dx$$
$$\left(\frac{y^2}{2}+y\right)=\ldots^{\cdots}+c$$
$$\int f(y)\,dy=\int f(x)\cdot dx$$

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3\,y}{2\,x}$

Jawab.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+3(vx)}{2x}=\frac{x+3\,vx}{2\,x}=\frac{1+3\,v}{2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ldots+\ldots}{\ldots}$$
$$\frac{dy}{dx}=v\cdot 1+\ldots\cdot\frac{dv}{dx}$$
$$\frac{\ldots}{\ldots}=v+x\cdot\frac{dv}{dx}$$
$$x\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{\ldots+\ldots}{\ldots}-v$$
$$x\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1+3\,v}{\ldots}-\frac{2\,v}{\ldots}$$
$$x\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{\ldots+\ldots}{2}$$
$$\frac{2}{(1+v)}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}$$

LATIHAN SOAL

Selesaikan persamaan berikut ini !

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2y}{y^2+2x}$
2. $\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2+4xy}{2x^2+2y}, y(0)=3$
3. $(9x^2+y-1)dx-(4y-x)dy=0$
4. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y}{x\sin y-y^2}$
5. $(xe^y-e^{2y})dy-(e^y+x)dx=0$
6. ¿
7. $(x^2-2xy)dy-(y^2-2xy+1)dx=0$
8. $(xy-y^2+x)dx+N(x,y)dy=0$
9. $\frac{dy}{dx}=\frac{-x+4y}{y^2+2x}$

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+2y}{y^2+2x}$
11. ¿
12. $(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$
13. $y(x^2y^2+2)dx+x(2+x^2y^2)dy=0$
14. $\frac{x^2}{y}dy+2x\ln y\,dx=0$
15. $e^x(x^2+y^2+2x)dx+2e^x y\,dy=0$
16. ¿
17. $(2xy+x^2)dx+(x^2+y^2)=0$
18. $3x^2y^2dx+(2x^3y+4y^3)dy=0$
19. $3x^2y^2dx+(4x^2y-12)dy=0$
20. $2x^2y\,dx+(x^2-y^2)dy$
21. $(2y-x^2)dx+x\,dy=0$
22. $(2x+3y)dx+(3x+4y)dy=0$
23. $5x^2y^2dx+(10x^2y-15)dy=0$
24. $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$
25. $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$
26. $2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y$ ¿ $dx+(2y^3+2x^2y+2x)dy=0$
27. $(x^4+x^4)dx-xy^3dy=0$
28. $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2 3x)dy=0$
29. $y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$
30. $(x+x^4+2x^2y^2+y^4)dx+y\,dy=0$ *yang merupakan fungsi* x^2+y^2
31. Tunjukan bahwa $v(x,y)=xy^2+1$adalahfaktor integrasi persamaan diferensial $(y^4-2y^2)dx+(3xy^3-4xy+y)dy=0$
32. Persamaan$(1-xy)dx+(1-x^2)dy=0$
33. Persamaan$dx+$¿
34. $(3xy^3-4xy+y)dy+y^2(y^2-2)dx=0$
35. $2xydy+(3x+2y^2)dx=0$
36. $(3-2y)dx+(x^2-1)dy=0$
37. $(x^2+3x+2)dx+(x^2+x+1)dy.\,dimana\,dy=0$
38. $(y-2x^3)dx-x(1-xy)dy=0$
39. $xdy+(2y-xe^x)dx=0$
40. $(x+2y)dx+xdy=0$
41. $(2x+6y)dx+2xdy=0$
42. $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$
43. $4xydy+(6x+2y^2)dx=0$
44. $(x^2+3x+2)dx+(x^2+x+1)dy\,dimana\,dy=0$
45. $3x^2+y^2dx(4x^3y-12)dy=0$
46. $(2y-x^3)dx+y\,dy=0$

47. $\left(x^2+y^2\right)dx+2\,xy\,dy=0$
48. $\left(x^2-y\right)dx-xdy=0$
49. $\left(x^2+y^2\right)dx\,2\,xy\,dy=0$
50. $\left(2\,x+ey\right)dx+xey\,dy=0$
51. $\left(x+y+1\right)dx+\left(cx-y+3\right)dy=0$
52. $\left(x+y\cos x\right)dx+\sin x\,dy=0$
53. $\left(x^2y^3+2\,y\right)dx\left(2\,x-2\,x^3y^2\right)=0$
54. $\left(xy+y^2\right)dx+x^2dy=0$

GLOSARIUM

1. Diferensial Eksak : Salah-satu jenis diferensial biasa yang sering digunakan dalam ilmu fisika dan

teknik.

2. Diferensial Homogen : Diferensial tingkat satu dan derajat satu, disebut persamaan diferensial homogen jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk.
3. Diferensial Parsial : Persamaanyang di dalamnya terdapat suku-suku diferensial parsial, yang dalam matematika diartikan sebagai suatu hubungan yang mengaitkan suatu fungsi yang tidak diketahui, yang merupakan fungsi dari beberapa variabel bebas dengan turunan-turunannya melalui variabel-variabel yang dimaksud.
4. Diferensial Tidak Eksak : Suatu PD tingkat satu dan berpangkat satu yang berbentuk.
5. Faktor Integrasi : Sebuah faktor pengali yang menjadikan suatu persamaan diferensial yang tidak eksak menjadi persamaan diferensial eksak.

DAFTAR INDEKS

MODUL 4

PERSAMAAN DIFERENSIAL METODE SUBSTITUSI

Capaian Pembelajaran	Uraian Materi
Mampu memahami Persamaan diferensial dengan metode subsitusi dengan membuktikan dengan metode subsitusi homogen dan Nilai konstanta	1. Menyelesaikan persamaan diferensial subsitusi dengan fungsi Eksa, Non Eksa dan Bernauli 2. Primitif dari PD linear yang homogen dengan koefisien konstan dan akar-akarnya bilangan kompleks

MODUL 4

PERSAMAAN DIFERENSIAL METODE SUBSITUSI

4.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Persamaan Diferensial Metode Subsitusi

PENGERTIAN

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk suatu fungsi tak diketahui dari satu atau beberapa peubah yang menghubungkan nilai dari fungsi tersebut dengan turunannya sendiri pada berbagai derajat turunan. Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial biasa, jika semua turunannya berkaitan dengan satu peubah saja, dan disebut persamaan diferensial parsial, jika turunannya berkaitan dengan dua atau lebih peubah. Orde dari persamaan diferensial adalah derajat tertinggi dari turunan dalam persamaan yang bersangkutan. Himpunan dari $n$persamaan diferensial orde-satu dengan $n$menyatakan banyaknya persamaan yang tidak diketahui disebut sistem persamaan diferensial orde-satu,n adalah dimensi dari sistem yang bersangkutan

Contoh 4.1.1

$$\frac{dy}{dx}+5x-5=0,\, \textit{Disebut persamaan diferensial orde } 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6x+7=0,\, \textit{Disebut persamaan diferensial orde } 2$$

Pembentukan Persamaan Diferensial. Secara matematis, persamaan diferensial muncul jika ada konstanta sembarang dieliminasikan dari suatu fungsi tertentu yang diberikan.

Contoh 4.1.2
Persamaan Diferensial Biasa

$$3x^2\frac{dy}{dx}+6xy=0$$

$$4e^x\frac{dy}{dx}=2e^{3x}+3$$

Contoh 4.1.3
Persamaan Parsial

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\left(Persamaan\,Difusi\right)$$

Contoh 4.1.4

$Y=A.\sin x+B\cos x$, Bentuklah PD nya. A dan Bkonstanta sembarang.

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx}=A.\cos x-B.\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-A\sin x-B\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(A\sin x+B\cos x\right)$$

$$Jadi\,\frac{d^2y}{dx^2}=-y\;atau\,\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

Contoh 4.1.4

$Bentuklah\ persamaan\ Diferensial\ dari\ fungsi: y=x+\frac{A}{x}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx}=1-Ax^2$$

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{A}{x^2}$$

$$Jika\ y=x+\frac{A}{x}\ maka\ A=x(y-x)$$

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{x(y-x)}{x^2}$$

¿ $1-\frac{(y-x)}{x}=\frac{x-(y-x)}{x}=\frac{2x-y}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x}\ atau\ x.\frac{dy}{dx}=2x-y$$

Contoh 4.1.5

Persamaan $y=Ax^2+Bx$ bentuk PD nya

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx}=2Ax+B\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2A\ A=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$A=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\ di\ masukan\ kedalam\ persamaan\ (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=2x\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right)+B$$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{d^2y}{dx^2}+B$$

$$B=\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}$$

Harga A dan B dimasukkan ke soal

$$Y=Ax^2+Bx$$

¿ $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}x^2+\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x$

¿ $\frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-x^2\frac{d^2y}{dx^2}$

¿ $x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2}$

Contoh 4.1.6

Persamaan $y=c_1\cos x+c_2\sin x$, bentuklah persamaan diferensial

Penyelesaian:

$y=c_1\cos x+c_2\sin x\,(i)$

$y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$

$y''=-c_1\cos x-c_2\sin x$

$y''=-(c_1\cos x+c_2\sin x)(ii)$

Substitusi pers (i) ke pers (ii), diperoleh

$y''=-y$

PD: $y''+y=0$

Hasil akhir penyelesaian di atas adalah persamaan diferensial orde dua. Jadi fungsi dengan satu konstanta sembarang menghasilkan persamaan diferensial orde satu, Pemecahan Persamaan Diferensial Prinsipnya Menghilangkan Koefisien Diferensialnya sehingga tinggal hubungan antara y dan x.

4.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Integerasi Langsung

Jika persamaan diferensial dapat disusun dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan integrasi langsung.

Contoh 4.2.1

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-6x+5$$

Penyelesaian:

$$y=\int(3x^2-6x+5)\,dx=x^3-3x^2+5x+c$$

Nilai c tidak dapat ditentukan kecuali jika dalam persamaan di atas diberi keterangan syarat (sebuah nilai y untuk x tertentu). Solusi dengan nilai konstanta sembarang atau c disebut solusi umum/primitif, sedangkan solusi disebut khusus jika nilai c dapat dihitung.

Contoh 4.2.2

Tentukan solusi khusus persamaan berikut jika $y=3$ untuk $x=0$:

Penyelesaian:

$$e^x\frac{dy}{dx}=4$$

$$e^{x}\frac{dy}{dx}=4\frac{dy}{dx}=4e^{-x}$$

$$y=\int 4e^{-x}dx=-4e^{-x}+c$$

dengan mengetahui $y=3$untuk $x=0$ dapat dihitung nilai c yaitu

$$y=4e^{-x}+c\leftrightarrow 3=-4+c;c=7$$

sehingga solusi khusus adalah:

$$y=\int 4e^{-x}dx=-4e^{-x}+7$$

Contoh 4.2.3

Selesaikan Persamaan Diferensial Berikut

$$x\frac{dy}{dx}=5x^{3}+4$$

Penyelesaian:

$$x\frac{dy}{dx}=5x^{3}+4$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{x}x^{3}+\frac{4}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=5x^{2}+\frac{4}{x}$$

Sehingga

$$y=\frac{5}{3}x^{3}+4\in x+c$$

Contoh 4.2.4

Selesaikan Persamaan Diferensial berikut ini

$$x\frac{dy}{dx}=15x^3-6x^2+7x-8$$

Penyelesaian:

$$x\frac{dy}{dx}=15x^3-6x^2+7x-8$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{15x^3}{x}-\frac{6x^2}{x}+\frac{7x}{x}-\frac{8}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=15^2-6x+7-8x^{-1}$$

$$dy=(15\text{¿¿}2-6x+7-8x^{-1})dx\,\text{¿}$$

$$\int dy=\int(\text{¿}15\text{¿¿}2-6x+7-8x^{-1})dx\,\text{¿¿}$$

$$y=5x^3-3x^2+7x-8\in x+c$$

Contoh 4.2.5
Selesaikan Persamaan Diferensial berikut ini

$$e^x\frac{dy}{dx}=10e^{3x}+4$$

Penyelesaian:

$$e^x\frac{dy}{dx}=10e^{3x}+4$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{10e^{3x}}{e^x}+\frac{4}{e^x}$$

$$\frac{dy}{dx}=10e^{2x}+4e^{-x}$$

$$dy=\left(10e^{2x}+4e^{-x}\right)dx$$

$$\int dy = \int \left(10\, e^{2x} + 4\, e^{-x}\right) dx$$

$$y = 5\, e^{3x} + 4 \in x + c$$

4.3 Kegiatan Pembelajaran 3 Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Pemisahan Variabel

Jika persamaan diferensial berbentuk $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$,

yaitu persamaan yang ruas kanannya dapat dinyatakan sebagai perkalian atau pembagian fungsi $x$dan fungsi y, maka penyelesaian PD dengan cara memisahkan variabelnya sehingga factor 'y' bisa kita kumpulkan dengan 'dy' dan faktor 'x' dengan 'dx'.

Contoh 4.3.1
Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$$

Penyelesaian:

Pisahkan berdasarkan variabelnya untuk mendapatkan

$$\frac{1}{(1 + y)} dy = (1 + x)\, dx$$

jika kita integrasikan kedua ruas menjadi:

$$\int \frac{1}{(1 + y)} dy = \int (1 + x) dx$$

$$\ln(1 + y) = x + \frac{1}{2} x^2 + c$$

Contoh 4.3.2

Selesaikan Persamaan Diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{6y+2}$$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{6y+2}$$

$$(6y+2)\,dy=(8x)\,dx$$

$$\int(6y+2)\,dy=\int(8x)\,dx$$

$$3y^2+2y+c=4x^2+c$$

Contoh 4.3.3

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^2+4y^2}{3x^2y-x^2}$$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^2+4y^2}{3x^2y-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2(x+4)}{x^2(3y-1)}$$

$$\frac{(3y-1)}{y^2}dy=\frac{(x+4)}{x^2}dx$$

$$\int\frac{(3y-1)}{y^2}dy=\int\frac{(x+4)}{x^2}dx$$

$$\int (\frac{3}{y} - y^2) dy = \int (\frac{1}{x} + 4x^{-2}) dx$$

$$3 \in y + y^{-1} = ¿ x - 4x^{-1} + c$$

Contoh 4.3.4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4y-8}$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4y-8}$$

$$(4y-8) dy = (8x) dx$$

$$\int (4y-8) dy = \int (8x) dx$$

$$2y^2 - 8y + c = 4x^2 + c$$

4.4 Kegiatan Pembelajaran 4 Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Substitusi

Tinjau persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x}$$

Persamaan diatas tidak dapat diselesaikan dengan cara memisahkan variabelnya. Dalam ini kita lakukan substitusi $y = vx$, dengan $v$adalah fungsi$x$. Sehingga penyelesaiannya dari

$y = vx$ dideferensialkan menjadi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+3(v.x)}{2x}=\frac{x+3vx}{2x}=\frac{1+3v}{2}$$

Jadi:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3v}{2}.............\,persamaan(1)$$

Kita lihat Rumus :

$Y=v.x$, maka turunannya :

$$\frac{dy}{dx}=v.1+x.\frac{dy}{dx}...\,persamaan(2)$$

Catatan : Ingat rumus $Y=U.V$ maka $Y'=U.V'+V.U'$

Jika persamaan (1) dimasukkan ke persamaan (2)

$$\frac{1+3v}{2}=v+x.\frac{dy}{dx}$$

$$x.\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v}{2}-v$$

$$x.\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v}{2}-\frac{2v}{2}$$

$$x.\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{2}$$

$$\frac{2}{(1+v)}.\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x};\,sudah\,dinyatakan\,dalam\,bentuk\,v\,dan\,x$$

Kemudian masing-masing ruas diintegrasikan ke x

$$\int\left(\frac{2}{1+v}\right)\frac{dv}{dx}dx=\int\frac{1}{x}.dx$$

$$2\ln(1+v)=\ln x+c$$

Jika Constanta C diganti bentuk lain yaitu :$C=\ln A$

$$2\ln(1+v)=\ln x+\ln A$$

$$\ln(1+v)^2=\ln(A.x)$$

$$(1+v)^2=A.x...............(3)$$

$Jika\, Y=v\,.\,x \rightarrow v=\frac{y}{x}\, maka\; persamaan\,(3)$

$dapat\; ditulis\, menjadi\left(1+\frac{y}{x}\right)^2=AX$

apabila semua ruas dikalikan x^2 maka $1+2\,yx+y^2=A\,X^3$

Contoh 4.4.1

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\,x+3}{4\,x}$$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\,x+3}{4\,x}$$

$$Substitusi\; y=v\,.\,x\; atau\, v=\frac{y}{x}\,,sehingga:$$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\; dan\, soal\, menjadi:$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\,x+3\,vx}{4\,x}=\frac{2+3\,v}{4}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2+3\,v}{4}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2+3\,v}{4}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2-3\,v}{4}-\frac{4}{4}v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2-v}{4}$$

$$\frac{4}{2-v}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{4}{2-v}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$4\in(2-v)=¿\,x+C$$

$$4\in(2-v)=¿\,x+¿\,A$$

$$¿\,(2-v)^4=¿\,A\,.\,x \rightarrow (2-v)^4=A\,.\,x$$

$v=\frac{y}{x}\, di\, masukkan\, kembali\, sehingga:$

$$\left(2-\frac{y}{x}\right)^4=A.x$$

$$\left(2\frac{x}{x}-\frac{y}{x}\right)^4=A.x \rightarrow \left(\frac{2x}{x}-\frac{y}{x}\right)^4=A.x$$

$$\left(\frac{2x-y}{x}\right)^4=A.x$$

Jadi: $(2x-y)^4$ ¿ $A.x^5$

Contoh 4.4.2

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut

$$(x^2+2xy)\frac{dy}{dx}=2xy+3y^2$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy+3y^2}{x^2+2xy}$$

$Substitusi\; y=v.x\; atau\; v=\frac{y}{x}, sehingga:$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\; dan\, soal\, menjadi:$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x.v.x+3(v.x)^2}{x^2+2x.vx}=\frac{2v.x^2+3v^2.x^2}{x^2+2v.x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2v.x^2+3v^2.x^2}{x^2+2v.x^2}=\left(\frac{2v+3v^2}{1+2v}\right)\frac{x^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2v+3v^2}{1+2v}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v+3v^2}{1+2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2v+3v^2}{1+2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2v+3v^2}{1+2v}-\frac{v+2v^2}{1+2v}=\frac{v+v^2}{1+2v}$$
$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v+v^2}{1+2v}$$
$$\frac{1+2v}{v+v^2}dv=\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{1+2v}{v+v^2}dv=\int\frac{dx}{x}$$
$$¿\left(v+v^2\right)=¿x+C$$
$$¿\left(v+v^2\right)=¿x+¿A$$
$$¿\left(v+v^2\right)=¿A.x\rightarrow v+v^2=A.x$$
$$v=\frac{y}{x}\,di\,masukkan\,kembali\,sehingga:$$
$$v=\frac{y}{x}\rightarrow\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2=A.x$$
$$\frac{xy+y^2}{x^2}=A.x\rightarrow xy+y^2=A.x^3$$

Contoh 4.4.3

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-5y}{8x}$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-5y}{8x}$$
$$Substitusi\ y=v.x\ atau\ v=\frac{y}{x},sehingga:$$
$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\,dan\,soal\,menjadi:$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-5v.x}{8x}=\frac{x\left(4-5v\right)}{8x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4-5v}{8}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{4-5v}{8}$$
$$x\frac{dv}{dx}=\frac{4-5v}{8}-v$$
$$x\frac{dv}{dx}=\frac{4-5v}{8}-\frac{8}{8}v$$
$$x\frac{dv}{dx}=\frac{4-13v}{8}$$
$$\frac{8}{4-13v}dv=\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{8}{4-13v}dv=\int\frac{dx}{x}$$
$$8\in(4-13v)=¿x+c$$
$$8\in(4-13v)=¿x+¿A$$
$$¿(4-13v)^8=¿A.x\rightarrow(4-13v)^8=A.x$$
$$v=\frac{y}{x}\,di\,masukkan\,kembali\,sehingga:$$
$$\left(4-13\frac{y}{x}\right)^8=A.x$$
$$\left(\frac{4x-13y}{x}\right)^8=A.x$$
$$Jadi:(4x-13y)^8=A.x^9$$

RANGKUMAN

1. Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk suatu fungsi tak diketahui dari satu atau beberapa peubah yang menghubungkan nilai dari fungsi tersebut dengan turunannya sendiri pada berbagai derajat turunan.
2. Orde dari persamaan diferensial adalah derajat tertinggi dari turunan dalam persamaan yang bersangkutan.
3. Jika persamaan diferensial dapat disusun dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

   maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan integrasi langsung.

4. Solusi dengan nilai konstanta sembarang atau c disebut solusi umum/primitif, sedangkan solusi disebut khusus jika nilai c dapat dihitung.

5. *Jika persamaan diferensial berbentuk* $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$,

yaitu persamaan yang ruas kanannya dapat dinyatakan sebagai perkalian atau pembagian fungsi $x$dan fungsi y, maka penyelesaian PD dengan cara memisahkan variabelnya sehingga factor 'y' bisa kita kumpulkan dengan 'dy' dan faktor 'x' dengan 'dx'.

6. Penyelesaian persamaan diferensial substitusi. Dalam ini kita lakukan substitusi $y=vx$, dengan $v$adalah fungsi$x$. Ingat rumus $Y=U.V$maka $Y'=U.V'+V.U'$.

DISKUSI KELOMPOK

1. $\frac{dy}{dx}=4x^3+6x+7$

Penyelesaian:

$y=\int 4\ldots^3+6\ldots+7=\ldots^4+3\ldots^2+7\ldots+c$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{6x}{6y+4}$

Penyelesaian:

$\frac{dy}{dx}=\frac{6x}{6y+4}$

$(\ldots+4)\,dy=(6x)\ldots$

$\int(\ldots+\ldots)\,dy=\int(\ldots)\,dx$

$3y^2+\ldots+c=\ldots+c$

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy^2+6y^2}{4x^2y-x^2}$

Penyelesaian:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy^2+6y^2}{4x^2y-x^2}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2(\ldots+\ldots)}{x^2(\ldots-\ldots)}$

$\dfrac{(4y-1)}{y^2}dy=\dfrac{x+6}{x^2}dx$

$\int\dfrac{(4y-1)}{y^2}dy=\int\dfrac{x+6}{x^2}dx$

$\int\left(\dfrac{4}{1}-\ldots\right)dy=\int\left(\dfrac{\ldots}{\ldots}+6x^{-2}\right)dx$

$4\in y+y^{-1}+c=¿\,x-4x^{-1}+c$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8x}{8y+4}$

Penyelesaian:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8x}{8y+4}$

$(\ldots+\ldots)\,dy=(\ldots)\,dx$

$\int(8y+4)\,dy=\int(8x)\,dx$

$4y^4+\ldots+c=4x^2+c$

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x}{8y-3}$

Penyelesaian:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x}{8y-3}$

$(\ldots-\ldots)\,dy=(\ldots)\,dx$

$\int(8y-3)\,dy=\int(6x)\,dx$

$4y^2 - \ldots + c = \ldots + c$

6. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 8x + 6$

Penyelesaian:

$y = \int \left(\ldots + \ldots + 6\right) dx = \ldots + 4x^2 + 6x + \ldots$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 + 3y^2}$

Penyelesaian:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 + 3y^2}$

$\left(\ldots + \ldots\right) dy = \left(\ldots\right) dx$

$\int \left(1 + \ldots\right) dy = \int \left(x ¿¿ 2\right) dx ¿$

$\ldots + y^3 + c = \dfrac{1}{3} \ldots + c$

8. $8x + \dfrac{dy}{dx} = 5x^2 + 7$

Penyelesaian:

$8x + \dfrac{dy}{dx} = 5x^2 + 7$

$\dfrac{dy}{dx} = 5x^2 - \ldots + 7$

$dy = \left(\ldots - 8x + \ldots\right) dx$

$\int dy = \int \left(5x^2 - \ldots + \ldots\right) dx$

$y = \dfrac{\ldots}{\ldots} x^3 - \ldots x^2 + \ldots x + c$

9. $\dfrac{dy}{dx} - 10x = 3x^2 + 5$

Penyelesaian:

$\dfrac{dy}{dx} - 10x = 3x^2 + 5$

$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 5$

$$dy=(\ldots+\ldots+\ldots)\,dx$$
$$\int dy=\int(\ldots+\ldots+5)\,dx$$
$$y=x^3+\ldots+\ldots+c$$

10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{10x}{5y+3}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{10x}{5y+3}$$
$$(5y+3)\,dy=10x\,dx$$
$$\int(\ldots+\ldots)\,dy=\int\ldots dx$$

$$\ldots y^2+\ldots y=\ldots+c$$

LATIHAN MANDIRI

Gunakanlah metode substitusi untuk menemukan solusi penyelesaian persamaan differensial berikut ini!

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{2x}$
2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+3y}{2x}$
3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y}{x}$
4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{2x}$
5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}$
6. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+4y}{20x}$

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{5x}$

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{21x}$

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y}{2x}$

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y}{12x}$

11. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+4y}{5x}$

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+7y}{12x}$

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{23x}$

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{7x+2y}{2x}$

15. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+3y}{2x}$

16. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{25x}$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+12y}{21x}$

18. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+5y}{6x}$

19. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y}{3x}$

20. $\frac{dy}{dx}=\frac{6x+7y}{2x}$

21. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+13y}{x}$

22. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+14y}{x}$

23. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+15y}{x}$

24. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+16y}{x}$

25. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+17y}{x}$

26. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+8y}{x}$

27. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+7y}{x}$

28. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+9y}{x}$

29. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+10y}{x}$

30. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+11y}{2x}$

31. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+12y}{x}$

32. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+16y}{2x}$

33. $\frac{dy}{dx}=\frac{8x+19y}{9x}$

34. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+12y}{19x}$

35. $\frac{dy}{dx}=\frac{7x+13y}{9x}$

36. $\frac{dy}{dx}=\frac{5x+12y}{3x}$

37. $\frac{dy}{dx}=\frac{8x+18y}{2x}$

38. $\frac{dy}{dx}=\frac{12x+5y}{x}$

49. $\frac{dy}{dx}=\frac{7x+19y}{4x}$

40. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+5y}{x}$

41. $\frac{dy}{dx}=\frac{12x+8y}{3x}$

42. $\frac{dy}{dx}=\frac{20x+8y}{2x}$

43. $\frac{dy}{dx}=\frac{7x+8y}{x}$

44. $\frac{dy}{dx}=\frac{6x+3y}{x}$

45. $\frac{dy}{dx}=\frac{8x+29y}{6x}$

MODUL 5

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

Capaian Kompetensi	Uraian Materi
Mahasiswa Mampu memahami konsep PD linear yang homogen dengan koofisien konstan dan mampu menentukan fungsi primitifnya dengan baik	Fungsi primitif dari PD linear yang homogen dengan koofisien konstan dan akar-akarnya bilangan kompleks

MODUL 5

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

5.1 Kegiatan Pembelajatran 1 Aplikasi Persamaan Diferensial Orde I

Gejala atau Fenomena Alam: Model Matematika Sederhana. Salah satu kemampuan manusia yang cukup bermakna adalah kemampuan mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi. Kemampuan ini tidak lepas dari kemampuan manusia dalam memperoleh pengetahuan dengan cara mengamati gejala atau fenomena alam dan memprediksi kemungkinan-kemungkinan kebutuhan manusia dimasa kini dan mendatang sebagai landasan untuk mengembangkannya. Metode memperoleh dan mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi secara empirik melalui pengalaman dan pengamatan menjadi pilihan yang tepat dewasa ini. Apalagi dengan didukung produk teknologi canggih seperti kalkulator, komputer dan sebagainya. Dengan demikian matematika terapan(applied mathematics) perlu mendapat perhatian dan dikenalkan sejak dini pada para mahasiswa. Focus matematika terapan adalah untuk memecahkan masalah-masalah yang berkaitan dengan gejala atau fenomena alam kedalam bahasa matematika (pemodelan matematika).

Berkaitan dengan gejala atau fenomena alam, orang sering memerlukan model matematik dari masalah yang dihadapi. Banyak permasalah matematik dari gejala alam yang model matematikanya dapat diformulasikan dalam bentuk persamaan diferensial orde 1. Selanjutnya dari model matematik yang diperoleh ini solusinya dicari dengan metode yang sesuai. Sampai saat ini belum ditemukan cara terbaik agar menjadi pakar dalam menyusun model matematika. Kendalanya adalah dalam menyusun model matematika fenomena baru(new phenomena) bersifat tak rutin, kasustik dan sering melibatkan beberapa variabel dan karena itu agar dapat menyusun model matematika suatu gejala alam diperlukan dasar pengetahuan dan kemampuan yang lebih kompleks. Salah satu cara mempelajari menyusun model matematika ini dengan mengkaji contoh-contoh penyusunan model matematik yang sudah ditemuka orang.

Keradioaktifan suatu zat : model peluruhan Model peluruhan zat radioaktif diberikan oleh persamaan diferensial :

$$\frac{dN}{dt}=-kN \quad (1.1)$$

Dengan $k>0$ adalah konstan peluruhan. Persamaan diferensial (1.1) menyatakan bahwa peluruhan zat radio aktif pada saat berbanding langsung dengan banyaknya atom zat pada waktu itu. Solusi persamaan diferensial (1.1) dapat dicari dengan cara berikut. Ubah persamaan (1.1) menjadi

$$\frac{dN}{N}=-k\,dt$$

Integralkan kedua ruas diperoleh

$\ln[N]=-kt+C_{1,}$ C_1 konstan sebarang karena $N>0$, maka $\ln[N]=\ln N$, jadi solusi persamaan diferensial ini adalah:

$N=e^{-kt+c_1}$¿Ce^{-kt}

Dimana C merupakan konstan sebarang. Misalkan pada saat $t=0$, $N(0)=N_0$ adalah banyaknya atom awal, (mula-mula) zat radio aktif, maka $C=N_0$. Jadi bila kondisi awal persamaan diferensial (1.1) adalah $N(0)=N_0$, maka solusi khususnya adalah

$$N=N_0e^{-kt}$$

Perkembangan populasi : model pertumbuhan. Masalah pertumbuhan populasi, menurut Thomas Malthus (1766-1834) model persamaan diferensialnya :

$$\frac{dP}{dt}=kP$$

Dengan k adalah koefisien pertumbuhan yang merupakan selisih rata-rata kelahiran dan kematian. Dengan metode seperti ini pada masalah keradioaktifan suatu zat, solusi umum persamaan diferensial ini adalah:

$$P=Ce^{kt}$$

Bila kondisi awalnya $P(0)$ dan P_0, maka diperoleh solusi khusus :

$$P = P_0 e^{kt}$$

Persamaan diferensial yang dikemukakan Thomas Malthus ini merupakan model pertumbuhan populasi yang paling sederhana yakni dengan mengasumsikan bahwa persediaan sumber makanan tak terbatas, dan hanya mempertimbangkan faktor rata-rata kelahiran dan kematian. Pierre Fancois Verhulst (1804-1849) berdasar pada model pertumbuhan populasi Malthus mengemukakan model matematik yang dinamakan model pertumbuhan logistik

$$\frac{dP}{dt} = rMP - r\,P^2$$

Dengan mengambil nilai k = r(M-P), dengan M adalah maksimal populasi yang dapat ditampung dan r suatu konstan. Dengan memisalkan $a = Rm$ dan $b = r$, persamaan diferensial dapat ditulis:

$$\frac{dP}{dt} = aP - b\,P^2$$

Persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Misalnya kondisi awalnya $P(t_0) = P_0$. Solusi persamaan diferensial ini dapat dicari dengan cara berikut :

$$\int_{P_0}^{p} \frac{ds}{as - bs^2} \int_{t_0}^{t} du = t - t_0$$

(misalkan$s = P$ dan $u = t$, maka $dP = d$s dan $du = dt$)

Untuk mengintegralkan fungsi $\frac{1}{as - bs^2}$ dapat dilakukan dengan cara berikut:

$$\frac{1}{as - bs^2} = \frac{1}{s(a - bs)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs}$$

Maka ruas kanan persamaan ditulis :

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs} = \frac{A(a - bs) + Bs}{s(a - bs)} = \frac{Aa + (B - bA)s}{s(a - bs)}$$

Jadi,

$Aa+(B-Ba)s=1$

Karena persamaan ini berlaku untuk semua s, maka berlaku juga untuk semua $Aa=1$ dan $b-Ba=0$, dan didapat $A=\frac{1}{a}\, dan\, B=\frac{b}{a}$

$$\int_{P_0}^{p} \frac{ds}{as-bs^2}=\frac{1}{a}\int_{p_o}^{p}(\frac{1}{s}¿\frac{+b}{a-bs})ds¿$$

$$¿\frac{1}{a}[\ln\frac{p}{p_0}+\ln\frac{a-bP_0}{a-bP}]$$

$$¿\frac{1}{a}[\ln\frac{p}{p_0}+\ln\frac{a-bP_0}{a-bP}]$$

$$t-t_0=\frac{1}{a}[\ln\frac{p}{p_0}+\ln\frac{a-bP_0}{a-bP}]$$

karena $\frac{a-bP^0}{a-bP}$ selalu bernilai positif,

$$a(t-t_0)=\ln\frac{P}{P_0}.\frac{bP_0}{bP}$$

Perhatikan masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

1. Jika $f(x,y)$ kontinu disuatu persegi panjang yang memuat (x_0, $y_0¿$ maka m.n.a, diatas mempunyai solusi

2. Jika f(x,y) kontinu disuatu persegi panjang yang memuat (x_0, $y_0¿$ maka $m.n.a$, diatas mempunyai solusi tunggal. Misalkan selang I adalah proyeksi dari persegi panjang diatas pada sumbu x. Solusi tersebut dijamin terdefinisi pada selang yang merupakan subset dari I.

Contoh 5.1.1

Periksa eksistensi dan ketunggalan $m.n.a$:

1. $M.n.a\ y^1=2\sqrt{y}, y(0)=0$
   Fungsi $f(x,y)=2\sqrt{y}$ kontinu di $y>0, x\in R$, $sedangkan \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$ tak kontinu di $y=0$. Jadi eksistensi dan ketunggalan tidak dijamin. Namun jika dicari diperoleh dua solusi $m.n.a\ y(x)=0\ dan\ y(x)=(x+C)^2, untuk\ C\in R$.

2. $M.n.a\ x y^1=2y, y(0)=0$
   Fungsi $f(x,y)=2y$ tak kontinu di $x=0$, jadi syarat eksistensi tak dipenuhi, tetapi jika dicari, tetap dapat diperoleh solusi $m.n.a\ y(x)=0$ dan $y(x)=K x^2, untuk\ k\in R$.

3. $M.n.a\ y^2+x^2 y^1=0, y(0)=0$
   Fungsi $f(x,y)=\frac{-y^2}{x^2}$ tak kontinu di $x=0$, jadi eksistensi solusi tak dijamin . telah kita ketahui sebelumnya bahwa m.n.a diatas mempunyai lebih dari satu solusi, yaitu $y(x)=0\ dan\ y(x)=\frac{x}{(Cx-1)}, dengan\ C\in R$.

Catatan :

Dari contoh diatas no 2 dan 3 jelas bahwa ke kontinuan $f(x,y)$ merupakan syarat cukup, tetapi bukan syarat perlu bagi eksistensi solusi.

4. $M.n.a\ y^1=y^2, y(0)=1$

Fungsi f(x,y) = $y^2\ dan \frac{\partial f}{\partial y}=2y$ kontinu diseluruh R^2. Jadi teorema menjamin kewujudan dan ketunggalan solusi pada suatu interval buka yang memuat $x_0=0$. Jika dicari diperoleh solusi

$m.n.a\ y(x)=\frac{1}{1-x}$, perhatikan bahwa solusi ini tidak terdefinisidi seluruh R, melainkan hanya pada $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Contoh ini menunjukkan bahwa solusi tunggal dari suatu $m.n.a$ hanya terdefinisi pada suatu selang yang merupakan subset dari selang kekontinuan f danf_y.

5. $M.n.a\ y^1=4\sqrt{y}, y(0)=0$
   Fungsi $f(x,y)=4\sqrt{y}$ kontinu di $y>0, x\in R, sedangkan \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$ tak kontinu di $y=0$. Jadi eksistensi dan ketunggalan tidak dijamin. Namun jika dicari diperoleh dua solusi $m.n.a\ y(x)=0\ dan\ y(x)=(x+C)^2, untuk\ C\in R$.

6. $M.n.a\ y^1=y^4, y(0)=1$
   Fungsi f(x,y) = $y^4\ dan\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y$ kontinu diseluruh R^2. Jadi teorema menjamin kewujudan dan ketunggalan solusi pada suatu interval buka yang memuat $x_0=0$. Jika dicari diperoleh solusi $m.n.a\ y(x)=\frac{1}{1-x}$, perhatikan bahwa solusi ini tidak terdefinisidi seluruh R, melainkan hanya pada $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Contoh ini menunjukkan bahwa solusi tunggal dari suatu $m.n.a$ hanya terdefinisi pada suatu selang yang merupakan subset dari selang kekontinuan f danf_y.

7. $M.n.a\ x y^1=y, y(0)=0$
   Fungsi $f(x,y)=y$ tak kontinu di $x=0$, jadi syarat eksistensi tak dipenuhi, tetapi jika dicari, tetap dapat diperoleh solusi $m.n.a\ y(x)=0\ dan\ y(x)=Kx^2, untuk\ k\in R$.

5.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Persamaan Diferensial Orde I Dengan Metode

FUNGSI HOMOGEN

Suatu fungsi f(x,y) dikaitkan homogen berderajat n jika :

F($\lambda x, \lambda y$¿$= \lambda^n f(x, y)$

5.2. 1 Contoh soal fungsi homogen:

1. $F(x, y) = 2x^2 + 2y^2$

$F(\lambda x, \lambda y)$

¿$2(\lambda x)^2 + 2(\lambda y)^2$

¿$2\lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 y^2$

¿$\lambda^2(2x^2 + 2y^2)$

$F(\lambda x, \lambda y)$¿$\lambda^2 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 2)

2. $F(x, y) = 3x^3 + 2y^3$

$F(\lambda x, \lambda y)$

¿$3(\lambda x)^3 + 2(\lambda y)$

¿$2\lambda^3 x^3 + 2\lambda^3 y^3$

¿$\lambda^3(3x$¿¿$3 + 2y^3)$¿

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 3)

3. $F(x, y) = 15n + 2mn - 3m$

F($\lambda x, \lambda y$¿

¿$15(\lambda x) + 2(\lambda x\, y) - 3(\lambda y)$

¿$15\lambda x + 2\lambda xy - 3\lambda y$

¿$\lambda(15x + 2xy - 3y)$

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 1)

4. $F(x,y)=x+3y$

$F(\lambda x,\lambda y)$
¿$(\lambda x)+3(\lambda y)$
¿$\lambda x+3\lambda y$
¿$\lambda(x+3y)$
$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$ (Fungsi homogen pangkat 1)

5. $F(x,y)=x^2+2xy+y^2$

$F(\lambda x,\lambda y)$

¿$(\lambda x)^2+2\lambda x.\lambda y+(\lambda y)^2$

¿$\lambda^2 x+2\lambda^2 xy+\lambda^2 y$
¿$\lambda^2(x+2xy+y)$

$F(\lambda x,\lambda y)$¿$\lambda^2 f(x,y)$ (Fungsi homogen pangkat 2)

6. $F(x,y)=2p+4q$

$F(\lambda p,\lambda q)$
¿$2(\lambda p)+4(\lambda q)$
¿$2\lambda p+4\lambda q$
¿$\lambda(2p+4q)$

$F(\lambda p,\lambda q)=\lambda f(p,q)$ (Fungsi homogen pangkat 1)

7. $F(x,y)=x^3+5y^3$

$F(\lambda x,\lambda y)$
¿$(\lambda x^3)+5(\lambda y^3)$
¿$\lambda^3 x+5\lambda^3 y$
¿$\lambda^3(x+3y)$

$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3 f(x,y)$ (Fungsi homogen pangkat 3)

8. $F(x, y)=4x^2-2y^2$

$F(\lambda x, \lambda y)$
¿$4(\lambda x)^2-2(\lambda y)^2$
= $4\lambda^2 x^2-2\lambda^2 y^2$
= $\lambda^2(4x^2-2y^2$¿
F($\lambda x, \lambda y$¿ = $\lambda^2 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 2)

9. $F(x, y)=3x^3+2y^3$

$F(\lambda x, \lambda y)$
¿$3(\lambda x)^3+2(\lambda y)$
¿$2\lambda^3 x^3+2\lambda^3 y^3$
¿$\lambda^3(3x^3+2y^3)$
$F(\lambda x, \lambda y)=\lambda^3 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 3)

10. $F(x, y)=5x^2+2xy-3y^2$

F($\lambda x, \lambda y$¿
¿$5(\lambda x)^2+2(\lambda x\, y)^2-3(\lambda y)^2$
¿$5\lambda^2 x+2\lambda^2 xy-3\lambda^2 y$
¿$\lambda^2(5x+2xy-3y)$
$F(\lambda x, \lambda y)$¿$\lambda^2 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 2)

11. $F(x, y)=2x-6y$

$F(\lambda x, \lambda y)$
¿$2(\lambda x)-6(\lambda y)$
¿$2\lambda x-3\lambda y$
¿$\lambda(2x-6y)$
$F(\lambda x, \lambda y)=\lambda f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 1)

12. $F(x, y)=3x^2-2xy+4y^2$

$F(\lambda x, \lambda y)$
¿$3(\lambda x)^2-2\lambda x.\lambda y+4(\lambda y)^2$
¿$3\lambda^2 x-2\lambda^2 xy+4\lambda 2y$
¿$\lambda^2(3x-2xy+y)$

$F(\lambda x, \lambda y)=\lambda^2 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 2)

BENTUK UMUM

$M(X,Y)dx+N(X,Y)dy=0$

Syaratnya $M(x,y)=dan\, N(x,y)$ adalah homogen dan berderajat sama.

Langkah-langkah untuk menemukan solusi umum yaitu:

1. Gunakan transformasi $y=ux$ dan $dy=x\,du+u$ atau $x=uy$ dan $dx=y\,du+u\,dy$
2. PD homogen tereduksi ke PD variabel terpisah
3. Gunakan aturan pada PD variabel terpisah
4. Gantilah $u=\frac{y}{x}$ jika menggunakan transformasi $y=ux$

Gantilah $u=\frac{x}{y}$ jika menggunakan transformasi $x=uy$ untuk mendapatkan solusi semula. Persamaan ini merupakan persamaan linear tetapi tidak homogen. Pandang bentuk persamaan diferensial dibawah ini:

$(ax+by+c)dx+(px+qy+r)dy=0$

Dimana a,b,c,p,q,r merupakan suatu konstanta

Ada 3 kemungkinan yang dapat terjdi

1. $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\alpha$

Karena $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\alpha$, maka menggunakan transformasi $px+qy+r=u$, yang berarti bahwa $ax+by+c=\alpha u$. Bentuk persamaan tereduksi menjadi persamaan dengan variabel terpisah dan kemudian selesaikanlah.

2. $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$

Gunakanlah transformasi $px+qy=u$, dan dari sini berarti $dy=\frac{du-q\,dy}{q}$, atau $dx=\frac{du-q\,dy}{p}$

3. $\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}$

$Ax+by+c=u\rightarrow a\,dx+b\,dy=du$

$Px+qy+r=v\rightarrow p\,dx+q\,dy=dv$

Dari dua persamaan diatas diperoleh bahwa:

$$d\,x=\frac{q\,du-b\,dv}{aq-bp}$$

dan

$$dy=\frac{q\,du-p\,dv}{aq-bp}$$

Selesaikan persamaan diferensial diatas dan kemudian gantilah kembali u dan v dengan transformasi semula untuk mendapatkan solusi umum persamaan diferensial semula.

5.2.2 Contoh Soal

1. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen

$$y^2=\frac{x^3y^3}{xy^2}$$

Pembahasan:

$$y^2=\frac{x^3y^3}{xy^2}=\frac{dy}{dx}=\frac{x^3y^3}{xy^2}$$

$$xy^2\,dy-\left(x^3+y^3\right)dx=0$$

Fungsi $M(x,y)\,dx$

$$M(x,y)\,dx=-x^3-y^{3\rightarrow a^3}x^{3-a^3}y^3$$

$$¿a^3(-x^3-y^3)$$

$$M¿$$

$$N(x,y)dx=axa^3y^3$$

$$¿a^3(x\,y^2)$$

$$N(ax,ay)=a^3[N(x,y)]$$

Didapatkan a^3, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogennya berderajat .

2. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen

$$y^2=\frac{x^3+y^3}{xy^2}$$

Pembahasan

$$y^2=\frac{x^3+y^3}{xy^2}=\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{xy^2}$$

$$xy^2dy-(x^3+y^3)dx=¿0$$

$$Fungsi\,M(x,y)dx$$

$$M(x,y)dx=-x^3-y^3=a^3+x^3$$

$$¿a^3(-x¿¿3-y^3)¿$$

$$M(ax,ay)=a^3[M(x,y)]$$

$$Fungsi\,N(x,y)dy$$

$$N(x,y)dx=xy^2\rightarrow=axa^3y^2$$

$$¿a^3(xy¿¿2)¿$$

$$N¿$$

Didapatkan a^3, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogen berderajat 3.

3. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen

$$\left(2x^2y+y^2\right)dx+\left(xy^2-2x^3\right)dy=0$$

$Fungsi\,M(x,y)dx$

$M(x,y)dx=-2x^2y+y^3 \rightarrow =2a^2x^2ay+a^3y^3$

$¿a^3(2x¿¿2y+y^3)¿$

$M\left(ax,ay\right)=a^3\left[M\left(x,y\right)\right]$

$Fungsi\,N(x,y)dy$

$N(x,y)dx=xy^2-2x^3 \rightarrow =axa^2y^2+2a^3x^3$

$¿a^3(xy¿¿2-2x^3)¿$

$N¿$

Didapatkan a^3, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

4. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen

$$\left(4x^2y+y\right)dx+\left(xy^2-2x^3\right)dy=0$$

$Fungsi\,M(x,y)dx$

$M(x,y)dx=4x^2y+y^2 \rightarrow =4a^2x^2ay+a^3y^3$

$¿a^3(2x¿¿2y+y^3)¿$

$M\left(ax,ay\right)=a^3[M\left(x,y\right)]$

$Fungsi\,N(x,y)dy$

$N(x,y)dx=xy^2-2x^3 \rightarrow =axa^2y^2+2a^3x^3$

$¿a^3(xy^2-2x^3)$

$N(ax,ay)=a^3[N\left(x,y\right)]$

Didapatkan a^3, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

5. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen

$$\left(9x^2y+y\right)dx+\left(xy^2-2x^3\right)dy=0$$

$Fungsi\,M(x,y)dx$

$M(x,y)dx = 9x^2y + y^2 \rightarrow = 9a^2x^2ay + a^3y^3$

$¿a^3(9x^2y + y^3)$

M(ax,ay) $= a^3[M(x,y)]$

Fungsi $N(x,y)dy$

$N(x,y)dx = xy^2 - 2x^3 \rightarrow = axa^2y^2 + 9a^3x^3$

$¿a^3(xy^2 - 2x^3)$

$N(ax,ay) = a^3[N(x,y)]$

Didapatkan a^3, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

6. Buktikan bahwa persamaan ini adalah persamaan homogen

$y^2 = \frac{x^2y^2}{xy^2}$

Pembahasan:

$y^2 = \frac{x^2y^2}{xy^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{xy^2}$

$xy^2dy - (x^2 + y^2)dx = 0$

Fungsi $M(x,y)dx$

M(x,y)dx $= -x^2 - y^{2 \rightarrow a^2}x^{2-a^2}y^2$

$= a^2(-x^2 - y^2)$

M(ax,ay) $= a^2[M(x,y)]$

N(x,y)dx $= axa^2y^2$

$= a^2(xy^2)$

N(ax,ay) = a^2[N(x,y)]

Didapatkan a^2, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogenya berderajat 2

7. Apakah persamaan dibawah ini homogen?. Buktikanlah!

$(4x^2y+y^2)dx+(xy^2+2x^3)dy=0$

Fungsi M(x,y)dx

M(x,y)dx = $4x^2y+y^3 \rightarrow = 4a^2x^2ay+a^3y^3$

$¿a^3(4x^2y+y^3¿$

M(ax,ay) $= a^3[M(x,y)]$

Fungsi N(x,y)dy

N(x,y)dx $= xy^2+2x^3 \rightarrow = axa^2y^2 + 2a^3x^3$

$¿a^3(xy^2+2x^3¿$

N(ax,ay) $= a^3[N(x,y)]$

Didapatkan a^3, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

8. Buktikanlah bahwa persamaan dibawah ini adalah homogen.

$(5x^2y-y)dx+(xy^2+12x^3)dy=0$

Fungsi M(x,y)dx

M(x,y)dx = $5x^2y-y^2 \rightarrow =5a^2x^2ay-a^3y^3$

$¿a^3(5x^2y+y^3¿$

M(ax,ay) $= a^3[M(x,y)]$

Fungsi N(x,y)dy

N(x,y)dx = $xy^2+12x^3 \rightarrow = axa^2y^2 + 12a^3x^3$

$¿a^3(xy^2+12x^3¿$

N(ax,ay) $= a^3[N(x,y)]$

Didapatkan a^3, maka terbukti persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogenya berderajat 3.

Rangkuman

Metode memperoleh dan mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi secara empirik melalui pengalaman dan pengamatan menjadi pilihan yang tepat dewasa ini. Apalagi dengan didukung produk teknologi canggih seperti kalkulator, komputer dan sebagainya. Dengan demikian matematika terapan(applied mathematics) perlu mendapat perhatian dan dikenalkan sejak dini pada para mahasiswa. Focus matematika terapan adalah untuk memecahkan masalah-masalah yang berkaitan dengan gejala atau

fenomena alam kedalam bahasa matematika (pemodelan matematika).
Berkaitan dengan gejala atau fenomena alam, orang sering memerlukan model matematik dari masalah yang dihadapi. Banyak permasalah matematik dari gejala alam yang model matematikanya dapat diformulasikan dalam bentuk persamaan diferensial orde 1.
Salah satu cara mempelajari menyusun model matematika ini dengan mengkaji contoh-contoh penyusunan model matematik yang sudah ditemuka orang.
Keradioaktifan suatu zat : model peluruhan Model peluruhan zat radioaktif diberikan oleh persamaan diferensial :

$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad (1.1)$$

Dengan $k > 0$ adalah konstan peluruhan. Persamaan diferensial (1.1) menyatakan bahwa peluruhan zat radio aktif pada saat berbanding langsung dengan banyaknya atom zat pada waktu itu. Solusi persamaan diferensial (1.1) dapat dicari dengan cara berikut. Ubah persamaan (1.1) menjadi

$$\frac{dN}{N} = -k\,dt$$

Integralkan kedua ruas diperoleh
$\ln[N] = -kt + C_{1,}$ C_1 konstan sebarang karena $N > 0$, maka $\ln[N] = \ln N$, jadi solusi persamaan diferensial ini adalah:

$$N = e^{-kt+c_1} ¿ Ce^{-kt}$$

Dimana C merupakan konstan sebarang. Misalkan pada saat $t = 0$, $N(0) = N_0$ adalah banyaknya atom awal, (mula-mula) zat radio aktif, maka $C = N_0$. Jadi bila kondisi awal persamaan diferensial (1.1) adalah $N(0) = N_0$, maka solusi khususnya adalah

$$N = N_0 e^{-kt}$$

Perkembangan populasi : model pertumbuhan. Masalah pertumbuhan populasi, menurut Thomas Malthus (1766-1834) model persamaan diferensialnya :

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Dengan k adalah koefisien pertumbuhan yang merupakan selisih rata-rata kelahiran dan kematian. Dengan metode seperti ini pada masalah keradioaktifan suatu zat, solusi umum persamaan diferensial ini adalah:

$P = Ce^{kt}$

Persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Misalnya kondisi awalnya $P(t_0) = P_0$. Solusi persamaan diferensial ini dapat dicari dengan cara berikut :

$$\int_{P_0}^{p} \frac{ds}{as - bs^2} \int_{t_0}^{t} du = t - t_0$$

(misalkan$s = P$ dan $u = t$, maka $dP = d$s dan $du = dt$)

Untuk mengintegralkan fungsi $\frac{1}{as - bs^2}$ dapat dilakukan dengan cara berikut:

$$\frac{1}{as - bs^2} = \frac{1}{s(a - bs)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs}$$

Maka ruas kanan persamaan ditulis :

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs} = \frac{A(a - bs) + Bs}{s(a - bs)} = \frac{Aa + (B - bA)s}{s(a - bs)}$$

Perhatikan masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

1. Jika $f(x, y)$ kontinu disuatu persegi panjang yang memuat (x_0, y_0¿ maka m.n.a, diatas mempunyai solusi

2. Jika f(x,y) kontinu disuatu persegi panjang yang memuat (x_0, y_0¿ maka $m.n.a$, diatas mempunyai solusi tunggal. Misalkan selang I adalah proyeksi dari persegi panjang diatas pada sumbu x. Solusi tersebut dijamin terdefinisi pada selang yang merupakan subset dari I.

FUNGSI HOMOGEN

Suatu fungsi f(x,y) dikaitkan homogen berderajat n jika :

F($\lambda x, \lambda y ¿ = \lambda^n f(x, y)$

1. $F(x, y) = 2x^2 + 2y^2$

$F(\lambda x, \lambda y)$

$¿ 2(\lambda x)^2 + 2(\lambda y)^2$

$¿ 2\lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 y^2$

$¿ \lambda^2 (2x^2 + 2y^2)$

$F(\lambda x, \lambda y) ¿ \lambda^2 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 2)

2. $F(x, y) = 3x^3 + 2y^3$

$F(\lambda x, \lambda y)$

$¿ 3(\lambda x)^3 + 2(\lambda y)$

$¿ 2\lambda^3 x^3 + 2\lambda^3 y^3$

$¿ \lambda^3 (3x ¿¿ 3 + 2y^3) ¿$

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$ (Fungsi homogen pangkat 3)

Diskusi Kelompok

1. Jika terdapat 12 juta bakteri dalam 4 jam dan 36 juta bakteri dalam 5 jam , berapakah jumlah bakteri mula-mula!

2.Jika terdapat 18 juta bakteri dalam 6 jam dan 42 juta bakteri dalam 7 jam, berapakah jumlah bakteri mula-mula!

3. Populasi penduduk suatu negara menjadi 3 kali lipat dalam waktu 40 tahun, menurut pertumbuhan populasi. Malthus dalam waktu berapa tahun menjadi lipat 6?

4. Jumlah penduduk suatu negara bertambah 5 kali lipat dalam waktu 30 tahun, menurut pertumbuhan populasi. Malthus dalam waktu berapa tahun menjadi 7 kali lipat?

5. Carilah solusi model logistik

$$\frac{dP}{dt}=aP.bP^2$$

Untuk $a=0{,}03$ dan $b=(1{,}6).10-4.P(t)$ diukur dalam satuan juta. Uang sebanyak M rupiah di investasikan disuatu perusahaan. Setiap bulan uang berkembang berbanding langsung dengan banyaknya uang waktu itu, bila faktor ke proporsionalnya adalah r.

6. Carilah persamaan diferensial dan solusinya

7. Gambarlah sket grafiknya

8. Berapa jumlah uangnya setelah 1 tahun, bila $r=0{,}02$?

Untuk soal nomor 10 sampai 25 tentukan persamaan diferensialnya dengan metode transformasi

10. $(2x^2y+y^3)dx+(xy^2-2x^3)dy=0$

11. $(2x-5y+2)dx+(10y-4x-4)dy=0$

12. $(8x+10y-3)dx+(8y+2x-9)dy=0$

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2y-4x}{1+y+2x}$

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{8-4y-4x}{1+7y+9x}$

15. $(8x-2y+8)dx+(8y-7x-3)dy=0$

16. $(3x-4y+1)dx+(2y+9x-3)dy=0$
17. $(7x-2y+7)dx+(5y-4x-4)dy=0$
18. $(9x-7y+6)dx+(9y-2x-5)dy=0$
19. $(2x-6y+3)dx+(2y-4x-1)dy=0$
20. $\frac{dy}{dx}=\frac{2-2y-7x}{3+2y+2x}$
21. $\frac{dy}{dx}=\frac{3-5y-4x}{8+9y+2x}$
22. $\frac{dy}{dx}=\frac{9-7y-8x}{8-2y+2x}$
23. $\frac{dy}{dx}=\frac{8-3y-4x}{1-8y+1x}$
24. $\frac{dy}{dx}=\frac{9+4y-4x}{8-5y-7x}$
25. $\frac{dy}{dx}=\frac{9-8y-7x}{2+5y+9x}$

Untuk soal 26 – 30 buktikan bahwa persamaan homogen

26. $F(x,y)=5x+7y$
27. $F(x,y)=7x^2-8xy+5y^2$
28. $F(x,y)=8x^3+4y^3$
29. $\frac{d^{2y}}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}+y\sin x=0$
30. $\frac{d^3y}{dx^3}-y=\cos x$

Latihan Mandiri

1. Misalkan N(t) banyaknya atom sampai zat radioaktif pada saat t, dan konstan peluruhannya $\frac{-\ln 2}{(4{,}5).10^9}$. misalkan pada

saat t = 0 adalah waktu ketika sampel dibuat, carilah solusi khususnya?

2. Jika waktu paro radium -226 adalah 1600 tahun, berapa prosen radium -226 yan g tersisa setelah 400 tahu?

3. Jika mula-mula terdapat 50 gr zat radioaktif dan setelah 2 minggu tinggal 30 gr, tinggal berapakah setelah 5 minggu?

Dalam percobaan perkembangan suatu bakteri, bakteri dimasukkan dalam suatu tabung. Lalu pertambahan jumlah bakteri berbanding langsung dengan banyaknya bakteri pada saat itu.

4. Carilah persamaan diferensialnya dan solusinya.

5. Jika dalam waktu 8 jam jumlah bakteri menjadi 2 kali lipat, berapak jumlah bakteri pada waktu 10 jam!

Untuk soal nomor 6 sampai 18 tentukan persamaan diferensialnya dengan metode transformasi

6. $(2x-2y+9)dx+(2y-4x-4)dy=0$
7. $(4x-4y+9)dx+(1y+7x-3)dy=0$
8. $(9x-8y+7)dx+(3y-4x-9)dy=0$
9. $(8x-8y+6)dx+(7y-2x-5)dy=0$
10. $(9x-9y+3)dx+(1y-3x-1)dy=0$
11. $(3x-4y+5)dx+(7y-9x-3)dy=0$
12. $(8x-1y+1)dx+(9y+9x-3)dy=0$

13. $(9x-8y+7)dx+(y-7x-4)dy=0$
14. $(2x-8y+6)dx+(3y-9x-5)dy=0$
15. $(2x-3y+3)dx+(6y-2x-1)dy=0$
16. $\frac{dy}{dx}=\frac{2-5y-4x}{9+9y+2x}$
17. $\frac{dy}{dx}=\frac{9-9y-8x}{7-8y+2x}$
18. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-6y-2x}{2-6y+1x}$

MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE II UMUM

Capaian Kompetensi	Uraian Materi
Mahasiswa mampu menganalisa syarat awal dan syarat batas suatu Persamaan Diferensial dan mampu menggunakan metode-metode eksa dalam penerapannya di dalam memecahkan masalah sehari-hari.	1. Mahasiswa mampu mengidentifikasikan persamaan diferensial, menjelaskan apa solusi, dan masalah syarat awal atau syarat batas suatu PD. 2. Mampu menyelesaikan persamaan diferensial orde dua homogenya menggunakan metode karakteristik koefisien konstan 3. Mampu menyelesaikan persamaan diferensial orde dua homogen menggunakan metode karakteristik operator D 4. Mampu menyelesaikan persamaan diferensial orde dua nonhomogen menggunakan metode koefisien tak tentu 5. Mampu menyelesaikan sistem PD menggunakan metode operator untuk koefisien konstan 6. Menyelesaikan sistem linear homogenya koefisien konstan 7. Mengetahui dan memahami tentang persamaan diferensial orde 1 dan penyelesaiannya dengan cara substitusi

MODUL 6

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE II UMUM

Model persamaan diferensial orde 2 terdiri dari 4 tipe, yaitu:

1. $Tipe\ \frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$
2. $Tipe\ \frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx})$
3. $Tipe\ a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+c.y=0$
4. $Tipe\ a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$

6.1 Kegiatan Pembelajaran 1 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2 TIPE 1

Persamaan Diferensial orde 2 tipe 1 yang berbentuk :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$$

Contoh 6.1.1 :

Carilah jawaban umum persamaan diferensial :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4x^3+3x^2+x$$

Jawaban :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4x^3+3x^2+x$$

$$\frac{dy}{dx} = \int 4x^3 + 3x^2 + x\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$y = \int x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1\,dx$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

Contoh 6.1.2 :

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} = 9x^8 + 8x^3 + x$

   Jawaban :

   $$\frac{d^2 y}{dx^2} = 9x^8 + 8x^2 + x$$

   $$\frac{dy}{dx} = \int 9x^8 + 8x^3 + x\,dx$$

   $$\frac{dy}{dx} = x^9 + 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

   $$y = \int x^9 + 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c_1\,dx$$

   $$y = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

2. $\frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^6 + 10x^4 + 3x + 2$

   Jawaban :

   $$\frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^6 + 10x^4 + 3x + 2$$

   $$\frac{dy}{dx} = \int 3x^6 + 10x^4 + 3x + 2\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{7}x^7+2x^5+\frac{3}{2}x^2+2x^2+c_1$$

$$y=\int\frac{3}{7}x^7+2x^5+\frac{3}{2}x^2+2x^2+c_1$$

$$y=\frac{3}{56}x^8+\frac{1}{3}x^{6}+\frac{3}{5}x^3+\frac{2}{3}x^3c_1x+c_2$$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}=7x^5+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{3}x+3$

Jawaban :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=7x^5+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{3}x+3$$

$$\frac{dy}{dx}=\int 7x^5+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{3}x+3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{7}{6}x^6+\frac{1}{6}x^{4}+\frac{5}{6}x^2+3x^2+c_1$$

$$y=\int\frac{7}{6}x^6+\frac{1}{6}x^{4}+\frac{5}{6}x^2+3x^2+c_1$$

$$y=\frac{1}{6}x^7+\frac{1}{30}x^{5}+\frac{5}{18}x^3+1x^3c_1x+c_2$$

6.2 Kegiatan Pembelajaran 2 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2 TIPE 2

Persamaan Diferensial orde 2 tipe 2 yang berbentuk :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx})$$

Contoh 6.2.1 :

Carilah jawaban umumnya $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+x=0$

Jawaban :

$p=\dfrac{dy}{dx}\ maka\ \dfrac{dp}{dx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Apabila persamaan (1) dimasukkan ke soal

$x.\dfrac{dp}{dx}+p.+x=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$

$x.\dfrac{dp}{dx}+p=-x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$

Ingat rumus :

$\dfrac{d(x.p)}{dx}=x.\dfrac{dp}{dx}+p.\dfrac{dx}{dx}$

$\dfrac{d(x.p)}{dx}=x.\dfrac{dp}{dx}+p.1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$

Jika persamaan (2) = (3), maka

$\dfrac{d(xp)}{dx}=-x$

Kemudian kedua ruas diintegralkan

$xp=\int -x\,dx$

$xp=\dfrac{-1}{2}x^2+c_1$

Dari persamaan (1) *diketahui bahwa* $p=\dfrac{dy}{dx}$ *maka harga p*

dapat diganti dengan $\dfrac{dy}{dx}$ *menjadi* :

$x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{2}x^2+c_1$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{2}x^2+\dfrac{c_1}{x}$

$y=\dfrac{-1}{4}x^2+c_1.\ln x+c_2$

Contoh 6.2.2 :

1. $x.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+7x=0$

   Jawaban :

   $p=\frac{dy}{dx}\, maka,\, \frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

   $x.\frac{dp}{dx}+p.+7x=0$

   $x.\frac{dp}{dx}+p=-7x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

   $\frac{d(x.p)}{dx}=x.\frac{dp}{dx}+p.\frac{dx}{dx}$

   $\frac{d(x.p)}{dx}=-7x.\frac{dp}{dx}+p.1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

   Jika persamaan (2) = (3), maka

   $\frac{d(xp)}{dx}=-7x$

   $xp=\int -7x\,dx$

   $xp=\frac{-1}{2}x^2+c_1$

   $x\frac{dy}{dx}=\frac{-7}{2}x^2+c_1$

   $\frac{dy}{dx}=\frac{-7}{2}x^2+\frac{c_1}{x}$

   $y=\frac{-7}{4}x^2+c_1.x+c_2$

2. $x.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6x=0$

   Jawaban :

   $p=\frac{dy}{dx},maka\,\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

   $x.\frac{dp}{dx}+p.-6x=0$

$$x.\frac{dp}{dx}+p=6x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$\frac{d(x.p)}{dx}=x.\frac{dp}{dx}+p.\frac{dx}{dx}$$
$$\frac{d(x.p)}{dx}=6x.\frac{dp}{dx}+p.1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
Jika persamaan (2) = (3), maka
$$\frac{d(xp)}{dx}=6x$$
$$xp=\int 6x\,dx$$
$$xp=3x^2+c_1$$
$$x\frac{dy}{dx}=3x^2+c_1$$
$$\frac{dy}{dx}=3x^3+\frac{c_1}{x}$$
$$y=\frac{-3}{4}x^4+c_1.x+c_2$$

3. $x.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}x=0$

Jawaban :
$$p=\frac{dy}{dx}\,maka\,\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$x.\frac{dp}{dx}+p.+\frac{1}{2}x=0$$
$$x.\frac{dp}{dx}+p=\frac{1}{2}x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$\frac{d(x.p)}{dx}=x.\frac{dp}{dx}+p.\frac{dx}{dx}$$
$$\frac{d(x.p)}{dx}=\frac{-1}{2}.\frac{dp}{dx}+p.1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
Jika persamaan (2) = (3), maka
$$\frac{d(xp)}{dx}=\frac{-1}{2}x$$

$$xp = \int \frac{-1}{2} x\, d\, x$$

$$xp = \frac{-1}{6} x^2 + c_1$$

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{6} x^2 + c_1$$

$$\frac{dy}{\ldots} = \frac{-1}{\ldots} x^3 + \frac{c_1}{\ldots} \; maka\; y = \frac{-1}{\ldots} x^4 + c \ldots x + c \ldots$$

6.3 Kegiatan Pembelajaran 3 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2 TIPE 3

Persamaan Diferensial orde 2 tipe 3 yang berbentuk :

$$a.\frac{d^2 y}{dx^2} + b.\frac{dy}{dx} + c.y = 0$$

Persamaan tersebut, jika harga :

$\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2, \frac{dy}{dx} = m\; dan\; y = 1, sehingga\; persamaannya\; jadi:$

$am^2 + bm + c = 0 \rightarrow disebut\; persamaan\; karakteristik.$

$m = m_1$ dan $m = m_2$

Dimana m = akar-akar penyelesaian

$a.\, Jika\; m_1 \neq m_2\, maka\; harga:$

$y = A\, e^{m_1 x} + B\, e^{m_2 x}$

A dan B = Konstanta (atau c_1 dan c_2)

$b.\, Jika\; m_1 = m_2\, maka:$

$Y = e^{m_1 x}(A + Bx)$

c. Jika keduanya (akar-akar penyelesaiannya tersebut kompleks) atau , m = a + bj, atau m = a + bi

$Y = e^{ax}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$

Contoh 6.3.1

1. Carilah Persamaan Diferensial berikut ini.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Jawaban:

$$Jika\frac{d^2y}{dx^2}=m^2,\frac{dy}{dx}=m\,dan\,y=1,maka:$$

Persamaan karakteristiknya:

$$1m^2+3m+2=0$$

$$(m+1)(m+2)=0$$

Sehingga : m_1 = -1 ; m_2 = -2 ($m_1 \neq m_2$)

Jadi pemecahan tersebut adalah:

$$Y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$$

2. Carilah penyelesaian Persamaan Diferensial berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$$

Jawaban:

$$m^2+6m+9=0$$

$(m+3)(m+3)\rightarrow$ m = -3 akar kembar sehingga

$$Y=e^{-3x}(A+Bx)$$

3. Carilah penyelesaian Persamaan Diferensial berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+9y=0$$

Jawaban:

$$m^2+4m+9=0$$

Dengan menggunakan rumus ABC didapat :

$$m=\frac{-4\pm\sqrt{16-36}}{2}\Longleftrightarrow m=\frac{-4\pm\sqrt{-20}}{2}$$

$$m=\frac{-4\pm\sqrt{-1}.\sqrt{4}.\sqrt{5}}{2}\Longleftrightarrow m=\frac{-4\pm j.2\sqrt{5}}{2}$$

$$m=-2\pm j\sqrt{5}$$

Sehingga $\alpha=-2$ dan $\beta=\sqrt{5}$ dan akhirnya memberikan

$$Y=e^{ax}[Acos\beta x+Bsin\beta x]$$

$$Y=e^{-2x}[Acos\sqrt{5}+Bsin\sqrt{5}]$$

Contoh 6.3.2 :

1. $Tentukan\, persamaan\, umum\, dari\, PD\; 4\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=0$

Jawaban:

Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah :

$4m^2+4m+1=0,$

Kita dapatkan akar karakteristiknya :

$m=\frac{-1}{2}.$

Dapatkan akar karakteristiknya karena akarnya kembar/sama, maka solusi umum PD tersebut adalah :

$y=C_1e^{mx}+C_2xe^{mx}$

$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2x\,c^{\frac{-1}{2}x}$

$Jadi,\, persaman\, umum\, PD\, ini\, adalah\; y=C_1e^{\frac{-1}{2}x}+C_2xe^{\frac{-1}{2}x}$

2. Tentukan persamaan umum dari PD :

$$4\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}+5y=0$$

Jawaban:

Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah :

$4m^2-12m+5=0.$

$(2m-1)(2m-5)=0$

Kita dapatkan akar karakteristiknya :

$m_1=\frac{1}{2}\, V\, m_2=\frac{5}{2}$

Karena $m_1\neq m_2$, maka solusi umum PD tersebut adalah :

$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$

$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{\frac{5}{2}x}$

$Jadi,\, penyelesaian\, umum\, PD\, adalah\; y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{\frac{5}{2}x}$

3. Tentukan penyelesaian umum dari PD :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+16y=0$$

Jawaban :
Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah :
$m^2-8m+16=0$
$(m-4)(m-4)=0$
$(m-4)^2=0$
$m=4$
Karena akarnya kembar/sama, maka solusi umum PD tersebut adalah :
$y=C_1e^{mx}+C_2xe^{mx}=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$

$Jadi, penyelesaian\, umum\, PD\, ini\, adalah\; y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$

6.4 Kegiatan Pembelajran 4 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2 TIPE 4

Persamaan Diferensial orde 2 tipe 4 yang berbentuk :

$$a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$$

Pada persamaan diferensial bentuk ini dikenal dua istilah, yaitu:

1) Fungsi Komplementer. Diperoleh dengan memecahkan persamaan bila $f(x)=0$, seperti dalam bagian program sebelum ini.
   Adapun pemecahannya, jika $f(x)=0$, adalah:

$a.\, Untuk\, akar\, yang\, berbeda\; Y=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$

$b.\, Untuk\, akar\, kembar\; Y=e^{m_1x}(A+Bx)$
$c.\, Untuk\, akar\, imaginer\; Y=e^{ax}[A\cos\beta x+B\sin\beta x]$

2) Integral Khusus. Diperoleh dengan menggunakan bentuk umum dari fungsi ruas kanan persamaan yang diberikan, yaitu

dengan mensubstitusikan bentuk umum tersebut ke dalam persamaannya dan kemudian menyamakan koefisien-koefisiennya.

a. Jika ruas kanan adalah fungsi berderajat dua, bentuk umumnya:

   $Y = C x^2 + Dx + E$

b. Jika ruas kanan berderajat satu, maka persamaan umumnya:
   $Y = Cx + D$

3) Jawaban yang sesungguhnya = jawaban fungsi komplementer + integral khusus

Contoh 6.4.1:

1. Selesaikan persamaan diferensial dari :
   $$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

   dengan menggunakan bentuk fungsi komplementer.

   Jawaban :

   Fungsi Komplementer, pemecahannya dengan persamaan kiri = 0, yaitu:

   $$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \; yang\, memberikan$$

   $m^2 - 5m + 6 = 0$

   $(m-2)(m-3) = 0$

   $m = 2$ atau $m = 3$

   Jawaban fungsi komplementer :

   $Y = A e^{2x} + B e^{3x}$
2. Selesaikan persamaan diferensial dari :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=x^2$$

dengan menggunakan bentuk integral khusus.

Jawaban :

Integral Khusus:

Karena ruas kanan adalah fungsi berderajat dua (x^2) sehingga bentuk umum persamaan berdejarat dua adalah:

$Y=Cx^2+Dx+E$

$Maka, \frac{dy}{dx}=2Cx+D$

$\frac{d^2y}{dx^2}=2C$

$Harga\ y, \frac{dy}{dx}\ dan \frac{d^2y}{dx^2}\ dimasukkan\ ke\ persamaan\ semula\ (soal):$

Bentuk tersebut bisa ditulis:

$6x^2+(6D-10C)x+(2C-5D+6E)=1x^2+0x+0$

Dengan menyamakan koefisien dari x yang berpangkat sama, kita dapatkan:

$x^2 \Longrightarrow 6C=1$

$C=\frac{1}{6}$

$x \Rightarrow 6D-10C=0$

$6D-10.\frac{1}{6}=0$

$D=\frac{5}{18}$

$2C-5D+6E=0$

$2.\frac{1}{6}-5.\frac{5}{18}+6E=0$

$E=\frac{19}{108}$

$Jadi\ Integral\ Khususnya\ adalah : Y = C x^2 + Dx + E$

Y = Fungsi Komplementer + Integral Khusus

$¿ A e^{2x} + B e^{3x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{19}{108}$

3. $Selesaikanlah \frac{d^2 y}{dx^2} + 14 \frac{dy}{dx} + 49 y = 4 e^{5x}$

Jawaban :

FK $\rightarrow m^2 + 14 m + 49 = 0$

$(m+7)(m+7) = 0$

$m = -7 \wedge m = -7$

FK $y = e^{-7x}(A + Bx)$

IK $y = Ce^{5x}$

$\frac{dy}{dx} = 5 Ce^{5x}$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = 25 C 3^{5x}$

$25 Ce^{5x} + 14 (5 Ce^{5x}) + 49 (Ce^{5x}) = 4 e^{5x}$

$Bagi\ kedua\ sisi\ dengan\ e^{5x}. Maka,$

$25 C + 70 C + 49 C = 4$

$144. C = 4$

$C = \frac{1}{36}$

$$IK = \frac{1}{36} e^{5x}$$

Penyelesaian Umum:

$$y = e^{-7x}(A + Bx) + \frac{1}{36}e^{5x}$$

RANGKUMAN

Model persamaan diferensial orde 2 terdiri dari 4 tipe, yaitu :

$$1.\ Tipe\ \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

$$2.\ Tipe\ \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$$

$$3.\ Tipe\ a.\frac{d^2y}{dx^2} + b.\frac{dy}{dx} + c.y = 0$$

Dimana m = akar-akar penyelesaian

$a.\ Jika\ m_1 \neq m_2\ maka\ harga:$

$y = A e^{m_1 x} + B e^{m_2 x}$

A dan B = Konstanta (atau c_1 dan c_2)

$b.\ Jika\ m_1 = m_2\ maka:$

$Y = e^{m_1 x}(A + Bx)$

c. Jika keduanya (akar-akar penyelesaiannya tersebut kompleks)

atau , m = a + bj, atau m = a + bi

$$Y = e^{ax}[Acos\beta x + Bsin\beta x]$$

4. $Tipe\ a \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

DISKUSI KELOMPOK

Carilah Persamaan Diferensial Orde 2 berikut ini :

1. $\frac{d^2 y}{d x^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

   Jawaban :

   $m^2 - 5m + 6 = 0$

   $(m - \ldots)(m - \ldots) = 0$

   $m_1 = \ldots$ V $m_2 = 3$

   Karena $m_1 \neq m_2$, maka :

   $y = C_1 e^{\ldots x} + C_2 e^{\ldots x}$

2. $\frac{d^2 y}{d x^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$

   Jawaban :

   $m^2 - 8m + \ldots = 0$

   $(m - \ldots)(m - \ldots) = 0$

   $(m - \ldots)^2 = 0$

   $m = \ldots$

   Karena $m_1 = m_2$, maka :

   $y = C_1 e^{\ldots x} + C_2 x e^{\ldots x}$

3. $Y'' + Y' - 6Y = 0$

   Jawaban :

   $m^2 + m - 6 = 0$

$(m+\ldots)(m-\ldots)=0$

$m_1=\ldots \vee m_2=2$

Karena $m_1 \neq m_2$, maka :

$y=C_1 e^{\ldots x}+C_2 e^{\ldots x}$

4. $Y''+7Y'+12Y=0$

Jawaban :

$m^2+\ldots m-12=0$

$(m+\ldots)(m+4)=0$

$m_1=\ldots \vee m_2=-4$

Karena $m_1 \neq m_2$, maka :

$y=C_1 e^{\ldots x}+C_2 e^{\ldots x}$

5. Carilah penyelesaian Persamaan Diferensial berikut ini :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4x^3+3x^2+x$$

Jawaban:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4x^3+3x^2+x$$

$$\frac{dy}{dx}=\int 4x^3+3x^2+xdx$$

$$\frac{dy}{dx}=\ldots^{\cdots}+\ldots^{\cdots}+\frac{\cdots}{\cdots}\ldots^{\cdots}+c_1$$

$$y=\int x^4+\ldots.^{\cdots}+\frac{\cdots}{\cdots}\ldots^{\cdots}+c_1\,dx$$

$y=\frac{\cdots}{\cdots}\ldots^{\cdots}+\frac{\cdots}{\cdots}\ldots.^{\cdots}+\frac{\cdots}{\cdots}+c_1x+c_2$

6. Carilah penyelesaian Persamaan Diferensial berikut ini

$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$

Jawaban:

$Jika\,\frac{d^2y}{dx^2}=m^2,\frac{dy}{dx}=m\,dan\,y=1,$

Maka, Persamaan karakteristiknya :

$1m^2+3m+2$

$(\ldots+\ldots)(\ldots+\ldots)=0$

Sehingga : $m=-\ldots;m=-\ldots(m_1\neq m_2)$

Jadi, pemecahan permasalahan tersebut adalah :

$Y=A\ldots^{-\cdots}+B\ldots^{-\cdots}$

7. Carilah penyelesaian Persamaan Diferensial berikut

$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$

Jawaban:

$m^2+6m+9=0$

$(\ldots+\ldots)(\ldots+\ldots)=0\rightarrow m=-\ldots$

Akar kembar sehingga : $Y=e^{-\cdots}(\ldots+\ldots)$

8. $Selesaikan\,y''=\frac{-1}{y^3}$

Jawaban :

$Dikalikan\,dengan\,2y'\,memberikan\,2y'\,y''=\frac{-2y'}{y^3}$

$\frac{d}{dx}(y')^2=\frac{-2y'}{y^3}$

$(y')^2=-\int\frac{2y'}{y^3}dx$

$¿-2\int\frac{dy}{y^3}$

$¿\frac{1}{y^2}+\ldots$

$¿\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1+\ldots y^2}}{y} \rightarrow \frac{y\,dy}{\sqrt{1+\ldots y^2}}=dx$

$\sqrt{1+c1\,y^2}=\ldots x+c$

9. $Selesaikan\,\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$

Jawaban :

$m^2+3m=0$

$m_1=\ldots V\, m_2=-3$

Maka,

$y=C_1+C_2e^{-3x}$

10. $Selesaikan\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+4y=0$

Jawaban :

$m^2-4m+4=0$

$\ldots=2V\ldots=-3$

Maka,

$y=C_1+C_2e^{-2x}+\ldots x\,e^{2\ldots}$

LATIHAN MANDIRI

Soal Persamaan Diferensial Orde 2:

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$
2. $y'' + 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 67 + 12y = 0$
4. $y'' - 4y' + 13y = 0$
5. $y'' - 9y = x$
6. $y'' - 4y' + 5y = 0$
7. $y'' + y' - 6y = 2x^2$
8. $y'' + y' = 4x$
9. $y'' + 6y' + 9y = 3e^{-2x}$
10. $y'' + 4y = 0$
11. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$
12. $y'' - 3y' + 2y = \cos x$
13. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + \cos x$
14. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$
15. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$
16. $y'' - 2y' - 3y = 2e^{4x}$

17. $y'' - 2y' - 3y = 2e^{x} - 10\sin x$

18. $y'' - 3y' - 4y = 16x - 12e^{2x}$

19. $y'' - 2y' - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x}$

20. Tentukan penyelesaian umum dari Persamaan Diferensial berikut ini :
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9 = 0.$$

21. Carilah penyelesaian Persaman Diferensial dari
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

22. Carilah penyelesaian Persamaan Diferensial dari
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

23. $y'' - 3y' - 4y = 3x^2 + 2$

24. $y'' - 9y = x + 2$

25. $y'' - 3y' - 4y = e^{2x}$

26. $y'' + 4y = 2\sin x$

27. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

28. $y'' + 4y = 2\cos 2x$

29. $y'' + 2y' = 3x^2 + 2$

30. $y'' + 3y' - 4y = 3x^2 + 2$

31. $y'' + 9y = \sin 3x +$ ¿ e^{2x} ¿

32. $y'' + y' = e^{x} + 3x$

33. $y'' - 4y = 4\sin x, y = 4, y' = 0, bila\, x = 0$

34. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}, y = 1, y' = 0, bila\, x = 0$

35. $y'' + y = \tan x$

36. $y'' + 9y = sec^2 3x$

37. $y'' + y = cosec\, x \cot x$

38. $y'' + 3y' - 4y = 4x^2 + 4$

39. $y'' + 6y = 2\cos 2x$

40. $y'' + y' = e^x + 6x$

41. $y'' + y = \cot x$

42. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

43. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$

44. $y'' + 4y = 3\, cosec\, 2x$

45. $y'' + 4y = 3\, cosec\, x$

46. $4y'' + y = 2\, sec\left(\frac{x}{2}\right)$

47. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

48. Tunjukkan bahwa fungsi $y = 2e^{-x} + 3e^{2x}$ merupakan *penyelesaian dari persamaan diferensial* $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 2y$

49. $(5x + 4y)\, dx + (4x - 8y^3)\, dy = 0$

50. $y' + (2x + 1)\, y^2 = 0, y(0) = \frac{-1}{8}$

51. $(2y^2 + 3x)\, dx + 2xy\, dy = 0$

52. $y' = y(xy^3 - 1)$

53. $y'' + 10y' + 25y = x^2 + 2x$

54. $y'' + 3y' + 2y = 5e^{-2t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

55. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{2x}$, $x > 0$

MODUL7

PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN, TAK HOMOGEN, DAN KONSTAN

Capaian Kompetensi	Uraian Materi
Mampu memahami konsep Persamaan Diferensial homogen, tak homogen, dan konstan	Mahasiswa mampu memahami konsep Persamaan Diferensial homogen, tak homogen, koefisien konstan, orde II metode koefisien tak tentu, orde II dengan metode variasi parameter, serta reduksi orde

MODUL7

PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN, TAK HOMOGEN, DAN KONSTAN

Persamaan Diferensial Homogen, Tak Homogen, dan Konstan

Bentuk umum Persamaan Differensial linear order dua dengan koefisien konstan adalah : $a\,y$ +b y '+ c y = f () dengan a, b dan c konstanta. Bila $f(x)=0$ maka ay +by '+ cy = disebut persamaa differensial linear order dua homogen, sedang bila $f(x)^1=0$ maka disebut persamaan differensial linear order dua tak homogen. Solusi PD homogen ditentukan dengan memperkenalkan pengertian kebebasan linear dan Wronkian dari dua fungsi berikut terlebih dahulu. Dua buah fungsi f(x) dan g(x) dikatakan bebas linear pada interval I bila persamaan kombinasi linear dari dua fungsi tersebut, $mf(x)+ng(x)-0$ untuk setiap x hanya dipenuhi oleh $m=n=0$. Bila tidak demikian maka dikatakan $f(x)\,dan\,g(x)$ bergantung linear. Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Selanjutnya jika dalam persamaan tersebut turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut Persamaan Difrensial Biasa (PDB) dan bila tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

Contoh

1. $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}+xy=5$(Persamaan Differensial Parsial)
2. $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{d^2 y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3x=0$(Persamaan Differensial Biasa Order Dua)

Order suatu PDB adalah order tertinggi dari turunan dalam persamaan $F¿$

Contoh Persamaan differensial biasa order dua. Linieritas dan Homogenitas: Persamaan differensial biasa order n dikatakan linier bila dapat dinyatakan dalam bentuk.

$a_0(x)\,y^n+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)'+a_n(x)\,y=f(x)$dengan $a_0(x)\neq 0.$

1. Jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk di atas dikatakan tidak linier.
2. Jika koefisien $a_0(x)\,a_1(x),\ldots,a_n(x)$konstan maka disebut persamaan differensial linier dengan koefisien konstan, jika tidak disebut persamaan differensial linier dengan koefisien variable.
3. Jika $F(x)=0$,maka disebut persamaan differensial linier homogen, jika $F(x)<¿0$ disebut tidak homogen.

7.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Persamaan Diferensial Homogen

Fungsi f (x,y) disebut homogen dengan derajad *n* dalam variable – variabelnya jika $f(\lambda x\,\lambda y)=\lambda^n, f(x,y)$. Persamaan $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ disebut homogen jika M (x,y) dan (x,y) homogen dengan derajad sama. Untuk persamaan homogen dilakukan substitusi $y=vx \rightarrow dy=vdx+xdv$.Dengan substitusi ini persamaan homogen dibah menjadi bentuk variable – variable terpisah x dan v.

Contoh 7.1.1 Selesaikan PD $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

Jawab :

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{v}v\,, substitusi\; y=vx$$

$$dy=\left(\frac{1}{v}+v\right)dx=xdx+vdx$$

$$x\,dv-\frac{dx}{x}=0$$

$$\frac{1}{2}v^2-In\,x=c_1$$

$$y^2=x^2\in x^2+cx^2\; untuk\; y\neq 0\; dan\; x\neq 0$$

Contoh 7.1.2 Selesaikan PD

$$x\sin\frac{y}{x}(y\,dx)+x\,dy ¿+y\cos\frac{y}{y}(x\,dy-y\,dx)=0$$

Jawab :

Persamaan ini homogen derajat dua. Subsitusi $y = vx$

$x\sin v(vx\,dx+x\,2\,dv+vx\,dx)$

$+vx\cos v\,(x\,2dv+vx\,dx-vx\,dx)=0$

$\sin v(2\,v\,dx+x\,dv)+xv\cos v\,dv=0$

$$\frac{\sin v+\cos v}{v\sin v}dv+2\frac{dx}{x}=0$$

$¿ \, v\sin v+2\,lnx=¿c\;dan\;x^2¿$

$xy\sin\frac{y}{x}=C.$

Contoh 7.1.3 $(x^2+y^2)dx+xydy=0$ substitusikan $y=vx$ dan $dy=vdx+xdv$

Jawab :

$(x^2+(vx)^2)dx+x(vx)(vdx+xdv)=0$

$(x^2+2x^2v^2)dx+x^3vdv=0$

$x^2(1+2v^2)dx+x^3vdv=0\ldots.\;PD\;Variabel\;terpisah$

$$\frac{dx}{x}+\frac{vdv}{¿¿}$$

$$\ln x+\frac{1}{4}\ln(1+2v^2¿)=c=¿\ln x+\frac{1}{4}\ln\left(1+2\frac{y^2}{x^2}\right)=c¿$$

Bentuk umum persamaan differensial homogenya adalah :

$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + A_{n-2} y^{n-2} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = 0$. Maka solusi umumnya $y_h(x)$ pada interval terbuka I berbentuk: Bila c_1 dan c_2 diganti dengan $u(x)$ dan$v(x)$ maka diperoleh solusi pertikular pada interval terbuka I, $y_p(x) = u(x) y_1(x), v(x) y_2(x)$. Jika persamaan di atas diturunkan, hasilnya:

$y_p' = u' y_1 + u y_1' + v' y_2 + v y_2$ 'Karena $u(x)$ dan $v(x)$ adalah pengganti c_1 dan c_2,

$u' y_1 + v' y_2 = 0$.Sehingga y_p' menjadi:

$y_p' = u y_1 ' + v y_2 '$

Bila persamaan $A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + A_{n-2} y^{n-2} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = r(x)$

diturunkan hasilnya:

$y_p' = u' y_1' + u y_1'' + v' y_2 ' + v y_2 '$

Persamaan

$y_p(x) = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x)$,

$y_p' = u y_1 ' + v y_2 '$,

$y_p' = u' y_1' + u y_1'' + v' y_2 ' + v y_2 ''$

disubtitusikan ke dalam persamaan

$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + A_{n-2} y^{n-2} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = r(x)$

dan mengumpulkan komponen yang mengandung u dan v:

$u(y_1'' + f y_1' + g y_1) + v(y_2'' + f y_2' + g y_2) + u' y_1' + v' y_2' = r$. Bila y_1 dan y_2 merupakan solusi homogen dari persamaan

$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + A_{n-2} y^{n-2} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = 0$,

sehingga terjadi penyederhanaan persamaan, menjadi:

$u'^{y_1} + v' y_2' = r$. $u' y_1 + v' y_2 = 0$. Sebuah system dari 2 persamaan aljabar linier dengan 2 fungsi u ' dan v ' yang tak diketahui. Penyelesaian selanjutnya dengan memakai aturan Cramer, sehingga: $u' = \frac{-y_2 r}{W}$ dan $v' = \frac{-y_1 r}{W}$

$W = y_1 y_2' - y_1' y_2; W \neq 0$. W = Bilangan Wronskian dari y_1 dan y_2. Dengan integrasi diperoleh:

$$u = -\int \frac{y_2 r}{W} dx \; dan \; v = -\int \frac{y_1 r}{W} dx$$

Subtitusikan hasil ini ke dalam persamaan $y_p(x) = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x)$,

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx$$

7.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Persamaan Diferensial Tidak Homogen

Persamaan difernsial tidak homogen adalah PD yang mempunyai bentuk $(ax + by + c) dx + (px + qy + r) dy = 0 \ldots (i)$, dengan $a, b, c, p, q, dan\, r$ adalah konstanta. Untuk menyelesaikan PD tersebut, terlebih dahulu harus perhatikan kemungkian-kemungkinan yang terjadi, yaitu :

$$(a)\; jika \frac{a}{p} \neq \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r} \; atau\; aq - bp \neq 0$$

$$(b)\; jika \frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r} \; atau\; aq - bp = 0$$

$$(c)\; jika \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = m$$

Pertama pandang kasus (a) yaitu jika

$a/(p) \neq b/(q) \neq c/(r) \; atau\; aq - bp \neq 0$

$ax + by + c = u \; a\, dx + b\, dy = du$

$px + qy + r = v \; p\, dx + q\, dy = dv$

$a\,dx+b\,dy=du\,(¿q)$

$p\,dx+q\,dy=dv\,(¿b)$

$aq\,dx+bq\,dy=q\,du$

$bp\,dx+bq\,dy=b\,dv\,-$

$(aq-bp)\,dx=q\,du-b\,dv$

$dx=(q.du-b.dv)/((aq-bp))\ldots(ii)$

denga cara yang sama yaitu mengeliminasi dx, diperoleh

$$dy=\frac{a.du-b.dv}{(aq-bp)}\ldots(iii)$$

kemudian substitusi $u, v, pers(ii)\,dan(iii)$ke PD awal [pers (i)]

$$u\,dx+v\,dy=0, u\frac{q.du-b.dv}{(aq-bp)}+v\frac{a.du-b.dv}{(aq-bp)}=0, u(q\,du-b\,dv)+v(a\,dv-p\,du)=0$$

$qu\,du-bu\,dv+av\,dv-pv\,du=0$

$(qu-pv)\,du+(av-bu)\,dv=0$, PD Homogen

Setelah PD awal tersebut berbentuk seperti PD terakhir diatas, maka penyelesaiannya menggunakan Penyelesaian PD Homogen

Selesaikan persamaan – persamaan berikut :

Contoh 7.2.1 $(x+2y-4)\,dx-(2x+y-3)\,dy=0$

Penyelesaian

$(x+2y-4)\,dx+(-2x-y+3)\,dy=0$

$$\frac{a}{p}=\frac{1}{-2},\frac{b}{q}=\frac{2}{-1},\frac{c}{r}=\frac{-4}{-3}$$

$$Karena,\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$$

Maka dapat diselesaikan PD diatas dengan kasus (a)

$$x+2y-4=u\,dx+2dy=du$$

$$-2x-y+3=v-2dx-dy=dv$$

$$2dx+4dy=2du$$

$$2dx-dy=dv+¿$$

$$3dy=2du+dv,dy=\frac{2du+dv}{3}$$

$$dx+2dy=du$$

$$-4dx-2dy=2dv+¿$$

$$-3dx=du+2dv$$

$$dx=\frac{du+2dv}{-3}$$

$$¿\frac{-du-2dv}{-3}$$

$$u\,dx+v\,dy=0,$$

$$u\frac{du+2dv}{-3}+v\frac{-du-2dv}{-3}=0$$

$$u(-du-2dv)+v(2du+dv)=0$$

$(-u+2v)du+(-2u+v)dv=0, PD\ Homogen$

Kemudian diselesaikan dengan Penyelesaian PD Homogen :

$$\left(\frac{-u}{v}+2\right)du+\left(-2\frac{u}{v}+1\right)dv=0,$$

$$Misal\ t=\frac{u}{v}\ du=v\,dt+t\,dv$$

$$(-t+2)(v\,dt+t\,dv)+(1-2t)dv=0$$

$$-tv\,dt+2v\,dt-t2\,dv+2t\,dv+dv-2t\,dv=0$$

$$v(-t+2)dt+(1-t^2)dv=0\,[bagi\ dengan\ v(1-t\,2)]$$

$$\int\frac{-t+2}{1+t^2}dt+\frac{1}{V}dv=0$$

$$f\frac{-t+2}{1+t^2}dt+\frac{1}{v}dv=0$$

$$\int\frac{-t+2}{1+t^2}dt+\ln v=\ln C, dengan \ln C=C_1$$

dengan menggunakan Integral Fungsi Rasional, diperoleh

$$\frac{-1}{2}\ln(t+1)+\frac{3}{2}\ln(t-1)+\ln v=\ln C$$

$$\ln[(t+1)^{\frac{-1}{2}}(t-1)^{\frac{3}{2}}v]=\ln C$$

$$(t+1)^{\frac{-1}{2}}(t-1)^{\frac{3}{2}}v=0$$

$$(t-1)^{\frac{3}{2}} v = C(t+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$(t-1)^3 v^2 = C^2 (t+1)$$

substitusi kembali

$$t = \left(\frac{-u}{v} 1\right)^3 v^2$$

$$¿ C^2\left(\frac{+u}{v} 1\right)$$

Kemudian untuk kasus (b) yaitu,

$$\frac{a}{(p)} = \frac{b}{(q)} \neq \frac{c}{(r)} atau\, aq - bp = 0$$

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = ¿\text{m}, \quad a = mp\, dan\, b = mq,$$

sehingga apabila disubstitusi ke pers (i), diperoleh

$$(ax+by+c)dx + (px+qy+r)dy = 0$$

$$(ax+by)dx + c\,dx + (px+qy+r)dy = 0$$

$$(mpx+mqy)dx + c\,dx + (px+qy+r)dy = 0$$

$$m(px+qy)dx + c\,dx + (px+qy+r)dy = 0 \ldots (iv)$$

$$A\,mbil\, u = px+qy$$

$$du = p\,dx + q\,dy$$

$$dx = \frac{du - q\,dy}{p}$$

substitusi ke pers (iv), diperoleh

$$mu\frac{du-q.dy}{p}+c\frac{du-q.dy}{p}+(u+r)dy=0$$

$$mu(du-q\,dy)+c(du-q\,dy)+p(u+r)dy=0$$

$$mu\,du-qmu\,dy+c\,du-qc\,dy+pu\,dy+pr\,dy=0$$

$$(mu+c)du+(pu+pr-qmu-qc)dy=0$$

$$(mu+c)du+[(p-qm)u+(pr-qc)]dy=0$$

PD terakhir ini adalah bentuk PD yang peubahnya dapat dipisah.

$Contoh\,7.2.2\,(2x-4y+5)\,y'+x-2y+3=0$

Penyelesaian

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx}+x-2y+3=0$$

$$(2x-4y+5)dy+(x-2y+3)dx$$

$¿0\,[bukan\,PD\,homogen]$

$$\frac{a}{p}=\frac{2}{1},\ \frac{b}{q}=\frac{-4}{-2},\ \frac{c}{r}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$$

maka kita selesaikan PD diatas dengan kasus (b)

$$(2(x-2y)+5)dy+(x-2y+3)dx=0\ldots(v)$$

$$Ambil: m=2$$

$$u=x-2y$$

$$du=dx-2dy\, dx=du+2dy$$

$$2u\,dy+5dy+(u+3)(du+2dy)=0$$

$$2u\,dy+5dy+(u+3)du+2u\,dy+6dy=0$$

$$(4u+11)dy+(u+3)du=0$$

PD terakhir ini adalah PD dengan peubah yang mudah dipisahkan, sehingga PD diatas dapat bagi dengan (4u + 11), diperoleh

$$dy+\frac{u+3}{4u+11}du=0$$

$$y+\int\frac{u+3}{3u+8}du=c1$$

$$y+\int\frac{4(+3)}{4(4u+11)}du=c1$$

$$y+\int\frac{1(u+11)}{4(4u+11)}+\frac{1}{4u+11}¿du=c1$$

$$y+\int\frac{1}{4}du=\int\frac{1}{4}\frac{1}{4u+11}\frac{d(4n+11)}{4}+c1$$

$$y+\frac{1}{4}u+\frac{1}{16}\ln(4u+11)=c1$$

substitusi kembali u = x – 2y, diperoleh

$$y+\frac{1}{4}(x-2y)+\frac{1}{16}\ln(4(x-2y)+8)=c1$$

$$16y+4x-8y+\ln(4x-8y+8)=16c1$$

$$8y+4x+\ln(4x-8y+8)=C, dengan\, C=16c$$

Dan kasus terakhir adalah kasus (c) yaitu

$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=¿$ m, sehingga a = mp, b = mq dan c = mr,

dengan mensubstitusikan ke pers (i), diperoleh

$$(mpx+mqy+mr)dx+(px+qy+r)dy=0$$

$$m(px+qy+r)dx+(px+qy+r)d=0\, bagi\, dengan(px+qy+r)¿$$

$$m\,dx+dy=0$$

dengan mengintegralkan kedua ruas, diperoleh

$\int m$ dx + $\int dy$ = c

$$mx+y=C$$

Contoh $7.2.3 (3x+3y+6)dx+(x+y+2)dy=0$

$$(3(x+y+2))dx+(x+y+2)dy=0$$

dengan mengambil m = 3 dan membagi kedua ruas dengan (x + y + 2) diperoleh

$$3dx+dy=0$$

$\int 3$ dx + =$\int dy$ C

$$3x+y=C$$

7.3 Kegiatan Pembelajaran 3 Persamaan Diferensial Koefiesien Konstanta

Sebagaimana telah disebutkan pada bahwa persamaan diferensial linear homogen tingkat tinggi dengan koefisien konstan dinyatakan dalam bentuk umum

$$P_0\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n y=0$$

Atau

$$\left(P_0D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\ldots+P_{n-1}D+P_n\right)y=0$$

$F(D)y=0$, dengan $P_0\neq 0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ adalah konstan, $F(D)$ disebut fungsi operator diferensial. Selanjutnya jika $F(D)$ dapat difaktorkan, maka $F(D)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $(D-m_1)(D-m_2)(D-m_3)\ldots(D-m_n)=0$. Bentuk tersebut dinamankan persamaan karakteristik dengan $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ disebut akar-akar persamaan karakteristik. Perlu diingat bahwa tidak penting menulis persamaan karakteristikm karena akar-akarnya dapat dibaca secara langsung dari fungsi operator diferensial. Persamaan karakteristik $f(m)=0$ setelah ditentukan akar-akarnya, untuk menentukan selesaian umum persamaan:

$$P_0\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n y=0$$

ditentukan dengan $y=Ce^{mx}$ dimana m akar persamaan karakteristik yang telah diketahui. Karena $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ adalah akar-akar persamaan karakteristik, maka jenis bilangan real dan tidak real.

Andaikan $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_n \in$ bilangan real maka primitinya $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$. Sehingga melibatkan n selesaian linear dan n konstanta sembarang. Jika $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$ $y = C_1 e^{m_1 x}, y = C_1 e^{m_1 x}$, $y = C_1 e^{m_1 x}, \ldots$, dan $y = C_1 e^{m_1 x}$ juga selesaian.

Contoh 7.3.1 Tentukan selesaian umum persamaan diferensial linear berikut:

a. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

Jawab:

Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk $(D^2 + 5D + 6)y = 0$, sehingga persamaan karakteristik $m^2 + 5m + 6 = 0$, $(m+2)(m+3) = 0$. akar-akarnya $m_1 = -2$ dan $m_2 = -3$, keduanya berberda. Primitif persamaan di $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$. Karena $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ adalah selesaian $y = C_1 e^{-2x}$ dan $y = C_2 e^{-3x}$ juga selesaian.

b. $\dfrac{d^4 y}{dx^4} - 4\dfrac{d^3 y}{dx^3} + \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} = 0$

Jawab:

Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$(D^4 - 4D^3 + D^2 + 6D)y = 0$

Persamaan karakteristik

$m^4 - 4m^3 + m^2 + 6m = 0$

$m(m^3 - 4m^2 + m + 6) = 0$

$m(m+1)(m-2)(m-3) = 0$

Diperoleh akar-akar persamaan karakteristik

$m_1=0$, $m_2=1$, $m_3=2$, dan $m_4=3$, Sehingga $(D^4-4D^3+D^2+6D)y=0$ adalah

$$y=C_1e^{0x}+C_2e^x+C_3e^{2x}+C_4e^{4x}$$

$$¿C_1+C_2e^x+C_3e^{2x}+C_4e^{4x}$$

Karena $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{2x}+C_4e^{4x}$ selesaian umum, maka

$y=C_1$, $y=C_2e^x$, $y=C_3e^{2x}$, dan $y=C_4e^{4x}$ juga selesaian.

Andaikan $m_1=m_2=m_3=\ldots=m_n=m\in$ real maka primitinya

$$y=\left(C_1+C_{2x}+C_{3x^2}+\ldots+C_{nx^{n-1}}\right)e^m$$

Contoh 7.3.2 Selesaikan persamaan diferensial linear berikut:

a. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=0$

Jawab:

Persamaan di atas dinyatakan dalam bentuk

$$(D^2+6D+9)y=0$$

$$(D+3)(D+3)y=0$$

Sehingga persamaan karakteristik $(m+3)(m+3)=0$

Diperoleh akar-akar persamaan karakteristik $m_1=m_2=-3$ (sama)

Akibatnya primitif persamaan di atas adalah $y=(C_1+C_{2x})e^{-3x}$

Karena $y=(C_1+C_{2x})e^{-3x}$ selesaian maka $y=C_1 e^{-3x}$ dan $y=C_2 e^{-3x}$ juga selesaian.

b. $\frac{d^5 y}{dx^5}+6\frac{d^4 y}{dx^4}+12\frac{d^3 y}{dx^3}-\frac{d^2 y}{dx^2}=0$

Bentuk lain persamaan di atas adalah

$D^2(D^3-6D^2+12D-8)y=0$

$D^2(D-2)^3 y=0$

Sehingga persamaan karakteristiknya $m^2(m-2)^3=0$, akar-akar persamaan karakteristiknya $m_1=m_2=0$, dan $m_3=m_4=m_5=2$. Akibatnya selesaian umum persamaan diferensial di atas adalah

$$y=\left(C_1+C_{2x}\right)e^{0x}+\left(C_3+C_{4x}+C_{5x^2}\right)e^{2x}$$

$$¿(C_1+C_{2x})+(C_3+C_{4x}+C_{5x^2})e^{2x}$$

$(C_1+C_{2x})+(C_3+C_{4x}+C_{5x^2})e^{2x}$

selesaian, maka $y=C_1$,

$y=C_{2x}$,

$y=C_{3x}e^{2x}$,

$y=C_{4x}e^{2x}$, dan

$y=C_{5x}e^{2x}$

Andaikan terjadi kombinasi hubungan antar akar persamaan karakteristik dalam bentuk 1 dan 2 di atas yaitu: $m_1\neq m_2\neq m_3\neq\ldots\neq m_n\in$ real maka primitinya

$y=C_1 e^{m_1 x}+(C_2+C_{3x}+C_{4x^2})e^{mx}+\ldots+C_n e^{m_n x}$

Contoh 7.3.3 Tentukan selesaian persamaan

a. $\left(D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4\right)y = 0$

Jawab:

Persamaan di atas mempunyai persamaan karakteristik

$m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$

$(m+1)(m+1)(m+1)(m-4) = 0$

Akar persamaan karakteristik $m_1 = m_2 = m_3 = -1$ dan $m_4 = 4$.

Sehingga selesaian umum persamaan di atas adalah

$y = \left(C_1 + C_{2x} + C_{3x^2}\right)e^{-x} + C_{4e^{4x}}$

Selesaian maka

$y = C_1 e^{-x}$,

$y = C_{2x} e^{-x}$, $C_{3x^2} e^{-x}$, dan

$y = C_4 e^{4x}$

b. $\frac{d^4 y}{dx^4} + 6\frac{d^3 y}{dx^3} + 12\frac{d^2 y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} = 0$

Jawab:

Bentuk lain persamaan di atas adalah

$\left(D^4 - 6D^3 + 12D^2 - 8D\right)y = 0$

$D(D-2)(D-2)(D-2)y = 0$

Persamaan karakteristiknya $m(m-2)(m-2)(m-2) = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik $m_1 = 0$ dan $m_2 = m_3 = m_4 = 2$. Sehingga selesaian umum diperoleh

$y = C_1 + \left(C_2 + C_{3x} + C_{4x^2}\right)e^{2x}$

$y = C_1$,

$y = C_2 e^{2x}$,

$y = C_{3x} e^{2x}$ dan

$y = C_{4x^2} e^{2x}$ juga selesaian.

Akar-akar persamaan karakteristika gabungan real dan tidak real, maka selesaian umumnya menggunakan perpaduan bentuk 1, 2, 3, dan 4 di atas.

Contoh 7.3.4 Tentukan persamaan umum diferensial

$(D4 + 4D2)\, y = 0$

Jawab:

Persamaan karakteristik PD di atas adalah $(m^4 + 4m^2)\, y = 0$

$m^2(m^2 + 4) = 0$, akar-akarnya adalah $m_1 = m_2 = 0$, dan $m_{3,4} = \pm 2i$,

Diperoleh selesaian umum $(D^4 + 4D^2)\, y = 0$

$y = (C_1 + C_{2x}) + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$

Contoh 7.3.5 Tentukan penyelesaian umum dari PD $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

Jawab:
Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah $m^2 - 5m + 6 = 0$. Dengan memfaktorkannya menjadi $(m-2)(m-3) = 0$, kita dapatkan akar karakteristiknya $m = 2$ atau $m = 3$. Karena $m_1 \neq m_2$, maka solusi umum PD tersebut adalah

$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
$y = C\,1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
Jadi, penyelesaian umum PD ini adalah
$y = C\,1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

Contoh7.3.6Tentukan penyelesaian umum dari PD $4\frac{d^2 y}{d x^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

Jawab:
Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah $4m^2 - 12m + 5 = 0$. Dengan memfaktorkannya menjadi $(2m-1)(2m-5) = 0$, kita dapatkan akar karakteristiknya $m = \frac{1}{2}$ atau $m = \frac{5}{2}$. Karena $m_1 \neq m_2$, maka solusi umum PD tersebut adalah
$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{5}{2}x}$ Jadi, penyelesaian umum PD ini adalah
$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{5}{2}x}$

Contoh 7.3.7 Tentukan penyelesaian umum dari PD

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$$

Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah $m^2 - 8m + 16 = 0$. Dengan memfaktorkannya menjadi $(m-4)(m-4) = (m-4)^2 = 0$, kita dapatkan akar karakteristiknya $m = 4$. Karena akarnya kembar/sama, maka solusi umum PD tersebut adalah $y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$ $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ Jadi, penyelesaian umum PD ini adalah
$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

7.4. Kegiatan Pembelajaran 4 Persamaan Diferensial Orde II Metode Koefisien Tak Tentu

Bentuk umum Persamaan Diferensial linier non homogen Orde 2 adalah $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$

Solusi umum $y(x)$ akan didapatkan bila solusi umum $y_h(x)$ diketahui. Persamaan Diferensial homogen :

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Kemudian $y(x)$ dibentuk dengan penambahan $y_h(x)$ sembarang solusi termasuk konstanta tak tetapnya. Sehingga $y(x) = y_h(x) + y(x)$.

Theorema 1

$f(x)$, $g(x)$, dan $r(x)$ merupakan fungsi kontinu pada interval I. $y(x)$ merupakan solusi dari Persamaan Diferensial di atas yang berisikan konstanta tetap. $y(x)$ dibentuk oleh dua konstanta. Konstanta pertama, berubah-ubah, terdapat pada solusi umum (homogen) $y_h(x)$. Konstanta kedua tetap, terdapat pada fungsi $y(x)$, yaitu sembarang solusi Persamaan Diferensial pada interval I.

Theorema 2

Solusi umum Persamaan Diferensial seperti di atas adalah penjumlahan solusi persamaan homogen $y_h(x)$ dengan solusi partikular yang tetap (tak berubah-ubah) $y_p(x)$.

Sehingga $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Solusi umum Persamaan Diferensial linier tak homogen orde 2 merupakan jumlah dari solusi Persamaan Diferensial homogen (y_h) dan solusi pelengkap (y_p) dan dituliskan sebagai. $y = y_h + y_p$. Solusi homogen (y_h) adalah selesaian umum Persamaan diferensial homogen yang bersesuaian dicari seperti pembahasan sebelumnya, sedangkan solusi pelengkap (y_p) adalah suatu selesaian khusus dari Persamaan diferensial tak homogennya. Metode koefisien tak tentu adalah metode yang khusus digunakan untuk persamaan dengan koefisien konstan dan ruas kanannya berbentuk fungsi eksponensial. Pertama-tama metode ini diterapkan untuk persamaan orde dua yang berbentuk $y'' + ay' + by = r(x)$. Tetapi untuk selanjutnya metode ini berlaku juga untuk orde yang lebih tinggi. Yang menjadi kunci dalam metode ini adalah menganggap bahwa (y_p) mempunyai ekspresi yang mirip dengan (x), yang melibatkan koefisien-koefisien yang tidak diketahui yang harus ditentukan dengan mensubstitusikan (y_p) dalam persamaannya. Hal ini mestinya berlaku untuk fungsi-fungsi $r(x)$ yang turunan-turunannya mempunyai bentuk yang mirip dengan $r(x)$ sendiri, yang dalam hal ini berupa fungsi-fungsi eksponensial.

Pilihlah (y_p) yang serupa dengan $r(x)$, lalu substitusikan ke dalam persamaan

$r(x)$	(y_p)
$r(x)=e^{mn}$	$y_p=A\,e^{mx}$
$r(x)=x^n$	$y_p=A\,nx^n+An-1\,x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0$
$r(x)=\sin wx$	$y_p=A\cos wx+B\,s\in wx$
$r(x)=\cos wx$	$y_p=A\cos wx+B\sin wx$
$r(x)=e^{ux}\sin wx$	$y_p=e^{ux}(A\cos wx+B\sin wx)$
$r(x)=e^{ux}\cos wx$	$y_p=e^{ux}(A\cos wx+B\sin wx)$

Tabel 7.4.1

Catatan:

Solusi partikular tidak boleh muncul pada solusi homogennya. Jika hal ini terjadi, kalikan solusi khususnya dengan faktor x_1 atau x_2 sehingga tidak memuat lagi solusi homogennya. Bentuk Persamaan Umum $y''+a\,y'+by=r(x)$. Fungsi $r(x)$yang merupakan bentuk solusi partikular $y_p(x)$ diperoleh dengan cara menebak, seperti misalnya : fungsi cos, fungsi sin, fungsi exponensial atau jumlah dari beberapa fungsi.

1. $r(x)$ berisikan koefisien tak tentu.
2. Turunkan y_p sesuai persamaan umum di atas.
3. Substitusikan y_p dan seluruh turunannya ke dalam

persamaan diatas

Bentuk $r(x)$	Pilihan untuk y_p	
ke^{px}	Ce^{px}	P
$kx^n (n=0,1,\ldots)$	$knx^n + k_{n-1} x^{n-1} + k_1 x + k_0$	0
$k \cos \omega x$ atau ωx	$k \cos \omega x + k \sin \omega x$	iq iq

Tabel 7.4.2

Contoh 7.4.1 $y'' - 4y' - 3y = 10e^{-2x}$

Jawab :
Partikular y_pTurunan e^{-2x} adalah ke^{-2x}
Maka:
$y_p = ke^{-2x}$
$y_p' = -2ke^{-2x}$
$y_p'' = 4ke^{-2x}$
$4ke^{-2x} - 4(-2ke^{-2x}) + 3ke^{-2x} = 10ke^{-2x}; k = \frac{2}{3}$

$y_{p=¿\left(\frac{2}{3}\right)e^{-2x}}$ y -4y'-3y= 10 {e} ^ {-2x¿

Jawab homogen y_h
$L_2 - L_4 + 3 = 0; L_1 = 3 \, \text{dan} \, L_2 = 1$

$y_h = k_1 e L_1 x + k_2 e L_2 x = k_1 e^{3x} + k_2 e^x$

Solusi Umum :

$y = y_{h + ¿\, y_p ¿}$

$y = k_1 e^{3x} + k_2 e^x + \left(\frac{2}{3}\right) e^{-2x}$

Contoh 7.4.2 $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya :

$r_2 - 3r + 2 = 0 (r-2)(r-1) = 0$

Sehingga didapat $r_1 = 2$ dan $r_2 = 1$

Kemudian masukan dipersamaan diatas:

$A e^{-x} + 3 A e^{-x} + 2 A e^{-x} = e^{-x}$

$6 A e^{-x} = e^{-x}$

$A = \frac{1}{6}$

Jadi solusi umum PD di atas adalah:

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{6} e^x$

7.4.3 Selesaikan: $y'' - 3y' + 4x = e^{3x}$

Jawab:

Jawab homogen: $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

Jawab partikular: $y_p = K_1 x + K_0 + C e^{3x}$

$y_p' = K_1 + 3 C e^{3x}$

$y_p'' = 9 C e^{3x}$

$9 C e^{3x} - 3(K_1 + 3 C e^{3x}) + 2(K_1 x + K_0 + C e^{3x}) = 4x + e^{3x}$

$K_1 = 2$; $K_0 = 3$, C=1/2

$y_p = 2x + 3 + 1/2\, C e^{3x}$

Solusi umum:

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 2x + 3 + \left(\frac{1}{2}\right) C e^{3x}$

7.4.4 Selesaikan : $y'' - 2y' + y = (D-1)^2 = e^x + x$

Jawab:

Jawab homogen:

$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 x + C_2) e^x$

Jawab partikular Lihat tabel $K_1 x + K_0$

karena akar ganda$C_2 x e^x$ sehingga

$y_p = K_1 x + K_0 + C x 2 e^x$

Bila disubstitusikan ke dalam persamaan :

$y_p'' - 2 y_p' + y_p = e^x$

maka didapatkan :

$2 C e^x + K_1 x - 2 K_1 + K_0 = e^x + x$

C = ½ ; $K_1 = 1$; $K_0 = 2$

Solusi umum:

$y = (C_1 x + C_2) e^x + \frac{1}{2} x_2 e^x + x + 2$

Contoh $7.4.5\ y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

Jawab:

Solusi homogen:

$y'' - 2y' - 3y = 0$

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$(r-3)(r+1) = 0$

$r = -1$ dan $r = 3$

$y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$

Solusi partikular:

$y_p = A e^{2t}$

$y'_p = 2 A e^{2t}$

$y''_p = 4 A e^{2t}$

Substitusikan

$4 A e^{2t} - 2(2 A e^{2t}) - 3 A e^{2t} = 3 e^{2t}$

$4 A e^{2t} - 4 A e^{2t} - 3 A e^{2t} = 3 e^{2t}$

$-3 A e^{2t} = 3 e^{2t}$

$-3A = 3$

$A = -1$

Maka $y_p = -e^{2t}$

Solusi umum:

$$y_t = y_h + y_p$$
$$y_t = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - e^{2t}$$

Contoh 7.4.6 $y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2t$

Jawab:

Solusi homogen:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$
$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$
$$¿\,\frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$
$$r_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Rumus solusi homogen apabila akar-akarnya kompleks:

$$y = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ¿\, C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)\, ¿$$
$$r = -1 \pm 2i$$
$$y_h = C_1 e^{-t}\cos(2t) + ¿\, C_2 e^{-t}\sin(2t)\, ¿$$

Solusi partikular:

$$y_p = A\sin 2t + B\cos 2t$$
$$y'_p = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t$$
$$y''_p = -4A\sin 2t - 4B\cos 2t$$

Substitusi:

$$-4A\sin 2t - 4B\cos 2t + 4A\cos 2t - 4B\sin 2t + 5A$$
$$\sin 2t + 5B\cos 2t = 3\sin 2t$$
$$A\sin 2t + B\cos 2t + 4A\cos 2t - 4B\sin 2t = 3\sin 2t$$
$$(A - 4B)\sin 2t + (4A + B)\cos 2t = 3\sin 2t$$

Samakan koefisiennya:

$$\sin 2t : A - 4B = 3$$
$$\cos 2t : 4A + B = 0$$

Dari penyelesaian kedua sistem tersebut didapat:

$$A = \frac{3}{17} \text{ dan } B = \frac{-12}{17}$$
$$y_p = \frac{3}{17}\sin 2t - \frac{12}{17}\cos 2t$$

Maka,

$y_t = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + ¿ C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \frac{3}{17} \sin 2t ¿$

$\frac{-12}{17} \cos 2t$

7.5 Kegiatan Pembelajaran 5 Persamaan Diferensial Orde II Dengan Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter adalah metode yang dapat digunakan untuk menentukan selesaian khusus Persamaan Diferensial linier takhomogen dengan koefisien variabel, sehingga lebih umum daripada metode koefisien tak tentu. Metode ini digunakan untuk memecahkan persamaan-persamaan yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode koefisien tak tentu. Metode untuk menentukan penyelesaian khusus Persamaan Diferensial linier non homogen dengan koefisien variabel. Prinsip metode ini adalah mengubah variabel konstanta $C_K$dengan variasi parameter$y_k(x)$. Misal pada Persamaan Diferensial non homogen orde 2 konstanta C_1danC_2 pada solusi umum Persamaan Diferensial homogen:

$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

diubah dengan variasi parameter $v_1(x)$dan $v_2(x)$sehingga solusi khusus Persamaan Diferensial non homogenya

$y_p = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x)$. Metode ini lebih umum daripada metode koefisien tak tentu yang memeperhatikan bentuk fungsi $f(x)$.

Jika

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$. merupakan solusi homogen PD:

$y'' + p y' + qy = f(x)$. maka solusi pelengkap dimisalkan :

$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$.Fungsi $v_1(x)$ *dan* $v_2(x)$ merupakan fungsi parameter, jika solusi pelengkap diturunkan sekali lagi :

$y_p' = ¿¿$

Dipilih persamaan syarat : $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$, sehinggadiperoleh turunan keduanya :

$y_p{}'' =$ ¿¿

Substitusikan y_p, $y_p{}'$, dan $y_p{}''$ ke dalam Persamaan Diferensial, dan diperoleh :

$v_1{}'y_1{}' + v_2{}'y_2{}' = f(x)$

Fungsi parameter $v_1(x)$dan $v_2(x)$ diperoleh dari solusi SPL dalam $v_1{}' + v_2{}'$ adalah

$v_1{}'y_1{}' + v_2{}'y_2{}' = 0$

$v_1{}'y_1{}' + v_2{}'y_2{}' = f(x)$

Analog untuk persamaan diferensial tak homogen orde-n, dimana y_1, y_2,…,y_n solusi bebas linier dari persamaan diferensial homoennya, maka solusi persamaan diferensial tak homogennya adalah:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_n y_n$$

Dengan $v_{i,} i = 1, \ldots, n$ memenuhi :

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + \ldots + v_n{}' y_n = 0$$

$$v_1' y_1{}' + v_2' y_2{}' + \ldots + v_n{}' y_n{}' = 0$$

$$v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Perhatikan bahwa determinan dari SPL diatas adalah $W(y$¿¿$1, y_{2,\ldots,} y_n)$¿ dan tak nol$\forall x \in R$ karena $y_{1,} y_{2,\ldots,} y_n$ bebas linier. Solusi SPL diperoleh melalui Rumus Cramer:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2{}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}} \rightarrow v_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx$$

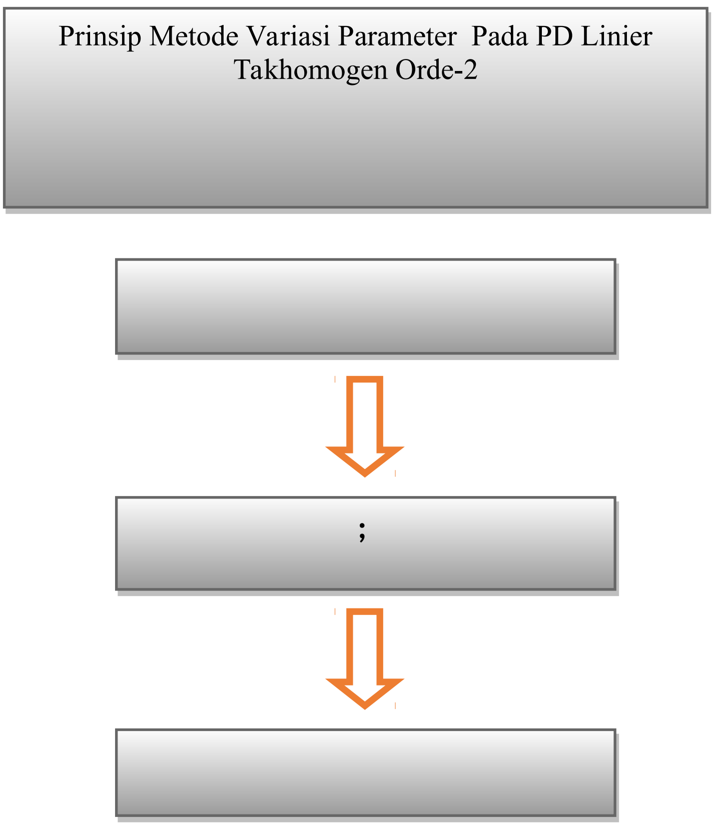
$$v_2{}' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1{}' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}} = v_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx$$

Keterangan :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$v_i' = \frac{W_i(x)}{W(x)} \text{ atau } v_i = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} d$$

Dengan $W_i(x)$ adalah $W(x)$ yang mana kolom ke-I diganti dengan (0,0,…,f(x)) (ruas kanan SPL)



Contoh 7.5.1 Tentukan solusi umum dari PD : $y''+y=secx$

Jawab :

Langkah 1: Menentukan persamaan diferensial homogen:

$y''+y=0$

Persamaan karakteristiknya $m^2+1=0$, akar-akarnya $m_{1.2}=\pm i$

Solusi homogen, $y_h=C_1\cos x+C_2\sin x$

Langkah 2: Menentukan penyelesaian PD tak homogeny dengan metode variasi parameter:

Solusi pelengkap, $y_p=v_1(x)\cos 2x+v_1(x)\sin 2x$

Fungsi parameter $v_1(x)$dan)$v_2(x)$ diselesaikan dari SPL berikut :

$v_1'(x)\cos x+v_2'(x)\sin x=0$

$-v_1'(x)sinx+v_2'(x)\cos x=secx$

Dengan cara crammer diperoleh :

$$v_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ f(x) & y_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & sinx\\ secx & cosx\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}cosx & sinx\\ -sinx & cosx\end{vmatrix}}=\frac{sinxsecx}{1}=-tanx$$

$$\rightarrow v_1(x)=\ln(cosx)$$

$$v_2'=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & f(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}cosx & 0\\ -sinx & secx\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}cosx & sinx\\ -sinx & cosx\end{vmatrix}}=\frac{cosxsecx}{1}=1$$

$$\rightarrow v_2(x)=x$$

Solusi pelengkap : $y_p = \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$
Solusi umum PD :
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$
Atau dapat diselesaikan dengan cara :
$y \, " + y = sec \, x$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$r_2 + 1 = 0 \leftrightarrow r = \pm i$
Jadi solusi homogennya adalah $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
Untuk yp dipilih $y_p = u \, y_1 + v \, y_2$ dengan
$y_1 = \cos x \, , \, y_1 ' = - \sin x$
$y_2 = sinx \, , \, y_2^{'} = cosx$
$W = y_1 y_2 ' - y_1 ' \, y_2 ' = \cos 2 \, x + \sin 2 \, x = 1$

Sehingga diperoleh
$$U = \int \frac{\sin x \, sec \, x}{1} dx = - \int \tan x \, dx = |\ln \cos x|$$
$$V = \int \frac{\cos x \, sec \, x}{1} dx = \int dx = x$$
Jadi solusi non homogen didapat:
$y_p = \ln|\cos x| \cos x + x \sin x$
jadi solusi umum dari persamaan diferensial di atas :

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$$

Contoh 7.5.2 $y \, " + y = \tan x$
Jawab:
Persamaan karakteristiknya: $r_2 + 1 = 0 \leftrightarrow r_1 = \pm i$
Jadi solusi homogennya adalah $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
Untuk *yp* dipilih $y_p = u \, y_1 + v \, y_2$ dengan:
$y_1 = \cos x \, ; \, y_2 = \sin x$
$y_1 ' = - \sin x \, ; \, y_2 ' = \cos x$
$W = y_1 y_2 ' - y_1 ' \, y_2 ' = \cos 2 \, x + \sin 2 \, x = 1$

Sehingga diperoleh

$$U=\int \frac{sinxtanx}{1}dx=-\int \frac{\sin^2 x}{cosx}dx=-\int \frac{1-\cos^2 x}{cosx}dx=-\int (secx-cosx)\,dx$$

$$¿-\int sec\,x\,dx+¿\int \cos x\,dx\,¿$$

$$¿\ln|sec\,x\tan x|+\sin x$$

$$V=\int \frac{\cos x\tan x}{1}dx=\int sinx\,dx=-cosx$$

$$¿-(\ln|sec\,x\tan x|)\,cosx+\sin x\cos x-sinx\cos x$$

$$¿-(\ln|sec\,x\tan x|\cos x)$$

Jadi, solusi umum dari persamaan diferensial diatas

$y=C_1\cos x+C_2\sin x\,¿$

7.6 Reduksi Orde

Bentuk umum PD homogen orde 2

$y^{\} +a {y} ^ {'} +by=¿}$. Akar akar persamaan karakteristik jika

$\sqrt{b^2-4ac}=0, m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$

Satu solusi PD : $y(x)=c_1 e^{\frac{-b}{2a}x}$

Bentuk persamaan reduksi orde yaitu :

$$y(x)=v(x)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

$$y'=v'(x)e^{\frac{-b}{2a}x}-\frac{b}{2a}v(x)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

$$y''=\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

Substitusi y, y', y'' ke PD $y^{\} +a \{y\} ^ \{'\} +by=¿}$, maka :

$$a\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)e^{\frac{-b}{2a}x}+b\left(v'(x)-\frac{b}{2a}v(x)\right)e^{\frac{-b}{2a}x}+cv(x)e^{\frac{-b}{2a}x}=0$$

Kedua ruas dibagi $e^{\frac{-b}{2a}x}$, maka :

$$a\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)+b\left(v'(x)-\frac{b}{2a}v(x)\right)+cv(x)=0$$

$$a\,v''(x)-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)v(x)=0$$

$$a\,v''(x)-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)v(x)=0$$

Karena $b^2-4ac=0$ maka persamaan menjadi :

$$v''(x)=0$$

$$v(x)=c_1+c_2x$$

Jadi satu solusi lain $y(x)$ adalah $y(x)=v(x)e^{\frac{-b}{2a}x}=(c_1x+c_2)e^{\frac{-b}{2a}x}$

Karena satu solusi PD telah diketahui yaitu : $y(x)=c_1e^{\frac{-b}{2a}x}$

Maka solusi lain yang dimaksud adalah $y(x)=c_2xe^{\frac{-b}{2a}x}$

Contoh 7.6.1 Tentukan penyelesaian umum PD.

y} +4 {y} ^ {'} +4y=¿

Penyelesaian:

Akar-akar Persamaan Karakteristik pada PD di atas adalah:

$$m^2+4m+4=0$$

$$(m+2)(m+2)=0$$

$$m_{12}=-2$$

Diperoleh akar-akar yang sama, sehingga solusi umum PD mestinya adalah:

$$y(x)=c_1e^{-2x}$$

Karena PD orde 2 akan memberikan 2 solusi bebas linier dengan 2 variabel kontanta maka solusi kedua dapat ditentukan dengan metode reduksi orde PD yaitu :

Bentuk umum PD homogen orde 2

$$y''+ay'+by=0$$

Akar akar persamaan karakteristik jika

$$\sqrt{b^2-4ac}=0, m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$$

Satu solusi PD : $y(x)=c_1e^{\frac{-b}{2a}x}$

Bentuk persamaan reduksi orde yaitu :

$$y(x)=v(x)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

$$y'=v'(x)e^{\frac{-b}{2a}x}-\frac{b}{2a}v(x)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

$$y''=\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

Substitusi y, y', y'' ke PD y} +a {y} ^ {'} +by=¿ , maka :

$$a\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)e^{\frac{-b}{2a}x}+b\left(v'(x)-\frac{b}{2a}v(x)\right)e^{\frac{-b}{2a}x}+cv(x)e^{\frac{-b}{2a}x}=0$$

Kedua ruas dibagi $e^{\frac{-b}{2a}x}$, maka :

$$a\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)+b\left(v'(x)-\frac{b}{2a}v(x)\right)+cv(x)=0$$

$$a\,v''(x)-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)v(x)=0$$

$$a\,v''(x)-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)v(x)=0$$

Karena $b^2-4ac=0$ maka persamaan menjadi :

$$v''(x)=0$$

$$v(x)=c_1+c_2x$$

Jadi satu solusi lain $y(x)$ adalah $y(x)=v(x)e^{\frac{-b}{2a}x}=(c_1x+c_2)e^{\frac{-b}{2a}x}$

Karena satu solusi PD telah diketahui yaitu : $y(x)=c_1e^{\frac{-b}{2a}x}$

Maka solusi lain yang dimaksud adalah $y(x)=c_2 xe^{\frac{-b}{2a}x}$

Untuk kasus contoh soal diatas penyelesaian umum PD menjadi :

$$y(x)=c_1 e^{-2x}+c_1 xe^{-2x}$$

Contoh 7.6.2 Tentukan penyelesaian umum PD berikut :

$$y''+2y'+4y=0$$

Penyelesaian :

Akar akar persamaan karakteristik :

$$m^2+2m+4=0$$

$$m_{1.2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$$

Karena $\alpha=-1$ dan $\beta=\sqrt{3}$ maka penyelesaian umum PD :

$$y=A\,e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x+B\,e^{-x}\sin\sqrt{3}\,x$$

Metode yang digunakan sejauh ini dalam bagian ini juga bekerja untuk persamaan dengan koefisien non konstan

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

Artinya, mengingat bahwa y_1 adalah solusi, coba $y_2=v(t)y_1$:

$$y_2(t)=v(t)y_1(t)$$

$$y_2''(t)=v'(t)y_1(t)+v(t)y_1'(t)$$

$$y_2''=v''(t)y_1(t)+2v'(t)y_1(t)+v(t)(t)$$

Substitusi ke persamaan

$$y_1 v'' + (2 y_1' + p y_1) v' + (y_1' + p y' + q y_1) v = 0$$

Karena y_1 adalah solusi untuk persamaan diferensial , persamaan terakhir ini untuk mengurangi persamaan urutan pertama di v' :

$y_1 v' + (2 y_1' + p y_1) v' = 0$. Karena y_1 adalah solusi untuk persamaan diferensial , persamaan terakhir ini untuk mengurangi persamaan urutan pertama di v' :

$$y_1 v' + (2 y_1' + p y_1) v' = 0$$

Contoh 7.6.3 Mengingat persamaan koefisien variabel dan solusi y_1

$$t^2 y' + 3ty' + y = 0, t > 0; y_1(t) = t^{-1}$$

Menggunakan reduksi orde untuk menemukan solusi kedua:

$$y_2(t) = v(t) t^{-1}$$

$$y_2'(t) = v'(t) t^{-1} - v(t) t^{-2}$$

$$y_2'' = v''(t) t^{-1} - 2 v'(t) t^{-2} + 2 v(t) t^{-3}$$

Substitusi ini ke persamaan dan lihat persyaratan

$$t^2 (v'' t^{-1} - 2 v' t^{-2} + 2 v t^{-3}) + 3t (v' t^{-1} - v t^{-2}) + v t^{-1} = 0$$

$$v'' t - 2 v' + 2 v t^{-1} + 3 v' - 3 v t^{-1} + v t^{-1} = 0$$

$$t v'' + v' = 0$$

$t u' + u = 0$,where $u(t) = v' t$

Contoh 4

Menemukan v(t) (2 dari 3)

Menyelesaikan:

$$t u' + u = 0 , u(t) = v' t$$

Untuk u, kita dapat menggunakan metode pemisahan variabel :

$$t \frac{du}{dt} + u = 0 \leq ¿ \int \frac{du}{u} = - \int \frac{1}{t} dt \leq ¿ \ln |u| = -\ln |t| + c$$

$$¿ > |u| = ¿ t \vee ¿^{-1} e^{c} \leq ¿ u = c\, t^{-1}, since\, t > 0. ¿$$

Demikian

$$v' = \frac{c}{t}$$

Dan karenanya

$$v(t) = c \ln t + k$$

Solusi Umum (3 dari 3)
Kita punya
$v(t) = c \ln t + k$
Demikian

$$y_2(t) = ¿$$

$y_1(t) = t^{-1}$. Dan karenanya kita dapat mendapatkan istilah kedua, y_2 yaitu

$y_2(t) = t^{-1} \ln t$. Oleh karena itu solusi umum untuk persamaan diferensial adalah

$$y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1} \ln t$$

RANGKUMAN

Bentuk umum Persamaan Differensial linear order dua dengan koefisien konstan adalah : $a\,y$ +b y '+ c y = f () dengan a, b dan c konstanta. Bila $f(x)=0$ maka ay +by '+ cy = disebut persamaa differensial linear order dua homogen, sedang bila $f(x)^1=0$ maka disebut persamaan differensial linear order dua tak homogen. Fungsi f (x,y) disebut homogen dengan derajad n dalam variable – variabelnya jika $f(\lambda x\,\lambda y)=\lambda^n, f(x,y)$. Persamaan $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ disebut homogen jika M (x,y) dan (x,y) hohogen dengan derajad sama. Untuk persamaan homogen dilakukan substitusi $y=vx \rightarrow dy=vdx+xdv$.Dengan substitusi ini persamaan homogen dibah menjadi bentuk variable – variable terpisah x dan v.

Persamaan diferensial tidak homogen adalah PD yang mempunyai bentuk $(ax+by+c)dx+(px+qy+r)dy=0\ldots(i)$, dengan $a, b, c, p, q, dan\, r$ adalah konstanta.

koefisien konstan dinyatakan dalam bentuk umum

$$P_0\frac{d^n y}{d\,x^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{d\,x^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{d\,x^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n\,y=0$$

Atau

$$\left(P_0D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\ldots+P_{n-1}D+P_n\right)y=0.$$

Jika $F(D)$ dapat difaktorkan, maka $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ disebut akar-akar persamaan karakteristik.

Persamaan karakteristik $f(m)=0$ setelah ditentukan akar-akarnya, untuk menentukan selesaian umum persamaan:

$$P_0\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n\,y=0.$$

Metode koefisien tak tentu penyelesaian khusus Persamaan Diferensial linier tak homogen dengan koefisien konstanta

Untuk dapat menentukan pemisalan yang sesuai harus dicari terlebih dahulu solusi persamaan homogennya
Metode koefisien tak tentu hanya digunakan jika fungsi $f(x)$ diruas kanan adalah berupa polinom, fungsi trigono, fungsi eksponen atau penjumlahan/perkalian dari ketiga fungsi kolom pertama pada tabel diatas

Beberapa Aturan pada metode koefisien tak tentu:

1. Aturan dasar :
   Bila $r(x)$ merupakan salah satu fungsi seperti dalam tabel, maka pilih bentuk y_p yang sesuai dan merupakan kombinasi linier dengan konstanta tak tentu. Turunan $r(x)$ harus bebas linier pula.
2. Aturan Penjumlahan :
   Bila $r(x)$merupakan penjumlahan, maka pilih y_p yang merupakan penjumlahan fungsi yang sesuai.
3. Aturan Modifikasi :

   Bila $r(x)$adalah solusi dari persamaan homogen, maka pilihan dapat dimodifikasi seperti berikut, Kalikan pilihan pada kolom 2 dengan x_1 atau x_2 tergantung dari apakah pada kolom 3 berupa akar tunggal atau akar-akar ganda dari persamaan homogen.

DISKUSI KELOMPOK

1. Tentukan persamaan diferensial homogen dari
   $(x+y)dx+xdy=0$
   Jawab
   $M(x,y)=x+y$
   $M(tx,ty)=tx+ty=t(x+y)=t.M(x,y)$
   $(x+xz)dx+x(zdx+xdz)=0$
   $(1+z)xdx+\cdots+\ldots^{\cdots}dz=0$
   $¿¿dx+\ldots^{\cdots}dz=0$
   $\int\frac{x\,dx}{\ldots}+\int\frac{dz}{\ldots}=\int 0=¿\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+2z)=\ln C$
   $2\ln x+\ln(1+2z)=2\ln C$
   $\ln\ldots+\ln(1+2z)=\ln c^2$
   $\ln\ldots+(1+2z)=\ln c$
   $\ldots^{\cdots}.(1+2z)=c$
   $\ldots^{\cdots}¿$
   $\ldots^{\cdots}+2xy=c$
2. Selesaikan persamaan diferensial tak homogeny dibawah ini!
   $(3x+3y+6)dx+(x+y+2)dy=0$
   Jawab
   $(3x+3y+6)dx+(x+y+2)dy=0$
   ambil m = 3
   $(3x+3y+6)dx+(x+y+2)dy=0\,bagi\,dengan\,(x+y+2)$
   $\ldots dx+dy=0$
   $\int\ldots dx+\int\ldots=C$
   $\ldots+\ldots=C$

3. Tentukan persamaan umum diferensial

   $(d^4+9d^2)y=0$

   Jawab:

Persamaan karakteristik PD di atas adalah $\left(m^{\cdots}+\ldots m^{\cdots}\right)y=0$, akar-akarnya adalah $m_{\ldots}=m_{\ldots}=0$, dan $m_{3,4}=\ldots$.

Diperoleh selesaian umum $\left(D^4+4D^2\right)y=0$

$y=\left(C_{\ldots}+C_{\ldots}\right)+\left(C_{\ldots}\cos\ldots+C_{\ldots}\sin\ldots\right)$

4. Tentukan penyelesaian umum dari PD $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+8y=0$

Jawab:
Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah $m^{\cdots}-\ldots m+\ldots=0$. Dengan memfaktorkannya menjadi $(m-\ldots)(m-\ldots)=0$, kita dapatkan akar karakteristiknya $m=\ldots$ atau $m=\ldots$. Karena $m_1\neq m_2$, maka solusi umum PD tersebut adalah
$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$
$y=C_1e^{\cdots}+C_2e^{\cdots}$
Jadi, penyelesaian umum PD ini adalah

$y=C_1e^{\cdots}+C_2e^{\cdots}$

5. $y''-4y'+3y=e^{-x}$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya : $r^2-\ldots r+\ldots=0,(r-\ldots)(r-\ldots)=0$

Sehingga didapat $r_1=\ldots$ dan $r_2=\ldots$

Kemudian masukan dipersamaan diatas: ....

$Ae^{\cdots}+\ldots Ae^{\cdots}+\ldots Ae^{\cdots}=e^{\cdots}$

$\ldots Ae^{\cdots}=e^{\cdots}$

$A=\ldots$

Jadi solusi umum PD di atas adalah: ....

$y = C_1 e^{\cdots} + C_2 e^{\cdots} + \ldots e^{\cdots}$

6. $y'' - 4y' - 5y = 3e^{2t}$

Jawab:

Solusi homogen:

$y'' - \ldots y' - \ldots y = 0$

$r^2 - \ldots r - \ldots = 0$

$(r - \ldots)(r + \ldots) = 0$

$r = \ldots$ dan $r = \ldots$

$y_h = C_1 e^{\cdots} + C_2 e^{\cdots}$

Solusi partikular:

$y_p = A e^{\cdots}$

$y'_p = \ldots A e^{\cdots}$

$y''_p = \ldots A e^{\cdots}$

Substitusikan

$\ldots A e^{\cdots} - \ldots (\ldots A e^{\cdots}) - \ldots A e^{\cdots} = \ldots e^{\cdots}$

$\ldots A e^{\cdots} - \ldots A e^{\cdots} - \ldots A e^{\cdots} = \ldots e^{\cdots}$

$\ldots A e^{\cdots} = \ldots e^{\cdots}$

$\ldots A = \ldots$

$A = \ldots$

Maka $y_p = -e^{\cdots}$

Solusi umum:

$y_t = y_h + y_p$

$y_t = C_1 e^{\cdots} + C_2 e^{\cdots} - e^{\cdots}$

7. Tentukan penyelesaian partikular dari $y''+y'-2y=x^2$!

Jawab

Misal $y=y_p=ax^2+bx+c$, maka $y'=2ax+b$ dan $y'=2a$

Substitusikan y, y', dan y'' ke PD didapat

$2a+2ax+b-2(ax^2+bx+c)=x^2$

$-2ax^2+(2a-\ldots)x+\ldots+b-2c=x^2$

8. $y''+3y'-2y=5$

Jawab

Persamaan karakteristik:

$m^2+3m+2=0$

$(m+1)(m+2)=0$

$m=-1$ V $m=-2$

Solusi (y_h) untuk persamaan diferensial diatas:

$(y_h)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

subsitusikan

$0+3\cdot0+2A=5$

$A=\frac{\ldots}{\ldots}$

Jadi, $y=c_1e^{-x}+c_2e^{\cdots}+\frac{\ldots}{\ldots}$

9.Selesaikan persamaan berikut $y''-4y'-3y=10e^{-2x}$

Jawab:

Turunan e^{-2x} adalah ke^{-2x}

Maka $y_p=ke^{-2x}$

$y_p' = -2ke^{-2x}$ dan $y_p'' = 4ke^{-2x}$

$4ke^{-2x} - 4(-2ke^{-2x}) + 3ke^{-2x} = \ldots; k = \frac{\ldots}{\ldots}$

10. $y'' + 5y' + 6y = 0$

Jawab

$(r \times \ldots)(r \times \ldots) = 0$

$r_1 = -2$ atau $r_2 = -3$

$y = \ldots + \ldots$

LATIHAN MANDIRI

Selesaikan persamaan diferensial berikut ini :

1. $y''+2y'+10y=4{,}5\cos xx-\sin x$
2. $y''+2y'+2y=-2\cos 2x-4\sin 2x$
3. $y''+4y'+8y=4\cos x+7\sin x$
4. $y''+y=cosec\, x+x$
5. $y''+9y=sec\, 3x$
6. $y''-2y'-4y'-2y'=1-8x3$
7. $y''+2y'+4y=-4\cos 4x-4\sin 4x$
8. $y''+4y=e-4x$
9. $y''+5y'+5y=3\cos x+4\sin x$
10. $\frac{dy}{dx}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}=0$
11. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$
12. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+3y}{2x+y}$
13. $\frac{dy}{dx}=\frac{-4y+3x}{2x+y}$
14. $y''-4y'+3y=10e^{-2x}$
15. $y''+4y=8x^2$
16. $y''-y'-2y=10\cos x$
17. $y''-3y'+2y=4x+e^{3x}$
18. $y''+y=sec\, x$

19. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

20. $(D^4 - 16)y = 0$

21. $m^4 - 16 = 0$

22. Misalkan $y1(x)$ dan $y2(x)$ adalah penyelesaian
$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

a) Buktikan bahwa determinan Wronskinya
$W = y_1 y_2' + y_2 y_1' = c\,e^{\int -p dx}$

b) Tentukan nilai c, sehingga $y1(x)$ dan $y2(x)$ bebas linier.

23. Tentukan apakah himpunan $\{e^x, e^{-x}\}$ adalah dependen secara linear pada $(-\infty, \infty)$

24. Tentukan apakah himpunan $\{1-x, 1+x, 1-3x\}$ adalah dependen linear pada $(-\infty, \infty)$.

25. Tentukanlah solusi umum untuk $y^{\} +9y=0¿}$jika diketahui bahwa dua solusinya adalah $y_1(x) = \sin 3x \; dan \; y_2(x) = \cos 2x$

MODUL 8
REDUKSI ORDER

Capaian Kompetensi	Uraian Materi
Mampu memahami konsep determinan dan mengaplikasikannya.	Mahasiswa mampu memahami konsep determinan wornski dan kebebasan linear wornskian, serta mengaplikasikannya.

MODUL 8
REDUKSI ORDER

8.1 Kegiatan Pembelajaran 1 Kebebasan Linear Wornskian

Representasi solusi umum persamaan diferensial linear homogen orde kedua sebagai kombinasi linear dua solusi yang wornskiannya tidak nol berelasi dengan konsep kebebasan linear dua buah fungsi. Dua buah fungsi f dan g dikatakan saling bebas linear dalam suatu internal jika terdapat dua buah konstan k_1 dan k_2 sedemikian rupa sehingga,

$$k_1 f(x)+k_2 g(x)=0$$

untuk setiap x dalam interval terkait.

Teorema 1

Jika f dan g adalah fungsi yang terdiferensialkan dalam interval buka I dan $W(f,g)(x_0)\neq 0$ untuk satu titik $x_0\in I$, maka f dan g saling bebas linear. Sebaliknya jika f dan g tidak bebas linear, maka $W(f,g)(x_0)=0$ untuk setiap titik $x\in I$. Jika y_1 dan y_2 adalah solusi persamaan diferensial $L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=0$, dengan p dan q kontinyu dalam interval buka I, maka Wornskian $W(y_1,y_2)(x)$ diberikan oleh :

$$W(y_1,y_2)(x)=cexp[-\int p(x)dx]$$

dengan c suatu konstanta yang hanya bergantung pada y_1 dan y_2

Bukti :

Misalkan y_1 dan y_2 memenuhi :

$$y''+p(x)y'+q(x)y_1=0$$

$y_2'' + p(x) y' + q(x) y_1 = 0$

Selanjutnya persamaan yang pertama dikalikan dengan y_2 persamaan ke dua kalinya dengan y_1 yang kemudian kedua kalinya dijumlahkan, diperoleh :

$\left(y_1 y_2^{} - \{y\} \text{ rsub } \{2\} \{y\} \text{ rsub } \{1\} \text{ rsup } \{ \right) + p\left(y_1 y_2' - y_2 y_1' \right) = 0$

Misalnya $W(x) = ¿$

$W(y_1, y_2)(x)$, maka $W' = y_1 y_2^{} - \{y\} \text{ rsub } \{2\} \{y\} \text{ rsub } \{1\} \text{ rsup } \{$, sehingga :

$W' + pW = 0$

Terlihat bahwa persamaan $W' + pW = 0$ adalah persamaan diferensial linear orde pertama dan persamaan yang terpisahkan, sehingga solusinya dengan mudah dapat ditentukan. Solusi persamaan $W' + pW = 0$ tersebut dapat ditulis sebagai :

$W(y_1, y_2)(x) = cexp[-\int p(x)dx]$

dengan c adalah konstanta.

Contoh 8.1.1

Solusi umum PD homogen: $(D2 - 3D + 2)y = 0$ adalah $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ dan solusi khusus PD: $(D2 - D3 + 2)Y = 4x2$ adalah $2x2 + 6x + 7$, maka solusi umum PD lengkap atau tak homogennya dari $(D2 - 3D + 2)y = 4x^2$ adalah $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x$

Contoh 8.1.2

$2e^{3x}, 5e^{3x}, e^{-4x}$ tak bebas lineer pada suatu selang karena dapat ditentukan konstanta c_1, c_2, c_3 yang tidak semua nol sehingga: $c_1(2e^{3x}) + c_2(5e^{3x}) + c_3(e^{-4x}) = 0$ dengan $c_1 = -5, c_2 = 2, c_3 = 0$

Contoh 8.1.3

e^x dan e^{ex} adalah bebas linier karena $c_1(e^x) + c_2(x^{ex}) = 0$ hanya jika $c_1 = 0, c_2 = 0$

8.2 Kegiatan Pembelajaran 2 Determinan Wornski

Misalkan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ kumpulan n buah fungsi yang semuanya dan turunan-turunnya sampai dengan turunan yang ke $n-1$ kontinunya pada selang $a \leq x \leq b$. Wronksi dari $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dihitung pada x dinyatakan oleh $W(f_1, f_2, \ldots, f_n; x)$ dan ditentukan sebagai determinan :

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = ¿$$

Tiap fungsi yang muncul dalam determinan ini dihitung pada x.

Contoh 8.2.1

Diketahui $f_1(x) = x^2$ dan $f_2(X) = \cos x$. Cari $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Penyelesaian :

Dari defenisi di atas dan fungsi-fungsi yang telah diketahui, maka dapat dihitung sebagai berikut :

$W ¿$

$$¿ - x^2 \sin x - 2x \cos x$$

Misalkan bahwa $y_1, y_2, \ldots, y_n$ merupakan n buah penyelesaian persamaan diferensial. Misalkan juga bahwa fungsi-fungsi tersebut bebas linear pada selang definisi persamaan diferensial ini. Dikatakan bahwa fungsi-fungsi ini membentuk himpunan fundamental (atau sistem fundamental) penyelesaian diferensial tersezbut. Sebagai contoh fungsi cos x dan fungsi sin x merupakan suatu himpunan fundamental penyelesaian persamaan diferensial $y^{\} +y=¿}$. Juga fungsi $e^x e^{-x}$ membentuk suatu himpunan fundamental penyelesaian persamaan diferensial $y^{\} +y=¿}$.

Contoh 8.2.2

Tentukan Determinan Wornski (*Wornskian*) untuk fungsi-fungsi berikut.

a. $\{\sin 3x, \cos 3x\}$
b. $\{x, x^2, x^3\}$

Penyelesaian :

a. $W(x) = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix}$

¿ $-3\sin^2 3x - 3\cos^2 3x$

¿ -3

b. $W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$

¿ $12x^2 + 0 + 2x^3 - 0 - 6x^3 - 6x^3 - 6x^3$

¿ $2x^3$

Contoh 8.2.3
Tunjukkan himpunan fungsi $\{1-x, 1+x, 1-3x\}$ adalah tak bebas linear untuk semua nilai x !
Penyelesaian :

a. Kita dapat menunjukkan dengan memilih konstanta $C1$, $C2$, $C3$ yang tidak semuanya nol, sehingga $C1(1-x)+C2(1+x)+C3(1-3x)=0$, jika ditentukan $C1=1$, $C2=-1$, $C3=0$ maka $1-x-1-x+0=0$, sehingga himpunan fungsi $\{1-x, 1+x, 1-3x\}$ adalah tak bebas linear.
b. Kita juga dapat menghitung determinan wornski-nya, yaitu :

$$W = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1-3x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Terbukti bahwa wornski-nya ¿ 0 berarti himpunan fungsi $\{1-x, 1+x, 1-3x\}$ tak bebas linear untuk semua x.

Contoh 8.2.4

Tentukan apakah himpunan $\{x, \sin x\}$ adalah independen secara linear pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian :

Wronskiannya adalah

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x\cos x - \sin x$$

Fungsi ini tidak mempunyai nilai nol untuk semua x dalam selang $(-\infty, \infty)$ sehingga membentuk suatu himpunan yang independen secara linear.

Contoh 8.2.5

Diketahui $y_1 = 1, y_2 = e^x$ dan $y_3 = e^{2x}$. Tentukan apakah fungsi tersebut adalah linear independen menggunakan determinan wornski.

Penyelesaian :

Wronskiannya adalah

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

¿ $(1.e^x.4e^{2x}) + 0 + 0 - 0 + (e^x.2e^{2x}.1) + 0$

¿ $4e^{3x} - 2e^{3x}$

¿ $2e^{3x}$

Jadi y_1, y_2 dan y_3 adalah linear independen.

Contoh 8.2.6

Tentukan determinan wornski (wornskian) untuk fungsi-fungsi berikut :

a. $\{2x, 3x\}$

b. $\{\sin 2x, \cos 2x\}$

Penyelesaian :

a. $W(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ 2 & 2x \end{vmatrix}$

¿ $(2x.2x) - (2.x^2)$

¿ $4x^2 - 2x^2$

¿ $2x^2$

b. $W(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}$

¿ $-2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x$

¿ $-2(\sin^2 2x - \cos^2 2x)$

¿ -2

8.3 Kegiatan Pembelajaran 3 Wornskian

Solusi umum adalah :

$$y(t) = c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a}$$

Jadi setiap solusi adalah kombinasi linear dari :

$y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}, y_2(t)$ ¿ $te^{-bt/2a}$

Wornskian dari dua solusi adalah :

$$W(y_1, y_2)(t) \quad ¿\left|\frac{-b^{e^{\frac{-bt}{2a}}}}{2a} e^{\frac{-bt}{2a}}\left(1-\frac{bt^{te^{\frac{-bt}{2a}}}}{2a}\right) e^{\frac{-bt}{2a}}\right|$$

$$¿e^{\frac{-bt}{2a}}\left(1-\frac{bt}{2a}\right)+e^{\frac{-bt}{2a}} ¿)$$

$$¿e^{\frac{-bt}{2a}} \neq 0$$

untuk semua t. Jadi, y_1, y_2 bentuk solusi mendasar ditetapkan untuk persamaan.

Contoh 8.3.1

Mempertimbangkan masalah nilai awal

y} + {y} ^ {,} +y=0, y left (0 right) =1, {y} ^ {,} left (0 right) = ¿

Dengan asumsi eksponensial mengarah ke persamaan :

$$Y(t)=e^{rt} \leftrightarrow r^2+2r+1=0$$

$$\leftrightarrow (r+1)^2=0$$

$$\leftrightarrow r=-1$$

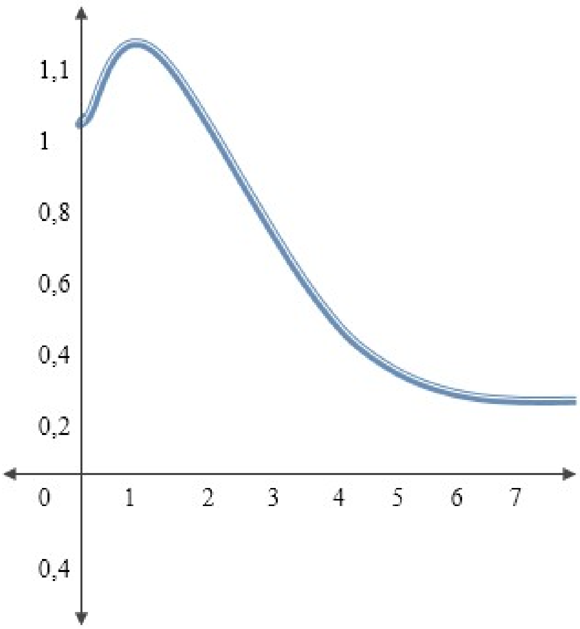
Jadi solusi,

$$Y(t)=c_1 t^{-t}+c_2 te^{-t}$$

Menggunakan kondisi awal :

$$\left.\begin{matrix} c_1 & ¿1 \\ c_2 & ¿1 \end{matrix}\right\} + c_2 2 \leftrightarrow c_1=1, c_2=2$$

Demikian, $Y(t)=e^{-t}+2te^{-t}$



Grafik 8.3.1

Contoh 8.3.2

Mempertimbangkan masalah nilai awal

$y^{,}$} - {y} ^ {,} +0,25y=0,y left (0 right) = {1} over {2¿

Dengan asumsi eksponensial mengarah ke persamaan :

$$Y(t)=e^{rt} \leftrightarrow r^2-r+0,25=0 \leftrightarrow \left(r-\frac{1}{2}\right)^2=0 \leftrightarrow r=\frac{1}{2}$$

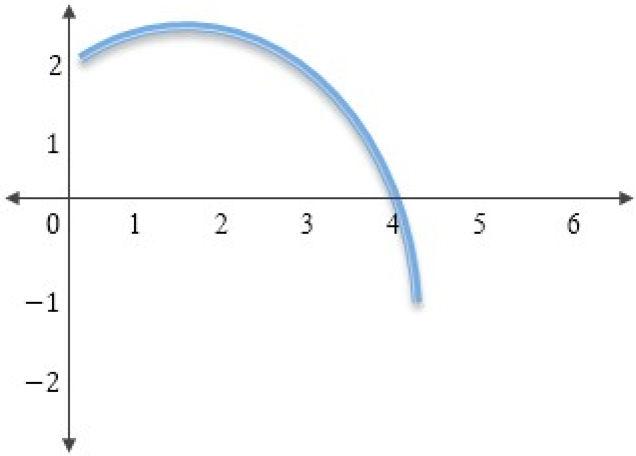
Jadi solusi,

$$Y(t)=c_1 e^{\frac{t}{2}}+c_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

Menggunakan kondisi awal :

$$\frac{1^{c_1}}{2^{c_1}}+c_2=\frac{1}{2} \leftrightarrow c_1=2, c_2=\frac{-1}{2}$$

Demikian, $Y(t)=2e^{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}}$



Grafik 8.3.2

Contoh 8.3.3

Mempertimbangkan masalah nilai awal :

y} - {y} ^ {,} +0,25y=0,y left (0 right) =2, {y} ^ {,} left (0 right) = {3} over {2 ¿

Dengan asumsi eksponensial mengarah ke persamaan

$Y(t)=e^{rt} \leftrightarrow r^2-r+0{,}25=0 \leftrightarrow$ ¿

Jadi solusi,

$$Y(t)=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2te^{\frac{t}{2}}$$

Menggunakan kondisi awal :

$$\frac{1^{c_1}}{2^{c_2}}+c_2=\frac{3^2}{2} \leftrightarrow c_1=2, c_2=\frac{1}{2}$$

Demikian, $Y(t)=2e^{\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}}$

Contoh 8.3.4

Temukan solusi dari masalah awal

y} - {y} ^ {,} +0,25y=0,y left (0 right) =2, {y} ^ {,} left (0 right) = {1} over {3 ¿

Persamaan Karekteristiknya adalah

$$r^2-r+0{,}25\,y=0$$

Jadi akar-akarnya adalah $r_1 \neq r_2=\frac{1}{2}$. Jadi, solusi umum dari

persamaan diferensial adalah

$$y=c_1 e^{\frac{t}{2}}+c_2 e^{\frac{t}{2}}$$

Kondisi awal pertama mengharuskan

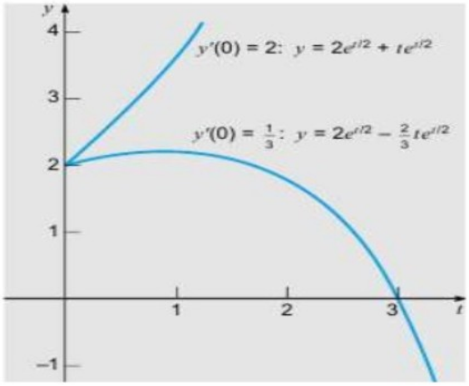
$$y(0)=c_1=2$$

Untuk memenuhi kondisi awal kedua, pertama kita membedakan kedua persamaan tersebut dan kemudian menetapkan $t=0$. Ini memberikan

$$y'(0)=\frac{1}{2}c_1+c_2=\frac{1}{3}$$

Jadi, $c_2=\frac{-2}{3}$. Jadi solusi dari masalah nilai awal ini adalah

$$y=2e^{\frac{t}{2}}-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}$$



Grafik 8.3.3

Contoh 8.3.4

Selesai $y''+5y'+6y=0$ dengan $y(0)=2$dan

$y'(0)=3$

Penyelesaian :

$y=e^{rx}$

$y'=\Re^{rx}$

$y''=r^2e^{rx}$

Subtitusikan ke Persamaan :$y''+5y'+6y=0$

$\leftrightarrow\ r^2e^{rx}+5\Re^{rx}+6e^{rx}=0$

Diperoleh persamaan karakteristik : $r^2+5r+6=0$

$(r+2)(r+3)=0$

$r=-2$ atau $r=-3$

Jadi, $y^1=e^{-2x}$ dan $y^2=e^{-3x}$ adalah penyelesaian.

Fundamental sehingga penyelesaian umum :

$y=c_1 y_1+c_2 y_2=c_1 e^{-2x}+c_2 e^{-3x}$

Lalu, subtitusikan $x=0$ dan $y=2$, didapat

$c_1+c_2=2$

Dengan menurunkan penyelesaian umum dan mensubstitusikan $x=0$ dan $y'=3$, diperoleh

$-2c_1-3c_2=3$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan tersebut maka diperoleh $c_1=9$ dan $c_2=-7$. Jadi, penyelesaian khususnya adalah $y=9e^{-2x}-7e^{-3x}$

Contoh 8.3.5

Temukan solusi umum dari $y''+5y'+6y=0$ dengan $y(0)=0$ dan $y'(0)=1$

Penyelesaian :

Substitusikan $y=e^{rx}$ diperoleh :

Persamaan karakteristik : $r^2+5r+6=0$

Akar-akar karakteristik : $r=-3$ dan $r=-2$

Persamaan umumnya adalah $y=c_1 e^{-3x}+c_2 e^{-2x}$

$y(0)=0 \rightarrow c_1+c_2=0$ .... (1)

$y(0)=1 \rightarrow -3c_1-2c_2=1$................ (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $c_1=-1$ dan $c_2=1$

Jadi, diperoleh solusi sebagai berikut : $y=-e^{-3x}+e^{-2x}$

RANGKUMAN

1. Determinan wornski adalah himpunan fungsi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dengan kumpulan n buah fungsi yang semuanya yang mempunyai turunan sampai dengan turunan yang ke $n-1$.
2. Himpunan fungsi bersifat bebas linier pada suatu selang jika determinan $\neq 0$ dan bersifat tak bebas linier pada suatu selang jika determinan ¿0.
3. Bentuk dari determinan wornski adalah

$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)=$¿

4. Wronskian dari dua fungsi atau lebih adalah apa yang dikenal sebagai penentu, yang merupakan fungsi khusus yang digunakan untuk membandingkan objek matematika dan membuktikan fakta tertentu.

5. Solusi umum adalah :

   $$y(t)=c_1 e^{-bt/2a}+c_2 te^{-bt/2a}$$

6. Wornskian dari dua solusi adalah :

   $$W(y_1, y_2)(t) \quad ¿\left|\frac{-b^{e^{\frac{-bt}{2a}}}}{2a} e^{\frac{-bt}{2a}}\left(1-\frac{bt^{te^{\frac{-bt}{2a}}}}{2a}\right) e^{\frac{-bt}{2a}}\right|$$

   $$¿e^{\frac{-bt}{2a}}\left(1-\frac{bt}{2a}\right)+e^{\frac{-bt}{2a}}¿)$$

   $$¿e^{\frac{-bt}{2a}} \neq 0$$
7. Persamaan diferensial Linear Homogen Orde 2 menjadi dasar penyelesaian persamaan diferensial orde n.
8. Fungsi bebas linear apabila masing-masingnya tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari persamaan-persamaan yang lain.

DISKUSI KELOMPOK

1. Tentukan determinan wornski (wornskian) untuk fungsi-fungsi berikut :

   a. $\{x^2, x^3, x^4\}$
   b. $\{2x, -x\}$

   Penyelesaian :

   a. $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \ldots & x^4 \\ \ldots & 3x^2 & \ldots \\ \ldots & 6x & 12x \end{vmatrix}$

   ¿ $36x^5 + 8x^6 + \ldots - \ldots + \ldots + 24x^5$

   ¿ $36x^5 + \ldots - 30x^6 + 24x^5$

   ¿ $12x^5 - \ldots$

   b. $W(x) = \begin{vmatrix} 2x & -x \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots - (-2x) = \ldots + 2x = \ldots$

2. Tentukan determinan wornski (wornskian) untuk fungsi-fungsi berikut :
   a. $\{\cos 3x, \sin 3x\}$
   b. $\{e^{4x}, xe^{4x}\}$
   c. $\{x, e^x, e^{2x}\}$

   Penyelesaian :

   a. $W(x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ \ldots & 3\cos 3x \end{vmatrix}$

   ¿ $\cos 3x . 3\cos 3x - (\ldots) . \sin 3x$

¿$\ldots + 3\sin^2 3x$

¿$\ldots$

b. $W(x) = \begin{vmatrix} e^{4x} & xe^{4x} \\ 4e^{4x} & \ldots \end{vmatrix}$

¿$\ldots\left(4xe^{4x} + e^{4x}\right) - 4e^{4x}(\ldots)$

¿$4xe^{8x} + \ldots - 4xe^{8x}$

¿$\ldots$

c. $W(x) = \begin{vmatrix} x & e^{x} & e^{2x} \\ \ldots & e^{x} & 2e^{2x} \\ 0 & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$

¿$x\left(\ldots - 2e^{3x}\right) - 4e^{3x} + e^{3x}$

¿$x(\ldots) - 3e^{3x}$

¿$2xe^{3x} - \ldots$

¿$e^{3x}(2x-3)$

3. Tentukan solusi umum dari nilai awal berikut $y'' + 4y' - 5y = 0$ dengan $y(0) = 3$ dan $y'(0) = 2$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik : $r^2 + 4r - 5 = 0$

Akar-akar karakteristik : $r = \ldots$ dan $r = \ldots$

Persamaan umumnya adalah $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-5x}$

$y(0) = 3 \rightarrow c_1 + c_2 = 3$..................... (1)

$y(0)=2 \rightarrow c_1-5c_2=2$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $c_1=\ldots$ dan $c_2=\ldots$

Jadi, diperoleh solusi sebagai berikut : $y=\frac{1}{6}e^x+\frac{17}{6}e^{-5x}$

4. Selesaikan $y''+7y'+9y=0$
   Penyelesaian :
   Persamaan Karakteristiknya
   $m^2-6m+9=(m-3)(m-\cdots)=0$
   Mempunyai dua akar yang sama yaitu :
   $m_1=m_2=m=3$
   Jadi solusi umumnya adalah $y=c_1e^{3x}+c_2e^{3x}$
5. Diketahui $y_1=2t-1$, $y_2=t^2+5$, dan$y_3=4t-7$.

   Tentukan apakah fungsi tersebut merupakan linear independen menggunakan determinan wornski.

   Penyelesaian :

   $$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} 2t-1 & t^2+5 & 4t-7 \\ \ldots & 2t & 4 \\ 0 & 2 & \ldots \end{vmatrix}$$

   $¿0+0+(4t-7)(\ldots)(2)-0+(\ldots)$

   $(4)(2)+0$

   $¿16t-\ldots-(16t-8)$

   $¿\ldots$

   Jadi, $y_1, y_2,$dany_3 adalah linear independen.
6. Tentukan solusi umum untuk $y''+7y'+12y=0$
   Penyelesaian :
   Persamaan Karakteristik

$m^2+7m+12=(m+3)(m+4)=0$

Mempunyai dua akr -3 dan -4. Karena e^{-3} dan e^{-4} adalah solusi yang berdiri sendiri, maka solusi umum untuk persamaan differensial tersebut adalah $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-4x}$

7. Carilah solusi umum dari $y''+2y'-3y=0$ dengan $y(0)=2$ dan $y'(0)=8$

   Penyelesaian :

   Persamaan karakteristik : $r^2+2r-3=0$

   Akar-akar karakteristik : $r=\ldots$dan $r=\ldots$

   Persamaan umumnya adalah $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}$

   $y(0)=2 \rightarrow c_1+c_2=2$ .... (1)

   $y(0)=8 \rightarrow c_1-3c_2=8$ .... (2)

   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $c_1=\ldots$ dan $c_2=\ldots$

   Jadi, diperoleh solusi sebagai berikut : $y=\frac{-3}{2}e^x+\frac{7}{2}e^{-3x}$

8. Tunjukkan himpunan fungsi $\{2-x,2+x,2-3x\}$ adalah tak bebas linear untuk semua nilai x.

   Penyelesaian :

   $$W(x)=\begin{vmatrix} 2-x & \ldots & 2-3x \\ -1 & \ldots & -3 \\ \ldots & 0 & \ldots \end{vmatrix}$$

   $¿\ldots-\ldots=\ldots$

   Terbukti bahwa wornskinya $¿\ldots$ berarti himpunan fungsi $\{2-x,2+x,2-3x\}$ tak bebas linear untuk semua x.

9. Tentukan solusi umum dari $y''-4y'+3y=0$ dengan $y(0)=-1$ dan $y'(0)=1$

   Penyelesaian :

   Persamaan karakteristik : $r^2-4r+3=0$

   Akar-akar karakteristik : $r=\ldots$dan $r=\ldots$

   Persamaan umumnya adalah $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$

   $y(0)=-1 \rightarrow c_1+c_2=-1$ .... (1)

   $y(0)=1 \rightarrow c_1+3c_2=1$ .... (2)

   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $c_1=\ldots$ dan $c_2=\ldots$

   Jadi, diperoleh solusi sebagai berikut : $y=-2e^x+e^{3x}$

10. Tentukan solusi umum persamaan difrensial berikut :
    $y''+5y'-6y=0$
    Penyelesaian :
    Akar-akar persamaan Karakteristik pada PD di atas adalah:
    $m^2+5m-6=0$
    $(m+1)(m+6)=0$
    $m_1=1\,\text{dan}\,m_2=-6$
    Doa solusi bebas linier PD adalah :
    $y_1(x)=e^x\,\text{dan}\,y_2(x)=e^{-6x}$
    Jadi solusi umum PD adalah :
    $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-6x}$

LATIHAN MANDIRI

1. Buktikan himpunan fungsi berikut bebas linear!
   a. $e^x \cos x, e^x \sin x$
   b. $x, xe^x, x^2 e^x$
   c. $\cos 2x, x \cos 2x$
   d. e^x, e^{-x}
2. Misalkan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah penyelesaiannya $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$
   a. Buktikan bahwa determinan wronskynya $W = y_1' y_2' = ce \int -p\,dx$
   b. Tentukan nilai c, sehingga $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ bebas linier

3. Tentukan apakah himpunan $\{e^x, e^{-x}\}$ adalah dependen secara linear pada $(-\infty, \infty)$.
4. Apakah himpunan $\{x^2, x, 1\}$ dependen secara linear pada $(-\infty, \infty)$.
5. Tentukan apakah himpunan $\{1-x, 1+x, 1-3x\}$ adalah dependen secara linear pada $(-\infty, \infty)$.
6. Tentukan penyelesaian umum PD berikut :
   a. $3y'' - y' = 0$
   b. $3y^4 - 5y' + 4y = 0$
   c. $3y^4 - y = 0$
7. Tentukan determinan wornski (wornskian) untuk fungsi-fungsi berikut :
   a. $\{e^x, xe^x\}$
   b. $\{e^{-2x}, e^{-x}\}$
   c. $\{\cos x, \sin x\}$
8. Tentukanlah solusi umum dari masalah nilai awal berikut $y'' + 9y = 0$.
9. Tentukan apakah himpunan $\{x^2, 4x^2, 6x^2\}$ adalah tak bebas atau dependen secara linear pada $(-\infty, \infty)$.
10. Tunjukkan bahwa himpunan fungsi berikut tak bebas linier!
    a. $2x, -x$
    b. $x^2, 4x^2$
11. Tentukan apakah himpunan $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ adalah bebas atau independen secara linear pada $(-\infty, \infty)$.
12. Tunjukkan bahwa himpunan fungsi berikut bebas linier!
    a. $\sin x \cos x$
    b. $x \sin x, \sin x$
    c. $e^{2x} \sin x, e^{2x} \cos x$
13. Gambarlah dan temukan solusi dari masalah nilai awal berikut ini $16y'' - 8y' + 145y = 0$ dengan $y(0) = -2$ dan $y'(0) = 1$.
14. Tentukan penyelesaian dari persamaan $x^2 y' - 4xy' + 6y = 0$.
15. Carilah solusi umum dari persamaan :
    a. $y'' - 8y' + 16y = 0$
    b. $y'' - 4y' + 4y = 0$

DAFTAR INDEKS

GLOSARIUM

BERELASI

Terjadinya hubungan antara anggota suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lain.

BILANGAN REAL

Bilangan yang bisa dituliskan dalam bentuk desimal, seperti 2,4. DEPENDEN LINEAR

Tak bebas linear yang semua nilainya adalah nol.

DETERMINAN

Nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi.871773339… atau 3,25678.

DERAJAT

Derajat (secara lengkap, derajat busur), biasanya disimbolkan dengan °, adalah ukuran sudut yang dapat dibentuk pada sebuah bidang datar, menggambarkan 1／360 dari sebuah putaran penuh. Artinya, besar 1 derajat adalah satu juring pada lingkaran yang dibagi menjadi 360 buah juring yang besarnya sama.

DERIVATIF

Salah satu cabang kalkulus dalam matematika yang mempelajari bagaimana nilai suatu fungsi berubah menurut perubahan input nilainya.

DIFERENSIAL

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

DOMAIN

Sembarang subset terbuka yang terhubung dari ruang vektor berdimensi-terbatas.

EKSPONENSIAL

Salah satu fungsi yang paling penting dalam matematika. Materi eksponen menyajikan persamaan yang melibatkan bilangan berpangkat.

EKSAK

Pasti atau Tidak dapat diubah-ubah.

EKSPLISIT

Persamaan sederhana yang hampir semua unsur – unsur di dalam persamaan itu telah diketahui (tersurat).

FENOMENA

Rangkaian peristiwa serta bentuk keadaan yang dapat diamati dan dinilai lewat kaca mata ilmiah atau lewat disiplin ilmu tertentu.

FORMULA

Ekspresi memberitahu komputer pada operasi matematika untuk melakukan menghitungan pada nilai tertentu.

FUNGSI

Sekelompok aktivitas yang tergolong pada jenis.

HOMOGEN

Terdiri atas jenis, macam, sifat, watak dan sebagainya yang sama.

INTEGRAL

Integral adalah bentuk operasi matematika yang menjadi invers (kebalikan) dari sebuah operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.

INTEGRAL KHUSUS

Suatu proses integral dari bentuk perkalian dan pembagian dengan unsur yang satu merupakan turunan dari unsur lainnya.

INTERVAL

Suatu himpunan bilangan real dengan sifat bahwa setiap bilangan yang terletak di antara dua bilangan dalam himpunan itu juga termasuk ke dalam himpunan.

KOMBINASI

Sebuah cara menggabungkan beberapa objek dari suatu kumpulan tanpa memperhatikan urutannya.

KOMBINASI LINEAR

Penjumlahan hasil kali anggota himpunan pasangan berurutan.

KONSTANTA

Suatu nilai tetap; berlawanan dengan variabel yang berubah-ubah.

KONTINU

Fungsi yang bila dijelaskan secara intuitif, perubahan kecil dalam masukannya berakibat perubahan kecil pula pada keluaran.

KOEFISIEN

Faktor pengali dalam sebuah ekspresi (atau dari sebuah deret aritmatika).

KOMPLEKS

Bilangan yang dinotasikan oleh, dimana a dan b adalah bilangan real, dan i adalah suatu bilangan imajiner di mana $i^2 = -1$.

KUADRAT

Suatu akar dari bilangan x sama dengan bilangan r sedemikian sehingga $r^2 = x$.

KUALITATIF

Sekumpulan nilai numerik berbeda dan mempunyai arti.

LINIER

Sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal.

METODE ANALITIK

Metode ini menghasilkan dua bentuk solusi yaitu bentuk eksplisit dan implisit.

METODE KUALITATIF

Solusi PDB didapatkan dengan perkiraan pada pengamatan pola medan gradien.

METODE NUMERIK

Solusi yang diperoleh dari metode ini adalah solusi hampiran (solusi pendekatan).

METODE PEMISAH VARIABEL

Salah satu metode untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial orde satu dengan cara menulis variable yang sejenis pada ruas persamaan yang berbeda.

NUMERIK

Sebuah simbol atau kumpulan dari simbol yang merepresentasikan sebuah bilangan.

ORDE

Pangkat tertinggi dari sebuah koefisien diferensial.

OSILASI TEREDAM

Benda yg pada mulanya mulai bergetar atau beosilasi bisa berenti karena mengalami hambatan atau gaya gesekan.

PECAHAN

Istilah dalam matematika yang terdiri dari pembilang dan penyebut.

PEUBAH

Besaran yang bervariasi atau besaran yang dapat mengambil salah satu dari suatu himpunan nilai tertentu (dalam matematika).

RELASI

Suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain.

TURUNAN

Bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya.

VARIABEL

Nilai yang dapat berubah dalam suatu cakupan soal atau himpunan operasi yang diberikan.

WORNSKIAN

Fungsi yang dapat bersifat bebas dan tidak bebas secara linear.

DAFTAR PUSTAKA

Martubi, M.Pd., M.T, "Persamaan Diferensial Orde Satu" (http://staffnew.uny.ac.id/upload/131453198/pendidikan/Modul+PD+ORDE+SATU.pdf)

https://aimprof08.wordpress.com/2012/12/15/membentuk-persamaan-diferensial/

http://share.its.ac.id/mod/page/view.php?id=1742

https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://jurnal.untan.ac.id/index.php/jbmstr/article/download/6563/6794&ved=2ahUKEwi0qtjB3YzlAhUSk3AKHUV

XDXYQFjAEegQIBRAB&usg=AOvVaw3-hN_DHhSA-G4XQXcoC-TJ
5.Prayudi, “Matematika Teknik” (Bandung, Graha Ilmu, 2006), h. 5
https://studylibid.com/doc/566719/persamaan-diferensial-linier-homogen-orde-2
https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-persamaan-diferensial-linear-orde-dua-dengan-koefisien-konstan/
https://www.slideshare.net/mobile/ariefGSD/persamaan-diferensial-orde2
https://www.academia.edu/28658483/APLIKASI_SISTEM_PERSAMAAN_DIFERENSIAL_ORDE_SATU
http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/195804011985031-ASEP_SYARIF_HIDAYAT/PERSAMAAN_DIFERENSIAL_I.pdf
https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://staffnew.uny.ac.id/upload/197912142010122002/pendidikan/PERSAMAAN%2520DIFERENSIAL%2520LINEAR%2520ORDE%2520DUA.pdf&ved=2ahUKEwjhnt--7IzlAhXSX3wKHVL-D-QQFjAOegQICBAB&usg=AOvVaw2YGP4vwxJ-s-22fQHOn9yl
https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://repository.ung.ac.id/get/kms/15079/Resmawan-PD-Linear-Orde-n-Homogen-

Koefisien-Konstan.pdf&ved=2ahUKEwjhnt--
7IzlAhXSX3wKHVL-
DQQFjAHegQIAhAB&usg=AOvVaw2x0jox21Spa24aI
MaqM2D
https://studylibid.com/doc/2183705/determinan-wronski
https://www.google.com/amp/s/elktian.wordpress.com/
2013/11/03/metode-wronski-soal-dan-pembahasan/amp/
https://www.google.com/url?
sa=t&source=web&rct=j&url=http://digilib.unila.ac.id/
7747/13/BAB
%2520II.pdf&ved=2ahUKEwjSjqjY7IzlAhVEb30KHaii
AIcQFjAJegQIChAB&usg=AOvVaw34zsedpYK7EeXS0
g4PsbyK&cshid=1570545619754
https://www.google.com/url?
sa=t&source=web&rct=j&url=http://journal.uin-
alauddin.ac.id/index.php/msa/article/viewFile/
4514/4124&ved=2ahUKEwjSjqjY7IzlAhVEb30KHaiiAIc
QFjABegQIBhAB&usg=AOvVaw23sROhns6MC-
GDWtUi1dL7&cshid=1570545619754
https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-
persamaan-diferensial-linear-orde-dua-dengan-koefisien-
konstan/
https://www.academia.edu/13522308/
PERSAMAAN_DIFFERENSIAL_ORDE_2

https://aimprof08.wordpress.com/2012/12/17/
penyelesaian-persamaan-diferensial-pd-homogen/amp/
#referrer=https://www.google.com
http://share.its.ac.id/mod/page/view.php?id=1740
https://www.google.com/amp/s/
aimprof08.wordpress.com/2012/12/17/penyelesaian-
persamaan-diferensial-pd-homogen/amp/
Persamaan Diferensial Eksak
http://staffnew.uny.ac.id/upload/198505132010122006/pe
ndidikan/Modul+Persamaan+Diferensialx.pdf
https://www.google.com/search?
safe=strict&q=persamaan+diferensial+eksak+dan+faktor+
integrasi+pdf&sa=X&ved=2ahUKEwiHt5P1iY3lAhVt7H
MBHRxNCckQ1QIoA3oECAoQBA&biw=1366&bih=65
7https://www.slideshare.net/MayaUmami/modul-
persamaan-diferensial-
http://repository.ung.ac.id/get/kms/14696/Resmawan-
Persamaan-Diferensial-Eksak.pdf

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd. Lahir di Sitampurung 26 November 1986, Taput, Propinsi Sumatra Utara. Saya merupakan anak kelima dari lima bersaudara. Penulis lahir dari pasangan suami istri Bapak Togu Lumbantoruan dan Ibu Ratima Br. Sianturi. Penulis sekarang bertempat tinggal di Jalan Matador Perum Gria Marza Blok C RT 01/RW 07 Jatirangga Cibubur, Jatisampurna, Bekasi. Penulis menyelesaikan Pendidikan Dasar di Sekolah Dasar Negeri 2 Sitampurung dan lulus pada Tahun 1999, lalu melanjutkan Sekolah Menengah Pertama di SLTP Negeri 2 Siborong-borong dan lulus pada Tahun 2002, melanjutkan Pendidikan di SMA PGRI 20 Siborong-borong lulus pada Tahun 2005, kemudian melanjutkan jenjang Pendidikan S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen

Indonesia (UKI) Jakarta dan lulus pada Tahun 2009, pada Tahun 2014 kemudian saya melanjutkan jenjang Pendidikan S2 di Universitas Negeri Jakarta (UNJ) Program Studi Mengister Pendidikan Matematika dan lulus pada Tahun 2017.

Saat ini penulis mengajar di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Kristen Indonesia (UKI). Bahan ajar persamaan diferensial adalah salah satu bahan ajar yang ditulis untuk mempermudah proses belajar mengajar di dalam kelas. Harapan saya dengan di bantu bahan ajar ini para Dosen dan Mahasiswa akan lebih mudah memahami serta memperoleh hasil yang lebih baik. Saya sangat mengharapkan saran dan kritikan yang bersifat membangun untuk kemajuan bersama. Terimakasih, salam