BMP.UKI:JHS-O1-MD-PM-I-2019

BUKU MATERI PEMBELAJARAN
MATEMATIKA DASAR

Disusun Oleh :

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd

Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Kristen Indonesia

2019

KATA PENGANTAR

Mengucap syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena pertolongan-Nya saya dapat menyelesaikan Buku Materi Pembelajaran “MATEMATIKA DASAR”. Meskipun banyak rintangan dan hambatan dalam proses pembuatan Buku Materi Pembelajaran ini, tetapi Puji Tuhan di dalam pembuatan Buku Materi Pembelajaran ini saya berhasil menyelesaikannya dengan baik.

Adapun tujuan penyusunan ini adalah untuk memenuhi kebutuhan dasar pembaca dan mahasiswa. Penyusunan Buku Materi Pembelajaran ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Penulis menyadari bahwa Buku Materi Pembelajaran ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan Buku Materi Pembelajaran ini. Semoga Buku Materi Pembelajaran ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan pada umumnya mahasiswa. Akhir kata saya ucapkan terimakasih dan salam buat kita semua.

Jakarta,14 September 2019

Jitu Halomoan Lumban toruan, S.Pd., M.Pd

Petunjuk Penggunaan Buku Materi Pembelajaran **(BMP)**

Penjelasan/Petujuk Bagi Mahasiswa

1. Bacalah Buku Materi Pembelajaran ini dengan seksama mulai dari kata pengantar sampai dengan latihan soal, kemudian pahami seluruh materi yang termuat di dalamnya.
2. Bacalah dengan seksama tujuan akhir antara untuk mengetahui apa yang akan diperoleh setelah mempelajari materi ini.
3. Buku Materi Pembelajaran ini memuat informasi tentang apa yang harus Anda lakukan untuk mencapai tujuan antara pembelajaran.
4. Pelajari dengan seksama materi tiap kegiatan belajar, jika ada informasi yang kurang jelas atau mengalami kesulitan dalam mempelajari setiap materi, sebaiknya berkonsultasi pada pengajar.
5. Perhatikan langkah-langkah dalam melakukan pekerjaan dengan benar untuk mempermudah dalam memahami suatu proses pekerjaan.
6. Kerjakan soal-soal dalam cek kemampuan untuk mengukur sampai sejauh mana pengetahuan yang telah Anda miliki.
7. Selesaikan semua latihan soal yang terdapat di dalam modul ini agar pemahaman anda berkembang dengan baik.
8. Setiap mempelajari satu sub kompetensi, anda harus mulai dari menguasai pengertian-pengertian dalam uraian materi, melaksanakan tugas-tugas dan mengerjakan latihan soal.
9. Dalam menyelesaikan latihan soal, anda tidak diperkenankan berdiskusi dengan teman anda sebelum selesai mengerjakan latihan soal dan diskusi kelompok.
10. Membahas hasil pekerjaan anda dengan teman sekelas dalam bentuk kelompok dan kerjakan soal diskusi kelompok.

Kontrak Perkuliahan Matematika Dasar

Dengan ini kami bersepakat bahwa;

1. Batas keterlambatan masuk kuliah adalah 15 menit, jika **mahasiswa** terlambat maka mahasiswa diperkenankan masuk kelas namun **TIDAK** dapat mengisi presensi kuliah. Sebaliknya, jika **dosen** terlambat 15 menit maka seluruh mahasiswa boleh mengisi presensi kuliah. Selanjutnya, apabila keterlambatan lebih dari 15 menit maka dosen akan memberikan tugas mandiri dan mahasiswa mengisi presensi kuliah (presensi kuliah tidak berlaku bagi mahasiswa yang tidak hadir).
2. Apabila mahasiswa dan dosen tidak dapat hadir (karena sakit, ijin, atau keperluan tertentu), maka yang bersangkutan WAJIB memberikan informasi satu hari sebelumnya (jika mahasiswa) kepada dosen pengampu mata kuliah (Jitu Halomoan Lumbantoruan, M.Pd (081219553697))

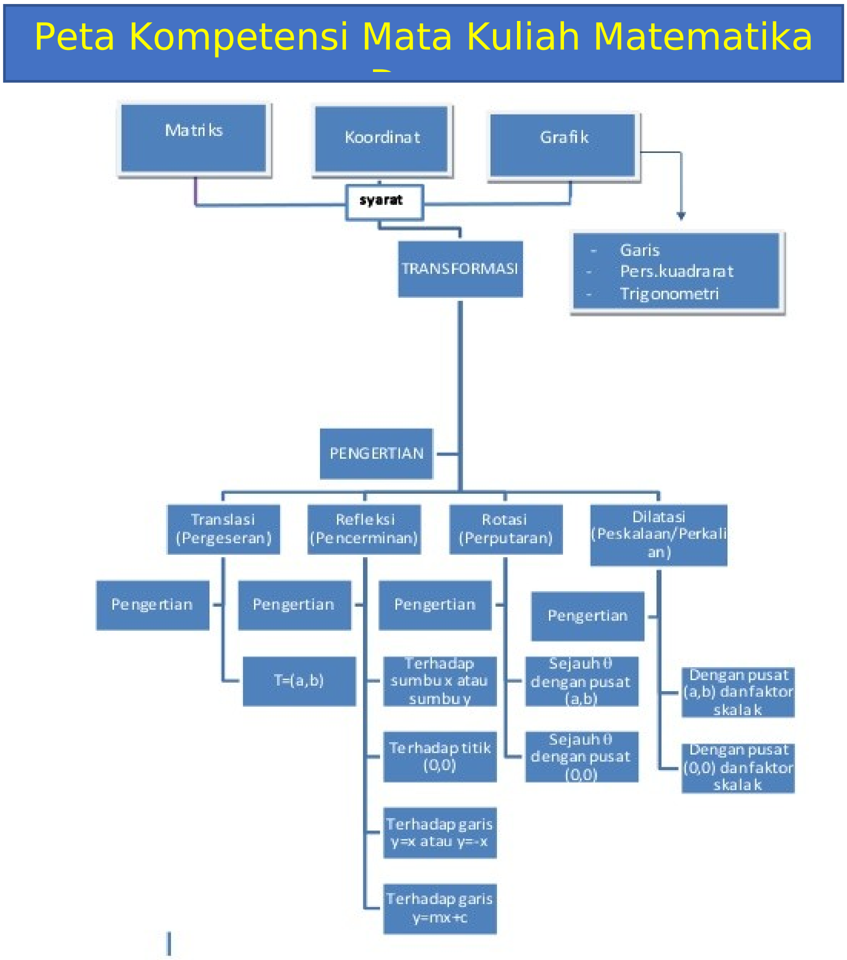
   Catatan: apabila sakit (sertakan surat dari dokter) dan jika izin (sertakan surat dari orangtua/lembaga).

   1) Mahasiswa **TIDAK DIPERKENANKAN** untuk memakai kaos dan blus (oblong atau berkerah) dan harus menggunakan kemeja dan celana bahan/rok (untuk wanita).
   2) Pengumpulan tugas harus tepat waktu sesuai dengan arahan dosen. Apabila ada tugas (mandiri atau kelompok) yang diberikan dosen kepada mahasiswa, maka dosen ybs akan mengirimkannya kepada ketua kelas *(Kaleb,Bintangi@gmail.com).*Demikian kesepakatan ini kami buat, semoga kami melakukannya dengan baik tanpa ada paksaan dari pihak manapun. Tuhan memberkati.

Mengetahui, Jakarta, 2 Agustus 2019

Kaprodi Pendidikan Matematika Dosen Pengampu,

Stevi Natalia, M.Pd. Jitu Halomoan L, M.Pd



DAFTAR ISI

DAFTAR GRAFIK

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR KURVA

MODUL 1

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

A. Capaian Pembelajaran

Mahasiswa memahami dan menguasai konsep sistem persamaan lianear dua variabel dengan berbagai metode.

B. Bahan Kajian

1. Pengertian Persamaan Linear Dua Variabel
2. Penyelesaian Persamaan Linear Dua Variabel
3. Persamaan Umum Linear Dua Variabel Dalam x dan y
4. Masalah Kontekstual yang berkaitan tentang SPLDV

MODUL 1

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

1.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Pengertian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan Linear Dua Variabel adalah persamaan linear yang memiliki dua variabel, dengan pangkat masing-masing variabel adalah satu dan apabila digambarkan dalam sebuah grafik maka akan membentuk garis lurus. Dan karena hal inilah persamaan ini disebut dengan persamaan linear.

Bentuk umum persamaan Linear dengan dua variabel dalam x dan y dapat dituliskan sebagai berikut.

$$ax+by=c$$

a, b, dan c merupakan bilangan real

Keterangan : a, b, dan c = ¿ Konstanta, dan

x dan y = ¿ Variabel

Langkah-langkah tertentu untuk menyelesaikan masalah dengan menggunakan SPLDV, yaitu:

1. Mengganti setiap besaran yang ada di masalah tersebut dengan variabel (biasanya dilambangkan dengan huruf atau simbol),
2. Membuat Model Matematika dari masalah tersebut. Model Matematika ini dirumuskan mengikuti bentuk umum SPLDV,
3. Mencari solusi dari model permasalahan tersebut dengan menggunakan metode penyelesaian SPLDV

Contoh 1.

Persamaan Linear dua variabel $2x+y=4$

Pembahasan:

Misalkan akan dicari persamaan dari $2x+y=4$,

Langkah 1, bila x = 0, maka 0 + y = 4. Penyelesaiannya adalah (0,4)Langkah 2, bila x = 1, maka 2(1) + y = 4, sehingga y = 2, penyelesaiannya adalah (1,2).
Langkah 3, bila x = 2, maka 2(2) + y = 4, sehingga y = 0, npenyelesaiannya adalah (2,0)

1.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bila $x=p$dan $y=q$, sedemikian hingga persamaan $ax+by=c$ menjadi $ap+bq=c$ merupakan pernyataan yang bernilai benar, maka (p,q) disebut dari pernyataan;

$$ax+by=c$$

Contoh 2.
Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear $x+y=4$, untuk x dan y anggota bilangan cacah?
Jawab :
$x+y=4$
Jika $x=0$, maka $y=4$
Jika $x=1$, maka $y=3$
Jika $x=2$, maka$y=2$
Jika $x=3$, maka $y=1$
Jika $x=4$, maka $y=0$
Jika $x=5$, maka $y=-1$(tidak memenuhi)
Pasangan berurutan (0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0) merupakan hasil penyelesaian, sedangkan (5,−¿1) bukan penyelesaian karena
$y=-1$bukan merupakan bilangan cacah.

1.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Persamaan Umum Linear Dua Variabel Dalam x dan y

Bentuk umum dari Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dalam x dan y dapat ditulis sebagai berikut:

$a_1 x + b_1 y = c_1$ **dan** $a_2 x + b_2 y = c_2$

Keterangan :

$a_1, a_2 =$ ¿ Koefisien dari variabel x

$b_1, b_2 =$ ¿ Koefisien dari variabel y

$c_1, c_2 =$ ¿ Konstanta

$x, y =$ ¿ Variabel

Beberapa metode yang efektif untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dan akan kita pelajari dalam pasal ini, diantaranya adalah dengan menggunakan:

(i) Metode Substitusi
(ii) Metode Eliminasi
(iii) Metode Campuran (Eliminasi dan Substitusi)
(iv) Metode Determinan
(v) Metode Grafik

A. Penyelesaian dengan metode Substitusi

Bila menggunakan metode substitusi, kita dapat menggantikan suatu variabel dengan variabel dari persamaan lain.

Metode Substitusi dilakukan dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Pisahkan satu variabel dari variabel lain dan konstanta pada salah satu persamaan (jadikan salah satu persamaan bentuk eksplisit [mengubah bentuk variabel]),
2. Substitusikan hasil (dari langkah ke-1) ke persamaan yang lain,
3. Selesaikan persamaan utnuk mendapatkan nilai variabel,
4. Substitusikan nilai variabel pada (hasil ke-3) ke salah satu persamaan untuk mendapatkan nilai variabel yang lain.

Contoh 3.
Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini:
$4x+y=14$
$5x-7y=1$
Gunakan Metode Substitusi!
Jawab:
Persamaan $4x+y=14$, dibuat eksplisit variabel y menjadi,
$y=14-4x$
Lalu subtitusikan $y=14-4x$ ke persamaan $5x-7y=1$
$5x-7(14-4x)=1$
$5x-98+28x=1$
$33x=99$
$x=\frac{99}{33}=3$

Substitusikan $x=3$ ke persamaan eksplisit variabel y,
$y=14-4x$
$y=14-4(3)$
$y=14-12=2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(3,2)}

Contoh 4.
Tentukan Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut:
$4x-y=11$
$2x+6y=12$
Gunakan Metode Substitusi!
Jawab :
Persamaan $4x-y=11$, dibuat eksplisit variabel y menjadi, $y=4x-11$
Lalu substitusikan$y=4x-11$ ke persamaan $2x+6y=12$,
$2x+6(4x-11)=12$
$2x+24x-66=12$
$26x=78$

$x=\frac{78}{26}=3$

Substitusikan $x=3$, ke persamaan eksplisit variabel y,

$y=4x-11$

$y=4(3)-11$

$y=1$

Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah {(3,1)}.

B. Penyelesaian dengan Metode Eliminasi

Metode Eliminasi dilakukan dengan cara menghialngkan salah satu variabel.

Mengeliminasi artinya menghilangkan sementara atau menyembunyikan salah satu variabel sehingga dari dua variabel menjadi hanya satu variabel dan sistem persamaan dapat diselesaikan.Misalnya sedang mencari nilai y, maka soal, diperkalikan dengan koefisien x, begitu juga sebaliknya jika x yang dicari maka soal diperkalikan dengan koefisien y.

Langkah-langkah sebagai berikut:

1. Samakan koefisien salah satu variabel dari kedua persamaan,
2. Hilangkan variabel itu (dikurangi jika sama tanda;jumlahkan jika beda tanda),
3. Selesaikan persamaan untuk mendapatkan nilai variabel,
4. Ulangi langkah 1, 2, dan 3 untuk mencari variabel lainnya.

Contoh 5.

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini dengan menggunakan metode Eliminasi!

$8x+y=12$

$2x-3y=16$

Jawab:

Mencari nilai y, maka eliminasikan variabel x

$8x+y=12|\times 1|8x+y=12$

$2x-3y=16|\times 4|8x-12y=64-$¿

$13y=-52$

$y=-4$

Mencari nilai x, maka eliminasikan variabel y,

$8x+y=12|\times 3|24x+3y=36$

$2x-3y=16|\times 1|2x-3y=16+$¿

$26x = 52$
$x = 2$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(2,-4)}
Contoh 6.
Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut:
$2x - 3y = -12$
$3x + 5y = 1$
Dengan menggunakan metode Eliminasi!
Jawab :
Mencari nilai y, maka eliminasikan variabel x,
$2x - 3y = -12 \mid \times 3 \mid 6x - 9y = -36$
$3x + 5y = 1 \mid \times 2 \mid 6x + 10y = 2 -¿$
$-19y = -38$
$y = 2$

Mencari nilai x, maka eliminasikan variabel y,
$2x - 3y = -12 \mid \times 5 \mid 10x - 15y = -60$
$3x + 5y = 1 \mid \times 3 \mid 9x + 15y = 3 +¿$
$19x = -57$
$x = -3$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(-3,2)}.

C. Metode Campuran (Eliminasi dan Substitusi)

Metode gabungan adalah suatu metode yang digunakan untuk mencari penyelesaian SPLDV dengan cara menggabungkan kedua metode sekaligus, yakni metode eliminasi dan metode substitusi. Pertama, menggunakan metode elimainasi untuk mencari salah satu nilai variabelnya, setelah nilai variabel diperoleh, maka nilai variabel tersebut disubstitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk mendapatkan nilai variabel lainnya.

Langkah-langkah sebagai berikut:

1. Samakan koefisien salah satu variabel dari kedua persamaan,
2. Hilangkan variabel tersebut (kurangi jika sama tanda dan jumlahkan jika beda tanda)

3. Selesaikan persamaan agar mendapatkan nilai variabelnya,
4. Substitusikan nilai variabel pada (langkah ke-3) ke sa salah satu persamaan untuk mendapatkan nilai variabel yang lain.

Contoh 7
Jika x dan y merupakan himpunann penyelesaian dari,
$2x - y = 7$
$x + 3y = 14$
Dengan metode campuran (Eliminasi dan Substitusi)!
Jawab:
Untuk mencari nilai x, eliminasikan variabel y,
$2x - y = 7 \,|\times 3|\, 6x - 3y = 21$
$x + 3y = 14 \,|\times 1|\, x + 3y = 14 +$¿
$7x = 35$
$x = 5$
Substitusikan nilai x = 5 pada salah satu persamaan, misalkan pada persamaan pertama,
$2x - y = 7$
$2(5) - y = 7$
$10 - y = 7$
$3 = y$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(5,3)}.

Contoh 8.
Jika x dan y merupakan himpunan penyelesaian dari,
$2x - y = -3$
$5x - 3y = -1$
Dengan menggunakan metode Campuran (Eliminasi dan Substitusi)
Jawab:
Untuk mencari nilai x, eliminasikan variabel y.
$2x - y = -3 \,|\times 3|\, 6x - 3y = -9$
$5x - 3y = -1 \,|\times 1|\, 5x - 3y = -1 -$¿
$x = -8$
Substitusikan variabel $x = -8$, ke persamaan pertama untuk mencari nilai y.

$2x-y=-3$
$2(-8)-y=-3$
$-16-y=-3$
$-y=-13$
$y=13$

Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah {(-8,13)}.

D. Penyelesaian Menggunakan Metode Determinan

Matriks dapat digunakan untuk mempermudah dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan linear. Pada pembahasan kali ini, kita akan menggunakannya untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel.

Langkah 1

Ubahalah sistem persamaan linear dua variabel ke dalam bentuk matriks, yaitu sebagai berikut,

$a_1x+b_1y=c_1$
$a_2x+b_2y=c_2$

Persamaan diatas bisa kita ubah menjadi

$AX=B$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

Tentukan nilai determinan A (D_A), determinan x $(D¿¿x)¿$ dan determinan y (D_y), dengan persamaan matriks berikut:

$$|D_A|=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$|D_A| = a_1b_2-b_1a_2$
$|D_A|$ merupakan deterninan dari matriks A

$$|D_x|=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$\left|D_x\right| = c_1 b_2 - b_1 c_2$

$\left|D_x\right|$ adalah determinan dari matriks A yang kolom pertama diganti dengan elemen-elemen matriks B.

$$\left|D_y\right| = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$\left|D_y\right| = a_1 c_2 - c_1 a_2$ $\left|D_y\right|$ adalah determinan dari matriks B yang kolom kedua diganti dengan elemen-elemen matriks A.

Langkah 3

Tentukan nilai variabel x dan y dengan persamaan berikut:

$$x = \frac{D_x}{D_A}$$

$$y = \frac{D_y}{D_A}$$

Contoh 9.

Tentukan penyelesaian SPLDV dari,

$5x + y = 3$

$6x + y = 1$

Dengan menggunakan metode Determinan

Jawab :

Langkah 1

Buatlah persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

Carilah determinan A (D_A), determinan x (D_x), dan determinan y (D_y).

Mencari determinan A

$$D_A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$
$D_A = ¿\{\,[\,5 \times 1\,] - [\,1 \times 6\,]\,\}$
$D_A = ¿\{\,5 - 6\,\}$
$D_A = -1$

Mencari Determinan x

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$D_x = ¿\{\,[\,3 \text{ x } 1\,] - [\,1 \text{ x } 1\,]\,\}$
$D_x = ¿\{\,3 - 1\,\}$
$D_x = ¿\ 2$

Mencari Determinan y

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$
$D_y = ¿\{\,[\,5 \text{ x } 1\,] - [\,3 \text{ x } 6\,]\,\}$
$D_y = ¿\ 5 - 18$
$D_y = -13$

Langkah 3
Mencari nilai x dan y
$$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{-2}{1} = -2$$
$$y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{-13}{-1} = 13$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(-2,13)}.

Contoh 10.
Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut:
$7x + 2y = 8$
$3x - 2y = 12$

Dengan menggunakan metode Determinan!
Jawab:
Langkah 1
Buatlah persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks
$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$
Langkah 2
Carilah determinan A (D_A), determinan x (D_x), dan determinan y (D_y).
Mencari determinan A
$$D_A=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$D_A=¿$ { [7 × -2] – [2 × 3] }
$D_A=¿$ { -14 – 6 }
$D_A=-20$

Mencari Determinan x
$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 12 & -2 \end{vmatrix}$$

$D_x=¿$ { [8 x -2] – [2 x 12] }
$D_x=¿$ { -16 – 24 }
$D_x=¿$ -40

Mencari Determinan y
$$D_y=\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}$$

$D_y=¿$ { [7 x 12] – [3 x 8] }
$D_y=¿$ 84 - 24
$D_y=60$

Langkah 3
Mencari nilai variabel x dan y,

$$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{-40}{-20} = 2$$
$$y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{-60}{20} = -3$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(2,-3)}

E. Penyelesaian dengan cara metode Grafik

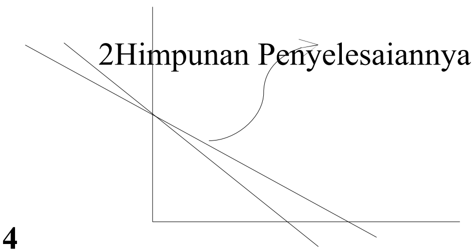
Grafik dari persamaan linear dua variabel adalah garis lurus. Langkah-langkah untuk menentukan penyelesaian SPLDV dengan metode grafik adalah sebagai berikut:

1. Tentukan titik potong sumbu x, dengan syarat y = 0,
2. Tentukan titik potong sumbu y, dengan syarat x = 0, Langkah (1) dan (2) dapat disederhanakan dalam bentuk tabel,
3. Gambar garis dari setiap persamaan,
4. Tentukan titik potong kedua garis. Titik potong tersebut adalah penyelesaian SPLDV

Contoh 11.

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut,
$2x+4y=8$
$2x+3y=6$
Setelah itu, buatlah grafik dari persamaan linear tersebut!
Jawab :
Langkah 1
Tentukan titik potong sumbu x dan y pada persamaan pertama.
Titik potong sumbu x dimana y = 0, diperoleh:
$2x+4y=8$
$2x+0=8$
$$x = \frac{8}{2} = 4$$
Maka titik potong sumbu x adalah (4,0).
Titik potong sumbu y dimana x = 0, diperoleh:
$2x+4y=8$
$0+4y=8$
$$y = \frac{8}{4} = 2$$

Maka titik potong sumbu y adalah (0,2).
Langkah 2
Tentukan titik potong sumbu x dan y pada persamaan kedua,
Carilah titik potong sumbu x dimana y = 0, diperoleh:
$2x+3y=6$
$2x+3(0)=6$
$2x=6$
$x=\frac{6}{2}=3$
Maka titik potong sumbu x adalah (3,0).
Carilah titik potong sumbu y dimana x = 0, diperoleh:
$2x+3y=6$
$2(0)+3y=6$
$3y=6$
$y=2$
Maka titik potong sumbu y adalah (0,2).
Langkah 3
Buatlah grafik dari persamaan linear dua varibel tersebut!
Y



X
3 4

Grafik 1.3.1

Untuk mencari himpunan penyelesaiannya, kita lihat kedua persamaan garis lurus tersebut yang terdapat titik potong.(garis yang berimpitan), kita bisa menggunakan metode elimanasi
Dari persamaan linear berikut,
$2x+4y=8$
$2x+3y=6$
Eliminasi variabel x untuk mendapatkan nilai y.
$2x+4y=8$
$2x+3y=6-$

$y=2$
Substitusikan nilai y = 2 ke persamaan $2x+4y=8$ untuk mendapatkan variabel x.
$2x+4y=8$
$2x+4(2)=8$
$2x+8=8$
$2x=0$
$x=\frac{0}{2}=0$
Jadi Grafik diatas merupakan persamaan linear dari persamaan:
$2x+4y=8$
$2x+3y=6$
Dan himpunan penyelesaiannya adalah (0,2).

Contoh 12.
Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut,
$3x+5y=15$
$6x+10y=60$
Setelah itu, buatlah grafik dari persamaan linear tersebut!
Jawab :
Langkah 1
Tentukan titik potong sumbu x dan y pada persamaan pertama
Titik potong sumbu x dimana y = 0, diperoleh:
$3x+5y=15$
$3x+5(0)=15$
$3x+0=15$
$x=\frac{15}{3}=5$
Maka titik potong sumbu x adalah (5,0).

Titik potong sumbu y, dimana x = 0, diperoleh:
$3x+5y=15$
$3(0)+5y=15$
$0+5y=15$
$y=\frac{15}{5}=3$
Maka titik potong sumbu y adalah (0,3)
Langkah 2

Tentukan titik potong sumbu x, dimana y = 0. Diperoleh:

$6x+10y=60$

$6x+10(0)=60$

$6x+0=60$

$x=\frac{60}{6}=10$

Maka titik potong sumbu x adalah (10,0).

Tentukan titik potong sumbu y, dimana x = 0. Diperoleh:

$6x+10y=60$

$6(0)+10y=60$

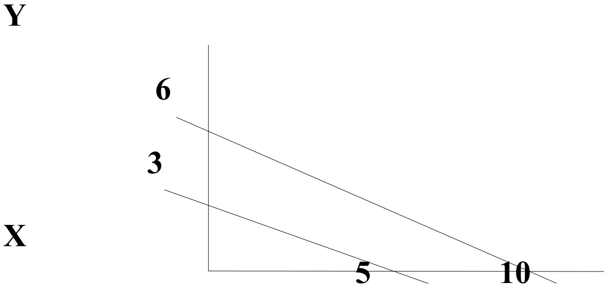
$0+10y=60$

$y=\frac{60}{10}=6$

Maka titik potong sumbu y adalah (0, 6)

Langkah 3

Buatlah grafik pada persamaan linear dua variabel tersenbut.



Grafik 1.3.2

Grafik persamaan-persamaan $3x+5y=15$ dan $6x+10y=60$ Diperlihatkan pada grafik diatas.Ternyata kedua garis itu sejajar. Jadi, himounan penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel itu tidak memiliki anggota, atau himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong, ditulis $\varnothing$.

1.4 Kegiatan Pembelajara 4. Masalah Konstektual yang Berkaitan tentang SPLDV

Dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam perhitungan matematika, seringkali kita berhadapan dengan masalah yang dapat diterjamahkan ke dalam model matematika yang berbentuk sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV).Membuat model matematika berupa sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV), menentukan jawaban, dan menafsirkan jawabannya dapat dikerjakan melalui langkah-langkah sebagai berikut.

1. Ny0061takan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel (dilambangkan dengan huruf-huruf) untuk memperoleh hubunga matematika,
2. Rumuskan sistem persamaan linear yang merupakan model matematika dari masalah,
3. Tentukan penyelesaian dari model matematika yang diperoleh pada langkah 2,
4. Tafsirkan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 3 terhadap masalah semula.

Agar memahami bagaimana cara membuat dan menyelesaikan model matematika dari masalah kontekstual yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV), simaklah beberapa contoh soal berikut ini.

Contoh 13.

Seorang tukang parkir mendapat uang sebesar Rp17.000,00 dari 3 buah mobil dan 5 buah motor, sedangkan dari 4 buah mobil dan 2 buah motor, ia mendapatkan Rp18.000,00. Jika terdapat 20 buah mobil dan 30 buah motor, banyak uang parkir yang dia peroleh adalah ....
Jawab :
Misalkan :Tarif Parkir per Mobil = x
Tarif Parkir per Motor = y

Berdasarkan cerita pada soal diatas, dapat kita peroleh model matematikanya seperti dibawah,

$3x+5y=17.000$

$4x+2y=18.000$

Lalu, kalikan persamaan pertama dengan 4 (empat) dan persamaan kedua dengan 3 (tiga). Hal ini digunakan untuk membuat salah satu variabelnya sama, sehingga bisa saling mengurangi.

$$\begin{array}{l|l|l} 3x+5y=17.000 & \times 4 & 12x+20y=68.000 \\ 4x+2y=18.000 & \times 3 & \underline{12x+6y=54.000-¿} \\ & & 14y=14.000 \\ & & y=1.000 \end{array}$$

Berdasarkan perhitungan diatas, diperoleh nilai y = 1.000. substitusikan nilai y = 1.000 pada salah satu persamaan yang diketahui, misalnya $3x+5y=17.000$ (pemilihan persamaan yang berbeda akan tetap menghasilkan hasil akhir yang sama).

$3x+5y=17.000$

$3x+5(1.000)=17.000$

$3x+5000=17.000$

$3x=17.000-5.000$

$3x=12.000$

$x=\frac{12.000}{3}=4.000$

Maka, hasil yang diperoleh,

Uang Parkir mobil = x = Rp4.000,00

Uang parkir motor = y = Rp1.000,00

Jadi, uang yang diperoleh untuk 20 mobil dan 30 motor adalah ....

$(20\times 4.000)+(30\times 1.000)$

$¿80.000+30.000$

110.000

Contoh 14.

Pada tahun ajaran baru, Afryanti mewakili beberapa temannya untuk membeli 5 buku Matematika dan 4 buku Kimia. Dia harus membayar sebesar Rp410.000,00 pada saat yang bersamaan, Sukijan mewakili teman-teman lainnya membeli 10 buku Matematika dan 6 buku Kimia. Dia harus membayar Rp740.000,00 untuk semuanya.

Jika Suminto membeli 3 buku matematika dan 8 buku kimia, maka berapa banyak uang yang harus dia bayar!
Jawab: Penyelesaian menggunakan metode Matriks

Langkah 1
Dari permasalahan diatas, hal pertama yang harus kita lakukan adalah buatlah model matematika dalam variabel x dan y.
Misalkan :

Buku Matematika = x
Buku Kimia = y

Maka persamaannya,
$5x+4y=410.000$
$10x+6y=740.000$
Langkah 2
Dari persamaan diatas, kita ubah persamaan tersebut dalam bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410.000 \\ 740.000 \end{bmatrix}$$

Langkah 3
Carilah determinan A (D_A), determinan x (D_x), dan determinan y (D_y).
Mencari determinan A

$$D_A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}$$

$D_A = ¿\{ [\, 5 \times 6 \,] - [\, 4 \times 10 \,] \}$
$D_A = ¿\{ 30 - 40 \}$
$D_A = -10$

Mencari Determinan x

$$D_x = \begin{vmatrix} 410.000 & 4 \\ 740.000 & 6 \end{vmatrix}$$

$D_x = ¿\{ [\, 410.000 \text{ x } 6 \,] - [\, 4 \text{ x } 740.000 \,] \}$
$D_x = ¿\{ 2.460.000 - 2.960.000 \}$

$D_x =$ ¿ -500.000
Mencari Determinan y

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 410.000 \\ 10 & 740.000 \end{vmatrix}$$

$D_y =$ ¿{ [5 x 740.000] – [410.000 x 10] }
$D_y =$ ¿ 3.700.000 – 4.100.000
$D_y = -400.000$

Langkah 3
Mencari nilai variabel x dan y,

$$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{-500.000}{-10} = 50.000$$

$$y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{-400.000}{-10} = 40.000$$

Berarti harga buku Matematika adalah Rp50.000,00 dan harga buku Kimia adalah Rp40.000,00
Jadi, jika Suminto membeli 3 buku Matematika dan 8 buku Kimia, maka diperoleh persamaan:
$3x + 8y$
¿ $3(50.000) + 8(40.000)$
¿ $150.000 + 320.000$
¿ 470.000
Suminto membeli semua buku itu dengan membayar Rp.470.000,00

1.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Rangkuman

1. Sistem pengertian Linear Dua Variabel (SPLDV) adalah sistem yang melibatkan dua variabel yang berbeda.

2. Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel adalah,

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_1 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

3. SPLDV dapat diselesaikan dengan metode grafik, metode substitusi, metode eliminasi, dan metofde determinan.

4. Penyelesaian SPLDV dengan metode grafik adalah sebagai berikut;

   Langkah 1 :

   Gambarlah garfik dari masing-masing persamaan pada sebuah bidang Cartesius.

   Langkah 2 :

   a. Jika kedua garis berpotongan pada satu titik, maka himpunan penyelesaiannya tetap memiliki satu anggota.
   b. Jika kedua garis sejajar, maka himpunan penyelesaiannya tidak memiliki anggota dikatakan himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong,
   c. Jika kedua garis berhimpitan, maka himpunan penyelesaiannya memiliki anggota yang tak terhingga banyaknya.

   5. Penyelesaian SPLDV dengan metode substitusi, atau metode eliminasi, atau gabungan keduanya adalah :

$$x = \frac{c_1 b_2 + c_2 b_1}{a_1 b_2 + a_2 b_1} \, dan \; y = \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{a_1 b_2 + a_2 b_1}$$

1.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Diskusi Kelompok

1. Tentukan himpunan penyelesaian Persamaan Linear Dua Variabel $x+y=5$!
   Jawab:
   Kita akan mencari Himpunan penyelesaian dari $x+y=5$,
   Jika x = 0, maka 0 + ... = 5, penyelesaiannya adalah (....,....)
   Jika x = ..., maka (....) + ... = 5, penyelesaiannya adalah (....,....)
   Jika x = ..., maka (....) + ... = 5, penyelesaiannya adalah (....,....)
   Jika x = ..., maka (....) + ... = 5, penyelesaiannya adalah (....,....)
   Jika x = ..., maka (....) + ... = 5, penyelesaiannya adalah (....,....)

   Sehingga sampai x berapapun kita bisa mencarinya karena tidak ada persyaratan.

2. Tentukan himpunan penyelesaian Persamaan Linear Dua Variabel $3x+4y=12$, untuk x dan y adalah bilangan cacah!
   Jawab:
   $3x+4y=12$
   $x=0,\text{maka}\, y=....$
   $x=....,maka\ y=....$
   $x=....,maka\ y=....$
   $x=....,maka\ y=....$
   $x=....,maka\ y=....$
   $x=....,maka\ y=....$
   Pasangan berurutan : ....
   Dan yang bukan hasil penyelesaiannya adalah ....
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut:

$3x+2y=-2$
$x-2y=10$
Dengan menggunakan metode substitusi!
Jawab:
Persamaan $x-2y=10$bisa kita buat persamaan eksplisit variabel x menjadi, x = ...y + ... ,
Lalu substitusikan variabel x = ...y + ...ke persamaan pertama,
(...........) + 2y = $-¿2$
(............) + 2y = $-¿2$
....y = …
y = ...

Substitusikan nilai y = ...ke persamaan eksplisit variabel x,
x = ...y + ...
x = ... (....) + ...
x = ... + ...
x = ...

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(....,....)}

4. Carilah penyelesaian dari tiap SPLDV berikut ini,
$5x+4y=1$
$3x-6y=2$
Dengan menggunakan metode Eliminasi!
Jawab:
Untuk mencari nilai x, eliminasikan variabel y!

.... + ... = ...$|\times \ldots|$.... + ... = ...
.... $-¿$ .... = ... $|\times \ldots|$.... $-¿$ .... = ... $+¿$
...y = ...
Untuk mencari nilai y, eliminasikan variabel x!
.... + ... = ...$|\times \ldots|$ .... + ... = ...
.... $-¿$ .... = ... $|\times \ldots|$ .... $-¿$.... = ... $-¿$
....x = ...

Maka, himpunan penyelesaiannya adalah {(....,....)}.

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut:
$2x+y=3$
$3x+5y=1$
Dengan menggunakan metode determinan!
Jawab :
Pertama, kita ubah sistem persamaan tersebut dalanm bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Kedua, carilah determinan A (D_A), determinan x (D_x), dan determinan y (D_y).
Mencari determinan A

$$D_A=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$D_A=\text{¿}$ { [.... × ....] – [.... × ....] }
$D_A=\text{¿}$ { .... – ..... }
$D_A=\text{¿}$ ....

Mencari Determinan x

$$D_x=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$D_x=\text{¿}${ [.... x ....] – [.... x ....] }
$D_x=\text{¿}$ { .... – .... }
$D_x=\text{¿}$ ....

Mencari Determinan y

$$D_y=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$D_y=\text{¿}${ [.... x ....] – [.... x ....] }
$D_y=\text{¿}$ .... - ....
$D_y=\text{¿}$ ....
Ketiga, mencari nilai variabel x dan y,

$$x=\frac{D_x}{D_A}=\frac{\cdots}{\cdots}=\ldots$$

$y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(....,....)}

6. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut:

   $2x + 3y = 8$

   $3x + y = 5$

   Lalu gambarkan grafiknya dari persamaan linear tersebut!

   Jawab :

   Langkah 1

   Tentukan titik potong sumbu x dan y pada persamaan pertama.

   Titik potong sumbu x dimana y = 0, diperoleh:

   $2x + 3y = 8$

   …. + …. = ….

   $x = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

   Maka titik potong sumbu x adalah (…,…).

   Titik potong sumbu y dimana x = 0, diperoleh:

   $2x + 3y = 8$

   …. + …. = ….

   $y = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

   Maka titik potong sumbu y adalah (…,…).

   Langkah 2

   Tentukan titik potong sumbu x dan y pada persamaan kedua,

   Carilah titik potong sumbu x dimana y = 0, diperoleh:

   $3x + y = 5$

   ..... + ... = ...

   $\dots. + \dots. = \dots.$

   $x = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

   Maka titik potong sumbu x adalah (....,....).

   Carilah titik potong sumbu y dimana x = 0, diperoleh:

   $3x + y = 5$

   $\dots.(\dots.) + \dots. = \dots.$

.... $y = \ldots.$
$y = \ldots.$
Maka titik potong sumbu y adalah (....,....).
Langkah 3
Buatlah grafik dari persamaan linear dua varibel tersebut!

Maka himpunan penyelesaiannya adalah ....

7. Aqilah membeli 4 donat dan 2 cokelat seharga Rp13.000,00. Sementara, Shilviana membeli 3 donat dan 4 cokelat seharga Rp16.000,00. Jika Rizki membeli sebuah donat dan sebuah cokelat dengan membayar Rp10.000,00, uang kembalian yang diterima sebesar ....
Jawab : Menggunakan metode Eliminasi
Misalkan: Donat = x
Cokelat = y

Berdasarkan cerita pada soal diatas, dapat kita peroleh model matematikanya seperti dibawah,
.... + ... = ...
.... + ... = ...

Untuk mencari nilai x, eliminasikan variabel y!

.... +¿ .... = ... ×… .... +¿ .... = ...
.... +¿ .... = ... ×… .... +¿ .... = ... −¿
....x = ...
x = ...

Untuk mencari nilai y, eliminasikan variabel x!

.... +¿ .... = ... ×… .... +¿ .... = ...
.... +¿ .... = ... ×… .... +¿ .... = ... −¿
....y = ...
y = ...

Harga sebuah donat dan sebuah cokelat dimana modal matematikanya, x + y, adalah .... + ... = ...

Jadi saat Rizki membeli donat dan cokelat dengan uang Rp10.000,00, dia terima uang kembalian sebesar ....

8. Zahrah membeli tiga buah jeruk dan sebuah apel seharga Rp5.000,00. Sedangkan Putri membeli dua buah jeruk dan dua buah apel seharga Rp6.000,00. Jika Rahmani membeli lima buah jeruk dan tiga buah apel, maka dia membayar sebesar ....
Jawab : Menggunakan metode Campuran
Misalkan: Jeruk = x
Apel = y

Berdasarkan cerita pada soal diatas, dapat kita peroleh model matematikanya seperti dibawah,
.... + ... = ...
.... + ... = ...

Untuk mencari nilai x, eliminasikan variabel y!

.... +¿ .... = ... ×… .... +¿ .... = ...
.... +¿ .... = ... ×… .... +¿ .... = ... −¿
....x = ...
x = ...

Substitusikan nilai x = ...ke salah satu persamaan, misalkan ke persamaan kedua, diperoleh:
.... (....) + ... = ...
.... + ... = ...

....y = ...
y = ...

Maka harga sebuah jeruk dan apel masing-masing adalah Rp......... dan Rp ....
Jika Rahmani membeli lima buah jeruk dan tiga buah apel, maka dia membayar sebesar Rp..........

9. Harga 5 buah buku tulis dan 3 buah penghapus Rp34.000,00. Jika harga sebuah buku tulis Rp2.000,00 lebih mahal dari sebuah penghapus, maka harga 3 buah buku tulis dan 6 buah penghapus adalah ....
Jawab :
Misalkan : Buku tulis = x
Penghapus = y

Harga 5 buah buku dan 3 buah penghapus seharga Rp34.000,00, maka model matematikanya,
.... + ... = ... (1)

Harga sebuah buku tulis Rp2.000,00 lebih mahal dari penghapus, maka persamaanya:
x = ... + ... , lalu substitusikan ke persamaan (1), diperoleh:
.... (...........) + ... = ...
.... + ... + ... = ...
....y = ...
y = ...

Substitusikan nilai y = ...pada persamaan x = ... + ... maka,
x = ... + ...
x = ...
Maka, harga 3 nuah buku dan 6 buah penghapus dimana modal matematikanya, ... + ... adalah
.... + ... = 3 (....) + 6 (....)
= .... + ...
= ....

Jadi total harganya adalah Rp..........

10. Tujuh tahun yang lalu, umur ayah sama dengan 6 kali umur Wiyan Intan. Empat tahun yang akan datang, 2 kali umur ayah sama denngan 5 kali umur Wiyan Intan ditambah 9 tahun. Umur Wiyan Intan 3 tahun yang lalu adalah ....
    Jawab :
    Misalkan :Umur Ayah= x
    Umur Wiyan Intan = y
    Tujuh tahun yang lalu, umur ayah sama dengan 6 kali umur Wiyan Intan.
    .... - .... = ...(....-....)
    .... - .... = ... - ....
    x = ... - ....   (1)

    Empat tahun yang akan dating, 2 kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Wiyan Intan ditambah 9.
    ....(....+....) = ...(.... + ...) + ...
    .... + ... = ... + ... + ...
    .... + ... = ... + ...   (2)
    2x = ...

    Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2).
    2(.......) = ... + ...
    .... - .... = ... + ...
    .... - .... = ... + ...
    ....y = ...
    y = ...

    Umur Wiyan Intan 3 tahun yang lalu,
    y - .... = ... - .... = ...
    Jadi umur Wiyan Intan 3 tahun yang lalu adalah ....

11. Keliling sebuah persegi panjang 28 cm. Sedangkan panjangnya 2 cm lebih panjang dari lebarnya. Luas persegi panjang adalah ....

Jawab :
Misalkan : p = ...
L = ...
Keliling sebuah pesegi panjang 28 cm,
K = 2 (.... + ...)
.... = 2 (.... + ...) (1)

Panjangnya 2 cm lebih panjang dari lebarnya, maka;
p = ... + ...

Substitusikan p = ... + ... ke persamaan (1).
2 ({............} + ...) = ...
.... + ... = ...
4l = ...
l = ...

Substitusikan nilai l = ...ke persamaan p = ... + ... ,
Maka;
p = (.....) + 2
p = ... + ...
p = ...

Jadi luas Persegi Panjang dengan rumus,
L = ...x ....adalah ....

12. Diketahui sistem persamaan
$5x-3y=16$
$3x-4y=14$
Mempunyai penyelesaian x = a dan y = b. Nilai a + b adalah ....

Jawab :
Untuk mencari nilai x, eliminasikan variabel y!

.... +¿ .... = ... $\times$ ... . +¿ .... = ...
.... +¿ .... = ... $\times$ ... . +¿ .... = ... $-$¿
....x = ...
x = ...

Substitusikan nilai x = ...ke salah satu persamaan, misalkan ke persamaan kedua, diperoleh:
3(....) - .... = ...
.... - .... = ...
....y = ...
y = ...

Maka nilai x = ...dan y = ..., sehingga nilai a + b adalah .... + ... = ...

13. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut,
$2x+y=4$
$x-2y=-3$
Dengan menggunakan metode determinan!
Jawab :
Pertama, kita ubah sistem persamaan tersebut dalanm bentuk matriks.
$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$
Kedua, carilah determinan A (D_A), determinan x (D_x), dan determinan y (D_y).
Mencari determinan A
$$D_A=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$
$D_A=¿$ { [.... × ....] – [.... × ....] }
$D_A=¿$ { .... – ..... }
$D_A=¿$ ....

Mencari Determinan x
$$D_x=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$
$D_x=¿${ [.... x ....] – [.... x ....] }
$D_x=¿$ { .... – .... }
$D_x=¿$ ....

Mencari Determinan y

$$D_y=\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$D_y=$¿{ [.... x ....] – [.... x ....] }
$D_y=$¿ .... - ....
$D_y=$¿ ....
Ketiga, mencari nilai variabel x dan y,

$$x=\frac{D_x}{D_A}=\frac{\dots}{\dots}=\dots$$

$$y=\frac{D_y}{D_A}=\frac{\dots}{\dots}=\dots$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {(....,....)}

14. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut,
$2x+y=4$
$x-2y=-3$
Lalu buatlah grafik dari sistem persamaan linear tersebut!
Jawab :

Langkah 1
Tentukan titik potong sumbu x dan y pada persamaan pertama.
Titik potong sumbu x dimana y = 0, diperoleh:
$2x+y=4$
…. + …. = ….

$$x=\frac{\dots}{\dots}=\dots$$

Maka titik potong sumbu x adalah (…,…).

Titik potong sumbu y dimana x = 0, diperoleh:
$2x+y=4$
…. + …. = ….
$y=$¿ ....
Maka titik potong sumbu y adalah (…,…).

Langkah 2

Tentukan titik potong sumbu x dan y pada persamaan kedua,

Carilah titik potong sumbu x dimana y = 0, diperoleh:

$x-2y=-3$

.....−¿.... = ...

$\ldots.x=\ldots.$

Maka titik potong sumbu x adalah (....,....).

Carilah titik potong sumbu y dimana x = 0, diperoleh:

$x-2y=-3$

$(\ldots.)-\ldots.=\ldots.$

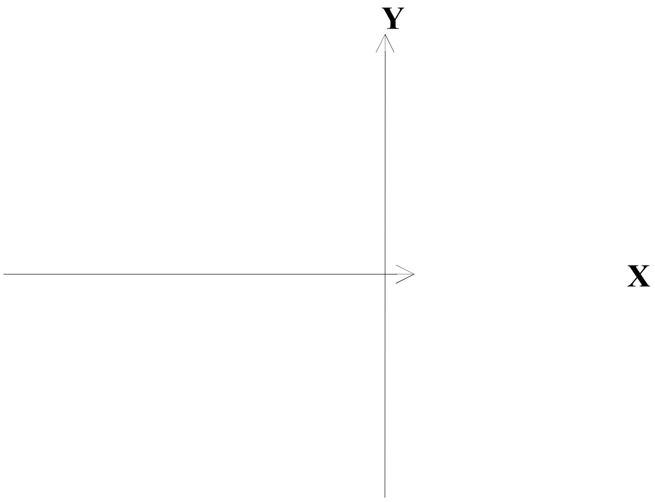
$-\ldots.y=\ldots.$

$y=\ldots.$

Maka titik potong sumbu y adalah (....,....).

Langkah 3

Buatlah grafik dari persamaan linear dua varibel tersebut!



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah ....

15. Jika diketahui sistem persamaan,

$ax+y=4$

$x+by=7$

Dan $ab=2$, maka $x+y$ adalah ....

Jawab:

Dari persamaan $ax+y=4$, bisa kita ubah dalam bentuk eksplisit variable y, maka y = ... - .... dan substitusikan ke persamaan $x+by=7$.

.... + (....-....) = ...

.... + ... - .... = ...

Karena $ab=2$, maka:

.... + ... - ....x = ...

-x = ... - ....

x = ... - ....

Substitusikan nilai x ke y = ... - ....

y = ... - ....

y = ... - ....(.... - ....)

y = ... - .... + ...

y = ...(....) + ...

y = ... - .... + ...

y = ...

maka nilai $x+y=$¿ { .... - .... + (....-....) }

$x+y=$¿ .... + ...

$x+y=$¿ ....

1.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Soal Mandiri

1. Persamaan Dua Linear dari $5a+3b=30$adalah ....

2. Persamaan Dua Linear dari $2x+5y=15$adalah ....

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berkut,
   $x+y=3$
   $x-1=1$
   Dengan menggunakan metode Substitusi!

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut,
   $2x-y=5$
   $x-1=1$
   Dengan menggunakan metode Eliminasi!

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut,
   $2x-y=7$
   $3x+2y=7$
   Dengan menggunakan metode Determinan!

6. Harga 4 buah pulpen dan 5 buah penggaris Rp30.000,00. Jika harga sebuah pulpen Rp1.500,00 lebih murah dari sebuah penggaris, harga 5 buah pulpen dan 3 buah penggaris adalah ....

7. Bam membeli 4 pensil dan 3 tabel periodik, dia membayar Rp19.500,00. Jika Bwang membeli 2 pensil dan 4 tabel

periodik, dia harus membayar Rp16.000,00. Tentukan harga sebuah pensil dan selembar tabel periodik!

8. Seseorang tukang parkir mendapat uang sebesar Rp17.000,00 dari 3 buah mobil dan 5 buah motor, sedangkan dari 4 buah mobil dan 2 buah motor ia mendapatkan uang Rp18.000,00. Jika terdapat 20 mobil dan 30 motor, banyak uang parkir yang diperoleh adalah ....

9. Di koperasi sekolah, Andi membeli 6 buku dan 5 pulpen. Afryanti membeli 6 buku dan 5 pulpen. Nadya membeli 3 buah buku dan 2 pulpen dengan jenis yang sama. Afryanti harus membayar Rp59.500,00 dan Nadya harus membayar Rp28.000,00. Jika Any membeli 2 buku dan 1 pulpen dengan jenis yang sama dan ia membayar dengan uang Rp20.000,00. Maka uang kembalian yang diterimanya adalah ....

10. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan linear berikut,
    $-x+y=70$
    $2x-y=30$
    Lalu buatlah ilustrasi grafik dari sistem persamaan linear tersebut!

11. Penyelesaian dari persamaan linear,
    $3x+2y=8$
    $5x-4y=6$
    Adalah x dan y. Nilai dari $3x-y$adalah ....

12. Penyelesaian dari persamaan linear,
    $x+2y=21$
    $3x-y=7$
    Adalah x dan y. Nilai dari $2x+2y$adalah ....

13. Diketahui himpunan penyelesaian dari

$ax - y = 11$
$2x + 6 = 12$
Adalah (3,b). Nilai $a - b$adalah ....

14. Penyelesaian sistem persamaan linear
$\frac{x-2y-3}{x-3y} = -6$
$\frac{2x-y-5}{2y-x} = -3$
Adalah x dan y. Nilai $x - y$adalah ....

15. Jika x ≠ 0 dan y ≠ 0 memenuhi sistem persamaan:
$\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1$
$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 7$
Hasil dari $x^2 + y^2$adalah ....

16. Jika x ≠ 0 dan y ≠ 0 memenuhi sistem persamaan:
$\frac{3}{x+2y} - \frac{2}{2x-y} = 5$
$\frac{-2}{x+2y} - \frac{3}{2x-y} = 1$
Maka nilai $\frac{x}{y}$adalah ....

17. Seorang pedagang membeli 45 bungkus roti yang terdiri dari roti cokelat dan roti keju. Jika diketahui harga roti cokelat adalah Rp12.000,00 per bungkus, harga roti keju Rp16.000,00 perbungkus, dan jumlah uang yang dibelanjakan Rp600.000,00, maka banyaknya roti cokelat yang dibeli adalah ....

18. Bam membeli 2 kg apel dan 3 kg jeruk, seharga Rp60.000,00. Bwang membeli 3 kg apel dan 5 kg jeruk di took buah yang sama seharga Rp95.000,00. Bambang membeli 3 kg apel dan 3 kg jeruk di toko buah yang sama,

lalu ia membayar dengan 2 lembar uang Rp50.000,00. Sisa uang (kembalian) yang diterima Bambang adalah ....

19. Harga 3 kg beras dan 2 kg gula di toko A adaetelah Rp49.000, sedangkan di toko B harga 4 kg beras dan 5 kg gula adalah Rp91.000. Pada saat itu harga beras dan gula di toko A dan B yang sama. Pipie membeli 1 kg beras dan setengah kg gula, kemudian ia membayar dengan uang Rp20.000,00. Uang kembalian yang diterima Pipie adalah ....

20. Sepuluh tahun yang lalu, umur kakek enam kali umur adik. Lima tahun yang akan datang jumlah umur kakek dan adik sama dengan 93 tahun. Jika umur nenek lebih muda 6 tahun dari kakek, maka jumlah umur nenek sekarang adalah ....

Modul 2
Persamaan Linear Tiga Variabel

A. Capain Pembelajaran

Mahasiswa memahami dan menguasai materi system persamaan linear tiga variable dengan berbagai metode.

B. Bahan Ajaran

1. PengertianPersamaan Linear TtigaVariabel
2. PenyelesaianPersamaan Linear TigaVariabel
3. MasalahKonstekstual yang berkaitandengan SPLTV

Modul 2
Persamaan Linear Tiga Variabel

2.1 KegiatanPembelajaran 1.
PengertianPersamaan Linear TigaVariabel

Persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamupelajari saat duduk di SMP. Saat ini kita akan perdalam kajian, pemahaman, dan jangkauan pemikiran tentang konsep sistem persamaan linear dari apa yang kamu sudah pelajari sebelumnya. Pola pikir dan cara belajar yang dituntut dalam mempelajari materi ini adalah upayamu untuk menemukan ide-ide, berpikir kritis dan kreatif dalam mencari strategi penyelesaian masalah dan mengungkapkannya, serta berdiskusi dengan teman, mengajukan pertanyaankepada guru dan teman kelompok.Banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang menyatu denganfakta dan lingkungan budaya kita terkait dengan sistem persamaan linear.

Permasalahan-permasalahan tersebut akan menjadi bahan inspirasi menyusun model-model matematika yang ditemukan dari proses penyelesaiannya. Modelmatematika tersebut, akan dijadikan bahan abstraksi untuk membangunkonsep sistem persamaan linear dan konsep sistem persamaan linear tigavariabel.Perhatikan kembali sistem persamaan yang diperoleh dari masalah kontekstual pada kolom inspirasi di depan, yaitu:

$$4x+3y+2z=242.0005x+6y+3z=369.000$$
$$2x+5y+2z=230.000$$

Sistem persamaan ini terdiri atas tiga persamaan linier dengan tiga variabel. Sistem persamaan semacam ini dinamakan sistem persamaan linear tiga variabel.Sistem persamaan linear tiga variabel atau disingkat dengan SPLTV adalah suatu persamaan matematika yang terdiri atas 3 persamaan linear yang masing-masing persamaan bervariabel tiga (misal x, y dan z). Dengan demikian, bentuk umum dari Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel dalam x, y, dan z dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

Dengan a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, dan d_3 merupakan bilangan-bilangan real.

Keterangan:

a_1, a_2, a_3 = koefisien dari x
b_1, b_2, b_3= koefisien dari y
c_1, c_2, c_3= koefisien dari z
d_1, d_2, d_3= konstanta
x, y, z = variabel atau peubah

2.2.KegiatanPembelajaran 2. PenyelesaianPersamaan Linear TigaVariabel

Metode penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) pada hakikatnya hampir sama dengan metode penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV), terkecuali dengan metode grafik.Beberapa metode yang efektif untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) dan akan kita pelajari dalam pasal ini, diantaranya adalah dengan menggunakan:

(i) Metode substitusi,
(ii) Metode eliminasi, dan
(iii) Metode determinan.

Atau gabungan dari dua dari tiga metode tersebut.

A. Penyelesaian SPLTV dengan Metode Substitusi

Sekarang kita akan mempelajari penyelesaian SPLTV dengan metode substitusi.Untuk mengingat kembali dan memahami bagaimana cara menentukan penyelesaian SPLTV dengan menggunakan metode substitusi atau penyulihan, simaklah sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

Penyelesaian SPLTV tersebutdenganmetodesubstitusidapatdilakukanmelaluilangkah-langkahsebagaiberikut:

Langkah 1

Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana (boleh yang mana saja). Nyatakan $x$sebagai fungsi y dan z, atau$y$sebagai fungsi $x$dan z, atau z sebagai fungsi x dan y.

Langkah 2

Substitusikan x, atau y, atau z yang diperoleh pada langkah 1 kedua persamaan yang lainnya sehingga diperoleh SPLDV,

Langkah 3

Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 2. Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah 3 ini salah satu persamaan semula untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.

Supaya kita tidak bingung dalam menerapkan penjelasandi atas, mari kita simak contoh soal dan pembahasannya berikut ini.

Contoh 1

Dengan menggunakan metode substitusi, tentukan penyelesaian SPLTV berikut.

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=6 \\ 3x+y-2z=4 \\ 7x-6y-z=10 \end{array}\right\}$$

Langkah 1

Dari persamaan $x-2y+z=6$, diperoleh $x=2y-z+6$.

Langkah 2

Substitusi variabel $x=2y-z+6$ ke dalam dua persamaan yang lain, yaitu $3x+y-2z=4$ dan $7x-6y-z=10$.

Substitusi $x=2y-z+6$ ke persamaan $3x+y-2z=4$, menghasilkan:

$3(2y-z+6)+y-2z=4$

$\leftrightarrow 6y-3z+18+y-2z=4$

$\leftrightarrow 7y-5z=-14$ ...(1)

Substitusi $x=2y-z+6$ ke persamaan $7x-6y-z=10$, menghasilkan:

$7(2y-z+6)-6y-z=10,$

$\leftrightarrow 14y - 7z + 42 - 6y - z = 10$

$\leftrightarrow 8y - 8z = -32 \leftrightarrow y - z = -4 \ldots (2)$

Persamaan (1) dan (2) membentuk sistem persamaan linear dua Variabel (SPLDV):

$$\begin{cases} 7y - 5z = -14 \\ y - z = -14 \end{cases}$$

Langkah 3

Penyelesaian SPLDV yang diperoleh, yaitu $y = 28$ dan $z = 42$.

Selanjutnya, substitusi nilai $y = 28$ dan $z = 42$ ke persamaan $x = 2y - z + 6$ diperoleh:

$x = 2(28) - 42 + 6 = 20$

Jadi, penyelesaian SPLTV adalah $x = 20$, $y = 28$, dan $z = 42$.

Contoh 2

Denganmenggunakanmetodesubstitusi, tentukanpenyelesaian SPLTV berikut.

$$\begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Penyelesaian SPLTV tersebut dengan metode substitusi dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Dari persamaan $x+y-z=-3$, nyatakan x sebagai fungsi y dan z, diperoleh: $x=-y+z-3$

Langkah 2

Substitusi $x=-y+z-3$ ke persamaan $2x+y+z=4$, menghasilkan:

$2(-y+z-3)+y+z=4$

$\leftrightarrow -2y+2z-6+y+z=4$

$\leftrightarrow -y+3z=10\ldots(1)$

Substitusi $x=-y+z-3$ ke persamaan $x+2y+z=7$, menghasilkan:

$(-y+z-3)+2y+z=7$

$\leftrightarrow y+2z=10\ldots(2)$

Persamaan (1) dan (2) membentuk SPLDV dalam variabel y dan z.

$$\begin{cases} -y+3z=10 \\ y+2z=10 \end{cases}$$

Langkah 3

Penyelesaian SPLDV yang diperoleh pada langkah2 adalah $y=2$ dan $z=4$. Lalu Substitusikan ke persamaan $x=-y+z-3$.

$x=-2+4-3 \leftrightarrow x=-1$

Jadi penyelesaian SPLTV adalah $x=-1$, $y=2$, dan $z=4$.

B. Penyelesaian SPLTV dengan Metode Eliminasi

Untuk memahami cara menentukan penyelesaian SPLTV dengan menggunakan metode eliminasi, simaklah sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

Secaraumumpenyelesian SPLTV (dalam variable *x, y*dan*z*) denganmenggunakanmetodeeliminasidapatdikerjakanmelaluilang kah-langkahsebagaiberikut.

Langkah 1

Eliminasisalahsatu variable *x,y,*atau*z*sehinggadiperoleh SPLDV.

Langkah 2

Selesaikan SPLDV yang didapatpadalangkah 1.

Langkah 3

Substitusikannilai-nilai variable yang diperolehpadalangkah 2 kesalahsatupersamaansemulauntukmendapatkannilai variable yang ketiga.

Supayakitatidakbingungdalammenerapkanpenjelasan di atas, marikitasimakcontohsoaldanpembahasannyaberikutini.

Contoh 3

Dengan menggunakan metode Eliminasi, tentukan penyelesaian SPLTV berikut.

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y+2z=12\\5x+6y+3z=22\\2x+7y+5z=37\end{array}\right\{$$

Penyelesaian SPLTV tersebut dengan metode eliminasi dapat kita kerjakan melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Misalkan kita ingin mengeliminasikanvariabel z pada sistem persamaan tersebut.
Dari persamaan pertama dan kedua:

$4x+3x+2z=12|\times 3|12x+9y+6z=36$

$5x+6y+3z=22|\times 2|10x+12y+6z=44-¿$

$2x-3y=-8$

$5x+6y+3z=22|\times 5|25x+30y+15z=110$

$2x+7y+5z=37|\times 3|6x+21y+15z=111-¿$

$19x+9y=-1$

Langkah 2

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) yang diperoleh pada langkah 1 diselesaikan dengan metode eliminasi sebagai berikut.

Eliminasi Variabel y:

$2x-3y=-8|\times 3|6x-9y=-24$

19x+9y=-1 $|\times 1|19x+9y=-1+¿$

$25x=-25$

$$\leftrightarrow x=\frac{-25}{25}=-1$$

Eliminasi Variabel x:

$2x-3y=-8|\times 19|38x-57y=-152$

$19x+9y=-1|\times 2|38x+18y=-2-¿$

$-75y=-150$

$\leftrightarrow y=\frac{-150}{-75}$

$y=2$

Langkah 3

Nilai z diperoleh dengan substitusi nilai $x=-1$ dan $y=2$ ke salah satu persamaann semula. Misalnya kita pilih persamaan $4x+3y+2z=12$, sehingga diperoleh:

$4(-1)+3(2)+2z=12$
$-4+6+2z=12$
$2z=10$
$z=5$

Jadi penyelesaian SPLTV adalah $x=-1, y=2$, dan $z=5$ atau himpunan penyelesaiannya adalah $\{(-1,2,5)\}$

Contoh 4

Tentukannilai*x*, *y*,dan*z* yang memenuhi system persamaanDenganmenggunakanmetodeeliminasi.Tentukanpenyelesaiantiap SPLTV berikut.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=5 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=-4 \\ \frac{-1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1 \end{cases}$$

AlternatifPenyelesaian:

Sistempersamaaninibukansistempersamaan linear tigavariabel, tetapidapatdiubahbentuknyamenjadi SPLTV dengancarapermisalansebagaiberikut:

Dimisalkan$\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, $\frac{1}{z}=c$, maka sistem persamaan semula dapat dituliskan sebagai:

$a+b+c=5$
$2a-3b+c=-4$
$-a+2b-c=1$

Yang merupakan SPLTV dalam*a, b,*dan*c*.

Eliminasi variable *c*:

Dari persamaanpertamadankedua:

$a+b+c=5$

$2a-3b+c=-4-¿$

$-a+4b=9$ …(1)

Dari persamaankeduadanketiga:

$2a-3b+c=-4$

$-a+2b-c=1+¿$

$a-b=-3$ …(2)

Persamaan (1) dan (2) membentuk SPLDV dalamvariabel*a*dan*b* .

$-a+4b=9$

$a-b=-3+¿$

$-3b=-6 \leftrightarrow b=2$

Substitusikan*b* ¿2kepersamaan$a-b=-¿3$, diperoleh:

$a-2=-¿3 \leftrightarrow a=-1$

Substitusikan$a=-1$ dan b = 2kepersamaan$a+b+c=5$, diperoleh:

$-1+2+c=5 \leftrightarrow c=4$

Kembalikan hasil variabel $a=-1$, $b=2$, dan $c=4$ dengan cara substitusikan ke permisalan semula, diperoleh:

- $\frac{1}{x}=a$

  $\leftrightarrow \frac{1}{x}=-1$

  $\leftrightarrow x=-1$

- $\frac{1}{y}=b$

  $\leftrightarrow \frac{1}{y}=¿2$

  $\leftrightarrow \boldsymbol{y}= \frac{1}{2}$

- $\frac{1}{z}=¿c$

  $\leftrightarrow \frac{1}{z}=¿4$

  $\leftrightarrow \boldsymbol{z}= \frac{1}{4}$

Jadi, penyelesaiandarisistempersamaantersebutadalah$x=-¿1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{4}$, atau himpunan penyelesaiannya adalah $\{(-¿1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})\}$.

Kita bisaperiksakebenaranjawabantersebutdenganpersamaan-persamaandiatas.

C. Penyelesaian SPLTV dengan Metode Determinan

Untukmenentukan SPLTV dengancaradeterminan, dimanaDeterminanitumengubahmatriksmenjadiangkabiasa.
Metode yang kitapakaiadalahMetodeSarruskarena SPLTV dalambentukmatriksmemilikiordo 3x3.

Langkah 1
ubahlahsistempersamaan linear tigavariabelkedalambentukmatriks, yaitusebagaiberikut**.**
Misalkanterdapatsistempersamaanberikut.

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

Persamaandiatasbisakitaubahmenjadi;
$AX=B$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Langkah 2
tentukannilaideterminanmatriks A (D), determinan$x$¿), determinan$y$ (D_y), dan determinan z (D_z) denganpersamaanmatriksberikut.

$$D_A=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|$$

D_A=($a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+a_1c_2b_3+c_1b_2a_3$¿
D_A adalah Determinan dari Matriks A

$$D_x = \left|\begin{matrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{matrix}\right|$$

$D_x=$¿$(d_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 b_3 - b_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 b_3 + c_1 b_2 d_3)$

$D_x$adalahdeterminandarimatriks A yang kolompertamadigantidenganelemen-elemenmatriks B.

$$D_y = \left|\begin{matrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{matrix}\right|$$

$D_y=(a_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 d_3 - d_1 a_2 c_3 + a_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 a_3)$

D_y adalah determinan dari matriks A yang kolom kedua diganti dengan elemen-elemen matriks B.

$$D_z = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}\right|$$

$D_z=\left(a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 d_3 + a_1 d_2 b_3 + d_1 b_2 a_3\right)$

D_z adalah determinan dari matriks A yang kolom ketiga diganti dengan elemen-elemen matriks B.

Langkah 3

Tentukannilaivariabel$x$, y, dan$z$denganrumusberikut.

$$x=\frac{D_x}{D_A}$$

$$y=\frac{D_y}{D_A}$$

$$z = \frac{D_z}{D_A}$$

Contoh 5

Tentukanpenyelesaiandarisistempenyelesaian linear dibawahinidenganmetodeDeterminan**.**

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + 2y + z = 8 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Langkah 1

Ubahlahsistempersamaan yang ditanyakandalamsoalkebentukpersamaanmatriksberikut (hanyauntukmempermudahmengerjakannya)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

tentukannilaideterminanmatriks A (D_A), determinan $x(D_x)$, determinan $y(D_y)$, dan determinan $z(D_z)$ dengan persamaan matriks berikut.

MencariDeterminanD_A:

$$\left|D_A\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right|$$

D_A = { [(2x2x3) + (1x1x1) + (-3x1x-2)] – [(1x1x3) + (2x1x-2) + (-3x2x1)] }
D_A = { [12 + 1 + 6] – [3 – 4 – 6] }
D_A = 19 + 7
D_A = 26

MencariDeterminanD_x:

$$\left|D_x\right| = \left|\begin{matrix} -5 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -5 & 1 \\ 8 & 2 \\ 6 & -2 \end{matrix}\right|$$

D_x = { [(-5 x 2 x 3) + (1 x 1 x 6) + (-3 x 8 x -2)] – [(1 x 8 x 3) + (-5 x 1 x -2) + (-3 x 2 x 6)] }
D_x = { [-30 + 6 + 48] – [24 + 10 – 36]
D_x = 24 + 2 ↔ D_x = 26

MencariDeterminanD_y:

$$\left|D_y\right| = \left|\begin{matrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \\ 1 & 6 \end{matrix}\right|$$

D_y = { [(2 x 8 x 3) + (-5 x 1 x 1) + (-3 x 1 x 6)] – [(-5 x 1 x 3) + (2 x 1 x 6) + (-3 x 8 x 1)
D_y = { [48 – 5–¿18] – [-15 + 12– 24]
D_y = { 25 + 27 }
D_y = 52

MencariDeterminanD_z:

$$\left|D_z\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right|$$

D_z = { [(2 x 2 x 6) + (1 x 8 x 1) + (-5 x 1 x -2)] – [(1 x 1 x 6) + (2 x 8 x -2) + (-5 x 2 x 1)] }
D_z = { [24 + 8 + 10] – [6 – 32 – 10]
D_z = { 42 + 36 }
D_z = 78

Langkah 3

Tentukannilaivariabel*x*, *y*, dan*z*denganrumusberikut:

$$x = \frac{\left|D_x\right|}{\left|D_A\right|} = \frac{26}{26} = 1$$

$$y = \left|\frac{D_y}{D_A}\right| = \frac{52}{26} = 2$$

$$z = \frac{\left|D_z\right|}{\left|D_A\right|} = \frac{78}{26} = 3$$

Jadi, penyelesaiandarisistempersamaantersebutadalah x = 1, y = 2, dan z = 3, atauhimpunanpenyelesaiannyaadalah {(1, 2, 3)}.

Contoh 6

Tentukanpenyelesaiandarisistempenyelesaian linear dibawahinidenganmetodeDeterminan!

$3x - 2y + z = -5$

$x + 5y - 2y = 294x + y + 5z = 8$

Langkah 1

Ubahlahsistempersamaan yang ditanyakandalamsoalkebentukpersamaanmatriksberikut.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 29 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

Tentukannilaideterminanmatriks A ¿¿), determinan$x$ (D_x), determinan y, D_y, dan determinan $z(D_z)$ dengan permasalahan matriks berikut.

MencariDeterminanD_A:

$$|D_A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{matrix}\Bigg|$$

$D_A=¿$ { [(3 x 5 x 5) + (-2 x -2 x 4) + (1 x 1 x 1)] – [(-2 x 1 x 5) + (3 x -2 x 1) + (1 x 5 x 4)] }
$D_A=¿$ { [75 + 16 + 1] – [-10 - 6 + 20] }
$D_A=¿$ { 92- 4)
$D_A=¿$ 88

MencariDeterminanD_x:

$$|D_x|=\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 29 & 5 & -2 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -5 & -2 \\ 29 & 5 \\ 8 & 1 \end{matrix}\Bigg|$$

$D_x=¿$ { [(-5 x 5 x 5) + (-2 x -2 x 8) + (1 x 29 x 1)] – [(-2 x 29 x 5) + (-5 x -2 x 1) + (1 x 5 x 8)] }
$D_x=¿$ { [-125 + 32 + 29] – [-290 + 10 + 40] }
$D_x=¿$ { -64 + 240 }
$D_x=¿$ 176

Mencari Determinan D_y :

$$|D_y| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 29 & -2 & 1 & 29 \\ 4 & 8 & 5 & 4 & 8 \end{array}\right|$$

$D_y = ¿$ { [(3 x 29 x 5) + (-5 x -2 x 4) + (1 x 1 x 8)] – [(-5 x 1 x 5) + (3 x -2 x 8) + (1 x 29 x 4)] }
$D_y = ¿$ { [435 + 40 + 8] – [-25 - 48 + 116] }
$D_y = ¿$ { 483 – 43 }
$D_y = ¿$ 440

Mencari Determinan D_z:

$$|D_z| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -5 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 29 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 1 \end{array}\right|$$

$D_z = ¿$ { [(3 x 5 x 8) + (-2 x 29 x 4) + (-5 x 1 x 1)] – [(-2 x 1 x 8) + (3 x 29 x 1) + (-5 x 5 x 4)] }
$D_z = ¿$ { [120 - 232 – 5] - [-16 + 87 – 100]
$D_z = ¿$ -117 + 29
$D_z = ¿$ -88

Langkah 3

Tentukan nilai variabel x, y, dan z dengan rumus berikut:

$$x = \frac{|D_x|}{|D_A|} = \frac{176}{88} = 2$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D_A|} = \frac{440}{88} = 5$$

$$z = \frac{|D_Z|}{|D_A|} = \frac{-88}{88} = -1$$

Jadi, penyelesaiandarisistempersamaantersebutadalah$x = 2$, $y = 5$, dan$z = -1$, atauhimpunanpenyelesaiannyaadalah {(2, 5, -1

2.3. KegiatanPembelajaran 3. MasalahKontekstual yang Barkaitandengan SPLTV

KonsepSistemPersamaan Linear TigaVariabel (SPLTV) sudahkitatemukandarimasalah yang bersumberdarifaktadanlingkunganbudayakita. Dalamperhitunganmatematikadankehidupansehari-hari, seringkalisuatumasalahdapatditerjemahkankedalam model matematika yang berbentuksistempersamaan.Langkah yang diperlukanadalahkitaharusmampumengidentifikasibahwakarakteristikmasalah yang akandiselesaikanberkaitandenganSistemPersamaan Linear TigaVariabel (SPLTV). Setelahmasalahnyateridentifikasi, penyelesaianselanjutnyamelaluilangkah-langkahseb……………

Misalkan : x = Harga 1 pisang goreng

y = Harga 1 donat

z = Harga 1 roti

(1)Bintang membeli 2 pisang goreng, 1 donat, dan 2 roti seharga Rp24.000,00 diperoleh persamaan:
$2x+y+2z=24.000$... (1)

(2)Evi membeli 1 pisang goreng, 3 donat, dan 1 roti seharga Rp22.000,00 diperoleh persamaan:
$x+3y+z=22.000$…..(2)

(3)Irene membeli 3 pisang goreng, 2 donat, dan 1 roti seharga Rp23.000,00 diperoleh persamaan:
$3x+2y+z=23.000$ ....(3)

Cara pertama yang kita lakukan adalah mengeliminasikan variabel z dari persamaan (1) dan (2).

$2x+y+2z=24.000|\times 1|2x+y+2z=24.000$

$x+3y+z=22.000|\times 2|2x+6y+2z=44.000-¿$

$-5y=-20.000$

$\leftrightarrow y=4000$

Cara kedua yang kita lakukan adalah mengeliminasikan variabel z juga dari persamaan (2) dan (3).

$x+3y+z=22.000$

$3x+2y+z=23.000-¿$

$-2x+y=-1.000$

$-2x+4.000=-1.000$

$-2x=-5000$

$x=2.500$

Substitusikanx=2.500 dan y=4.000kepersamaan (1),

$2x+y+2z=24.000$

$2(2.500)+(4.000)+2z=24.000$

$9.000 + 2z = 24.000$
$2z = 15.000$
$z = 7.500$

Harga 2 pisang, 3 donat, dan 2 roti ataudalambentukvariabelnya, 2x + 3y + 2z, adalah;

$2x + 3y + 2z = ¿$

$2(2.500) + 3(4.000) + 2(7.500) = ¿$

$5.000 + 12.000 + 15.000 = 32.000$

Jadi harga 2 pisang goring, 3 donat, dan 2 roti sebesar Rp32.000,00

Contoh 8

UangEvi Rp60.000,00 lebihbanyakdarijumlahuangBintangditambahdua kali uang Iren. JumlahuangEvi, Bintang, dan IrenRp300.000,00. SelisihuangBintangdan Irene Rp15.000,00. JumlahuangEvidanBintangadalah …

Cara Penyelesaian:

Misalkan : $x = ¿$ Uang Evi

$y = ¿$ Uang Bintang

$z = ¿$ Uang Iren

(1) UangEvi Rp60.000,00 lebihbanyakdarijumlahuangBintangditambahdua kali uang Iren, diperolehpersamaan:
$x = 60.000 + y + 2z$………………………… (1)

(2) JumlahuangEvi, Bintang, dan Iren sebesar Rp300.000,00 diperolehpersamaan:
$x + y + z = 300.000$ ………………………… (2)

(3) SelisihuangBintangdan Irene Rp15.000,00. Diperolehpersamaan:
$y - z = 15.000$ ………………………………… (3)

Cara pertama yang kitalakukanadalahsubstitusikanpersamaan (1) kepersamaan (2)

$x + y + z = 300.000$
$(60.000 + y + 2z) + y + z = 300.000$
$2y + 3z = 240.000$ ………… (4)
Cara kedua yang kitalakukanadalahmengeliminasikanvariabel z jugadaripersamaan (3) dan (4).

$y - z = 15.000 | \times 2 | 2y - 2z = 30.000$
$2z + 3z = 240.000 | \times 1 | 2z + 3z = 240.000 - ¿$
$-5z = -210.000$
$z = 42.000$

Substitusikan$z = 42.000$ ke persamaan (3), diperoleh;

$y - z = 15.000$

$y - 42.000 = 15.000$

$y = 57.000$

Substitusikan $y = 57.000$ dan $z = 42.000$ ke persamaan (1), sehingga diperoleh:

$x = 60.000 + y + 2z$

$x = 60.000 + (57.000) + 2(42.000)$

$x = 201.000$

Kita sudah menemukan nilai varibel masing-masing, sehinggaJumlahuangEvi (x) danBintang (y) ataudalampersamaan $x + y$ adalah Rp258.000,00.

2.4. KegiatanPembelajaran 4.Rangkuman

1. SistemPersamaan Linear TigaVariabel (SPLTV) adalahsistem yang melibatkantigavariabel yang berbeda.

2. BentukUmum SPLTV:
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

3. SPLTV dapatdiselesaikandenganmetodesubstitusi, metodeeliminasi, metodedeterminan, danmetodegabungankeduanya.

4. Penyelesaian SPLTV denganmetodeDeterminan(aturan Cramer)
$x=\frac{D_x}{D_A}, y=\frac{D_y}{D_A}, z=\frac{D_z}{D_A}$

5. Ada tigakemungkinanpenyelesaian SPLTV:
   a. Jika $D\neq 0$, maka SPLTV mempunyai sebuah penyelesaian yang khas,
   b. Jika $D_x=0, D_x\neq 0, D_y\neq 0, D_z\neq 0$, maka SPLTV tidak mempunyai penyelesaian,
   c. Jika $D=0, D_x=0, D_y=0, D_z=0$, maka SPLTV mempunyai penyelesaian yang tak hingga banyaknya.

2.5KegiatanPembelajaran 5. SoalDiskusiKelompok

1. Tentukanhimpunanpenyelesaiandarisistem linear berikut.
   $x+3y-z=3$
   $x+2y+3z=-2$
   $x+y-z=1$
   Denganmenggunakanmetodeeliminasidansubstitusi!
   Jawab :
   Eliminasivariabelx daripersamaan (1) dan (2)
   $x+3y-z=3$
   $x+2y+3z=-2-¿$
   ....$-¿$....=5 .... (4)
   Eliminasivariabel x daripersamaan (2) dan (3)
   $x+2y+3z=-2$

$x+y-z=1-¿$

.... + ... $¿-3$ .... (5)

Eliminasivariabel y daripersamaan (4) dan (5)

...... + ... = 5

...... + ... $= -3-¿$

$-8z=¿$ .....

$z=¿$ .....

Untuk$z=¿$..... maka $y-4z=5$

$y-4(....)=5$

$y+....=5$

$y=....$

Untuk$z=¿$..... dan $y=¿$..... , maka $x+3y-z=3$

$x+3(....)-(....)=3$

$x+....+....=3$

$x=....$

Jadi, Himpunanpenyelesaiannyaadalah { (.... , ... , ...) }.

2. Tentukanhimpunanpenyelesaiandarisistempersamaan linear berikut.

$2x-2y-2z=9$

$x-6y-3z=-28$

$3x+2y+z=16$

DenganmenggunakanmetodeEliminasidanSubstitusi!

Jawab :

Eliminasivariabel ydaripersamaan (1) dan (2)

$2x-2y-2z=9|\times ...|$.... $-¿$.... $-¿$ ....= ....

$x-6y-3z=-28|\times ...|$.... $-¿$ .... $-¿$ .... = ... $-¿$

.... $-¿$ .... = ...(4)

Eliminasi variabel y dari persamaan (1) dan (3)

$2x-2y-2z=9$

$3x+2y+z=16+¿$

.... $-¿$ .... = ...(5)

Dari persamaan (4) dan (5) terbentuklah SPLDV, Eliminasi variabel x dari persamaan tersebut.

.... $-¿$ .... = ...
.... $-¿$ .... = ... $-$
$-2z=\ldots.$
$z=\ldots.$

Substitusikan z = ... ke persamaan (5) maka;
$5x-\ldots.=\ldots.$
$5x=\ldots.$
$x=\ldots.$

Substitusikan z = ... dan x = ... ke persamaan (1) maka;
$2(\ldots)-2y-2(\ldots)=9$
$-2y+\ldots.=9$
$y=\ldots$

Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah { (.... , ... , ...) }

3. Tentukan Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$x+2y-4z=3$
$x-5y+2z=2$
$3x-6z=9$
Dengan menggunakan metode Eliminasi dan Substitusi!
Jawab :
Persamaan (3), $3x-6z=9$ bisa disederhanakan menjadi .... + ... = ...

Eliminasi variabel y dari persamaan (1) dan (2)
$x+2y-4z=3|\times\ldots|$ .... + ... $-¿$ .... = ...
$x-5y+2z=2|\times\ldots|$ .... $-¿$ .... + ... = ...
.... $-¿$ .... = ...(4)
Eliminasi variabel z dari Persamaan (3) dan (4)
.... $-¿$ .... = ... $|\times\ldots|$ .... $-¿$ .... = ...
.... + ... = ... $|\times\ldots|$ .... $-¿$ .... = ...

....z = ...
z = ...

Substitusi z = ... ke persamaan (3), diperoleh;
.... + ...(....) = ...
x $-¿$ .... = ...
x = ...
Substitusikan z = ... dan x = ... , ke persamaan (1), diperoleh;
(....) + 2y – 4(....) = 3
2y = ...
y = ...

Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah { (.... , ... , ...) }

4. Tentukan Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$x-4y+z=1$
$x+y+2z=-4$
$-2x+y-z=5$
Dengan menggunakan metode Substitusi!
Jawab :
Ubahlah persamaan (1) menjadi bentuk eksplisit variabel x, dimana x = ...$-¿$ .... + ...

Substitusi x = ... $-¿$ .... + ... ke persamaan (2) dan (3), diperoleh,
(....) + y + 2z = -4
.... + ... = ... …(4)

-2(....) + y – z = 5
.... + ... = ... …(5)

Persamaan (4) dan (5) akan membentuk SPLDV, eliminasi variabel z.
.... + ... = ...
.... + ... = ...$-¿$
....y = ...

y = ...

Substitusikan y = ... ke persamaan (4), diperoleh;

5(....) + z = ...

z = ...

Substitusikan y = ... dan z = ... , ke bentuk eksplisit variabel x, diperoleh,

x = 4(....) – (....) + 1

x = ...

Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah { (.... , ... , ...) }

5. Tentukan Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

$5x+3y+z=2$

$3x+2y+z=3$

$4x+2y+z=1$

Dengan menggunakan Substitusi!

Jawab :

Ubahlah persamaan (1) menjadi bentuk eksplisit variabel z, dimana z = ... −¿ .... + ...

Substitusi z = ... −¿ …. + …. ke persamaan (2) dan (3), diperoleh;

3x + 2y + (..........) = 3

.... −¿ .... = ... … (4)

4x + 2y + (..........) = 1

.... −¿ .... = ... … (5)

Persamaan (4) dan (5) akan membentuk SPLDV, eliminasi variabel y:

.... −¿.... ¿ ....

.... −¿ .... ¿ ....

....x ¿ ....

x¿....

Substitusikan variabel x ¿.... ke persamaan (4), diperoleh;

....(....) - y ¿ ....

-y ¿ ....

y ¿ ....

Substitusikan variabel x = ... dan y = ... , ke bentuk eksplisit variabel z, diperoleh;
x = -5(....) – 3(....) + 2
x = ...

Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah { (.... , ... , ...) }

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$y+2z=-4$
$3x-2y=-7$
$2x+2y-3z=11$
Dengan menggunakan Substitusi!
Jawab :
Ubahlah persamaan (1) menjadi bentuk eksplisit variabel y, dimana y = ...−¿....

Substitusikan y = ... −¿ .... ke persamaan (2) dan (3), diperoleh;
3x – 2(..........) = -7
3x −¿.... = ... (4)

2x +¿ 2(..........) – 3z ¿ 11
2x −¿ .... ¿ .... (5)

Persamaan (4) dan (5) membentuk SPLDV, eliminasi variabel x, diperoleh;
....+¿ .... = ... $|\times \ldots|$ .... +¿ ....¿ ....
.... −¿.... = ...$|\times \ldots|$ .... −¿ .... ¿....
....z = ...
z = ...
Substitusi nilai z = ... ke persamaan (4)
3x +¿ 4 (....) = -15
3x ¿ ....
x ¿ ....
Substitusi nilai z ¿ .... ke bentuk eksplisit variabel y. Diperoleh;

y ¿ -2(....) – 4
y ¿ ...

Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah { (.... , ... , ...) }

7. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$x+2y-3z=8$
$4x-y+2z=0$
$3x+3y-4z=13$
DenganmenggunakanmetodeDeterminan!
Jawab :
Persamaandiatasbisadibuatmenjadipersamaanmatriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Tentukannilaideterminanmatriks A ¿¿), determinan *x* (D_x), determinan *y*, D_y, dan determinan $z(D_z)$ dengan permasalahan matriks berikut.

$$|D_A| = \left|\begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right|\begin{matrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{matrix}\right|$$

$|D_A|$ = { [(... + ... + ...) + (.... + ... + ….) + (.... + ... + ...)] – [(.... + ... + ….) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] }
$|D_A|$ = { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }
$|D_A|$ = { .... + ... }
$|D_A|$ = ...

$$|D_x| = \left|\begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right|\begin{matrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{matrix}\right|$$

$|D_x| = ¿$ { [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] – [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)]

$|D_x| = ¿$ { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }

$|D_x| = ¿$ { .... + ... }

$|D_x| = ¿$ ....

$$|D_y| = \left| \begin{array}{ccc|cc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right|$$

$|D_y| = ¿$ { [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) - (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] }

$|D_y| = ¿$ { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }

$|D_y| = ¿$ { .... + ... }

$|D_y| = ¿$ ....

$$|D_z| = \left| \begin{array}{ccc|cc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right|$$

$|D_z| = ¿$ { [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] – [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] }

$|D_z| = ¿$ { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }

$|D_z| = ¿$ { .... + ... }

$|D_z| = ¿$ ....

Lalukitabisamenemukanvariabel x, y, dan z denganrumusberikut;

$x = \frac{|D_x|}{|D_A|} = \frac{\cdots}{\cdots} =$ ....

$y = \dfrac{|D_y|}{|D_A|} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots.$

$z = \dfrac{|D_Z|}{|D_A|} = \dfrac{\dots}{\dots} = \dots.$

Jadi, Himpunanpenyelesaiannyaadalah { (.... , ... , ...) }

8. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
   $2x + y - z = -1$
   $x + 2y + z = 4$
   $3x - y + z = -4$
   DenganmenggunakanmetodeDeterminan!
   Jawab:
   Persamaandiatasbisadibuatmenjadipersamaanmatriks, yaitu:

   $$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

   Tentukannilaideterminanmatriks A ¿¿), determinan *x* (D_x), determinan *y*, D_y, dan determinan $z(D_z)$ dengan permasalahan matriks berikut.

   $$|D_A| = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{matrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{matrix}$$

   $|D_A|$ = { [(... + ... + ...) + (.... + ... + ….) + (.... + ... + ...)] – [(.... + ... + ….) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] }
   $|D_A|$ = { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }
   $|D_A|$ = { .... + ... }
   $|D_A|$ = ...

$$|D_x| = \left|\begin{array}{ccc|cc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right|$$

$|D_x| =$ ¿ { [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] – [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)]
$|D_x| =$ ¿ { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }
$|D_x| =$ ¿ { .... + ... }
$|D_x| =$ ¿ ....

$$|D_y| = \left|\begin{array}{ccc|cc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right|$$

$|D_y| =$ ¿ { [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) - (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] }
$|D_y| =$ ¿ { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }
$|D_y| =$ ¿ { .... + ... }
$|D_y| =$ ¿ ....

$$|D_z| = \left|\begin{array}{ccc|cc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right|$$

$|D_z| =$ ¿ { [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] – [(.... + ... + ...) + (.... + ... + ...) + (.... + ... + ...)] }
$|D_z| =$ ¿ { [.... + ... + ...] – [.... + ... + ...] }
$|D_z| =$ ¿ { .... + ... }
$|D_z| =$ ¿ ....

Lalukitabisamenemukanvariabel x, y, dan z denganrumusberikut;

$$x=\frac{|D_x|}{|D_A|}=\frac{\cdots}{\cdots}=\ldots.$$

$$y=\frac{|D_y|}{|D_A|}=\frac{\cdots}{\cdots}=\ldots.$$

$$z=\frac{|D_Z|}{|D_A|}=\frac{\cdots}{\cdots}=\ldots.$$

Jadi, Himpunanpenyelesaiannyaadalah { (.... , ... , ...) }

9. Tentukanhimpunanpenyelesaiandarisistempersamaan linear berikut.

$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=2$

$\frac{1}{x}-\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=3$

$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{2}{z}=3$

DenganmenggunakanmetodeEliminasidanSubstitusi!

Jawab :

Kita bisaubahbentukpersamaandiatasmenjadi SPLTV dengancarapermisalan.

Dimisalkan $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, dan $\frac{1}{z}=c$, maka sistem persamaan semula dapat dituliskan sebagai:

$a+2b+2c=2$

$a-2b-4c=3$

$3a-4b+2c=3$

Eliminasivariabel b daripersamaan (1) dan (2),

$a+2b+2c=2$

$a-2b-4c=3+¿$
.... $-¿$ .... $¿$ .... (4)
Eliminasi variabel b dari persamaan (1) dan (3),
$a+2b+2c=2|\times\ldots|$ .... $+¿$ .... $+¿$ ....$¿$ ....
$3a-4b+2c=3|\times\ldots|$ .... $-¿$ .... $+¿$ .... $¿$ .... $-¿$
.... + ... = ...(5)
Eliminasi variabel c dari persamaan (4) dan (5),
.... $-¿$ .... $¿$ ....
.... $+¿$.... $¿$ .... $+¿$
....$a=¿$ ....
$a=¿$ ....

Substitusi a = ... ke persamaan (4),
2(....) $-¿$ 2c $¿$ 5
-2c $¿$....
c $¿$....
Substitusikanvariabel a = ... dan c = ... , kepersamaan (1),
.... $+¿$ 2b $+¿$ 2 (....) $¿$ 2
2b $¿$ ....
b $¿$ ....

lalukitakembalikanhasil a, b, dan c kepermisalan,
$\frac{1}{x}=\ldots$
$x=\ldots$
$\frac{1}{y}=\ldots$
$y=\ldots$

$\frac{1}{z}=\ldots$
$z=\ldots$

Jadi, Himpunanpenyelesaiannyaadalah {(.... , ... , ...)}
10. Tentukanhimpunanpenyelesaiandarisistempersamaan linear berikut.

$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{4}{z}=1$

$\frac{-1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{12}{z}=0$

$\frac{2}{x}+\frac{8}{y}+\frac{4}{z}=-1$

DenganmenggunakanmetodeEliminasidanSubstitusi!

Jawab :

Untukmenjawabsoalini, gunakanpermisalan $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$,

dan $\frac{1}{z}=c$.

$a+2b+4z=1$

$-a+4b+12z=0$

$2a+8b+4c=-1$

Eliminasivariabel a daripersamaan (1) dan (2),

$a+2b+4c=1$

$-a+4b+12c=0+¿$

.... $+¿$ .... ¿ .... (4)

Eliminasi variabel a dari persamaan (1) dan (3),

$a+2b+4c=1|\times\ldots|$ .... $+¿$ .... $+¿$ ....¿ ....

$2a+8b+4c=-1|\times\ldots|$ .... $+¿$ .... $+¿$ .... ¿ .... $-¿$

.... $+¿$ .... ¿ ....(5)

Eliminasivariabel c daripersamaan (4) dan (5),

.... $-¿$ .... ¿ ....

.... $+¿$.... ¿ .... $+¿$

....$b=¿$ ....

$b=¿$ ....

Substitusikan b = ... ke persamaan (4), diperoleh:

.... (....) $+¿$ .... ¿ ....

.... $+¿$ ....c ¿ ....

c ¿ ....

Substitusikan b = ... dan c = ... ke persamaan (1), diperoleh:

$a+2(\ldots)+4(\ldots)=1$

$a + ... + ... = 1$
$a = ...$
Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah { (.... , ... , ...)}.

11. Akbar, Bedu, Cak Lontong, dan Deny pergi ke toko ATK membeli bolpen, pensil, dan penghapus dengan merek yang sama. Akbar membeli 3 bolpen, 2 pensil, dan 2 penghapus dengan harga Rp30.000,00. Bambang membeli 2 bolpen, 3 pensil, dan 1 penghapus dengan harga Rp23.000,00. Cak Lontong membeli 1 bolpen, 1 pensil, dan 3 penghapus dengan harga Rp19.000,00. Jika Deny membeli 1 bolpen, 5 pensil, dan 1 penghapus, dia harus membayar ...
Jawab :
Dengan memisalkan bolpen = x, pensil = y, dan penghapus = z, buat permasalahan diatas dalam bentuk model matematika.
.... +¿ .... +¿ .... ¿ .... (1)
.... +¿ .... +¿ ....¿ .... (2)
.... +¿ .... +¿ .... ¿.... (3)

Eliminasi variabel z dari persamaan (1) dan (2),
.... +¿ .... +¿ .... ¿ .... |× ...| .... +¿ .... +¿.... ¿ ....
....+¿ .... +¿ .... ¿ .... |× ...|.... +¿ .... +¿.... ¿ .... −¿
.... −¿.... = ...(4)
Eliminasi variabel z dari persamaan (2) dan (3),
.... +¿ .... +¿ .... ¿ .... |× ...| .... +¿ .... +¿.... ¿ ....
....+¿ .... +¿ .... ¿ .... |× ...| .... +¿ .... +¿ .... ¿ .... −¿
.... +¿ .... = ...(5)
Persamaan (4) dan (5) akan membentuk SPLDV. Eliminasi variabel x, diperoleh:
.... −¿ .... ¿ .... |× ...| .... −¿ .... ¿....
.... +¿ .... ¿.... |× ...|.... −¿ ....¿ .... +¿

....y ¿ ....
y ¿ ....
Substitusikan y = ... ke persamaan (4),
.... − 4(....) ¿ ....
-x−¿ .... ¿ ....
-x ¿ ....
x ¿....

Substitusi x = ... dan y = ... ke persamaan (2),
$2(....)+3(....)+z=23.000$
$....+....+z=....$
$z=....$

Jadi harga bolpen adalah .... , harga pensil .... , harga penghapus .... , sehingga Deny membeli 1 bolpen, 5 pensil, dan 1 penghapus sebesar ....

12. Akbar, Bedu, Cak Lontong, dan Deny membeli sembako di toko yang sama. Akbar membeli 2 kg beras, 2 kg minyak goreng, dan 3 kg gula pasir seharga Rp71.000,00. Bambang membeli 1 kg beras, 4 kg minyak goreng, dan 2 kg gula pasir seharga Rp66.000,00. Cak Lontong membeli 3 kg beras dan 1 kg minyak goreng seharga Rp44.500,00. Jika Deny membeli 1 kg beras dan 1 kg pasir, besar uang yang harus dibayarkan adalah ....
Jawab :
Dengan memisalkan harga 1 kg beras = x, harga 1 kg minyak goreng = y, dan harga 1 kg gula pasir = z, buat permasalahan diatas dalam bentuk model matematika.
.... +¿ .... +¿ .... ¿ .... (1)
.... +¿ .... +¿ ....¿ .... (2)
.... +¿ .... +¿ .... ¿.... (3)
Eliminasi variabel z dari persamaan (1) dan (2),

$.... + ¿ .... + ¿ .... ¿ ....$ $|\times ...|$ $.... + ¿ .... + ¿.... ¿ ....$

$....+ ¿ .... + ¿ .... ¿ ....$ $|\times ...|$ $.... + ¿ .... + ¿ .... ¿ .... - ¿$

$$\underline{.... - ¿.... = ...} \quad ...(4)$$

Persamaan (3) dan (4) akan membentuk SPLDV. Eliminasi variabel x, diperoleh:

$... - ¿ .... ¿ ....$ $|\times ...|$ $.... - ¿ .... ¿....$

$.... + ¿ .... ¿....$ $|\times ...|$ $.... - ¿ ....¿ .... + ¿$

$$\underline{....y = ...}$$

$$y = ...$$

Substitusi y = ... ke persamaan (3)

$3x + ... = ...$

$3x = ...$

$x = ...$

Substitusi x = ... dan y = ... ke persamaan (1),

$2(....) + 2(....) + 3z = 71.000$

$.... + ... + 3z = ...$

$3z = ...$

$z = ...$

Jadi, besar uang yang harus dibayarkan untuk 1 kg beras dan 1 kg gula pasir adalah ....

13. Umur Deksa 4 tahun lebih tua dari umur Elisa. Umur Elisa 3 tahun lebih tua dari umur Firda. Jika jumlah umur Deksa, Elisa, dan Firda 58 tahun, jumlah umur Deksa dan Firda adalah ....

    Jawab :

    Misalkan umur Deksa adalah d tahun, umur Elisa adalah e tahun, dan umur Firda adalah f tahun, nyatakan dalam model matematika,

    $d = ... + ... \leftrightarrow ... - ... = ...$ (1)

    $e = ... + ... \leftrightarrow ... - ... = ...$ (2)

    $.... + ¿ .... + ¿ .... ¿ ....$ (3)

Eliminasi variabel d dari persamaan (3) dan (1):

.... +¿ .... +¿ .... ¿ .... (3)

.... −¿.... ¿ ... −¿ (1)

.... + ... = ... (4)

Eliminasi variabel f dari persamaan (4) dan (2):

.... +¿ .... ¿ ....

.... −¿ .... ¿.... +¿

....e ¿ ....

e ¿ ....

Substitusi e = ... ke persamaan (1),

.... −¿.... ¿ ....

d ¿ ....

Substitusi e = …. ke persamaan (2),

…. - …. ¿ .....

f ¿ ….

Jadi, jumlah umur Deksa dan Firda adalah …..

d +¿ f = ... +¿ …. ¿ ….

14. Anita, Beti, Desi, dan Silvia berbelanja di sebuah toko serba ada. Anita membeli 2 bungkus kecap Inggris, 1 bungkus kecap asin, dan 3 bungkus kecap manis. Anita harus membayar Rp21.100,00. Beti membeli 2 bungkus kecap Inggris, 1 bungkus kecap asin, dan 2 bungkus kecap manis. Beti harus membayar Rp18.100,00. Desi membeli 1 bungkus kecap Inggris, 2 bungkus kecap asin, dan 1 bungkus kecap manis. Desi harus membayar Rp12.800,00.
    Silvia membeli 1 bungkus kecap Inggris, 1 bungkus kecap asin, dan 1 bungkus kecap manis. Berapa ia harus membayarnya?
    Jawab :

Cara penyelesaian menggunakan Substitusi

Misalkan harga untuk sebungkus kecap Inggris adalah x rupiah, harga untuk sebungkus kecap asin adalah y rupiah, dan harga untuk sebungkus kecap manis adalah z rupiah. Nyatakan dalam model matematika,

.... +¿ .... +¿ .... ¿ .... (1)

.... +¿ .... +¿ ....¿ .... (2)

.... +¿ .... +¿ .... ¿.... (3)

Ubahlah persamaan (1) menjadi persamaan Eksplisit variabel y, dimana y = …. −¿…. +¿ ….

Substitusi y = …. −¿ .... + …. ke persamaan (2),

.... +¿ (....................) +¿ .... ¿ ....

.... −¿.... −¿.... +¿ .... +¿.... ¿ ....

-z ¿ ....

z¿ ....

Substitusi z ¿ …. ke persamaan (3),

.... +¿2(....................) +¿ .... ¿ ....

.... −¿ ....−6z+¿ .... +¿z¿....

-3x −¿ 5(....) ¿ ....

-3x ¿....

x ¿ ....

Substitusi x ¿ .... dan z ¿.... ke persamaan (3),

(....) +¿ 2y +¿ (....) = 12.800

2y +¿ .... ¿....

2y ¿ ....

y ¿ ....

Jadi, jika Silvia membeli 1 bungkus kecap Inggris, 1 bungkus kecap asin, dan 1 bungkus kecap manis, maka ia harus membayar ....

15. Aqilah, Shilviana, dan Rizki menabung di bank. Jumlah uang tabungan Shilviana dan dua kali uang tabungan Rizki, Rp150.000, lebih banyak dari tabungan Aqilah. Jumlah uang tabungan Aqilah dan Rizki sebesar

Rp1.450.000,00. Jumlah uang tabungan mereka bertiga sebesar Rp2.000.000,00. Jumlah uang Shilviana dan Rizki sebesar ....

Jawab :

Misalkan banyak uang tabungan Aqilah adalah x rupiah, banyak uang tabungan Shilviana adalah y rupiah, dan banyak uang tabungan Rizki adalah z rupiah.

.... + ... = ... + ... ↔ .... - .... - .... = ... (1)

.... + ... = ... (2)

.... + ... + ... = ... (3)

Substitusikan persamaan (2) ke dalam persamaan (3).

.... + ... + ... = ...

.... + (.... + ...) = ...

.... + ... = ...

y = ….

Substitusikan y = ... ke dalam persamaan (1).

.... + ... - .... = ...

.... – (..........) + ... = ...

.... - .... = ... (4)

Eliminasi x dari persamaan (2) dan (4).

.... +¿ .... ¿ ....

.... −¿ .... ¿.... +¿

....z ¿ ….

z ¿ ….

Jumlah uang Shilviana dan Rizki y + z = ... ,Jadi, jumlah tabungan Shilviana dan Rizki sebesar ....

2.6 KegiatanPembelajaran 6. SoalMandiri

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

$x-2y+2z=-1$
$2x-y-3z=9$
$3x+2y-z=3$
Dengan menggunakan metode Substitusi!

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$x+y+2z=7$
$4x+2y+2z=0$
$2x+y-2z=-9$
Dengan menggunakan metode Substitusi!

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$2x+2y+3z=22$
$3x-y+4z=19$
$5x+y+2z=21$
Dengan menggunakan metode Eliminasi!

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$x-2y+3z=10$
$2x+3y-z=-1$
$2x+y-2z=11$
Dengan menggunakan metode Eliminasi!

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
$3x-2y+4z=10$
$2x+3y-6z=-2$
$4x-2y+5z=14$
Dengan menggunakan metode Eliminasi dan Substitusi!

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
   $5x+3y-3z=1$
   $4x-2y+z=10$
   $3x+y-z=3$
   Dengan menggunakan metode Determinan!

7. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
   $x+y+z=4$
   $2x-y-2z=3$
   $4x-3y-3z=2$
   Dengan menggunakan metode Determinan!

8. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
   $x-y+z=6$
   $2x-z=1$
   $3x-2y+3z=17$
   Nilai dari $\frac{x \times y \times z}{x+y+z}$ adalah ....

9. Himpunan penyelesaian sistem persamaan:
   $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6$
   $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=3$
   $\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=7$
   Adalah {(x,y,z)}. Nilai dari $(x+2y+3z)$ adalah ….

10. Himpunan penyelesaian sistem persamaan:
   $\frac{6}{x+2}+\frac{15}{y+3}+\frac{2}{z+1}=8$

$$\frac{4}{x+2}+\frac{5}{y+3}+\frac{3}{z+1}=6$$
$$\frac{8}{x+2}-\frac{10}{y+3}+\frac{5}{z+1}=5$$
Adalah {(x,y,z)}. Nilai $x+y-z$ adalah ....

11. Himpunan penyelesaian sistem persamaan:
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x^2-y^2+2x^2=2$$
$$2x^2+y^2-z^2=3$$
Adalah {(x,y,z)}. Nilai x,y,z tersebut adalah ....

12. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp36.500,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?

13. Diketahui tiga bilangan a, b, dan c. Rata-rata dari ketiga bilangan itu sama dengan 16. Bilangan kedua ditambah 20 sama dengan jumlah bilangan lainnya. Bilangan ketiga sama dengan jumlah bilangan yang lain dikurang empat. Carilah bilangan-bilangan itu!

14. Jumlah umur Pak Tarno, Bu Tarno, dan Cintia sama dengan 117 tahun. Umur Pak Tarno 5 tahun lebih tua dari umur Bu Tarno. Umur Cintia 23 tahun lebih muda dari umur Bu Tarno. Misalkan umur Pak Tarno adalah x tahun, umur Bu Tarno adalah y tahun, dan umur Cintia

adalah z tahun. Maka masing-masing umur mereka adalah ....

15. Seorang penjual beras mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri atas 1 kg jenis A, 2 kg jenis B, dan 3 kg jenis C dijual dengan harga Rp19.500,00. Campuran beras kedua terdiri dari 2 kg jenis A dan 3 kg jenis B dijual dengan harga Rp19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri atas 1 kg jenis B dan 1 kg jenis C dijual dengan harga Rp6250,00. Harga beras jenis manakah yang paling mahal?

MODUL 3

PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA DAN TIGA VARIABEL

A. Capaian Pembelajaran

mahasiswa di harapkan mampu mendefinisikan dan mengerti konsep pertidaksamaan linear dua dan tiga variabel.

B. Bahan kajian

1. Pertidaksamaan linear dua variabel
2. Pertidaksamaan linear tiga variabel

MODUL 3

PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA DAN TIGA VARIABEL

3.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Persamaan linear duavariabel adalah persamaan garis lurus yang mempunyai 2 variabel atau peubah. Gabungan dua atau lebih pertidaksamaan liniear di sebut system pertidaksamaan linier. Himpunan penyelesaian petidaksamaan itu dapat di tentukan dengan menggunakan metode grafik dan uji titik. Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan liniear ax + by ≥ c dengan metode grafik dan uji titik, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Gambar grafik ax + by = c
   Contoh: $2x+3y=12$
   $5x+3y=15$
2. Melakukan uji titik, yaitu mengambil sebarang titik (x,y) yang tidak terletak pada garis $ax+by=c$, kemudian mensubstitusikan pertidaksamaan $ax+by\geq c$

Pertidaksamaan	$b>0$	$b<0$
$ax+by\geq c$	Daerah himpunan penyelesaian berada dikanan (diatas) garis ax+by=c	Daerah himpunan penyelesaian berada dikiri (dibawah) garis ax+by=c
$ax+by\leq c$	Daerah himpunan penyelesaian berada dikiri (dibawah) garis	Daerah himpunan penyelesaian berada dikanan (diatas) garis ax+by=c

	ax+by=c	

Pertidaksamaan linear dua variable adalah suatu kalimat terbuka matematika yang didalamnya memuat dua variabel. Dengan masing-masing variabel berderajat satu serta dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan. Tanda ketidaksamaan yang dimaksud disini antara lain : <, >, ≤, ≥.

Maka, bentuk dari pertidaksamaan linear bisa kita tuliskan seperti berikut ini:

- $ax+by>c$
- $ax+by<c$
- $ax+by\geq c$
- $ax+by\leq c$

pertidaksamaan linear dua variabel berbeda dengan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel yang berwujud himpunan pasangan titik – titik. Atau apabila kita gambar grafiknya akan berupa garis lurus. Penyelesaian, dari pertidaksamaan linear dua variabel berupa daeeah penyelesaian . Dalam praktiknya penyelesaian pertidaksamaan linear bisa berwujud daerah di arsir atau sebaliknya penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel yang berupa daerah bersih.

Pertidaksamaan linear merupakan pertidaksamaan yang mana peubah bebasnya berbentuk linear (pangkat satu). Kalian tentunya masih ingatkan beberapa kalimat matematika di bawah ini :

1. $2x\geq 4$; pertidaksamaan linear satu peubah
2. $3x+y<0$; pertidaksamaan linear dua peubah
3. $x-2y\leq 3$; pertidaksamaan linear dua peubah
4. $x+y-2z>0$; pertidaksamaan linear tiga peubah

Gabungan dari dua atau lebih pertidaksamaan linear dua peubah disebut system pertidaksamaan linear dua peubah.

Sifat-Sifat Pertidaksamaan Linear

1. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama

   Jika $a<b$ maka:

   $$a+c<b+c$$

$$a-c<b-c$$

2. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.

   Jika $a<b$, dan c adalah bilangan positif, maka:

   $$a\times c<b\times c$$
   $$\frac{a}{b}<\frac{b}{c}$$

3. Tanda pertidaksamaan akan berubah jika kedua ruas pertidaksamaan dikali atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama

   ` Jika ¿b , dan c adalah bilangan negatif, maka:

   $$a\times c>b\times c$$
   $$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$$

4. Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika kedua ruas positif masing-masing dikuadratkan

   Jika $a<b$, a dan b sama-sama positif, maka:

   $$a^2<b^2$$

Penyelesaian Pertidaksamaan

1. Pindahkan semua suku ke ruas kiri atau nolkan ruas kanan

   Contoh **:** $x^2-5x>6$

   $$x^2-5x-6>0$$

2. Tentukan nilai pembuat nol (akar-akar) dengan mengubah tanda ketaksamaan menjadi tanda persamaan '=' lalu faktorkan

   $$x^2-5x-6=0$$
   $$(x-6)(x+1)=0$$
   $$x_1=6\,dan\,x_2=-1$$

3. Tuliskan nilai pembuat nol tersebut pada garis bilangan dan tentukan tanda setiap interval (- atau + setiap\ daerah), kemudian arsir daerah yang sesuai **(**>untuk +, < untuk -)setelah itu tulis HP.

   *catatan : disarankan untuk memilih nilai yang mudah dihitung dalam melakukan uji interval

4. Mengambil titik uji 0

$\mathbf{0^2 - 5(0) - 6 = -6}$, karena hasil bernilai negative maka untuk daerah interval kedua tempat titik 0 bernilai negative.
$\mathbf{-6 < 0}$ sedangkan hasil harus > 0, maka daerah yang diarsir adalah daerah +. (Jangan lupa jika bertanda ><, maka bulatan digaris bilangannya tidak hitam penuh)

Terdapat 3 Metode dalam mengerjakan Pertidaksamaan Linear dua Variabel:

a. Metode Substitusi

   Metode substitusi, yaitu metode atau cara menyelesaikan Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel dengan mengganti salah satu peubah atau variabel.
   Berikut ini langkah – langkah untuk menyelesaikan Sistem pertidaksamaan linear dua variabel menggunakan metode Substitusi yaitu:

   1. Ubahlah salah satu dari persamaan menjadi bentuk $x \geq cy + d$ atau $y \geq ax + b$
   2. a, b, c, dan d adalah nilai yang ada pada persamaan
   3. Triknya kalian harus mencari dari 2 persamaan carilah salah satu persamaan yang termudah
   4. Setelah mendapatkan persamaannya substitusi kan nilai x atau y
   5. Selesaikan persamaan sehingga mendapatkan nilai x ataupun y
   6. Dapatkan nilai variabel yang belum diketahui dengan hasil langkah sebelumnya

   Contoh 1. Tentukan Himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini $x + 3y \leq 15$ dan $3x + 6y \leq 30$

   Penyelesaian :

   Diketahui :
   $x + 3y \leq 15$
   $3x + 6y \leq 30$

Jawab:

Langkah Pertama : Ubah salah satu persamaan, carilah yang termudah

$x+3y\leq 15 \rightarrow x\leq -3y+15$

Langkah Kedua : Subsititusi nilai x = -3y + 15 ke dalam persamaan kedua untuk mencari nilai y , maka hasilnya sebagai berikut :

$3x+6y\leq 30$

$3(-3y+15)+6y\leq 30$

$-9y+45+6y\leq 30$

$-3y\leq 30-45$

$-3y\leq -15$

$y\leq 5$

Langkah Ketiga :Selanjutnya untuk mencari nilai x maka, gunakan salah satu persamaan boleh persamaan pertama atau kedua :

Dari Persamaan Pertama :

$x+3y\leq 15$

$x+3(5)\leq 15$

$x+15\leq 15$

$x\leq 0$Dari Persamaan Kedua :

$3x+6y\leq 30$

$3x+6(5)\leq 30$

$3x+30\leq 30$

$3x\leq 0$

$x\leq 0$

Langkah Keempat : Maka nilai Jadi HP = $\{0,5\}$

Contoh 2. Carilah himpunan penyelesaian dari $3a+b=5$ dan $2a-b=5$ adalah……

Penyelesaian:

Diketahui:

$3a+b=5$

$2a-b=5$

Ditanya: Himpunan penyelesaiannya?

$3a+b=5$
$2a-b=5+¿$
$5a=10$
$a=\frac{10}{5}$
$a=2$
Substitusikan $a=2$ ke persamaan (1)
$3a+b=5$
$3(2)+b=5$
$6+b=5$
$b=5-6$
$b=-1$

b. Metode Eliminasi

Metode eliminasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk memecahkan atau mencari himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel dengan cara menghilangkan (mengeliminasi) salah satu variabelnya. Jika variabelnya x dan y, untuk menentukan variabel x kita harus mengeliminasi variabel y terlebih dahulu, atau sebaliknya, bila ingin mencari variabel y maka kita harus menghilangkan variabel x terlebih dahulu.

Perlu diingat, untuk mengeliminasi suatu variabel harus variabel tersebut memiliki koefisien yang sama. Jadi jika koefisien variabelnya belum sama maka terlebih dahulu menyamakan koefisiennya dengan cara mengalikan atau membaginya. Kemudian baru bisa menentukan variabel yang lain yang akan ditentukan. Jadi dalam metode eliminasi anda memerlukan dua kali mengeliminasi variabel. Agar kalian lebih mudah memahaminya, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh 1. Carilah nilai x dan y dari$2x+3y=8$ dan $3x-5y=-7$

Penyelesaian:
$2x+3y=8 \quad [\times 3]\ 6x+9y=24$
$3x-5y=-7\ [\times 2]\ 6x-10y=-14\ \underline{-}$

$$19y = 38$$
$$y = 2$$

$2x + 3y = 8 \quad [\times 5] \; 10x + 15y = 40$
$3x - 5y = -7 \; [\times 3] \; 9x - 15y = -21 + ¿$
$$19x = 19$$
$$x = 1$$
Hasil Penyelesaian = $\{(1,2)\}$

Contoh 2. Harga 3 celana dan 2 baju adalah Rp. 280.000,00,- sedangkan harga 1 celana dan 3 baju di tempat dan model yang sama adalah Rp. 210.000,00,-. Harga sebuah celana adalah…….

Penyelesaian:

Diketahui:
Misal: x = harga celana
Y = harga baju
$3x + 2y = 280.000$
$x + 3y = 210.000$

Ditanya: harga sebuah celana?

$3x + 2y = 280.000 | \times 3 | 9x + 6y = 840.000$
$x + 3y = 210.000 | \times 2 | 2x + 6y = 420.000 - ¿$
$$7y = 420.000$$
$$y = 60.000$$
Jadi, harga 1 buah celana adalah Rp. 60.000

c. Metode Eliminasi-Substitusi
jika kita mengerjakan soal dengan mencampurkan kedua metode tersebut, misalnya bolehkah ketika mencari variabel x kita menggunakan eliminasi dan ketika mencari variabel y kita gunakan substitusi ? Tentu saja boleh perhatikan contoh soal berikut.

Contoh 1. Carilah himpunan penyelesaian dari $x+4y=2$ dan $2x+3y=-6$ adalah……

Penyelesaian:

Diketahui:

$x+4y=2$

$2x+3y=-6$

Ditanya: Himpunan penyelesaian?

$x+4y=2 \mid \times 2 \mid 2x+8y=4$

$2x+3y=-6 \mid \times 1 \mid 2x+3y=-6-$¿

$$5y=10$$

$$y=\frac{10}{5}$$

$$y=2$$

Substitusikan $y=2$ ke $(x+4y=2)$

$x+4y=2$

$x+4(2)=2$

$x+8=2$

$x=2-8$

$x=-6$

Contoh 2. Himpunan penyelesaian dari $2x+3y=1$ dan $4x-3y=20$ adalah……

Penyelesaian:

Diketahui:

$2x+3y=1$

$4x-3y=20$

Ditanya: Himpunan Penyelesaian (Hp)?

Eliminasi kedua persamaan dengan cara di tambah

$2x+3y=1$

$4x-3y=20+$¿

$6x=21$

$x=\frac{21}{6}$

$x=\frac{7}{2}$

Substitusi $x=\frac{7}{2}$ ke persamaan $(2x+3y=1)$

$2x+3y=1$

$2\left(\frac{7}{2}\right)+3y=1$

$7+3y=1$

$3y=1-7$

$3y=-6$

$y=\frac{-6}{3}$

$y=-3$

Himpunan penyelesaian dari kedua persamaan tersebut adalah

Hp=$\left\{\frac{7}{2},-2\right\}$

3.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Sistem Pertidaksamaan linear tiga Variabel

Pertidaksamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan memuat tiga variabel. Ada beberapa cara yang sering digunakan dalam menyelesaikannya yakni diantaranya adalah cara eliminasi, substitusi, gabungan eliminasi-substitusi, maupun grafik.

Bentuk umum sistem pertidaksamaan linear dengan tiga variable x, y, dan z adalah :

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

$a_2 x + b_2 y + c_3 z = d_2$

$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$

Dengan :
$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2,$ dan d_3 merupakan bilangan real
a_1, b_1, c_1 = tidak ketiganya nol
a_2, b_2, c_2 = tidak ketiganya nol
a_3, b_3, c_3 = tidak ketiganya nol

Keterangan :
x, y, z : variable
a_1, b_2, c_3 : koefisien variable y
b_1, b_2, b_3 : koefisien variable z
d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

penyelesaian system persamaan linear tiga variabel merupakan pasangan terurut tripel bilangan (x,y,z) yang memenuhi ketiga persamaan tersebut.

Penentuan himpunan penyelesaian system persamaan linear tiga variabel dapat dilakukan dengan cara yang sama dengan penentuan penyelesaian SPLDV, kecuali dengan metode grafik, yakni:

Metode Eliminasi – Substitusi

Cara menyelesaikan system persamaan linear (SPL) yang lebih mudah dan singkat yaitu dengan menggunakan gabungan eliminasu dan substitusi. Dalam pelaksanaannya lebih baik dikerjakan dengan eliminasi terlebih dahulu, baru kemudian menggunakan substitusi. Berikut langka-langkah penyelesaian SPLTV dengan menggunakan metode gabungan eliminasi-substitusi adalah sebagai berikut.

Contoh 1. Tentukan himpunan penyelesaian system persamaan berikut,
$5x - 3y + 2z = 3$
$8x - 5y + 6z = 7$
$3x + 4y - 3z = 15$

penyelesaian:

Proses eliminasi:

Dengan menggunakan (1) dan (2), eliminasi z dan di peroleh

$5x-3y+2z=3 \quad |\times 3| \; 15x-9y+6z=9$

$8x-5y+6z=7 \quad |\times 1| \; 8x-5y+6z=7-¿$

$7x-4y=2$

Dengan menggunakan (1) dan (3), eliminasi z dan diperoleh:

$5x-3y+2z=3 \quad |\times 3| \; 15x-9y+6z=9$

$3x+4y-3z=15 \quad |\times 2| \; 6x+8y-6z=30-21x-y=39$

Dengan menggunakan (4) dan (5), eliminasi x maka di peroleh nilai y

$7x-4y=3 \quad |\times 3| \; 21x-12y=6$

$21x-y=39 |\times 1| \; 21x-y=39-$

$-11y=-33$

$y=3$

proses substitusi:

substitusikan y = 3 pada persamaan (4), maka diperoleh nilai x,

$7x-4y=2$

$7x-4(3)=2$

$7x-12=2$

$7x=14$

$x=2$

Substitusikan x =2 dan y= 3 pada persamaan (1),maka diperoleh nilai z,

$5x-3y+2z=3$

$5(2)-3(3)+2z=3$

$10-9+2z=3$

$1+2z=3$

$z=1$

Jadi himpunan selesaiannya adalah {(2,3,1)}.

Contoh 2. Tentukan himpunan penyelesaian dari

$x-2y+z=6$

$3x+y-2z=¿4$

$7x-6y-z=10$

Penyelesaian:

Diketahui:
$x-2y+z=6$…………..(1)
$3x+y-2z=$¿4…………(2)
$7x-6y-z=10$………(3)
Ditanya: Himpunan penyelesaian?

Proses eliminasi:
Dengan menggunakan (1) dan (2), eliminasi z dan di peroleh
$x-2y+z=6 \mid \times 2 \mid 2x-4y+2z=12$
$3x+y-2z=$¿$4 \quad \mid \times 1 \mid 3x+y-2z=4+$¿
$5x-3y=16$………(4)
Dengan menggunkan (1) dan (3), eliminasi z dan di peroleh
$x-2y+z=6$
$7x-6y-z=10+$¿
$8x-8y=16$………(5)
Dengan menggunakan (4) dan (5), eliminasi x maka di peroleh nilai y
$5x-3y=16 \mid \times 8 \mid 40x-24y=128$
$8x-8y=16 \mid \times 5 \mid 40x-40y=80-$¿
$16y=48$
$y=3$
Proses Substitusi:
Substitusikan $y=3$ pada persamaan (4), maka di peroleh nilai x
$5x-3y=16$
$5x-3(3)=16$
$5x-9=16$
$5x=16+9$
$5x=25$
$x=\frac{25}{5}$
$x=5$
Substitusikan $x=5$ dan $y=3$ pada persamaan (1), maka diperoleh nilai z.
$x-2y+z=6$
$5-2(3)+z=6$

$5-6+z=6$
$-1+z=6$
$z=6+1$
$z=7$

SPLTV dalam kehidupan sehari-hari

Banyak terapan SPLTV dalam kehidupan sehari-hari. Berikut langkah menentukan penyelesaian SPLTV dalam masalah nyata.

Contoh 1. Campuran 3 kg beras A, 2 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual seharga Rp. 19.700,00. Campuran 2 kg beras A, 1 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual Rp. 14.000. sedangkan campuran 2 kg beras A, 3 kg beras B, dan 1 kg beras C dijual seharga Rp. 17.200,00.

a. Buatlah model matematika dari permasalahan tersebut
b. Hitunglah harga tiap kg beras A,B, dan C

Penyelesaian:

Misal :

a. harga beras per kg beras A
b. harga beras per kg beras B
c. harga beras per kg beras C

model matematika

$3a+2b+2c=19.700$……(1)
$2a+b+2c=14.000$……...(2)
$2a+3b+c=17.200$……...(3)

Proses eliminasi:
dengan menggunakan (1) dan (2), eliminasi c dan diperoleh
$3a+2b+2c=19.700$
$2a+b+2c=14.000$
$a+b=5.700$………(4)
dengan menggunakan (1) dan (3), eliminasi c dan di peroleh

$3a+2b+2c=19.700 \quad |\times 1| \quad 3a+2b+2c=19.700$
$2a+3b+c=17.200 \quad |\times 2| \quad 4a+6b+2c=34.400-$
$-a-4b=14.700$......(5)

Dengan menggunakan(4) dan(5), eliminasi x maka diperoleh nilai y,

$a+b=5.700$

$-a-4b=14.700-¿$

$-3b=-9.000$

$b=3.000$

Proses substitusi:
Substitusi b = 3.000 pada persamaan (4), maka diperoleh nilai a

$a+b=5.700.$

$a+3.000=5.700$

$a=2.700$

substitusi a = 2.700 dan b = 3.000 pada persamaan (2).
Maka diperoleh nilai c.

$2a+b-2c=14.000$

$2(2700)+3000+2c=14.000$

$5400+3000+2c=14.000$

$8.400+2c=14.000$

$2c=5.600$

$c=2.800$

Jadi, harga per kg beras A= 2.700, harga per kg beras B= 3000, harga per kg beras C = 2.800

Contoh 2. Seorang tukang parker mendapat uang sebesar Rp. 17.000 dari 3 buah mobil dan 5 buah motor, sedangkan dari 4 buah mobil dan 2 buah motor ia mendapat uang Rp. 18.000. jika terdapat 20 mobil dan 30 motor, uang parkir yang di peroleh adalah……

Penyelesaian:

Di ketahui:
Mobil = x
Motor = y

$3x+5y=17.000$

$4x+2y=18.000$

Ditanya: Banyak uang parkir yang di peroleh?

$$3x+5y=17.000 \,|\times 4|\, 12x+20y=68.000$$
$$4x+2y=18.000 \,|\times 3|\, 12x+6y=54.000-\text{¿}$$
$$14y=14.000$$
$$y=\frac{14.000}{14}$$
$$y=1.000$$

Substitusi nilai $y=1.000$ ke salah satu persamaan:

$$3x+5y=17.000$$
$$3x+5(1.000)=17.000$$
$$3x+5.000=17.000$$
$$3x=17.000-5.000$$
$$3x=12.000$$
$$x=\frac{12.000}{3}$$
$$x=4.000$$

Jadi, biaya parkir 1 mobil Rp. 4.000 dan 1 motor Rp. 1.000

$$20x+30y=20(4.000)+30(1.000)$$
$$\text{¿}80.000+30.000$$
$$\text{¿}110.000$$

Jadi, banyak uang parkir yang diperoleh Rp. 110.000

3.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Rangkuman

- Persamaan **linear dua variabel** adalah persamaan garis lurus yang mempunyai 2 **variabel** atau peubah.
- Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan liniear ax + by ≥ c dengan metode grafik dan uji titik, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:
  1. Gambar grafik ax + by = c
     Contoh: $2x+3y=12$
     $5x+3y=15$
  2. Melakukan uji titik, yaitu mengambil sebarang titik (x,y) yang tidak terletak pada garis $ax+by=c$, kemudian mensubstitusikan pertidaksamaan $ax+by\geq c$
- Terdapat 3 metode dalam meyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel yaitu:

1. Metode Substitusi
2. Metode Eliminasi
3. Metode Eliminasi-Substitusi

- Pertidaksamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan memuat tiga variabel.
- Bentuk umum sistem pertidaksamaan linear dengan tiga variable x, y, dan z adalah :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_3 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

- Dalam mengerjakan sistem pertidaksamaan linear tiga variabel ialah menggunakan metode eliminasi-substitusi.

3.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Soal Diskusi Kelompok

1. Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel berikut:
   a. $3x + y < 9$
   b. $4x - 3y > 24$

2. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $3x + 4y < 12$
   $3x + 4y < 12$diganti tanda ketidaksamaan sehingga diperoleh garis $3x + 4y = 12$

3. Seseorang akan membuka usaha dengan berjualan anggrek dan tanaman hias di kiosnya dengan isi paling sedikit 30 pot anggrek dan paling sedikit 40 pot tanaman hias. Kios tersebut dapat menampung 120 pot. Bila keuntungan untuk setiap pot anggrek dan setiap tanaman hias masing-masing adalah Rp 10.000,00 dan Rp 15.000,00, keuntungan terbesar yang dapat diperoleh adalah ...

4. Seorang penjahit mempunyai persediaan 84m kain polos dan 70m kain batik. Penjahit tersebut akan membuat 2 jenis untuk

dijual. Pakaian jenis I memerlukan 4m kain polos dan 2m kain batik, sedangkan pakaian jenis II memerlukan 3m kain polos dan 5m kain batik. Jika pakaian I dijual dengan laba Rp 40.000,00 dan pakaian jenis II dijual dengan laba Rp 60.000,00 per potong. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh penjahit tersebut adalah ...

5. Perhatikan Gambar!
   Nilai maksimum $f(x, y) = 60x + 30y$ untuk (x, y) pada daerah yang diarsir adalah ...

6. Seorang Ibu yang mempunyai 4kg terigu dan 2,4kg mentega ingin membuat donat dan roti untuk dijual. Satu donat membutuhkan 80gr terigu dan 40gr mentega, dan satu roti membutuhkan 50gr terigu dan 60gr mentega. Jika ia harus membuat paling sedikit 10 buah donat, maka model matematika yang sesuai adalah ...

7. Seorang pedagang khusus menjual produk A dan produk B. Produk A dibeli seharga Rp 2.000,00 per unit. Dijual dengan laba Rp 800,00. Produk B dibeli dengan harga Rp 4.000,00 per unit dijual dengan laba Rp 600,00. Jika ia mempunyai modal Rp 1.600.000,00 dan gudangnya mampu menampung paling banyak 500 unit maka keuntungan terbesar diperoleh bila ia membeli ...

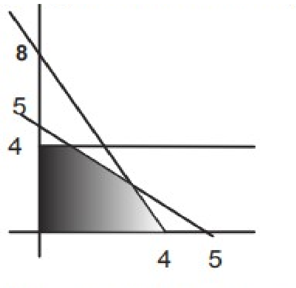
8. Luas daerah parkir $360m^2$. Luas rata-rata sebuah mobil $6m^2$ dan luas rata-rata bus $24m^2$. Daerah parkir tersebut dapat memuat paling banyak 30 kendaraan roda 4 (mobil dan bus). Jika tarif parkir mobil Rp 2.000,00 dan tarif bus Rp 5.000,00 maka pendapatan terbesar yang dapat diperoleh adalah ....

9. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan dari $x - y \leq 0$ dan $x + 2y \geq 4$.

3. 5Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Mandiri

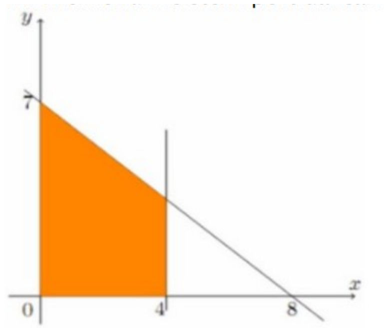
1. Jumlah dua bilangan tidak kurang dari 100 dan bilangan kedua sama dengan tiga kali bilangan pertama. Tentukan batas-batas nilai dari kedua bilangan itu.
2. Umur Lisa dan Muri masing-masing $(5x - 2)$ dan $(2x + 4)$. Jika umur Lisa lebih dari umur Muri, maka tentukanlah batas-batas nilai x.
3. Pak Fredy memiliki sebuah mobil box pengangkut barang dengan daya angkut tidak lebih dari 500 kg. Berat Pak Fredy adalah 60 kg dan dia akan mengangkut barang yang setiap kotak beratnya 20 kg. Tentukan banyaknya kotak yang dapat diangkut oleh Pak Fredy dalam sekali pengangkutan!
4. Tuliskan pengertian dan sifat-sifat dari pertidaksamaan linear!
5. Seorang pemborong melakukan pemasangan instalasi listrik pada suatu perumahan. Untuk tipe A. diperlukan 60 m kabel dan 5 lampu. Untuk tipe B. diperlukan 150 m kabel dan 10 lampu. .Jika tersedia 5 km kabel dan 150 lampu. Model matematika yang tepat untuk permasalahan di atas adalah ... Gunakan variabel x dan y masing - masing untuk banyaknya tipe rumah A dan tipe rumah B!
6. Untuk membuat barang A diperlukan 6 jam pada mesin I san 4 jam pada mesin II. Sedangkan untuk membuat barang B diperlukan 2 jam pada mesin I dan 8 jam pada mesin II. Kedua mesin tersebut tiap harinya masing - masing bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari dibuat x buah barang A dan y buah barang B, maka model matematika dari uraian di atas adalah ...
7. Daerah yang diarsir adalah himpunan penyelesaian sistem

   pertidaksamaan :

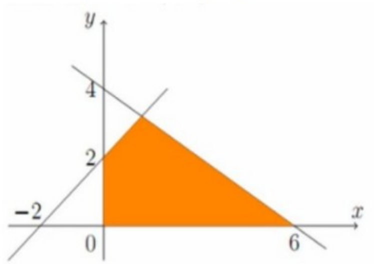


Gambar 3.4.1

8. Daerah yang diarsir adalah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan :

9. 

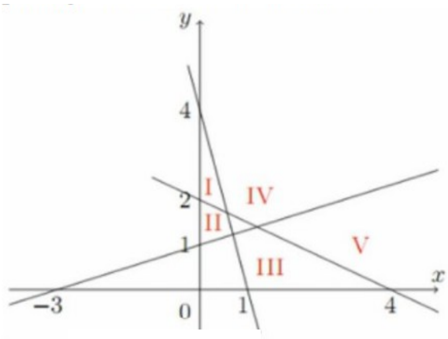
Daerah yang diarsir pada gambar dibawah ini himpunan titik (x,y). Batas-batas yang memenuhi adalah ...



Grafik 3.4.2

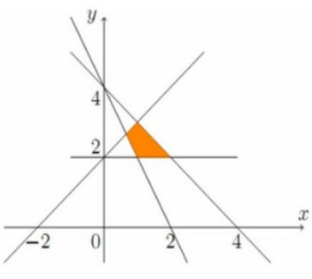
Grafik 3.4.3

10. Daerah yang dibatasi oleh pertidaksamaan $x + 2y - 4 \geq 0$; $x \geq 0$; $x - 3y \leq -3$; dan $4x + y - 4 \geq 0$ pada gambar dibawah ini adalah ....



Grafik 3.4.4

11. Dengan p[illegible] kain polos dan 10 m kain bermotif, seorang penjahit membuat pakaian jadi. Pakaian model I memerlukan 1m kain polos dan 1,5 m kain bermotif. Pakaian model II memerlukan 2 m kain polos dan 0,5 m kain bermotif. Buatlah sistem pertidaksamaan yang mewakili kasus tersebut!
12. Pak Bakri adalah pedagang es krim keliling. Ia menjual es menggunakan gerobak kayuh. Gerobak itu hanya dapat menampung 500 es krim. Es krim yang dijualnya adalah es krim bentuk kerucut dan es krim bentuk batang dengan harga masing - masing Rp 3.000,- dan Rp2.000,- per bungkusnya. Hasil penjualan maksimum yang di peroleh Pak Bakri adalah Rp1.700.000,-. Buatlah sistem pertidaksamaan yang mewakili kasus tersebut!
13. Tentukan sistem pertidaksamaan dari daerah yang diarsir pada gambar berikut ini!



Grafik 3.4.5

14. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan dari $y \geq 2x$, $2y \leq x$, $2x + y \geq 4$, $x + y \geq 4$.
15. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan dari $x - y \leq 0$ dan $x + 2y \geq 4$.

MODUL 4

PERSAMAAN KUADRAT

A. Capaian Pembelajaran

Dengan membaca buku ini, maka setiap pembaca diharapkan akan dapat memahami konsep-konsep mengenai salah satu bagian dari kajian ilmu matematika, yaitu persamaan kuadrat, serta dapat memanfaatkan pemahaman tersebut untuk menyelesaikan berbagai masalah di kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.

B. Bahan Kajian

Berikut ini beberapa hal yang akan kami uraikan secara mendalam di dalam buku ini:

1. Menyatakan bentuk umum dari suatu persamaan kuadrat.
2. Menentukan jenis dan nilai akar-akar dari suatu persamaan kuadrat yang berkaitan dengan harga diskriminannya.
3. Memahami beberapa sifat khusus yang berlaku pada akar-akar suatu persamaan kuadrat.
4. Dapat membentuk suatu persamaan kuadrat.
5. Memahami beberapa bentuk variasi dari suatu persamaan kuadrat, yang tentunya berkaitan dengan bidang keilmuan lain.
6. Mampu menyelesaikan beberapa persoalan yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.

MODUL 4

PERSAMAAN KUADRAT

4.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Definisi dan Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Pernahkah kamu berpikir betapa uniknya kehidupan kita ini? Mungkin kita seringkali terlalu sibuk dengan berbagai hal sehingga kita tidak begitu memperhatikan hal-hal yang sebenarnya unik dan begitu menarik untuk diamati serta dipelajari di kehidupan kita di muka bumi ini. Mungkinkah di dunia ini ada dua hal yang sama persis baik esensi maupun eksistensinya? Apabila kita mempelajari filsafat yang dikemukakan oleh seorang filsuf besar bernama Aristoteles, tentu kita pasti langsung akan menjawab dengan tegas: “tidak ada”, atau bahkan kita menguatkan kembali argumen kita itu dengan pernyataan Aristoteles bahwa: “Pada anak kembar sekalipun, pasti masih terdapat perbedaan! Tidak mungkin mereka sama identik seratus persen!”. Tapi, di sinilah muncul keunikan dari ilmu yang akan kita pelajari ini, yaitu matematika. Pada matematika, argumen penolakan tersebut dibantah total. Inilah yang kita sebut dengan sistem persamaan matematis, di mana dua hal yang sama dilambangkan dengan sebuah simbol sederhana, yaitu dua garis pendek sejajar yang ditulis berhadapan atas-bawah. Simbol ini biasa kita kenal dengan sebutan “sama dengan” (=). Dan, berkat ilmu matematika serta berkat simbol sederhana inilah beragam permasalahan yang ada di sekitar kita, bahkan yang ada di dunia ini dapat terselesaikan dengan tuntas dan jelas, baik masalah keuangan seperti pendapatan dan pengeluaran perusahaan (ekonomi), pembangunan (konstruksi dan geometri), maupun berbagai masalah lain. Untuk itu, marilah kita belajar menjadi seorang ilmuan hebat lewat bidang keilmuan yang satu ini. Mari kita mulai berpetualang.

Ilmu matematika merupakan suatu bidang keilmuan yang unik, sebab ia memiliki suatu bahasa tersendiri. Bahasa di dalam ilmu matematika ini bukanlah bahasa yang rumit dengan menghafal deretan huruf yang membentuk suatu kata seperti *lingua franca* yang ada di dunia ini. Sebaliknya, bahasa matematika adalah bahasa yang sederhana. Bahasa ini mampu menyederhanakan dan meringkas begitu banyak kata-kata dalam *lingua franca* ke dalam beberapa kata saja. Wah, sangat menarik ya, sobat? Mari kita lanjutkan.

Nah, di dalam matematika ini ada yang disebut sebagai variabel bebas dan variabel terikat. Satu hal lagi yang unik, yakni satu huruf saja, *"x"* atau *"y"*, dapat berperan sebagai keduanya. Pada sistem persamaan kuadrat, umumnya huruf yang digunakan adalah *"x"*. Lalu apa yang dimaksud dengan *sistem persamaan kuadrat*?

Sistem persamaan kuadrat adalah suatu sistem yang salah satu variabelnya (umumnya *"x"*) memiliki pangkat tertinggi ^{2}. Nah, bentuk umum dari suatu persamaan kuadrat adalah:

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Adakah bentuk lain? Tentu saja ada berbagai variasi lain, dan itu semua akan kita pelajari nanti pada submodul 4.10.

Dari bentuk umum tersebut, dapat kita pahami bahwa *"a"* adalah koefisien dari x^2, *"b"* adalah koefisien dari x, dan *"c"* adalah tetapan (konstanta). Bentuk umum tersebut memberikan arti bahwa apabila *"a"* kita kalikan dengan x^2, kemudian hasilnya ditambah dengan *"b"* yang terlebih dahulu kita kalikan dengan x, dan terakhir, hasil dari seluruhnya ditambah dengan *"c"*, maka akan diperoleh hasil tepat nol (0), tidak lebih atau tidak kurang sedikitpun, sama persis dengan nol. Maka, di sini, $a.x^2 + b.x + c$tidak dapat kita sebut kembar dengan nol, sebab tadi Aristoteles menyatakan bahwa setiap hal yang kembar pasti memiliki sedikit perbedaan, tetapi di sini tidak demikian, $a.x^2 + b.x + c$ memang adalah nol itu sendiri. Menarik bukan?

Lantas, berdasarkan persamaan umum itu, apa syarat utama dari suatu persamaan kuadrat? Tentu saja sangat mudah, harga *"a"*tidak pernah boleh sama dengan nol. Mengapa? Sebab hal yang kita pelajari saat ini adalah persamaan kuadrat, yang mana pada persamaan tersebut terdapat *"x"* yang derajat (pangkat) tertingginya adalah kuadrat (^{2}). Apabila *"a"* sama dengan nol, maka hanya akan tersisa $b.x + c = 0$. Persamaan semacam ini bukanlah persamaan kuadrat. Persamaan itu disebut sebagai persamaan linear, sebab harga pangkat "x" tertinggi adalah satu (^{1}). Bagaimana jika "b" nya yang sama dengan nol? Tentu saja boleh, bahkan kasus semacam ini disebut sebagai persamaan kuadrat sempurna. Kemudian, bagaimana pula jika "c" nya yang sama dengan nol? Boleh juga, hanya saja persamaan kuadrat tanpa nilai "c" ini disebut persamaan kuadrat tidak lengkap. Nah, dalam pembahasan di buku ini, kita membatasi harga a, b, dan c sebagai bilangan real, dan bukan bilangan tidak nyata (imajiner).

Penting Diingat:

Persamaan Kuadrat

Bentuk Umum

$a.x^2 + b.x + c = 0$

Syarat:$a \neq 0$

Bentuk Lain

$a.x^2 + bx = 0$ → Tak Lengkap

$a.x^2 + c = 0$ → Sempurna

4.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Menentukan akar-akar persamaan kuadrat

Apa yang langsung terlintas di pikiranmu ketika mendengar kata "akar-akar"? Mungkin sebagian dari antara kamu akan langsung secara spontan membayangkan bagian terbawah dari suatu pohon. Nah, khayalanmu ternyata bisa direlasikan dengan "akar-akar" dari suatu persamaan kuadrat. Bagaimana caranya?

Kita semua tentu tahu bahwa bagian terutama, yaitu bagian yang menjadi dasar dan landasan dari suatu pohon yang besar, indah, rindang, dan begitu cantik agar dapat berdiri dengan kokoh ternyata adalah bagian yang tidak terlihat dari pohon itu. Bagian apakah itu? Tentu, tidak lain dan tidak bukan, itu adalah "akar"-nya. Nah, hal ini terjadi pula pada "akar-akar" suatu persamaan kuadrat. "Akar-akar" inilah dasar dan landasan yang dapat membentuk beraneka ragam persamaan kuadrat. Wah, menarik ya sobat?

Adakah kesamaan lain antara "akar" pohon dengan "akar-akar" persamaan kuadrat? Tentu saja ada. Masih ingatkah kamu, ada berapa jenis bentuk akar yang selama ini dipelajari di dalam ruang lingkup ilmu biologi? Tidak, kamu tidak perlu cari buku biologi kok, kami akan memberithukan jawabannya . Umumnya, dikenal ada dua jenis bentuk akar pohon dalam ilmu biologi, bukan? Yakni, akar tunggang dan akar serabut. Lalu, apa relasinya dengan "akar-akar" persamaan kuadrat? Nah, ternyata ada dan sangat dekat. Seperti "akar" pohon, sebenarnya "akar-akar" persamaan kuadrat juga terdiri dari dua nilai, yang biasa dilambangkan dengan "x_1" dan "x_2". Kedua nilai ini bisa saja sama atau berbeda.

Lalu, sebenarnya apa itu "akar-akar" persamaan kuadrat? Secara sederhana, "akar-akar" persamaan kuadrat dapat kita artikan sebagai nilai-nilai berapa saja yang apabila disubstitusi ke dalam persamaan kuadrat akan menghasilkan hasil akhir yang sesuai dengan persamaan kuadrat tersebut. Dalam hal ini, karena variabel yang biasa digunakan dalam suatu persamaan kuadrat adalah "x", maka "akar-akar" suatu persamaan kuadrat dapat juga dikatakan sebagai nilai "x" yang memenuhi sistem persamaan kuadrat tersebut.

Selanjutnya, bagaimana cara kita mencari "akar-akar" persamaan kuadrat apabila persamaan kuadratnya sudah diketahui? Ada beberapa metode penyelesaian yang dapat digunakan, yaitu memfaktorkan, melengkapkan persamaan kuadratnya, dan menggunakan rumus kuadrat (atau yang biasa dikenal juga sebagai “rumus kecap” dan “rumus abc”). Berikut ini uraian dari masing-masing metode tersebut.

1. Memfaktorkan

Nah, pada metode ini, nilai “x” diperoleh dengan cara mengubah bentuk:

$a.x^2 + b.x + c = 0$ menjadi $(x_1 – a)\ (x_2 – b) = 0$

apabila bentuk $(x_1 – a)\ (x_2 – b) = 0$ dikalikan secara distributif, atau biasa lebih dikenal dengan istilah “kali pelangi”, maka diperoleh bentuk:

$x_1.x_2 – b.x_1 – a.x_2 + ab = 0$

Dari bentuk $(x_1 – a)\ (x_2 – b) = 0$ juga diperoleh bahwa:

$(x_1 – a) = 0$ dan $(x_2 – b) = 0$

sehingga

$x_1 = ax_2 = b$

Adapun biasanya pengubahan bentuk pada metode memfaktorkan ini dipermudah lagi dengan menggunakan cara tabel. Berikut bentuk umumnya:

$a.x^2 + b.x + c = 0$

p.x	r	(q.r).x	
q.x	s	(p.s).x	+

(p.x + r) (q.x + s) = 0 b.x Maka (p.s) + (q.r) = b

p.x = – r q.x = – s

$x_1 = \frac{-r}{p}$ $x_2 = \frac{-s}{q}$

<u>Syarat</u>:

(p.x) (q.x) = $a.x^2$

(r) (s) = c

<u>Contoh soal</u>:

Tentukanlah akar-akar persamaan kuadrat dari persamaan kuadrat berikut ini:

a. $x^2 + 5x + 4 = 0$

b. $x^2 - 4x + 4 = 0$

c. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

<u>Penyelesaian</u>:

a. $x^2 + 5x + 4 = 0$

x		4	4x
x		1	x
(x + 4)	(x + 1) = 0		5.x

(x +) = 0 (x) = 0

$x_1 = -4 \quad x_2 = -1$

b. $x^2 - 4x + 4 = 0$

$x \qquad -2 \qquad -2x$

$x \qquad -2 \qquad -2x$

$(x - 2)(x - 2) = 0 \qquad -4x$

$(x - 2) = 0 \qquad (x - 2) = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$

c. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$2x \qquad -1 \qquad -x$

$x \qquad -1 \qquad -2x$

$(2x - 1)(x - 1) = 0 \qquad -3x$

$(2x - 1) = 0 \qquad (x - 1) = 0$

$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 1$

2. Melengkapkan persamaan kuadratnya

Nah, apabila sebelumnya telah diuraikan mengenai cara penyelesaian persamaan kuadrat dengan metode memfaktorkan, maka kali ini kita akan beralih ke metode yang dapat digunakan sebagai alternatif penyelesaian apabila suatu persamaan kuadrat tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemfaktoran, misalnya saja persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 1 = 0$ yang tidak dapat dicari "akar-akar"-nya dengan metode pertama. Lantas, bagaimana persamaan kuadrat itu diselesaikan?

Prinsip utama dari metode ini sebenarnya ialah mengubah bentuk persamaan kuadrat dari bentuk umum:

$a.x^2 + b.x + c = 0$ menjadi $(x + p)^2 = q$

Lalu, bagaimana cara menemukan nilai dari "p" dan "q"-nya? Nah, apabila "a" bernilai 1, maka nilai "p" dan "q" ini memenuhi persamaan:

$$p = \frac{1}{2}b \qquad \text{dan} \qquad q = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

Bagaimana jika nilai "a" bukanlah 1? Untuk mempermudah, sebaiknya lakukan pembagian sedemikian rupa sehingga diperoleh persamaan kuadrat dengan harga koefisien x^2 adalah 1.
Contohnya ialah mengubah bentuknya dari:

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \quad \text{menjadi} \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

<u>Contoh soal</u>:

Tentukanlah akar-akar persamaan kuadrat dari persamaan kuadrat berikut ini:
a. $x^2 + 4x + 1 = 0$
b. $x^2 – 4x – 6 = 0$ (dengan $x_1 < x_2$)
c. $2x^2 – 6x + 1 = 0$

Penyelesaian:

a. $x^2 + 4x + 1 = 0$

- Cari terlebih dahulu nilai "p" dan "q"-nya.

  $p = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(4) = 2$

  $q = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

- Kemudian, ubah bentuk persamaan kuadrat awal menjadi persamaan baru seperti yang telah dituliskan pada bagian awal.

  $(x + p)^2 = q \qquad (x + 2)^2 = 3$

- Selanjutnya hanya tinggal selesaikan dengan cara mencari nilai "x" dari persamaan yang baru.

  $(x+2)^2=3$

  $x+2=\pm\sqrt{3}$

  $x_1=-2+\sqrt{3}$ dan $x_2=-2-\sqrt{3}$

b. $x^2 - 4x - 6 = 0$

- Sama seperti sebelumnya, cari terlebih dahulu nilai "p" dan "q"-nya.

  $p = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(-4) = -2$

$$q = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c = (-2)^2 - (-6) = 4 + 6 = 10$$

- Kemudian, ubah bentuk persamaan kuadrat awal menjadi persamaan baru seperti yang telah dituliskan pada bagian awal.

$$(x + p)^2 = q(x - 2)^2 = 10$$

- Selanjutnya hanya tinggal selesaikan dengan cara mencari nilai "x" dari persamaan yang baru.

$$(x-2)^2 = 10$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{10}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{10} \quad \text{dan} \quad x_2 = 2 + \sqrt{10}$$

c. $2x^2 - 6x + 1 = 0$

- Kali ini, untuk mempermudah perhitungan, kita akan mengubah terlebih dahulu bentuk persamaan kuadratnya agar harga koefisien dari x^2 adalah 1. Caranya adalah dengan membagi seluruhnya dengan 2.

$$x^2 + \frac{(-6)}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

- Selanjutnya, lakukan cara yang sama seperti sebelumnya, yaitu cari terlebih dahulu nilai "p" dan "q"-nya.

$$p = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(-3) = \frac{-3}{2}$$

$$q = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{2}{4} = \frac{7}{4}$$

- Kemudian, ubah bentuk persamaan kuadrat awal menjadi persamaan baru seperti yang telah dituliskan pada bagian awal.

$$(x + p)^2 = q \qquad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

- Selanjutnya hanya tinggal selesaikan dengan cara mencari nilai "x" dari persamaan yang baru.

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

3. Menggunakan rumus kuadrat atau "rumus kecap" atau "rumus abc"

Bentuk umum dari "rumus abc" atau "rumus kecap" ini adalah sebagai berikut:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lalu, dari manakah perumusan tersbut diperoleh? Sebenarnya, perumusan tersebut merupakan hasil kreatifitas para ilmuwan yang berusaha menemukan "akar-akar" dari suatu persamaan kuadrat dengan cara mengalikan bentuk umum persamaan kuadrat dengan 4a. Berikut ini penurunan rumus lengkapnya:

$a.x^2 + b.x + c = 0$ (dikalikan dengan 4a)

$4a^2.x^2 + 4ab.x + 4ac = 0$

Dari persamaan yang baru tersebut, gunakan hukum pembatalan, atau yang juga biasa disebut "hukum pencoretan", yaitu dengan cara menambahkan b^2 di kedua ruas.

$4a^2.x^2 + 4ab.x + 4ac + b^2 = b^2$

$4a^2.x^2 + 4ab.x + b^2 = b^2 - 4ac$

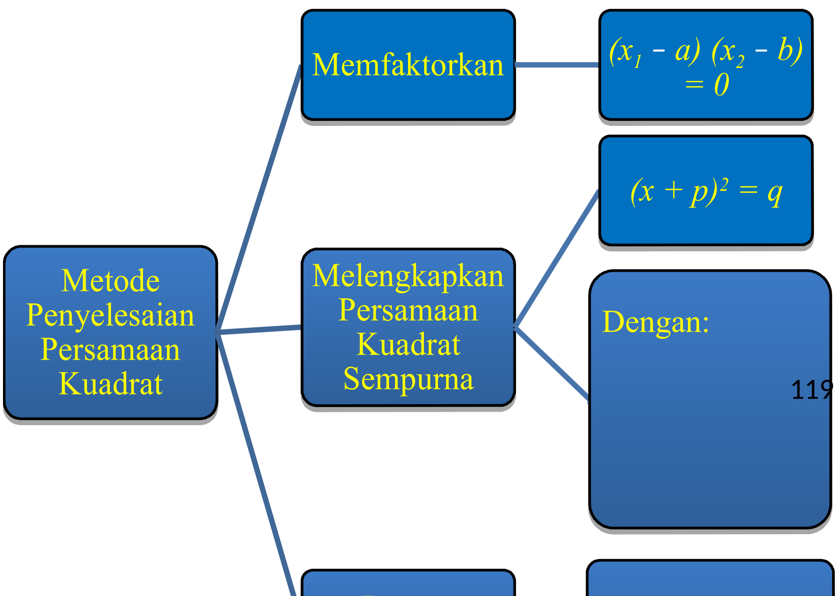
$(2a.x + b)^2 = b^2 - 4ac$

$2a.x + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2a.x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mengingat kembali



$$p=\frac{1}{2}b$$
$$q=\left(\frac{1}{2}b\right)^2-c$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Contoh soal:

Tentukanlah akar-akar persamaan kuadrat dari persamaan kuadrat berikut ini:

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$
b. $2x^2 - 2x - 1 = 0$
c. $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

Penyelesaian:

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm7}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ Dan } x_2 = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

b. $2x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ Dan } x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

c. $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-3)(8)}}{2(-3)}$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{-6}$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{121}}{-6}$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 11}{-6}$$

$$x_1=\frac{5+11}{-6}=\frac{16}{-6}=\frac{-8}{3}=-2\frac{2}{3}$$

Dan

$$x_2=\frac{5-11}{-6}=\frac{-6}{-6}=1$$

Itulah beberapa cara yang dapat digunakan untuk memperoleh penyelesaian, yakni "akar-akar" dari suatu persamaan kuadrat. Hal yang penting di sini ialah kreatifitas untuk memilih rumus yang akan digunakan.

4.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Jenis-jenis Akar-akar Persamaan Kuadrat dan Diskriminan

Pada penyelesaian persamaan kuadrat dengan metode yang terakhir, kita melihat ada bentuk $b^2 - 4ac$ yang berada di dalam akar. Dalam matematika, bentuk sederhana tersebut sesungguhnya sangat penting dalam menentukan jenis dari suatu penyelesaian persamaan kuadrat. Oleh sebab itu, para ilmuwan menyebut bentuk $b^2 - 4ac$ ini dengan suatu sebutan baru, yaitu "Diskriminan", yang dilambangkan dengan huruf "D". Sehingga, rumus abc tadi juga dapat ditulis dengan:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

Dengan melihat bentuk tersebut, maka kita dapat dengan jelas melihat bahwa nilai dari “akar-akar” persamaan kuadrat dipengaruhi oleh nilai “diskriminan”-nya. Agar “akar-akar” suatu persamaan kuadrat bernilai real (nyata), maka besarnya nilai di dalam akar (yakni diskriminan-nya) harus nol atau bilangan positif, sebab apabila bilangan negatif maka akan dihasilkan bilangan yang tidak real (imajiner). Sehinga penentuan jenis “akar-akar” dari suatu persamaan kuadrat ditetapkan sebegai berikut:

1. Apabila harga $D = 0$, maka “akar-akar” dari suatu persamaan kuadrat dapat diastikan adalah <u>bilangan real</u>, dan kedua “akar-akar”-nya <u>bernilai sama</u>. ($x_1, x_2 \in R$ dan $x_1 = x_2$).

2. Apabila harga $D < 0$, maka “akar-akar” dari suatu persamaan kuadrat dapat diastikan adalah <u>bilangan tidak real</u> (imajiner). ($x_1, x_2 \in R$).

3. Apabila harga $D > 0$, maka “akar-akar” dari suatu persamaan kuadrat dapat diastikan adalah <u>bilangan real</u>, dan kedua “akar-akar”-nya <u>bernilai berbeda</u>. ($x_1, x_2 \in R$ dan $x_1 \neq x_2$).

4. Apabila harga $D \geq 0$, maka “akar-akar” dari suatu persamaan kuadrat dapat diastikan adalah <u>bilangan rasional</u>.

Secara sederhana dapat dituliskan:

1. $D = 0 \rightarrow x_1 = x_2$, ($x_1$ dan x_2) bilangan real
2. $D < 0$, $\rightarrow$ (x_1 dan x_2) tidak real
3. $D > 0 \rightarrow x_1 \neq x_2$, ($x_1$ dan x_2) bilangan real
4. $D \geq 0 \rightarrow$ (x_1 dan x_2) bilangan rasional

<u>Contoh soal</u>:

1. Akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - p.x = - p$ adalah bilangan rasional. Maka, batasan nilai p agar sesuai dengan syarat tersebut adalah?

2. Persamaan kuadrat $x^2 + (2m - 1)x - 2m = 0$ mempunyai akar-akar yang real dan saling berlainan. Maka, batas-batas nilai m yang memenuhi adalah?

3. Agar persamaan kuadrat $(m - 5)x^2 - 4m.x + (m - 2) = 0$ tidak memiliki penyelesaian nilai x yang real, maka nilai m harus dibuat?

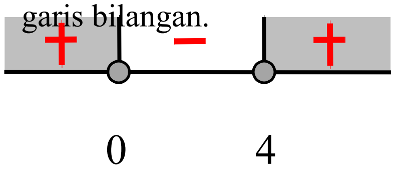
Penyelesaian:

1. Akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - p.x = - p$ adalah bilangan rasional. Maka, batasan nilai p agar sesuai dengan syarat tersebut adalah?

   Berdasarkan ketetapan yang telah dibahas sebelumnya, agar suatu persamaan kuadrat memiliki "akar-akar" yang rasional, maka harga diskriminannya harus lebih dari atau sama dengan nol.

$$D \geq 0$$
$$b^2 - 4ac \geq 0$$
$$(-p)^2 - 4(1)(p) \geq 0$$
$$p^2 - 4p \geq 0$$
$$p(p - 4) \geq 0$$
$$p_1 \neq 0 \qquad p_2 \neq 4$$

Kemudian, buat garis bilangan untuk menentukan letak dan batas-batas nilai p pada garis bilangan.



Kesimpulan:

$p \leq 0$ atau $p \geq 4$

2. Persamaan kuadrat $x^2 + (2m - 1)x - 2m = 0$ mempunyai akar-akar yang real dan saling berlainan. Maka, batas-batas nilai m yang memenuhi adalah?

   Sama seperti contoh soal sebelumnya, berdasarkan ketetapan yang telah dibahas, agar suatu persamaan kuadrat memiliki "akar-akar" yang real dan berbeda, maka harga diskriminannya harus lebih dari nol.

$$D > 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$(2m - 1)^2 - 4(1)(-2m) > 0$$

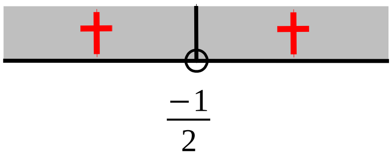
$$(4m^2 - 4m + 1) + (8m) > 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 > 0$$

$$(2m + 1)^2 > 0$$

$$m_1 \neq \frac{-1}{2} \qquad m_2 \neq \frac{-1}{2}$$

Kemudian, buat garis bilangan untuk menentukan letak dan batas-batas nilai m pada garis bilangan.



Kesimpulan:

$$m < \frac{-1}{2} \text{ atau } m > \frac{-1}{2}$$

3. Agar persamaan kuadrat $(m - 5)x^2 - 4m.x + (m - 2) = 0$ tidak memiliki penyelesaian nilai x yang real, maka nilai m harus dibuat?

   Sama seperti contoh soal sebelumnya, berdasarkan ketetapan yang telah dibahas, agar suatu persamaan kuadrat memiliki "akar-akar" yang tidak real (imajiner), maka harga diskriminannya harus kurang dari nol.

   Lihat pembahasannya pada halaman berikutnya.

$$D < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(-4m)^2 - 4(m-5)(m-2) < 0$$

$$16m^2 - 4(m^2 - 7m + 10) < 0$$

$$16m^2 - 4m^2 + 28m - 40 < 0$$

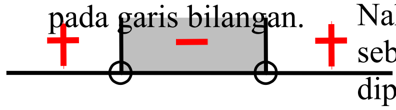
$$12m^2 + 28m - 40 < 0$$

$$3m^2 + 7m - 10 < 0$$

$$(3m + 10)(m - 1) < 0$$

$$m_1 \neq \frac{-10}{3} \qquad m_2 \neq 1$$

Kemudian, buat garis bilangan untuk menentukan letak dan batas-batas nilai m pada garis bilangan.



$$\frac{-10}{3} \qquad 1$$

Kesimpulan:

$$\frac{-10}{3} < m < 1$$

Tidak berhenti sampai di situ, persamaan kuadrat dalam matematika juga masih memiliki keunikan lain. “Akar-akar” persamaan kuadrat memiliki sifat-sifat khusus yang saling berkaitan dengan koefisien-koefisien dari persamaan kuadrat yang dibentuk. Secara matematis, sifat-sifat unik tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{dan}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Tahukah kamu, dari manakah perumusan tersebut diperoleh? Nah, apabila kamu perhatikan, sebenarnya dua perumusan itu diperoleh

4.4. Kegiatan Pembelajaran 4. Sifat-sifat Khusus Akar-akar Persamaan Kuadrat

dari penurunan rumus kuadrat, yang baru saja kita pelajari pada subbab sebelumnya. Coba simak dan perhatikan proses ini:

Karena $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, maka :

$$x_1 + x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) + \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{b^2 - D}{4a^2}$$

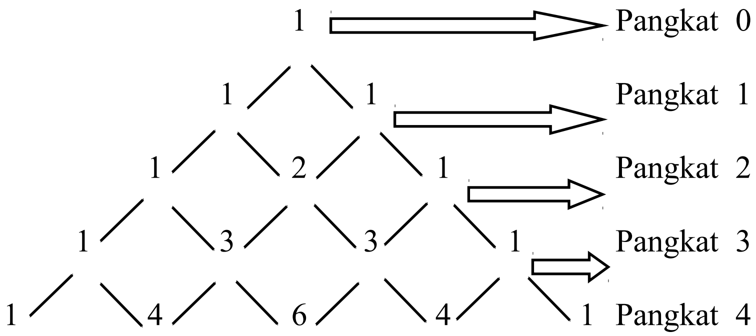
$$\text{¿}\,\frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Kedua perumusan tersebut merupakan perumusan yang umum digunakan untuk menyelesaikan suatu persoalan pada sistem persamaan kuadrat. Namun, apakah penurunan rumusnya terhenti sampai di situ? Tentunya tidak. Kamu dapat melakukan berbagai penurunan rumus lain yang tentunya dapat membantu kamu menyelesaikan beragam variasi soal, misalnya soal-soal yang mengharuskan kamu memperoleh nilai dari akar-akar berpangkat besar dari suatu persamaan kuadrat. Nah, di bawah ini akan disajikan beberapa penurunan rumus lain yang dapat menjadi pelengkap pemahaman kamu dalam ilmu yang menyenangkan ini:

$$x_1 - x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) - \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{2\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2. x_1 . x_2$$

Untuk bentuk $x_1^{\,n} \pm x_2^{\,n}$, dengan harga n yang lebih daripada 2, maka kamu dapat mempermudah penyelesaiannya dengan memanfaatkan konsep segitiga Pascal dalam penentuan hasil perpangkatannya. Pernahkah sebelumnya kamu mendengar mengenai relasi antara perpangkatan dengan segitiga Pascal ini? Apabila belum, maka pemaparan berikut ini akan membantu kamu untuk memahaminya.



Angka-angka yang terdapat pada segitiga Pascal tersebut merupakan nilai-nilai hasil koefisien setelah kamu melakukan operasi perpangkatan. Misalnya, apabila bilangan-bilangan di dalam kurung yang kamu pangkatkan adalah a dan b, maka berlaku aturan:

1. Apabila pada a dan b berlaku operasi penjumlahan sebelum dipangkatkan, maka tanda koefisien hasil perpangkatan adalah seluruhnya positif.
2. Apabila pada a dan b berlaku operasi pengurangan sebelum dipangkatkan, maka tanda koefisien perpangkatan akan berganti-ganti, mengikuti pola positif (+), negatif (–), positif (+), negatif (–), positif (+), dan seterusnya.
3. Pangkat a hasil perpangkatan berkurang secara berurutan, mulai dari a^n, $a^{(n-1)}$, $a^{(n-2)}$, dan seterusnya hingga a^0 (yaitu senilai dengan 1).
4. Pangkat b hasil perpangkatan bertambah secara berurutan, mulai dari b^0 (yaitu senilai dengan 1), b^1, b^2, dan seterusnya hingga b^n.

Untuk merelasikan metode perpangkatan dengan konsep segitiga Pascal ini dengan akar-akar persamaan kuadrat yang sedang kita bahas, maka kita anggap a dan b sebagai x_1 dan x_2. Saat ini, kita akan mencoba mencari nilai dari $x_1^3 + x_2^3$ namun dengan terlebih dahulu mencari hasil perpangkatan dari $(x_1 + x_2)^3$.

$$(x_1+x_2)^3 = 1.x_1^3.x_2^0 + 3.x_1^2.x_2^1 + 3.x_1^1.x_2^2 + 1.x_1^0.x_2^3$$

$$(x_1+x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3.(x¿¿1¿¿2.x_2^1 + x_1^1.x_2^2)¿¿$$

$$(x_1+x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3.x_1.x_2(x_1+x_2)$$

Sehingga, kamu memperoleh perumusan baru sebagai berikut:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3.x_1.x_2(x_1+x_2)$$

Tidak hanya itu, terkadang *"akar-akar"* dari suatu persamaan kuadrat juga memiliki sebutan-sebutan khusus, misalnya:

1. Akar-akar yang saling berkebalikan, artinya $x_1.x_2=1$, sehingga $x_1=\frac{1}{x_2}$ dan $x_2=\frac{1}{x_1}$.

2. Akar-akar yang berlawanan tanda, artinya $x_1+x_2=0$, sehingga $x_1=-x_2$ dan $x_2=-x_1$.

Dengan berbekal pada konsep ini, maka kita dapat membentuk persamaan kuadrat, baik persamaan kuadrat yang langsung dibentuk dari *"akar-akarnya"*, ataupun persamaan kuadrat baru yang dibentuk karena dilakukan suatu operasi hitung pada *"akar-akar"* dari persamaan kuadrat awal.

Contoh soal:

Setelah memahami metode perpangkatan dengan memanfaat-kan konsep segitiga Pascal, maka cobalah kamu buat penurunan perumusan untuk memperoleh nilai dari $x_1^4 + x_2^4$ dengan langkah-langkah seperti yang telah dicontohkan sebelumnya!

Penyelesaian:

Seperti sebelumnya, untuk memperoleh nilai dari $x_1^4 + x_2^4$, maka kita perlu melakukan operasi perpangkatan terlebih dahulu pada $(x_1 + x_2)^4$.

$$(x_1+x_2)^4=1.x_1^4.x_2^0+4.x_1^3.x_2^1+6.x_1^2.x_2^2+4x_1^1.x_2^3+1.x_1^0.x_2^4$$

$$(x_1+x_2)^4=x_1^4+x_2^4+2.x_1.x_2\left[2\left(x_1^2+x_2^2\right)+3.x_1.x_2\right]$$

$$(x_1+x_2)^4=x_1^4+x_2^4+2.x_1.x_2\left\{2\left[(x_1+x_2)^2-2.x_1.x_2\right]+3x_1.x_2\right\}$$

$$(x_1+x_2)^4=x_1^4+x_2^4+2.x_1.x_2\left\{2(x_1+x_2)^2-4.x_1.x_2+3x_1.x_2\right\}$$

$$(x_1+x_2)^4=x_1^4+x_2^4+2.x_1.x_2\left\{2(x_1+x_2)^2-(x_1.x_2)\right\}$$

$$(x_1+x_2)^4=x_1^4+x_2^4-2.(x_1.x_2)^2+4.(x_1.x_2).(x_1+x_2)^2$$

$$(x_1+x_2)^4=x_1^4+x_2^4+2\left\{(x_1.x_2).\left[2(x_1+x_2)^2-(x_1.x_2)\right]\right\}$$

4.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Membentuk Persamaan Kuadrat

Setelah cukup panjang bermain-main dengan cara mencari “akar-akar” dari suatu persamaan kuadrat, maka saat ini marilah kita bersenang-senang dengan membuat persamaan kuadrat dari “akar-akar”-nya. Tahukah kamu, sebenarnya bagaimanakah suatu persamaan kuadrat dapat terbentuk?

Sebenarnya, apabila kamu perhatikan secara saksama, maka kamu akan mendapat suatu rumusan, yakni suatu persamaan kuadrat secara disiplin sebenarnya menuruti perumusan berikut:

$$(x - x_1)\ (x - x_2) = 0$$

Dari bentuk sederhana itulah muncul beragam bentuk persamaan kuadrat. Mengapa? Sebab, apabila dilakukan operasi perkalian secara distributif, atau yang juga sering disebut sebagai "kali pelangi", maka akan diperoleh bentuk semacam ini:

$$x^2 - x_1.x - x_2.x + x_1.x_2 = 0$$

Atau, dapat disederhanakan menjadi:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$$

Dengan mengingat sifat-sifat dan sebutan-sebutan khusus yang telah diuraikan pada subbab sebelumnya, maka kita dapat membentuk suatu persamaan kuadrat dengan mudah.

Contoh soal:

1. Bagaimanakah bentuk persamaan kuadrat apabila memiliki akar-akar 3 dan 5?

2. Apabila suatu akar-akar persamaan kuadrat saling berlawanan tanda, dan salah satu akar-akarnya adalah 4, maka persamaan kuadratnya adalah?

3. Misal suatu persamaan kuadrat $x^2 + 5x - 4 = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Apabila hendak dibuat persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya sama dengan $p = (x_1 + 3)$ dan $q = (x_2 + 3)$, maka persamaan kuadrat barunya adalah?

Penyelesaian:

1. Bagaimanakah bentuk persamaan kuadrat apabila memiliki akar-akar 3 dan 5?

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$x^2 - 5x - 3x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

2. Apabila suatu akar-akar persamaan kuadrat saling berlawanan tanda, dan salah satu akar-akarnya adalah 4, maka persamaan kuadratnya adalah?
   Misal *"akar-akar"* yang bernilai 4 adalah $\boldsymbol{x_1}$. Karena *"akar-akar"*-nya saling berlawanan tanda, maka dapat disimpulkan bahwa x_2 adalah – 4. Sehingga. persamaan kuadratnya adalah:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x^2 + 4x - 4x - 16 = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

(Persamaan kuadrat sempurna)

3. Misal suatu persamaan kuadrat $x^2 + 5x - 4 = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Apabila hendak dibuat persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya sama dengan $p = (x_1 + 3)$ dan $q = (x_2 + 3)$, maka persamaan kuadrat barunya adalah?

   Pertama, gunakan sifat-sifat khusus dari persamaan kuadrat awal terlebih dahulu untuk memperoleh nilai yang nantinya akan dibutuhkan untuk membentuk persaman kuadrat yang baru.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(-4)}{1} = -4$$

Kemudian, bentuk persamaan kuadrat barunya dengan mengikuti bentuk persamaan yang telah diuraikan pada subbab ini.

$x^2 - (p + q)x + (p.q) = 0$

$x^2 - [(x_1 + 3) + (x_2 + 3)]x + [(x_1 + 3)(x_2 + 3)] = 0$

$x^2 - [(x_1 + x_2) + 6]x + [(x_1.x_2) + 3(x_1 + x_2) + 9] = 0$

$x^2 - [(-5) + 6]x + [(-4) + 3(-5) + 9] = 0$

$x^2 - [1]x + [(-4) + (-15) + 9] = 0$

$x^2 - x - 10 = 0$

4.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Beberapa bentuk Variasi Persamaan Kuadrat

Seperti yang telah sedikit disinggung di awal, persamaan kuadrat bukan hanya berbentuk seperti yang telah kita pelajari saja. Ada beberapa bentuk dan variasi lain dari persamaan kuadrat yang digunakan dalam bidang kajian matematika lain, misalnya eksponen, akar, logaritma, dan trigonometri. Berikut ini beberapa contoh penggunaan konsep persamaan kuadrat pada beberapa bidang kajian tersebut:

1. Eksponen

   $2^{2x} - 3.2^{x+2} + 32 = 0$

$(2^x)^2 - 3.2^2.2^x + 32 = 0$

$(2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

$(2^x - 8)\ (2^x - 4) = 0$

$2^x - 8 = 0$ atau $2^x - 4 = 0$

$2^x = 8$ atau $2^x = 4$

$x_1 = 3$ atau $x_2 = 2$

2. Akar

$$x + 2\sqrt{x} - 15 = 0$$

$$(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} - 15 = 0$$

$$(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 5) = 0$$

$$\sqrt{x_1} = 3 \qquad \sqrt{x_2} = -5$$

$$x_1 = 9 \qquad x_2 = 25$$

3. Logaritma

$$(2\log x - 1)\frac{1}{{}^{x}\log 10} = 1$$

$$(2\log x - 1)(\log x) = 1$$

$$(2\log^2(x) - \log x) = 1$$

$$2\log^2(x) - \log x - 1 = 0$$

$$(2\log(x) + 1)(\log x - 1) = 0$$

$2\log x = -1 \quad \log x = 1$

$\log x = \frac{-1}{2} \quad x_2 = 10$

$\log x = \log 10^{\frac{-1}{2}}$

$x = 10^{\frac{-1}{2}}$

$x_1 = \frac{1}{10}\sqrt{10}$

4. Trigonometri

Himpunan penyelesaian persamaan cos 2x° + 7 sin x°– 4 = 0 pada interval $0 \le x \le 2\pi$ adalah ….?

Untuk menemukan penyelesaiannya, kita perlu mengaitkan persamaan di soal dengan identitas trigonometri, sehingga diperoleh bentuk persamaan kuadrat.

$$\cos 2x^\circ + 7 \sin x^\circ - 4 = 0$$

$$(1 - 2 \sin x^\circ) + 7 \sin x^\circ - 4 = 0$$

$$2 \sin^2 x^\circ - 7 \sin x^\circ + 3 = 0$$

$$(2 \sin x^\circ - 1)(\sin x^\circ - 3) = 0$$

$\sin x_1^\circ = \frac{1}{2} \quad \sin x_2^\circ = 3$

Dari *"akar-akar"* persamaan kuadrat bentuk trigonometri tersebut diperoleh dua nilai untuk *sin x*°, namun nilai *sin* x_2° dapat dipastikan tidak terdefinisi, sebab nilai maksimum sinus dari suatu sudut adalah 1, sehingga dalam hal ini *sin* x_2° = *3* kita anggap bukan sebagai penyelesaian.

Nah, untuk *sin* x_1° = $\frac{1}{2}$ terdapat dua nilai *x* yang mungkin, yaitu 30° dan 150°. Untuk lebih menyederhanakan penulisan, kita ubah masing-masing nilai *x* ke dalam satuan π, sehingga diperoleh himpunan penyelesaian untuk soal ini adalah

$$\left\{\frac{1}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi\right\}$$

5. Limit
   Perhatikan bentuk limit berikut!

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-2x-3}{x-1}$$

Apabila nilai x = 1 kamu substisusikan langsung ke persamaan tersebut, maka pasti kamu akan bingung, sebab kamu akan mendapatkan bentuk tak tentu, yaitu $\frac{0}{0}$. Tentu kamu masih ingat bukan, bahwa segala nilai yang dibagi dengan nol akan mengahsilkan nilai yang tidak terdefinisi. Oleh sebab itu, kamu memerlukan bantuan sistem persamaan kuadrat, di mana kamu perlu mencari terlebih dahulu akar-akar dari persamaan kuadrat pembilangnya, barulah kemudian gunakan hukum pembatalan, atau yang biasa kita sebut dengan pencoretan. Agar kamu lebih memahaminya, cobalah perhatikan ilustrasi berikut.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(5x+3)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(5x+3)$$

Sehingga, nilai limitnya dapat kamu tentukan, yaitu dengan cara:

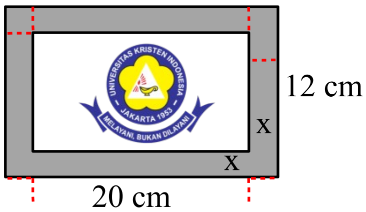
$$L=5(1)+3=5+3=8$$

4.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Beberapa Bentuk Variasi Persamaan Kuadrat

Nah, pada akhirnya kita sampai di bagian penghujung pembahasan kita kali ini. Masih semangat belajar matematika? Pada subbab ini, kita akan membahas bagaimana cara pengaplikasian konsep-konsep mengenai sistem persamaan kuadrat kepada berbagai permasalahan yang akrab dengan kehidupan kita sehari-hari. Seperti yang telah berkali-kali disinggung sebelumnya bahwa sistem persamaan kuadrat ini sangat dekat dengan kehidupan kita, maka apa saja contoh-contoh pnerapannya?

1. Apabila Bapak. Jitu memiliki sebuah bingkai gambar yang berukuran panjang 20 cm dan lebar 12 cm, serta luas gambar yang dipasang di dalam bingkai tersebut memiliki luas 84 cm^2, maka berapakah lebar tepi bingkai gambar?

<u>Penyelesaian</u>:



Dengan melihat ilustrasinya, maka kita dapat menyimpulkan bahwa luas gambar yang berada di dalam bingkai gambar sebenarnya merupakan hasil perkalian dari (20 cm – 2x) dengan (12 cm – 2x). Maka diperoleh persamaan:

$$L_{(gambar)} = (20\text{ cm} - 2x)\ (12\text{ cm} - 2x)$$

$$84\text{ cm}^2 = 4x^2 - 64x + 240 \quad \text{(Sederhanakan)}$$

$$21 \text{ cm}^2 = x^2 - 16x + 60$$

$$x^2 - 16x + 39 = 0$$

$$(x - 13)(x - 3) = 0$$

$x_1 = 13$ cm atau $x_2 = 3$ cm

Karena lebar bingkai gambar hanya 12 cm, maka lebar tepi bingkai gambar yang memenuhi adalah 3 cm. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa bingkai gambar Pak Jitu memiliki lebar tepi sebesar 3 cm.

2. Dalam suatu perusahaan terdapat dua buah mesin pencetak buku. Apabila kedua mesin tersebut bekerja secara bersama-sama, maka sebuah buku dapat diselesaikan dalam waktu 2 jam. Apabila mesin pertama yang digunakan, maka akan dibutuhkan waktu 3 jam lebih lama daripada hanya digunakan mesin kedua. Untuk mengkalkulasi banyaknya waktu yang dihemat dengan menggunakan dua buah mesin pencetak tadi, maka pemimpin perusahaan meminta kamu menghitung waktu yang dibutuhkan apabila perusahaan tersebut hanya menggunakan satu di antara kedua mesin pencetak tersebut yang lebih cepat!

Penyelesaian:

Dari penjelasan pada soal tersebut, dapat diketahui bahwa mesin pertama bekerja lebih lambat dibandingkan mesin kedua. Apabila kita menyimbolkan waktu yang dibutuhkan oleh mesin perjama sebagai x jam, maka waktu yang dibutuhkan oleh mesin kedua adalah (x – 3) jam. Artinya, dalam waktu 1 jam, mesin pertama dapat mencetak sebanyak $\frac{1}{x}$ buku, sedangkan mesin kedua dapat mencetak sebanyak $\frac{1}{(x-3)}$ buku.

Nah, di soal juga diketahui bahwa apabila kedua mesin bekerja bersama-sama, maka dibutuhkan waktu sebanyak 2 jam. Maka berlaku persamaan:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-3)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{(x-3)+x}{x(x-3)}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-3x=2(2x-3)$$

$$x^2-3x=4x-6$$

$$x^2-7x+6=0$$

$$(x-6)(x-1)=0$$

$$x_1=6 \quad \text{atau} \quad x_2=1$$

Mesin pencetak yang paling cepat adalah mesin pencetak kedua. Maka, waktu yang dibutuhkan mesin pencetak kedua untuk mencetak sebuah buku adalah (x – 3) jam. Dalam hal ini, nilai x_2 = 1 tidak memenuhi syarat sebab akan menghasilkan nilai negatif. Sehingga waktu yang dibutuhkan mesin pencetak kedua adalah (x_1– 3) jam = (6 – 3) jam = 3 jam.

3. Apabila sebuah mobil berjalan dengan kecepatan yang memenuhi sistem persamaan kuadrat $v_t = 5t^2 + 7t - 15$, dengan v dalam meter per detik, dan t dalam detik. Maka, setelah berjalan selama 10 detik, berapakah percepatan yang dialami mobil?

Penyelesaian:

Ada hal yang menarik di sini, yaitu sistem persamaan kuadrat ternyata juga digunakan dalam kajian bidang keilmuan lain, seperti fisika. Dalam ilmu fisika, kita mengenal bahwa besarnya percepatan (**a**) merupakan turunan pertama dari fungsi kecepatan (**v**). Sehingga persamaan percepatannya adalah:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 7t - 15) = 10t + 7$$

Dari sini, percepatan mobil tersebut pada detik kesepuluh dapat kita tentukan dengan mudah, yaitu hanya tinggal mensubstitusi t = 10 sekon ke persamaan percepatan tersebut.

$a_{10} = 10(10) + 7 = 107\, m/s^2$

4.8 Kegiatan Pembelajaran 8. Rangkuman

- Bentuk umum persamaan kuadrat: $a.x^2 + b.x + c = 0$

- Cara penentuan akar-akar persamaan kuadrat:
  1. Memfaktorkan → $(x_1 - a)(x_2 - b) = 0$
  2. Melengkapi bentuk persamaan kuadratnya

     → $(x + p)^2 = q$

     → $p = \frac{1}{2}b$ dan $q = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$
  3. Menggunakan rumus kuadrat

     → $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Jenis-jenis akar-akar persamaan kuadrat:

→ $D = b^2 - 4ac$
  1. $D = 0$, akar-akarnya real dan sama.
  2. $D < 0$, akar-akarnya tidak real (imajiner).
  3. $D > 0$, akar-akarnya real dan berbeda.
  4. $D \geq 0$, akar-akarnya rasional.

- Beberapa sifat khusus, rumus, serta hasil kali akar-akar persamaan kuadrat:

1. $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
2. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
3. $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a}$
4. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2.x_1.x_2$
5. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3.x_1.x_2.(x_1 + x_2)$
6. $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2.(x_1.x_2)^2$

- Membentuk persamaan kuadrat:
  - → $x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$
  - → $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

4.9 Kegiatan Pembelajaran 9. Soal-soal Diskusi Kelompok

Setelah mempelajari buku ini sampai sejauh ini, bagaimanakah perasaanmu? Masihkah kamu menganggap matematika sebagai pelajaran yang sulit dan membosankan? Tentu tidak, bukan. Nah, untuk semakin memantabkan kemampuanmu pada materi ini, maka kami telah menyiapkan beberapa soal yang dapat kamu diskusikan secara berkelompok. Coba kamu kerjakan soal-soal berikut untuk mengetahui, seberapa jauh kemampuanmu saat ini. Tidak perlu terburu-buru. Kerjakan perlahan-lahan dan pahami penggunaan berbagai rumus yang telah diuraikan sebelumnya. Semogaberhasil

Pilihlah salah satu pilihan jawaban yang paling tepat! Jawablah soal-soal berikut ini secara berkelompok!

1. Akar-akar dari persamaan kuadrat $5x^2 – 7x + 2 = 0$ adalah….

a. $\frac{2}{5}$ dan 1

b. $\frac{-2}{5}$ dan 1

c. $– 1$ dan $\frac{2}{5}$

d. $– 1$ dan 2

e. $– 2$ dan $– 1$

Diketahui: $5x^2 – 7x + 2 = 0$
Ditanyakan: Akar-akar persamaan kuadrat tersebut?
Penyelesaian:

$5x^2 –\quad 7x \quad + \quad 2 \quad = \quad 0$

$5x \qquad\qquad – 2 \qquad – 2x$

$x \qquad\qquad – 1 \qquad – 5x$

$(5x –….)\ (x –….) = 0 \qquad –7.x$

$(5x –….) = 0 \qquad (x –….) = 0$

$x_1 = \frac{….}{….} \qquad x_2 = ….$

Maka, jawaban yang tepat adalah pada pilihan ….

2. Persamaan kuadrat $2x^2 + (2a - 7)x + 24 = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Apabila nilai x_1 sama dengan tiga kali nilai x_2, maka berapakah nilai dari $2(a + x_2)$?

a. -1 atau 19
b. -13 atau 27
c. $\frac{-9}{2}$ atau $\frac{23}{2}$
d. -9 atau 23
e. $\frac{9}{2}$ atau $\frac{-23}{2}$

Diketahui : $2x^2 + (2a - 7)x + 24 = 0$
Akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut dinyatakan dengan notasi x_1 dan x_2.
Nilai $x_1 = 3x_2$.
Ditanyakan : Nilai dari $2(a + x_2)$ adalah?
Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, hal pertama yang harus kita lakukan adalah membuat persamaan yang berkaitan dengan sifat-sifat khusus akar-akar persamaan kuadrat.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\ldots + x_2 = \frac{-\ldots}{\ldots}$$

$$\ldots = \frac{-(2a-7)}{2}$$

$\ldots = (2a-7)$ ……………. Persamaan 1

$$x_1 . x_2 = \frac{\ldots}{\ldots}$$

$$3x_2 . x_2 = \frac{\dots}{\dots}$$

$$3 . x_2{}^2 = \dots$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{\ldots.}{3}} = \pm\sqrt{\ldots.} = \pm 2$$

Kemudian, cari nilai *a* dengan cara mensubstitusi nilai x_2 ke persamaan 1.

$$\ldots. = (2a-7) \quad \text{atau} \quad \ldots. = (2a-7)$$

$$-8(\ldots.) = (2a-7) \quad \text{atau} \quad -8(\ldots.) = (2a-7)$$

$$\ldots. = (2a-7) \quad \text{atau} \quad \ldots. = (2a-7)$$

$$2a = \ldots. \quad \text{atau} \quad 2a = \ldots.$$

$$a_1 = \frac{-9}{2} \quad \text{atau} \quad a_2 = \frac{23}{2}$$

Sehingga, kita dapat memperoleh nilai dari 2*(a* + x_2*)*, yaitu:

$$2(a+x_2) = 2\left(\frac{-9}{2} + 2\right) \quad \text{atau} \quad 2(a+x_2) = 2\left(\frac{23}{2} - 2\right)$$

$$2(a+x_2) = 2\left(\frac{-9}{2} + \frac{4}{2}\right) \quad \text{atau} \quad 2(a+x_2) = 2\left(\frac{23}{2} - \frac{4}{2}\right)$$

$$2(a+x_2) = \ldots. \quad \text{atau} \quad 2(a+x_2) = \ldots.$$

Maka, dapat disimpulkan bahwa pilihan jawaban yang paling tepat ialah ….

3. Agar persamaan kuadrat $x^2 + (m-2)x + 9 = 0$ mempunyai 2 akar kembar, maka nilai m yang memenuhi adalah…

   Pembahasan :

   $x^2 + (m-2)x + 9 = 0$

   Diketahui :

$a = 1$, $b = m-2$, $c = 9$
Ditanya : Berapakah niali m yang memenuhi ? …

Penyelesaian :

Dua akar kembar (D = 0)

$\rightarrow b^2-4ac = 0$

$(..)^2 - 4(..)(..) = 0$

$(…)^2 = …$

$…. = …$

$… = …$ dan $… = …$

$m = 8$ danm $= -4$

4. Persamaan kuadrat $x^2 + 4\ px + 4 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Jika $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 32$. maka nilai p = ….
   Pembahasan :
   $x^2 + 4px + 4 = 0$
   Diketahui :
   $a = 1$, $b = 4p$, $c = 4$
   Ditanya : Berapakah nilai p ?
   Penyelesaian :
   - $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ » $-\frac{\dots}{\dots} = -4p$
   - $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ » $\frac{\dots}{\dots} = 4$

   $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 32$
   $x_1.x_2(x_1 + x_2) = 32$
   $…(…) = 32$
   $p = -2$

5. akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax - 4 = 0$ adalah p dan q. Jika $p^2 - 2pq + q^2 = 8a$, maka nilai a = …
   Pembahasan :

$x^2 + ax - 4 = 0$
Diketahui :
a = 1 , b = a , c = 4
Ditanya : berapakah nilai a ?
Penyelesaian :

- $p + q = -\dfrac{b}{a} » \dfrac{-a}{1} = \dots$

- $p.q = \dfrac{c}{a} » \dfrac{-4}{1} = \dots$

$» p^2 -2pq + q^2 = 8a$

$P^2 + q^2 -2pq = 8a$

$((p + q)^2 -2pq) -2pq = 8a$

$(-a)^2 -4(-4) = 8a$

$\dots^2 - \dots a + \dots = 0$

$(\dots)^2 = 0$

$a = 4$

6. Jika x_1 dan x_2 adalah akar – akar persamaan kuadrat $x^2 – x – 3 = 0$, maka persamaan kuadrat yang akar – akarnya $x_1^2 + x_2^2$ dan $2x_1 + 2x_2$ adalah …
Pembahasan :
$x^2 – x – 3 = 0$
Diketahui :
a = 1 , b = -1 , c = -3
Ditanya : berapakah bentuk persamaan kuadrat barunya ? …
Penyelesaian :
- $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} » -\dfrac{\dots}{\dots} = 1$
- $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} » \dfrac{\dots}{\dots} = -3$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\, x_1x_2$

$= (...)^2 - 2(\ldots)$
$= \ldots - \ldots$
$= 7$

- $2x_1 + 2x_2 = 2\ (x_1 + x_2)$

$= 2\ (\ldots) = 2$

Maka, persamaan kuadrat baru

» $x^2 - (\ldots + \ldots)\, x + (\ldots - \ldots) = 0$

» $x^2 - 9x + 14 = 0$

7. Akar – akar persamaan kuadrat $x^2 + (p - 3)\, x + 4 = 0$ adalah x_1 dan x_2 . jika $x_1^2 + x_2^2 = p - 5$. nilai p yang memenuhi yaitu…

Pembahasan :
$x^2 + (p - 3)\, x + 4 = 0$
Diketahui :
a = 1 , b = p -3 , c = 4
Ditanya : berapakah nilai p yang memenuhi ?
Penyelesaian :

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ » $-\frac{\ldots}{\ldots} = -p + 3$
- $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ » $\frac{\ldots}{\ldots} = 4$
- $x_1^2 + x_2^2 = p - 5$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p - 5$
$(\ldots)^2 - 2\,(\ldots) = p - 5$
$P^2 - 6p + 9 - 8 = p - 5$
$P^2 - 7p + 6 = 0$
$(p - \ldots)(p - \ldots) = 0$
$P = 1$ atau $P = 6$

Jadi, nilai p = 1 atau nilai p = 6

8. Jika a dan b adalah akar – akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$. maka nilai $2a^2 + b^2 + a$ …

Pembahasan :
Diketahui : persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$
Ditanya : berapakah nilai $2a^2 + b^2 + a$?...
Penyelesaian :

- a merupakan akar – akar persamaan , maka :

$a^2 + a - 3 = 0$ (pindah ruas)

$a^2 = 3 - a$ $\longrightarrow$ $(\times 2)$

$(\ldots)^2 = \ldots - \ldots$ $\longrightarrow$

- b merupakan akar – akar persamaan , maka :

$b^2 + b - 3 = 0$ (pindah ruas)

$b^2 = 3 - b$ $\longrightarrow$

- sehingga $2a^2 + b^2 + a$

(... - …) + (… - …) + a

… - (… + …)

9. Apabila penyelesaian dari persamaan kuadrat $2^{x^2+5x+11} = (32)^{2x+1}$ adalah A dan B, maka nilai dari A + B adalah ….

a. 3
b. 2
c. 5
d. 4
e. 7

Penyelesaian:

Soal tersebut merupakan soal hasil pengembangan dari konsep sistem persamaan kuadrat yang berkaitan dengan bilangan bereksponen.

Dalam penyelesaiannya, kita perlu mengingat aturan eksponen, yaitu apabila $a^m = a^n$, maka m akan sama dengan n. Sehingga:

$$2^{x^2+5x+11} = (32)^{2x+1}$$

$$2^{x^2+5x+11} = (2)^{\ldots(2x+1)}$$

$$2^{x^2+5x+11} = (2)^{\ldots x+\ldots}$$

$$x^2 + 5x + 11 = \ldots .x + \ldots .$$

$$x^2 + (5 - \ldots .)x + (11 - \ldots .) = 0$$

$x^2 + (\ldots.)\,x + (\ldots.) = 0$

Setela mencapai tahap ini, nilai dari A + B dapat langsung kamu tentukan dengan menggunaan sifat khusus persamaan kuadrat, yaitu:

$$A + B = \frac{-b}{a} = \frac{-\ldots.}{\ldots.} = \ldots.$$

Maka, jawaban yang tepat terdapat pada pilihan ….

10. Apabila (p + 1) dan (p – 1) adalah penyelesaian persamaan kuadrat $x^2 - 4x + q = 0$, maka nilai q adalah ….

    a. 2
    b. 3
    c. 8
    d. 4
    e. 7

    Penyelesaian:

    Pertama-tama, kamu harus gunakan sifat khusus persamaan kuadrat terlebih dahulu, yakni menjumlahkan akar-akar dari persamaan kuadratnya:

    $$(p+1) + (p-1) = \frac{-b}{a}$$

    $$2p = \frac{-\ldots.}{\ldots.}$$

    $$p = \ldots.$$

    Kemudian, kaitkan dengan sifat khusus yang lain, yaitu perkalian akar-akar persamaan kuadrat, dengan mnsubstitusi nilai p yang telah diperoleh, maka:

$$(p+1)(p-1)=\frac{c}{a}$$

$(\ldots.+1)(\ldots.-1)=\frac{q}{1}$

$(\ldots.)(\ldots.)=q$

$q=\ldots.$

Sehingga, pilihan jawaban yang tepat adalah ….

11. Diketahui bahwa akar-akar dari persamaan kuadrat $2x^2 - p + 1 = 0$ adalah α dan β, dengan $p > 0$. Apabila terdapat suatu persamaan kuadrat lain yang akar-akarnya terbentuk dari modifikasi akar-akar persamaan kuadrat awal menjadi $\frac{1}{\alpha^2}$ dan $\frac{1}{\beta^2}$, yaitu $x^2 - 5x + 4 = 0$, maka nilai p yang memenuhi adalah ….

    a. 1
    b. 7
    c. 3
    d. 6
    e. 9

    Penyelesaian:

    Mula-mula, aplikasikan terlebih dahulu sifat-sifat khusus akar-akar persamaan kuadrat ke persamaan yang awal (pertama):

    $2x^2 - px + 1 = 0$

    $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\ldots.}{\ldots.}$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-p)}{2} = \frac{\dots.}{\dots.}$$

Kemudian, kamu perlu mencari nilai dari $\alpha^2 + \beta^2$ untuk mempermudah perhitungan selanjutnya, sehingga kamu perlu menguadratkan $\alpha + \beta$ yang telah kamu peroleh tadi:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+b^2-2\alpha\beta$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=\left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2-2\left(\frac{\dots}{\dots}\right)=\dots+\dots$$

Selanjutnya, mari kita menelaah ke persamaan kuadrat yang kedua. Persamaan kuadrat kedua terbentuk dengan cara sebagai berikut:

$$x^2-5x+4=x^2-\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)+\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\right]x+\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\right]$$

$$-5x+4=-\left[\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\right)\right]x+\left[\frac{1}{(\alpha\beta)^2}\right]$$

$$-5x+4=-\left[\frac{\dots+\dots}{\dots}\right]x+\left[\frac{1}{\left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2}\right]$$

$$-5x+4=[\dots+\dots]x+\left[\frac{1}{\left(\frac{\dots}{\dots}\right)}\right]$$

$$-5x=[\dots+\dots]x$$

$$p^2=5-\dots$$

$$p=\pm\sqrt{\dots}=\pm\dots$$

Karena pada soal diberitahu bahwa nilai $p > 0$, maka pilihan jawaban yang paling tepat adalah ….

12. Apabila x_1 dan x_2 adalah penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + x = 3$, maka nilai dari $2x_1^2 + x_2^2 + x_1 = ….$

    a. 7
    b. 3
    c. 6
    d. 9
    e. 10

    Penyelesaian:

    Karena x_1 dan x_2 merupakan penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut, maka hal ini berarti apabila nilai x disubstitusi dengan x_1 atau x_2, akan diperoleh nilai yang memenuhi. Dari fakta ini, maka dapat kita operasikan demikian:

    $x_1^2 + x_1 = 3$ (Kalikan 2)

    $2x_1^2 = 6 - 2x_1$

    Lakukan hal yang sama pada x_2:

    $x_2^2 + x_2 = ….$

    $x_2^2 = ….–….$

    Dengan data tersebut, kita dapat mencari nilai yang diminta soal, yaitu:

    $2x_1^2 + x_2^2 + x_1 = ….$

    $(6 - 2x_1) + (3 - x_2) + x_1 = ….$

    $9 - (x_1 + x_2) = ….$

$$9 - \left(\frac{c}{a}\right) \quad = \quad \ldots.$$

$$9 - \left(\frac{\ldots.}{\ldots.}\right) \quad = \quad \ldots.$$

$9 - (....) \quad = \quad ....$

Maka, pilihan jawaban yang tepat adalah ….

13. Persamaan kuadrat $(2m - 4)\ x^2 + 5\ x + 2 = 0$ memiliki akar-akar real dan berkebalikan, maka nilai m adalah ….

    a. 2
    b. 7
    c. 3
    d. 9
    e. 4

    Penyelesaian:

    Karena akar-akarnya saling berkebalikan, maka nilai $x_1.x_2 = 1$. Sehingga:

    $x_1 . x_2 = 1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow 1 = \frac{....}{....}$

    Maka:

    $2m - 4 \;=\; ....$
    $m \;=\; ....$

    Sehingga, pilihan jawaban yang tepat adalah ….

14. Suatu persamaan kuadrat dibentuk dari akar-akar$(x + 1)$ dan $(3x - 1)$, dengan nilai x ditentukan oleh persamaan $x\ (x - 4) = x^2 - 2\ (x + 2)$, maka persamaan kuadrat yang terbentuk adalah ….

    a. $x^2 - 3x + 9 = 0$
    b. $x^2 - 8x = -15$
    c. $x^2 = 7x + 12$
    d. $x^2 - 4x = 2$
    e. $2x = x^2 - 3$

Penyelesaian:
Pertama-tama, kamu perlu mencari terlebih dulu nilai x nya…

$$x(x-4) = x^2 - 2(x+2)$$

$$x^2 - 4x = x^2 - 2x - 4$$

$$-4x = -2x - 4$$

$$2x = \ldots.$$

$$x = \ldots.$$

Setelah kamu memperoleh nilai x, maka saatnya kamu mencari akar-akar persamaan kuadrat yang terbentuk:

$x_1 = x + 1 = \ldots. + 1 = \ldots.$

$x_2 = 3x - 1 = 3(\ldots.) - 1 = \ldots. - 1 = \ldots.$

Maka, persamaan kuadrat yang terbentuk adalah:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$(x - \ldots.)(x - \ldots.) = 0$$

$$\ldots. - \ldots. + \ldots. = 0$$

Sehingga, pilihan jawaban yang tepat adalah ….

15. Bentuk kuadrat sempurna dari persamaan $x^2 - 6x - 7 = 0$ adalah ….

    a. $(x-3)^2 = 18$
    b. $(x-8)^2 = 18$
    c. $(x-8)^2 = 13$
    d. $(x-6)^2 = 18$
    e. $(x-3)^2 = 16$

    Penyelesaian:
    Seperti yang telah diuraikan pada bagian pembahasan, pengubahan suatu persamaan kuadrat ke bentuk persamaan

kuadrat sempurna menggunakan dua variabel, yaitu p dan q. Apabila kamu lupa, maka silakan lihat kembali bagian pembahasan.

$$p=\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}(\ldots.)=\ldots.$$

$$q=\left(\frac{1}{2}b\right)^2-c=(p)^2-c=(\ldots.)^2-\ldots.=\ldots.-\ldots.=\ldots.$$

Bentuk kuadrat sempurnanya ialah:

$(x + p)^2 \quad = \quad q$

$(x + \ldots.) \quad = \quad \ldots.$

Maka, pilihan jawaban yang tepat adalah ….

4.10 Kegiatan Pembelajaran 10. Soal-soal Latihan Mandiri

Apabila kelompokmu dapat menjawab seluruh pertanyaan diskusi kelompok tadi dengan benar, maka tentu kamu sudah menguasai materi ini. Nah, kalau sebelumnya kamu menyelesaikan soal-soal itu dengan menggabungkan beberapa pemikiran, saat ini cobalah untuk menguji kemampuanmu sendiri. Jangan ragu, kamu pasti bisa. Selamat mengerjakan Semangat!

Jawablah soal-soal berikut ini dengan benar dan jelas secara mandiri di buku latihanmu!

Bagian Pertama:

Pilihlah dan berilah tanda silang (x) pada salah satu pilihan jawaban yang paling tepat!

1. Ciri-ciri dari suatu persamaan kuadrat adalah ….

a. Harga diskriminannya dinyatakan dengan perumusan $D = b - 4.a.c^2$
b. Dalam penyelesaiannya selalu membutuhkan bantuan garis bilangan.
c. Koefisien x^2 harus lebih dari nol.
d. Tidak dapat diselesaikan apabila x tidak memiliki koefisien.
e. Hanya dapat dinyatakan sebagai persamaan kuadrat apabila koefisien x^2 nya tidak sama dengan nol.

2. Penurunan rumus akar-akar suatu persamaan kuadrat yang memudahkan pencarian hasil dari penjumlahan atau pengurangan akar-akar berpangkat banyak dapat dipermudah dengan bantuan konsep ….

a. Teorema Phytagoras
b. Segitiga Pascal
c. Aturan cosinus
d. Grafik fungsi pada koordinat kartesius.
e. Penentuan titik puncak dan titik potong pada koordinat kartesius.

3. Pernyataan berikut ini sesuai dengan konsep sistem persamaan kuadrat, **kecuali ….**

a. Disebut sebagai persamaan kuadrat karena derajat x tertinggi adalah ^{2}.
b. Memiliki dua akar-akar penyelesaian.
c. Dapat didiferensialkan menjadi persamaan linear yang akan membentuk garis dengan kemiringan tertentu pada koordinat kartesius.
d. Salah satu metode penyelesaiannya ialah dengan memfaktorkan.
e. Berkaitan dan dapat digunakan dalam bidang keilmuan lain.

4. Berikut ini yang **bukan** merupakan contoh variasi dari sistem persamaan kuadrat yang mungkin adalah….

a. Persamaan Logaritma
b. Persamaan Eksponen

c. Persamaan Akar

d. Kaidah pencacahan.

e. Persamaan Trigonometri.

5. Pada sistem persamaan kuadrat dengan bentuk $a.x^2 + b.x + c = 0$, notasi x dapat diposisikan sebagai variabel terikat yang nilai pasti angkanya dapat diketahui apabila….

   a. Hanya nilai c yang tidak diketahui.
   b. Nilai a dan b diketahui, sedangkan c tidak, serta ditambahkan variabel lain, misalnya y, sehingga persamaannya menjadi $a.x^2 + b.x + c = y$.
   c. Nilai a, b, dan c diketahui.
   d. Nilai a positif, nilai b negatif, dan nilai c tidak diketahui..
   e. Tanda positif diubah menjadi negatif, dengan cara mengalikan seluruh bagian persamaan tersebut dengan (– 1).

6. Persamaan kuadrat $9\,x^2 + 18\,x + 81 = 0$ memiliki akar-akar yang kembar, yaitu $x_1 = x_2$. Adapun nilai x_1 dan x_2 ini senantiasa positif. Dari akar-akar persamaan ini, akan dibuat suatu persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya adalah $\alpha = \sqrt{x_1}$, *dan* $\beta = \sqrt{x_2}$. Persamaan kuadrat yang akan terbentuk adalah….

   a. $3\,x^2 + 3\,x - 7 = 0$
   b. $x^2 - 6\,x + 9 = 0$
   c. $2\,x^2 + 5\,x - 3 = 0$
   d. $2\,x^2 - 8\,x + 5 = 0$
   e. $x^2 + 3\,x + 2 = 0$

7. Apabila 1 dan (-2) merupakan akar-akar dari suatu persamaan kuadrat $a.x^2 + b.x + c = 0$, maka nilai dari $\boldsymbol{c^3 + a^{(2019)}}$ adalah ….

   a. – 7
   b. 7
   c. 0
   d. $7 \,.\, 10^{(2019)}$
   e. ∞

8. Akar-akar dari persamaan kuadrat $-24x^2 - 29x + 63 = 0$ adalah x_1 dan x_2, di mana $x_1 > x_2$. Maka, nilai dari $x_1 (x_1 + x_2)$ adalah ….

a. $\frac{189}{64}$

b. $\frac{50}{3}\sqrt{3}$

c. $\frac{-7}{12}$

d. $\frac{-3}{4}\sqrt{2}$

e. $\frac{9}{32}$

9. Persamaan kuadrat $a.x^2 + b.x + c = 0$ memiliki akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2. Nilai x_1 dapat dinyatakan sebagai penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 35 = 0$ yang bernilai positif. Sedangkan, nilai x_2 merupakan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 - 22.x + 85 = 0$ yang merupakan bilangan prima. Dari persamaan kuadrat $a.x^2 + b.x + c = 0$ tersebut, akan dibuat persamaan kuadrat baru yang penyelesaiannya diperoleh dari akar-akar persamaan kuadrat tersebut, di mana penyelesaian akar-akar persamaan kuadrat barunya adalah $\alpha = x_1 + 3$, dan $\beta = x_2 + 3$. Persamaan kuadrat baru yang terbentuk adalah …..

a. $x^2 - 6x - 38 = 0$

b. $5x^2 + 27x - 108 = 0$

c. $-2x^2 - 3x = 5$

d. $x^2 - 30x + 200 = 0$

e. $x^2 - 3x - 2 = 37$

10. Apabila salah satu penyelesaian persamaan kuadrat $7x^2 - 27x = 280$ adalah sama dengan penyelesaian persamaan kuadrat $2x^2 = 10x$ yang bernilai lebih dari nol. Maka, akar-akar persamaan kuadrat $7x^2 - 27x = 280$ yang lain adalah ….

a. $\frac{8}{7}$

b. $\frac{-3}{4}$

c. $\frac{-8}{7}$ d. $\frac{4}{3}$

$\frac{5}{2}$

11. Suatu persamaan kuadrat dinyatakan dengan $(2p - 5)x^2 + 13x - 7 = 0$. Akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut dinyatakan dengan notasi x_1 dan x_2. Dari akar-akar persamaan kuadrat tersebut, akan dibentuk suatu persamaan kuadrat baru yang akar-akar barunya adalah $\alpha = x_1 + 4$, dan $\beta = x_2 + 4$. Adapun,

12. nilai dari p pada persamaan kuadrat awal adalah positif, serta dinyatakan dengan persamaan kuadrat $-120p^2 + 79p + 63 = 0$. Bagaimanakah hasil persamaan kuadrat baru yang terbentuk?

a. $5x^2 + 120x + 36 = 0$
b. $17x^2 + 53 = 0$
c. $11x^2 - 140x - 4 = 0$
d. $-8x^2 + 73x - 104 = 0$
e. $-x^2 + 61x - 69 = 0$

13. Agar akar-akar dari suatu persamaan kuadrat $7x^2 - (13m - 5)x + 28 = 0$ adalah bilangan khayalan (imajiner), maka batas-batas nilai m yang memenuhi persamaan tersebut adalah ….

a. $\frac{-23}{13} < m < \frac{33}{13}$
b. $m \leq -\frac{23}{13}$ *atau* $m \geq \frac{33}{13}$
c. $\frac{-28}{13} < m < \frac{83}{13}$
d. $m \leq -\frac{23}{18}$ *atau* $m \geq \frac{33}{18}$
e. $m \neq 0$

14. Akar-akar persamaan kuadrat $-27x^2 + 48x = -35$ dinyatakan dengan x_1 dan x_2. Nilai x_1 lebih besar daripada x_2. Dari akar-akar persamaan kuadrat tersebut, akan dibuat suatu persamaan kuadat baru yang akar-akarnya adalah $\alpha = x1 + \frac{2}{3}$ dan $\beta = 3$. Maka, persamaan kuadrat baru yang akan terbentuk adalah ….

a. $x^2 + 7x - 3 = 0$
b. $x^2 - 6x + 9 = 0$
c. $x^2 + 8x - 72 = 0$
d. $x^2 - 6x + 8 = 0$
e. $x^2 - 3x - 13 = 0$

15. Suatu perusahaan biskuit memproduksi biskuit dengan bentuk lingkaran. jari-jari keseluruhan biskuit adalah 4 cm. Pada biskuit tersebut terdapat lingkaran lain yang di dalamnya yang diselimuti cokelat. Luas bagian biskuit yang memiliki diselimuti sokelat ini ialah 9π. Maka, lebar bagian melingkar di tepi biskuit yang tidak terbalut cokelat adalah…

a. 1 cm
b. 3 cm
c. $\frac{3}{2} cm$
d. $\frac{5}{4} cm$
e. 2 cm

16. Suatu pekarangan rumah berbentuk yang persegi panjang memiliki ukuran *(x + 3)* meter dan *(5x – 1)* meter. Apabila luas pekaragan rumah tersebut adalah $\frac{308}{9} meter^2$, dan $(x + 4) \geq 0$. Maka, keliling pekarangan rumah tersebut adalah ….

a. 24 meter
b. $\frac{53}{2}$ meter
c. 27 meter
d. $\frac{21}{5}$ meter
e. $\frac{54}{7}$ meter

17. Agar persamaan kuadrat $x^2 + b.x + 8 = 0$ memiliki dua penyelesaian yang sama dan $(b + 2) \geq 0$, maka nilai *b* dan penyelesainnya ialah….

a. $2\sqrt{2} dan \sqrt{2}$
b. $8\sqrt{2} dan -4\sqrt{2}$
c. $4\sqrt{2} dan -2\sqrt{2}$
d. $8\sqrt{3} dan -4\sqrt{3}$
e. $-4\sqrt{2} dan 2\sqrt{2}$

18. Penyelesaian dari persamaan kuadrat $2x^2 + x + 8 = 0$ adalah ….
    a. 1
    b. Tidak dapat ditentukan

c. -1
d. 0
e. 4

19. Apabila pada suatu segitiga sembarang ABC, diketahui bahwa panjang AB = $(2x + 1)$ cm, dan panjang AC = $(5x - 3)$ cm. Selain itu, diketahui pula bahwa besar sudut BAC adalah 30°. Serta luas segitiga tersebut adalah $\frac{35}{4} cm^2$. Maka, panjang AB dan AC adalah ….

a. 7 cm dan 12 cm
b. 3 cm dan 2 cm
c. 5 cm dan 7 cm
d. – 7 cm dan – 23 cm
e. – 1 cm dan – 8 cm

20. Apabila diketahui suatu persamaan kuadrat adalah $a.x^2 + b.x + c = 0$, dengan akar-akar x_1 dan x_2. Apabila nilai a diperoleh dari penyelesaian persamaan kuadrat $a^2 + 2354\ a = 4712$ yang negatif. Nilai b diperoleh dari penyelesaian persamaan kuadrat $2.b^2 + 865.b = -1293$ yang negatif. Serta, nilai c diperoleh dari akar-akar persamaan kuadrat $c\ (c - 161) = 0$ yang positif. Maka, akar-akar dari persamaan kuadrat $a.x^2 + b.x + c = 0$ adalah….

a. $\frac{-7}{18} dan \frac{28}{124}$
b. $\frac{7}{18} dan -\frac{28}{126}$
c. $\frac{17}{9} dan \frac{23}{144}$
d. $\frac{-7}{19} dan \frac{23}{124}$
e. $\frac{55}{23} dan -\frac{87}{139}$

21. Apabila akar-akar dari suatu persamaan kuadrat $a.x^2 + b.x + c = 0$ adalah x_1 dan x_2, di mana $x_1 \geq x_2$. Nilai a dapat kamu peroleh dari penyelesaian persamaan kuadrat $15\ a^2 - 9\ a = 42$

yang positif. Nilai b diperoleh dari penyelesaian persamaan kuadrat $b^2 - 2b = 3$ yang negatif. Serta, nilai c diperoleh dari akar-akar persamaan kuadrat $2c^2 + 109c = 168$ yang negatif. Dari akar-akar persamaan kuadrat $a.x^2 + b.x + c = 0$ tersebut akan dibentuk suatu persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya adalah $\alpha = \sqrt{x_1}$dan $\beta = x_2 - \frac{1}{2}$. Maka, persamaan kuadrat yang barunya adalah ….

a. $x^2 - 3x = 24$
b. $5x^2 + 7x = 8x - 21$
c. $x^2 + 2x = 8$
d. $5x^2 + 7x = 13x^2 - 5x + 27$
e. $x^2 + 4x = 13$

Bagian Kedua:

Isilah titik-titik berikut ini dengan cara memilih kata yang tepat di dalam kotak yang tersedia sebagai padanan untuk setiap butir pernyataan!

a. Diskriminan	f. Memfaktorkan
b. Akar-akar	g. Berkebalikan
c. Garis bilangan	h. Tidak nyata (imajiner)
d. Rumus kuadrat	i. Bentuk umum.
e. Genap	j. Penjumlahan

1. …. merupakan salah satu cara menentukan penyelesaian suatu persamaan kuadrat.

2. *"Rumus kecap"* merupakan istilah lain yang biasa digunakan untuk menyebut ….

3. Tanda lebih kurang (±) ditempatkan di depan bentuk akar yang berpangkat ….

4. Apabila harga diskriminan dari suatu persamaan kuadrat bernilai negatif, maka dapat dipastikan bahwa persamaan kudrat tersebut memiliki penyelesaian yang ….

5. …. dibutuhkan untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan kuadrat yang memiliki dua variabel serta akar-akarnya tidak saling sama.

6. $\frac{-b}{a}$ merupakan perumusan yang dapat digunakan untuk menentukan hasil …. dari akar-akar suatu persamaan kuadrat.

7. Nilai dari variabel yang memenuhi suatu persamaan kuadrat disebut sebagai …. persamaan kuadrat.

8. Apabila pada akar-akar suatu persamaan kuadrat berlaku $x_1 \cdot x_2 = 1$, maka dapat dipastikan bahwa akar-akar persamaan kuadrat tersebut saling ….

9. Penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat dapat langsung ditentukan real atau tidaknya tanpa harus mengetahui nilai masing-masing terlebih dahulu dengan bantuan ….

10. $a.x^2 + b.x + c = 0$ merupakan…. dari suatu persamaan kuadrat.

Bagian Ketiga:

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan menyertakan cara penyelesaiannya! Tuliskanlah jawabannya dengan rapih di buku latihanmu!

1. Jelaskan bentuk umum dari suatu persamaan kuadrat, serta berilah keterangan berupa arti dari masing-masing notasi yang digunakan pada bentuk umum persamaan kuadrat tersebut!

2. Mengapa syarat utama dari suatu persamaan kuadrat ialah nilai koefisien dari x^2 tidak boleh sama dengan nol?

3. Mengapa notasi c pada suatu persamaan kuadrat dalam bentuk umum disebut sebagai tetapan (konstanta)?

4. Jelaskan beberapa cara atau metode yang dapat digunakan untuk menemukan penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat!

5. Mengapa di depan tanda akar yang berpangkat genap selalu ada tanda lebih kurang (±), sedangkan di depan tanda akar yang berpangkat ganjil tidak ada? (Misalnya $\pm\sqrt{4}$; $\sqrt[3]{8}$; dan $-\sqrt[3]{8}$).

6. Mengapa tanda lebih kurang (±) dapat dihilangkan ketika suatu akar berpangkat dua dikuadratkan? (Misalnya $\pm\sqrt{4}$ yang ketika dikuadratkan menjadi 4 saja, dan bukan ± 4).

7. Mengapa diskriminan yang bernilai negatif akan menghasilkan akar-akar persamaan kuadrat yang tidak nyata (imanjiner)? Dan, mengapa diskriminan yang bernilai sama dengan nol mengindikasikan bahwa kedua akar-akar dari suatu persamaan kuadrat adalah sama?

8. Jelaskan mengapa garis bilangan dibutuhkan untuk memperoleh penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat yang memiliki dua variabel serta yang juga nilai diskriminannya tidak sama dengan nol? (Misalnya pada kasus penentuan nilai *m* pada persamaan kuadrat $(m - 5)x^2 - 4m.x + (m - 2) = 0$ agar memiliki akar-akar yang tidak nyata).

9. Dapatkah kita membentuk suatu persamaan kuadrat baru, di mana akar-akar persamaan kuadrat yang baru ini diperoleh dari hasil modifikasi akar-akar persamaan kuadrat awal, tanpa harus mencari terlebih dahulu akar-akar dari persamaan kuadrat awalnya? Jika bisa, berilah satu contoh persoalan mengenai hal ini beserta penyelesaiannya!

10. Berilah sedikitnya tiga contoh bentuk variasi persamaan kuadrat dalam bentuk selain aljabar, beserta penyelesaiannya!

11. Raini memiliki sebuah bingkai foto yang berbentuk belah ketupat. Pada setiap titik sudut bingkai fotonya, ia memberikan hiasan berupa pita. Jarak terdekat dari setiap pita ke pita lain yang saling berhadapan adalah 20 cm. Selain itu, saat Maya berkunjung ke rumah Acha, ia melihat bahwa Acha juga memiliki benda yang sama-sama berbentuk belah ketupat. Acha memiliki sebuah jam dinding yang luasnya 150 cm^2, dan

jarak setiap titik sudut ke sumbu rotasinya adalah sama. Apabila kedua benda tersebut ditempelkan tepat di tengah, maka berapakah jarak antara kedua titik sudut benda yang terbentuk?

12. Misal akar-akar suatu persamaan kuadrat $21x^2 + 8x - 45 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Nilai dari penjumlahan kuadrat akar-akarnya adalah ….

13. Penyelesaian persamaan kuadrat dari hasil pembagian $\frac{10x^3 - 59x^2 - 111x + 216}{(x-3)} = 0$ adalah….

14. Misal penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat $x^2 - 10x + c = 0$ adalah x_1 dan x_2. Adapun nilai dari $x_1^2 + x_2^2 = 58$. Dari akar-akar persamaan kuadrat tersebut akan dibuat suatu persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya adalah $\alpha = x_2 - \frac{35}{3}$ dan $\beta = x_1 - 45$. Sehingga $\alpha > \beta$. Persamaan kuadrat baru yang terbentuk adalah …. (Buatlah dalam bentuk umum dan setiap koefisiennya merupakan bilangan bulat paling sederhana!)

15. Suatu perusahaan kerupuk setiap harinya memproduksi sebanyak (x – 5) buah kerupuk. Menjelang hari kemerdekaan Republik Indonesia, perusahaan tersebut mengalami peningkatan permintaan sehingga khusus pada hari itu ia memproduksi sebanyak (x + 7) kali produksi pada hari biasanya. Pada hari itu dihasilkan sebanyak 35 buah kerupuk. Maka, jumlah kerupuk yang biasa dihasilkan perusahaan tersebut per harinya adalah …. (Buatlah dalam bentuk akan

MODUL 5

FUNGSI DAN GRAFIK FUNGSI KUADRAT

A. Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan mampu memahami fungsi kuadrat dan menyusun grafik fungsi kuadrat

B. Bahan Kajian

1. Fungsi Kuadrat
2. Menyusun Grafik Fungsi Kuadrat

MODUL 5

FUNGSI DAN GRAFIK FUNGSI KUADRAT

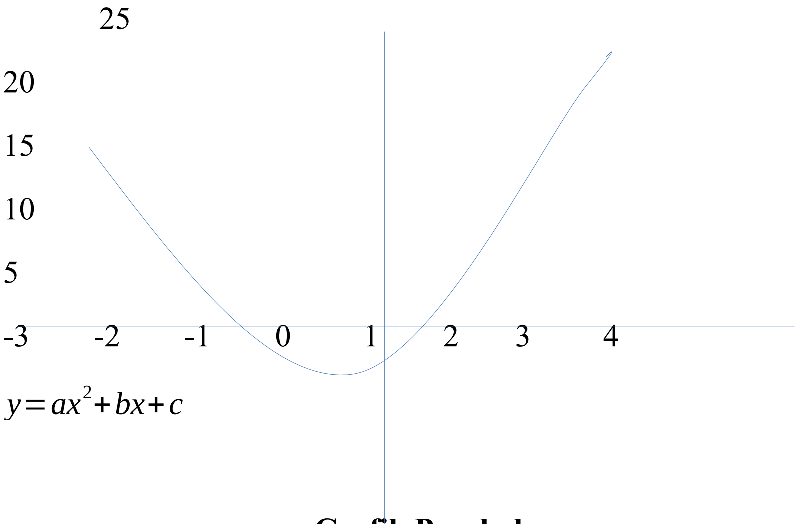
5.1 Kegiatan Pembelajaran 1.Fungsi Kuadrat

Fungsikuadratadalahsuatupersamaandarivariabel yang mempunyaipangkattertinggiyaitu 2 fungsiiniberkaitandenganpersamaankuadrat, fungsiinijugadikenaldenganfungsi polinomial.

$f(x)=a\,x^2+bx+c$ *atau* $y=a\,x^2+bx+c$

Dimana

- a, b, c
- $a \neq 0$



$y=ax^2+bx+c$

Grafik Parabola

Grafik 5.1.1.

Suatufungsiberkaitandengangrafikfungsibegitujugadenganfungsik uadrat.Bentukgrafikmemilikibentuk yang miripdengangrafik parabola sepertigambar di atas

Contohtitikesktrimpadafungsikuadratpada$a\,x^2-bx+c$ yaitu:

$$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{D}{4a}\right)$$

Grafikfungsiinidapatdibuatdenganmemasukannilai X pada intervaltertentusehinggaakan mendapatnilai Y

ContohSoal1 :

Absistitikbalikgrafikfungsi$y=p\,x^2+(p-3)\,x+2$adalah p.Nilai p adalah?

Diketahui :

$y=p\,x^2+(p-3)\times 2$

$x_p=p$

Ditanyakan :

Nilai p

Pembahasan :

Untukmenentukanabsistitikpuncak :

$$x_p=\frac{-b}{2a}=p$$

$$¿\frac{-(p-3)}{2p}=p$$

$$¿-p+3=2p^2$$

$¿-2p^2-p+3$

$¿(2p+3)(-p+1)=0$

$p=\frac{-3}{2}\, atau\; p=1$

Maka, nilai p yang sesuaiadalah$p=\frac{-3}{2}$

ContohSoal2 :

Koordinattitikbalikgrafikfungsikuadrat$y=x^2+4x-6$, yaitu:

$¿\left(\frac{-b}{2a},\frac{D}{4a}\right)$

$¿\left(\frac{-4}{2(1)},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

$¿\left(-2,-\frac{4^2-4(1)(-6)}{4(1)}\right)$

$¿(-2,-10)$

5.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Menyusun Grafik Fungsi Kuadrat

1. Diketahuitigatitikkoordinat (x,y) yang dilaluiolehgrafik, lalumasing-masingkoordinattersebutdisubsitusikankedalampersamaangrafik
   $y=ax^2+bx+c$
2. Diketahuititikpotongdengansumbu x dansatutitik yang dilalui. Misalnyatitikpotongsumbu X = $(x_1,0)$dan$(x_2,0)$ makarumusfungsikuadratnyaadalah

$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

Nilai a di hasilkandengancaramensubsitusikantitik(x, y) yang dilalui.

3. Diketahuititikpuncaknyadansatutitik yang dilalui. Misalnyatitikpuncak(x_p, y_p) jadi rumus fungsi kuadratnya adalah
$y=a¿$

   Nilai a di hasilkandengancaramensubsitusikantitik(x, y)yang dilalui.

ContohSoal1 :

Jikagrafik$y=x^2+ax+b$ mempunyai titik puncak (1,2),tentukan nilai a dan b!

Diketahui:

$y=x^2+ax+b$

Titikpuncak$(1,2)$

Ditanya :

Nilai a dan b

Pembahasan :

Gunakanrumus$\left(\frac{-b}{2a}\right)$sebagainilai x titikpuncak :

$$\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$\frac{-a}{2(1)}=1$$

$$a=-2$$

Substitusikantitikpuncak (1,2) kedalampersamaan :

$y = x^2 + ax + b$

$2 = (1)^2 + a(1) + b$

$1 = a + b$

Dari persamaanbarutersebut, substitusikannilai$a = -2$

$1 = a + b$

$1 = -2 + b$

$b = 3$

ContohSoal2 :

Jikafungsi$y = ax^2 + 6x + (a + 1)$mempunyai sumbu simetri $x = 3$. Tentukan nilai maksimumnya!

Diketahui :

$y = ax^2 + 6x + (a + 1)$

$x = 3$

Ditanya :

Nilaimaksimum

Pembahasan :

$\frac{-b}{2a} = 3$

$\frac{-6}{2a} = 3$

$a = -1$

Sehinggafungsi y menjadi :

$y = ax^2 + 6x + (a + 1)$

$y = -x^2 + 6x + (-1 + 1)$

$y = -x^2 + 6x$

Nilaimaksimumadalah :

Dengannilai$a = -1, b = 6, c = 0$

$¿ -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

$¿ -\left(\frac{6^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)}\right)$

$¿ -\left(\frac{36}{-4}\right)$

$¿ 9$

ContohSoal3 :

Tentukan grafik yang melintasi (-1,3) dan titik minimumnya sama dengan puncak grafik $y = x^2 + 4x + 3$!

Diketahui :

$a = 1, b = 4, c = 3$

$(x_p, y_p) = (-1,3)$

Ditanya :

Grafik fungsi kuadrat

Pembahasan :

Titik puncak $y = x^2 + 4x + 3$ adalah :

$(x_p, y_p) = \left[\frac{-b}{2a}, -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)\right]$

$¿\left[\frac{-4}{2(1)},-\left(\frac{(4)^2-4(1)(3)}{4(1)}\right)\right]$

$¿\left[-2,-\frac{16-12}{4}\right]$

$¿(-2,-1)$

Substitusikan nilai $(-1,3)$ dan (x_p, y_p) dalam persamaan :

$y=a¿$

$3=a¿$

$3=a¿$

$a=4$

Maka grafik fungsinya adalah :

$y=a¿$

$y=4¿$

$y=4(x^2+4x+4)-1$

$y=4x^2+16x+16-1$

$y=4x^2+16x+15$

5.3 Kegiatan Pembelajaran 3.Rangkuman

1. Fungsikuadratadalahsuatupersamaandarivariabel yang mempunyaipangkattertinggiyaitu 2 fungsiiniberkaitandenganpersamaankuadrat
Rumusnya :

$$f(x) = a x^2 + bx + c \; atau \; y = a x^2 + bx + c$$

2. Diketahuitigatitikkoordinat (x,y) yang dilaluiolehgrafik, lalumasing-masingkoordinattersebutdisubsitusikankedalampersamaan grafik
Rumusnya :

$$y = a x^2 + bx + c$$

3. Diketahui titik potong dengan sumbu x dan satu titik yang dilalui Misalnya titik potong sumbu $x = (x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$
Rumusnya :

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

5.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Soal Diskusi Kelompok

1. Jikagrafik $y=x^2+ax+b$ mempunyai titik puncak $(2,4)$. Tentukannilai a dan b!
   Pembahasan :
   Gunakanrumus $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ sebagai nilai x titik puncak, sehingga :
   $\left(\frac{-b}{2a}\right)=x$
   $\left(\frac{-\ldots}{2(\ldots)}\right)=\ldots$
   $\ldots=-\ldots$
   Substitusititikpuncak$(2,4)$ ke dalam persamaan :
   $y=x^2+ax+b$
   $\ldots=(\ldots)^2+a(\ldots)+b$
   $\ldots=\ldots+\ldots$
   Dari persamaanbaru, substitusikannilai$a=-\ldots$, maka :
   $\ldots=\ldots+\ldots$
   $\ldots=-\ldots+\ldots$
   $\ldots=\ldots+\ldots$
   $\ldots=\ldots$

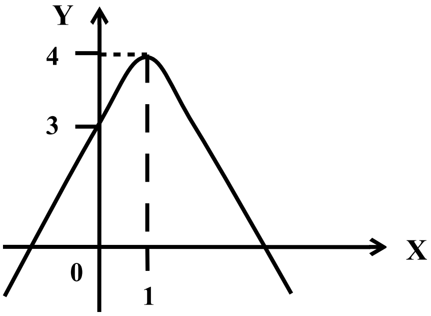
2. Tentukangrafik yang melintasi$(-1,2)$ dan titik minimumnya sama dengan puncak grafik $y=x^2+4x+6$!
   Pembahasan :
   Titikpuncak $y=x^2+4x+6$adalah :

$$(x_p, y_p) = \left[\frac{-b}{2a}, -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\right]$$
$$¿\left[\frac{-\ldots}{2(\ldots)}, -\left(\frac{\ldots^2-4(\ldots)(\ldots)}{4(\ldots)}\right)\right]$$
$$¿\left[-\ldots, -\left(\frac{\ldots-\ldots}{\ldots}\right)\right]$$
$$¿(-\ldots, -\ldots)$$
Subtitusikannilai$(-1,2)$ dan $(x_{p,} y_p)$ dalam persamaan :
$y = a(x - x_p)^2 + y_p$
$\ldots = a¿$
$\ldots = a¿$
$a = \ldots$
Makagrafikfungsikuadrat yang dicariadalah :
$y = a¿$
$y = \ldots¿$
$y = \ldots(x^2 + \ldots + \ldots) - \ldots$
$y = \ldots x^2 + \ldots + \ldots - \ldots$
$y = \ldots x^2 + \ldots + \ldots$

3. Persamaangrafikfungsikuadrat yang melaluititik $A(1,0), B(3,0), C(0,-6)$ adalah?
Pembahasan :
$Titik\, C(x, y) = (0, -6)$
$Titik\, A(x_{1,} y_1) = (1,0)$
$Titik\, B(x_2, y_2) = (3,0)$
Mencarinilai a denganrumus :
$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
$\ldots = a(\ldots - \ldots)(\ldots - \ldots)$
$\ldots = \ldots a$
$a = -\ldots$
Fungsikuadrat yang terbentuk :
$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
$y = -\ldots(x - \ldots)(x - \ldots)$
$y = -\ldots(x^2 - \ldots x + \ldots)$

$y=-\ldots x^2+\ldots x-\ldots$

4. Perhatikangambar di bawahini!



Grafik Soal Diskusi Kelompok

ambaradalah?

Grafik 5.4.1.

Pembahasan :

$(x_p, y_p)=(1,4)$

$(x, y)=(0,3)$

Mencari a denganrumus :

$y=a$¿

$\ldots=a$¿

$\ldots=a+\ldots$

$a=\ldots$

Fungsikuadrat yang terbentuk :

$y=a$¿

$y=-\ldots$¿

$y=-\ldots x^2+\ldots x+\ldots$

5. Menentukantitikekstrimdanjugatitikpotongdengansumbu x untukfungsikuadrat $f(x)=x^2-20x+75$!

Pembahasan :

$f(x)=x^2-20x+75$

$a=1$

$b=-20$

$c=75$

Mencarititikekstrim :

$\left(\frac{-b}{2a},-\frac{D}{4a}\right)=\left(\frac{-b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

¿ $\left(\frac{-\ldots}{2(\ldots)},-\frac{(-\ldots)^2-4(\ldots)(\ldots)}{4(\ldots)}\right)$

¿ $\left(\ldots,-\frac{(\ldots)^2-(\ldots-\ldots)}{\ldots}\right)$

¿ $\left(\ldots,-\frac{\ldots}{\ldots}\right)$

¿ $(\ldots,-\ldots)$

6. Apabila fungsi $f(x)=px^2-(p+1)x-6$ mencapai nilai tertinggi untuk $x=-1$, maka tentukan nilai p!

   Pembahasan :

   $\frac{-b}{2a}=x-\left(\frac{-(\ldots+\ldots)}{2(p)}\right)=-\ldots$

   $\frac{\ldots-\ldots}{2p}=-\ldots$

   $\ldots-\ldots=-2p$

   $-\ldots=-2p-\ldots$

   $-\ldots=-\ldots p$

   $p=\frac{\ldots}{\ldots}$

7. Titik pada parabola $y=x^2-4x-5$ yang garis singgungnya sejajar sumbu x mempunyai kordinat?

   Pembahasan :

$\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$
$\left(\frac{--(\dots)}{2(\dots)}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
¿
$(\dots, -\dots)$

8. Grafik fungsi kuadrat $f(x)=x^2+bx+4$ menyinggung garis $y=3x+4$. Nilai b yang memenuhi adalah?
   Pembahasan :
   $f(x)=y$
   $\dots^2+\dots+\dots=\dots+\dots$
   $\dots^2+\dots-\dots+\dots-\dots=\dots$
   $\dots^2+(\dots-\dots)\dots=\dots$
   Mencari nilai diskriminan, karena garis dan fungsi kuadrat bersinggungan, maka $D=0$:
   $D=0$
   $b^2-4ac=0$
   ¿
   ¿
   $b=\dots$

9. Parabola $y=2x^2-x-b$berpotong di titik T(3,10) dengan garis $y=2x+a$, nilai a+b =...
   Pembahasan :
   Masukkan titik T $(3,10)$ pada parabola :
   $y=2x^2-x-b$
   $\dots=2$¿
   $\dots=\dots-\dots-b$
   $b=\dots-\dots$
   $b=\dots$
   Masukkan titik T $(3,10)$ pada garis $y=2x+a$:
   $y=2x+a$
   $10=2(\dots)+a$
   $\dots=\dots+a$
   $a=\dots$

Maka nilai $a+b=\ldots+\ldots$

¿…

10. Agar garis $y+x+2=0$ menyinggung parabola dengan persamaan $y=x^2-px+p-4$, maka nilai p adalah...
Pembahasan :
$y+x+2=0$
$y=-x-2$
Maka :
$y=x^2-px+p-4$
$-\ldots-\ldots=x^2-px+p-4$
$x^2-px+\ldots+p-4+\ldots=0$
$x^2+(\ldots-p)x+p-\ldots=0$

Syarat garis dan parabola bersinggungan adalah $D=0$, maka :
$b^2-4ac=0$
¿
$p^2-\ldots p+\ldots-\ldots+\ldots=0$
$p^2-\ldots p+\ldots=0$
$(p-\ldots)(p-\ldots)=0$
$p=\ldots$

11. Jikafungsikuadrat$y=f(x)$mencapai minimum di titik $(1,-4)$ $dan\, f(4)=5$,maka$f(x)=\ldots$
Pembahasan:
Mencarifungsikuadratjikadiketahuititikpuncak di (x_p, y_p)
$y=a(x-x_p)^2 y_p$
Sehinggafungsikuadrat yang mempunyaititikpuncak $(1,-4)$ dan melalui titik$(4,5)$adalah:
$y=a(x-1)^2-\ldots$
$y=a(x^2-2x+\ldots)-\ldots$
Substitusikantitik$(4,5)$,sehingga di dapat:
$5=a(\ldots^2-2(\ldots))-\ldots$
$5=\ldots a-\ldots$

$a = \dots$

Sehinggafungsikuadratnyaadalah:

$y = a(x^2 - 2x + \dots) - \dots$

$y = 1(x^2 - 2x + \dots) - \dots$

$y = x^2 - \dots - \dots$

12. Jikasumbusimetridangrafik$f$dengan$(fx) = px^2 + 4x + p$ adalah$\frac{2_p - 11}{2_p - 2}$, maka nilai minimum $f(x)$ adalah...

Pembahasan:

$f(x) = px^2 + 4x + p$

Sumbusimetri$\rightarrow$ $y = \frac{-b}{2a}$

Sehingga di perolehpersamaan:

$\frac{-b}{2a} = \frac{2p - 11}{2p - 2}$

$\frac{-4}{\dots p} = \frac{2p - \dots}{2p - \dots}$

$2p(\dots p - \dots) = -\dots(2p - \dots)$

$\dots p^2 - \dots p = -8p + \dots$

$\dots p^2 - \dots p - 8p = \dots$

$\dots p^2 - \dots p - \dots = \dots$

$(\dots p + 1)(p - \dots) = \dots$

$p = \frac{-\dots}{\dots}$ $atau$ $p = \dots$

13. Suatufungsikuadrat$f(x)$mempunyai nilai maksimum 5 untuk $x = 2$ sehingga $f(4) = (4{,}3)$fungsi kuadrat tersebut adalah

Pembahasan:

Diketahui:
$(x_p, y_p) = (2,5)$
$f(4) = (4,3)$

Tentukannilai a:

$y = a(x - x_p)^2 + y_p$

$y = a(x - \ldots)^2 + \ldots$
$3 = a(\ldots - \ldots)^2 + 5 \ldots$
$a = \frac{\ldots}{\ldots}$
Makafungsikuadratnyamenjadi:
$y = \frac{-\ldots}{\ldots}(x-2)^2 + \ldots$

$y = \frac{-\ldots}{\ldots}x^2 + \ldots x + \ldots$

14. Agar garis $y = 10x + 4$ menyinggung parabola $y = px^2 + 2x - 2$ maka konstanta p¿…
Pembahasan:
Garis $y = 10x + 4$
Parabola $y = px^2 + 2x - 2$
Ditanyanilaip :
$y = y$
$10x + 4 ¿ px^2 - 2$
$px^2 + 12x - 6 = 0$
Syarat $D = 0$
$b^2 - 4ac = 0$
$\ldots^2 - 4ac$
$\ldots^2 - 4(\ldots)(-\ldots) = 0$
$1\ldots + (\ldots) = 0$
$p = -\ldots$

15. Jikafungsikuadrat $y = f(x)$ mencapai minimum di titik $(1, -4)$ dan $f(4) = 5$, maka $f(x) = \ldots$
Pembahasan:

Mencarifungsikuadratjika di ketehuititikpuncak di$\left(x_p, x_y\right)$

$y=a\left(x, x_p\right)$

Sehinggafunsikuadrat yang mempunyaittitikpuncak $(1,-4)$danmeleluititik$(4,5)$adalah:

$y=a\left(x^2-2(4)+\ldots ¿\right)-\ldots$

$y=a\left(x^2-2x+\ldots\right)-\ldots$

Substitusikantitik$(4,5)$,sehingga di dapat:

$5=a\left(4^2-2(4)+\ldots\right)-\ldots$

$5=9a-\ldots$

$9a=\ldots$

$a=\ldots$

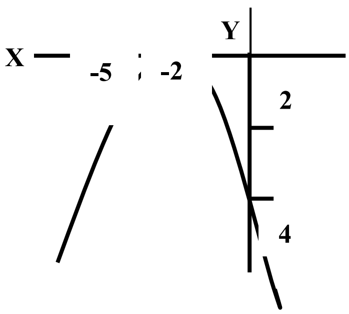
Sehinggafungsikuadratnyaadalah:

$y=x^2-\ldots x-\ldots$

$y=a\left(x^2-\ldots x+\ldots\right)-\ldots$

5.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Soal Mandiri

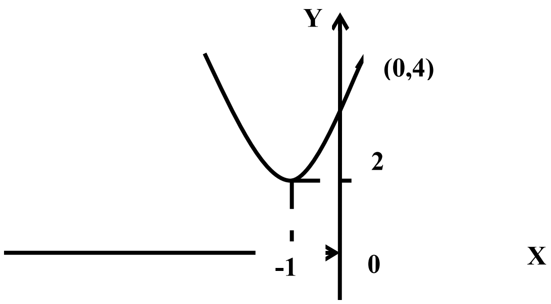
1. Jikagrafik$y=x^2+ax+b$ mempunyai titik puncak $(3,5)$. Tentukan nilai a dan b!
2. Jikagrafikfungsi$y=x^2+px+k$ mempunyai titik puncak $(1,2)$. Tentukan nilai p dan k!
3. Koordinattitikpotonggrafikfungsikuadrat $f(x)=¿$dengan sumbu x adalah?
4. Jikagambar di bawahiniadalahgrafikfungsikuadrat$f$ dengan titik puncak $(-2,0)$ dan melalui titik $(0,4)$, maka nilai $f(-5)$ adalah?



Grafik Soal Mandiri No.4

Grafik 5.5.1.

5. Perhatikangambar!



Grafik Soal Mandiri No.5

Grafik 5.5.2.

Persamaangrafikfungsipadagambaradalah?

6. Jikatitik $p(-3,5)$dan $Q(7,5)$ terletak pada grafik fungsi $f(x)=p¿$, maka q adalah?
7. Fungsikuadrat yang memilikinilai minimum 2 untuk $x=1$dan mempuyai nilai 3 untuk $x=2$ adalah
8. Titik$p(x_0, y_0)$ dan titik Q adalah dua titik yang terletaksimetrispadaparabola$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{D}{4a}$ absis titik Q adalah
9. A dan B adalahduatitik yang terletakpada parabola $f(x)=2x^2-6x-5$ dan berjarak sama terhadap sumbu x. Jika titik T terletak pada garis $x=k$ sedemikian sehingga $\lfloor TA \rfloor=\lfloor TB \rfloor$maka nilai k adalah
10. Jikasebuahfungsikuadratmenyinggungsumbu x di titik $(4,0)$ dan melalui titik$(0,16)$, maka persamaan fungsi kuadrat tersebut adalah

11. Jikasuatufungsikuadratmencapaiuminimum dititik $(3, -2)$dan grafiknya melalui titik$(1,6)$maka parabola memotongsumbu$y$ di titik....
12. Diketahuigaris$x=ky$(k=konstantabilanganbulat)dan parabola $x^2+3y+1=0$.Himpunansemua k dimanagarismemotong parabola adalah…
13. Jika parabola $y=x^2-px+7$ puncaknya mempunyai absis 4, maka koordinatnya adalah
14. Nilaitertinggifungsi$f(x)=ax^2+4x+a$ adalah 3,sumbu simetrinya adalah$x=\ldots$
15. Sebuahgaris h yang melaluititikasalmemotongkurva $2y=3x^2-2x+1$di dua titik dimana jumlah nilai x *nya* adalah 10 maka gradient dari garis h adalah…..

MODUL 6

PERTIDAKSAMAAN KUADRAT DAN FUNGSI RASIONAL DAN GRAFIKNYA

A. Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan mampu memahami dan menjelaskan pertidaksamaan kuadrat dan fungsi rasional dan grafiknya

B. Bahan Kajian

1. Pengertian pertidaksamaan kuadrat
2. Sifat-sifat pertidaksamaan kuadrat
3. Pengertian fungsi rasional dan grafiknya
4. Fungsi rasional asimptot

Modul 6

Pertidaksamaan Kuadrat dan Fungsi Rasional dan grafiknya

6.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Pengertian Pertidaksamaan Kuadrat

Pengertian pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan yang memiliki variabel paling tinggi berpangkat dua. Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat dalam variabel x, yaitu:

(i) $ax^2 + bx + c > 0$
(ii) $ax^2 + bx + c \geq 0$
(iii) $ax^2 + bx + c < 0$
(iv) $ax^2 + bx + c \leq 0$

dimana a, b, c, dan x elemen bilangan real dan $a \neq 0$.

6.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Sifat-Sifat Pertidaksamaan Kuadrat

Untuk a,b, c, d, ∈R berlaku sifat-sifat Pertidaksamaan berikut:

1. Misalkan $a < b$, maka $b > a$
2. Misalkan $a < b$ dan $b < c$,maka $a < c$
3. Misalkan $a < b$ dan c ∈,maka $a + c < b + c$ (menambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama tidak mengubah tanda ketaksamaan)
4. Misalkan $a < b$ dan $c > 0$,maka $ac > bc$ (mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif yang tidak mengubah ketaksamaan)

5. Misalkan $a < b$ dan $c < 0$,maka $ac > bc$ (mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatifyang sama akan mengubah ketidaksamaan)
6. Misalkan $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$
7. Misalkan $\frac{a}{b} < 0$ dan $b \neq 0$, maka $ab < 0$
8. Misalkan $\frac{a}{b} > 0$ dan $\neq 0$, maka $ab > 0$
9. Untuk semua $a \in R$, berlaku $a^2 \geq 0$

Contoh soal

1. Tentukan pertidaksamaan dari $x^2 + 2x - 48 > 0$ adalah…
   $x^2 + 2x - 48 > 0$
   $(x + 8)(x - 6) > 0$
   $x = -8$ atau $x = 6$
2. Himpunan pertidaksamaan $45-21x \leq 6x^2$ adalah…
   $45-21x \leq 6x^2$
   $^{-}6x^2 - 21x + 45 \leq 0$: 3
   $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$
   $(2x - 3)(x + 5) \geq 0$
   $x = \frac{3}{2}$ atau $x = -5$
3. Semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{2x+1}{x} < 1$ adalah …
   Penyelesian:
   $\frac{2x+1}{x} - 1 < 0$
   $\frac{2x+1-x}{x} < 0$
   $\frac{x+1}{x} < 0$
   $-1 < x < 0$

4. Semua nilai x yang memenuhi $\frac{x^2+2x+2}{(3x^2-4x+1)(x^2+1)} \leq 0$ adalah…..

   Penyelesaian:

   $\frac{x^2+2x+2}{(3x^2-4x+1)(x^2+1)} \leq 0$

   $\frac{x^2-2x+2}{(3x^2-4x+1)(x^2+1)} \leq 0$

   $\frac{x^2+2x+2}{(3x-1)(x-1)(x^2+1)} \leq 0$

   Menentukan determinan:

   $X^2 + 2x + 2$

   $D = b^2 - 4ac$

   $D = 2^2 - 4.1.2$

   $D = -4$

   $D < 0$, $a > 0$. Maka definit positif $x^2 + 1$

   $D = b^2 - 4ac$

   $D = 0^2 - 4.1.1$

   $D = -4$

   3x

   $x = \frac{1}{3}$ atau $x = 1$

   maka x yang memenuhi:

   $\frac{1}{3} < x < 1$

5. Tentukan pertidaksamaan dari $2(x + 1)^2 < 3x^2 + 6(x-1)$ adalah…

   Penyelesaian:

   $2x^2 + 4x + 2 < 3x^2 + 6x - 6$

   $2x^2 - 3x^2 + 4x - 6x + 2 + 6 < 0$

   $-x^2 - 2x + 8 < 0$

   $x^2 + 2x - 8 > 0$

   $(x + 4)(x - 2) > 0$

   $x = -4$ atau $x = 2$

6.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Pengertian Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi yang memiliki bentuk

V(x) = $\frac{g(x)}{h(x)}$

Dengan g dan h merupakan polynomial dan d (x) ≠ 0. Domain dari V(x) adalah semua bilangan real, kecuali pembuat nol dari d.

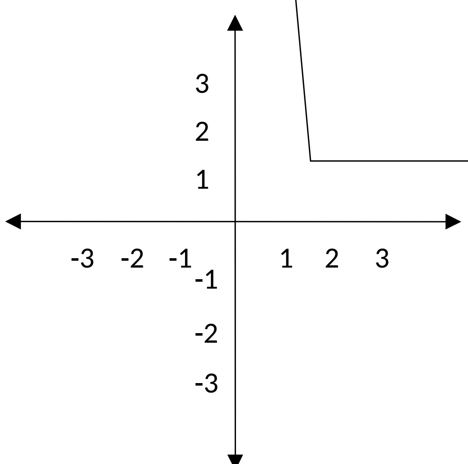
Fungsi rasional yang paling sederhana adalah y = $\frac{1}{x}$ dan fungsi y = $\frac{1}{x^2}$ yang keduanya memiliki pembilang konstanta dan penyebut polynomial dengan satu suku, serta kedua fungsi tersebut memiliki domain semua bilangan real kecuali x ≠ 0.

Fungsi y = $\frac{1}{x}$

Fungsi ini disebut juga sebagai fungsi kebalikan karena jika diambil nilai x sembarang diambil selain pembuat nol, maka akan menghasilkan kebalikan nilai fungsi tersebut. Perhatikan tabel dan grafik fungsi berikut.

X	y	X	Y
-1000	$\frac{-1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	1000
-5	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{3}$	3
-4	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2
-3	$\frac{-1}{3}$	1	1
-2	$\frac{-1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
-1	-1	3	$\frac{1}{3}$
$\frac{-1}{2}$	-2	4	$\frac{1}{4}$
$\frac{-1}{3}$	-3	5	$\frac{1}{5}$
$\frac{-1}{1000}$	-1000	1000	$\frac{1}{1000}$
0	tak terdefinisi		

Tabel 6.2.1 Fungsi Rasional



Grafik 6.2.1 Fungsi Rasional

Table dan grafik terdapat beberapa hal yang menarik. Yang pertama, grafik tersebut lolos uji garis vertikal artinya setiap garis verikal pada bidang koordinat cartesius memotong grafik maksimal 1 titik sehingga y = $\frac{1}{x}$ merupakan suatu fungsi. Kedua, karena pembagian tidak terdefinisi ketika pembagiannya nol, maka nol tidak memiliki pasangan yang menghasilkan jeda pada x = 0 hal ini sesuai dengan domain dari fungsi tersebut, yaitu semua x anggota bilangan real kecuali nol. Ketiga, fungsi tersebut adalah fungsi ganjil, dengan salah satu cabangnya berada di kuadran I sedangkan yang lainnya berada pada kuadran III. Dan yang terakhir pada kuadran I, ketika x menuju tak terhingga, nilai y menuju dan mendekati nol. Secara simbolis dapat ditulis sebagai $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$. Secara grafis kurva dari grafik tersebut akan mendekati sumbu x ketika x mendekati tak terhingga.

Selain itu kita dapat mengamati ketika x mendekati nol dari kanan, maka nilai y akan mendekati bilangan real positif yang sangat besar (positif tak terhingga): $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow \infty$.

Contoh soal:

1. Tentukan invers dari fungsi f(x) = $\frac{4x+1}{2x-1}$

   Penyelesaian:

   y = f (x)

   y = $\frac{4x+1}{2x-1}$

   2xy – 3y = 4x + 1

$2xy - 4x = 3y + 1$

$(2y - 4)x = 3y + 1$

x = $\frac{3x+1}{2y-4}$

2. Lukislah grafiknya fungsi y = $\frac{x-1}{2x^2+x-1}$

Titik potong pada sumbu x:

0 = $\frac{x-1}{2x^2+x-1}$

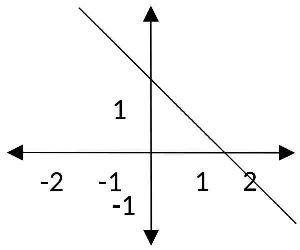
0 = x – 1

x = 1 → (1,0)

Titik potong pada sumbu y:

y = $\frac{(0)-1}{2(0)^2+(0)-1}$

y = $\frac{-1}{-1}$ = 1 → (0,1)



Grafik 6.2.2 Contoh Soal

3. Tentukan domain dari fungsi f(x) = $\frac{x}{x^2-4}$…

Penyelesaian:

Pertama, kita tentukan pembuat nol penyebut *f*

$x^2 - 4 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0$

$x_1 = 2$ atau $x_2 = -2$

karena penyebut rasional tidak boleh nol, maka domain *f* adalah

D*f* = $\{x | x \neq -2 \, dan \, x = 2, x \in R\}$

4. Tentukan domain dari $\frac{6-x}{x+3}$ adalah….

   Penyelesaian:

   f(x) = $\frac{g(x)}{h(x)}$, h(x) $\neq 0$

   x + 3 ≠ 0

   x ≠-3

   HP: $\{x \mid x \neq -3, x \in R\}$

5. Lukislah grafik fungsi y = $\frac{2x-5}{x-1}$

   Penyelesaian:

   Titik potong pada sumbu x

   y = 0 $\longrightarrow$ x = $\frac{-b}{a} = \frac{--5}{2} = \frac{5}{2}$

   Titik potong pada sumbu y

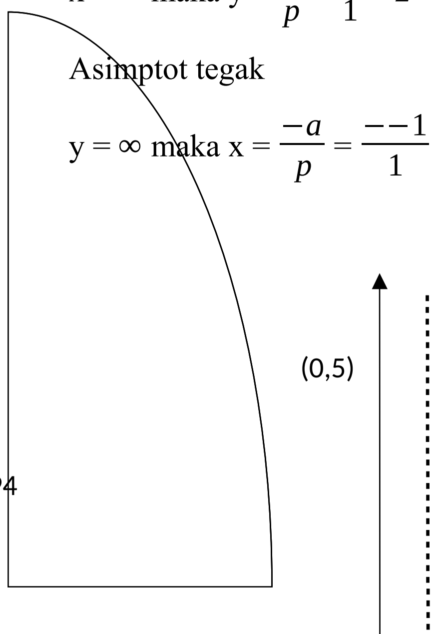
   x = 0 $\longrightarrow$ y = $\frac{-5}{-1}$ = 5

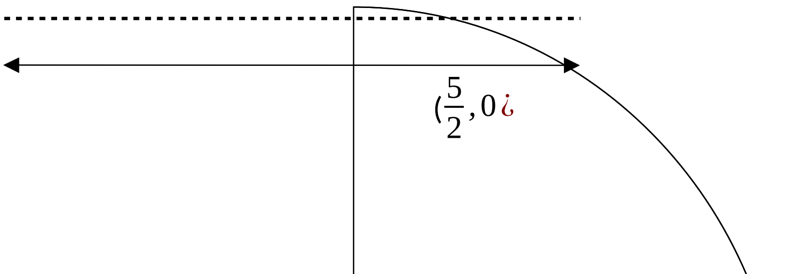
   Asimptot datar

   x = ∞ maka y = $\frac{a}{p} = \frac{2}{1}$ = 2

   Asimptot tegak

   y = ∞ maka x = $\frac{-a}{p} = \frac{--1}{1}$ = 1





Grafik 6.2.3 Contoh Soal

6. Suatu suku bamyak f(x) dibagi (x - 2) sisanya 5 dan (x – 2) adalah factor dari f(x). Jika f(x) dibagi $x^2 - 4$ adalah

   Penyelesaian:

   f(x) dibagi (x – 2) sisanya 5 sehingga f(2) = 5 (x + 2) adalah faktor dari f(x) sehingga f(-2) = 0.

   f(x) dibagi ($x^2 - 4$) sisanya ax + b $\longleftrightarrow$ f(x) dibagi (x + 2)(x – 2) sisanya ax + b

   $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

   $f(2) = 2a + b = 5$

   $f(-2) = b = 0$

   $4a = 5$

   $a = \frac{5}{4} \longrightarrow 2\left(\frac{5}{4}\right) + b = 5$

   $b = \frac{5}{2}$

6.4 Kegiatan Pembelajaran 4. Fungsi Rasional Asimptot

Terdapat dua cara mencari asimptot datar dari sebuah fungsi, diantaranya adalah dengan:

1. pangkat rertinggi pada pembilang = pangkat tertinggi pada penyebut tertinggi pada penyebut, maka asimptot

datarnya ada di garis y sama dengan koefisien pangkat tertinggi pembilang per koefisien penyebut.

Secara umum umum dapat ditulis: f(x) = $\frac{a x^m + b x^m - 1 .... + d}{p x^m + q^m - 1 ... + u}$ maka asimptot datarnya ada di y = $\frac{a}{p}$ dengan m pangkat tertinggi dari kedua polynomial tersebut.

Contoh soal:

Carilah asimptot datar dari fungsi f(x) = $\frac{4x^3 + 2x - 2}{2x^3 - 2x^2 + 5x - 1}$

Penyelesaian:

Misalkan a = 4 dan p = 2, maka asimptot datarnya adalah y = $\frac{4}{2}$ = 2

2. Pangkat Tertinggi Pada Pembilang < Pangkat Tertinggi Pada Penyebut

   Jika fungsinya adalah f(x) $\frac{a x^m + b x^m - 1 .... + d}{p x^n + q^n - 1 ... + u}$ dengan m lebih kecil dari n, maka asimptot datarnya adalah y = 0.

6.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Diskusi Kelompok

1. Himpunan penyelesian dari pertidaksmaan $3x^2 + 9 \leq -2x^2 - 2x + 12$ adalah….

   Penyelesaian:

   $3x^2 + 9x \leq -2x^2 - 2x + 12$

   $...^2 + ...^2 + ... + ... - ... \leq 0$

   $...^2 + ... - ... \leq 0$

   $(... - ...) (... + ...) \leq 0$

   $... \leq ... \leq ...$

2. Tentukan himpunan dari pertidaksamaan $-x^2 - 3x + 4 > 0$

   Penyelesaian:

   $...^2 + ... + 4 < 0$

$(\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) < 0$
$x = \ldots$ atau $x = \ldots$

untuk interval $.. < x < \ldots$, uji coba $x = 0$
$x^2 - 3x + 4 = \ldots - \ldots + 4 =$

- + -
... ...

jadi, himpunan pertidaksamannya adalah $\ldots < x < \ldots$

3. Berapakah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 + 7x - 8 \leq 0$
   Penyelesaian:
   $x^2 + 7x - 8 \leq 0$
   $(\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) \leq 0$
   $x = \ldots$ atau $x = \ldots$
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 4 > 5x$ adalah…
   Penyelesaian:
   $x^2 + 4 > 5x$
   $\ldots^2 + \ldots - \ldots > 0$
   $(\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$
   $x = \ldots$ atau $x = \ldots$
5. Carilah himpunan penyelesaian dari $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, $x \in R$
   Penyelesaian:
   $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
   $(\ldots - \ldots)(\ldots - \ldots) \geq 0$
   $x_1 = \ldots$ atau $x_2 = \ldots$

   + - +
   ... ...

6. Suatu roket ditembakkan ke atas dan setelah t detik roket mencapai ketinggian h meter.

Ketinggian itu ditentukan dengan pendekatan rumus h (t) = 150t – 5t². Berapa lama roket itu berapa pada ketinggian tidak kurang dari 1000 meter?

Penyelesaian:
Ketinggian roket tidak kurang dari 1000 meter sehingga didapat pertidaksamaan:
$h(t) \geq 1000$
$-\ldots t^2 + \ldots \geq \ldots$
$-\ldots t^2 + \ldots - \ldots \geq 0$
$\ldots t^2 - \ldots t + \ldots \leq 0$
$\ldots t^2 - \ldots t + \ldots \leq 0$
$(\ldots - \ldots)(\ldots - \ldots) \leq 0$
$t_1 = \ldots$ dan $t_2 = \ldots$

jadi roket tersebut berada pada ketinggian tidak kurang dari 1000 meter pada detik ke… sampai dengan detik ke…

7. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $3 < 4 - 2x \leq 7$
   Penyelesaian:
   $3 < ... - \ldots$
   $0 < \ldots - \ldots$
   $x = \ldots$
   $4 - 2x \leq 7$
   $\ldots - \ldots - \ldots \leq 0$
   $x = \ldots$
8. Himpunan pertidaksamaan dari $2x^2 + 5x + 15 < 3x^2 + 5x - 1$ adalah
   Penyelesaian:
   $2x^2 + 5x + 15 < 3x^2 + 5x - 1$
   $\ldots^2 - \ldots^2 + \ldots - \ldots + \ldots + \ldots < 0$
   $\ldots^2 + \ldots < 0$
   $\ldots^2 - \ldots > 0$
   $(\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) > 0$
   $x_1 = \ldots$ atau $x_2 = \ldots$
9. Himpunan penyelesaian $\frac{x-6}{x-3} \geq \frac{x-2}{x-1}$ adalah…

Penyelesaian:

$\frac{x-\ldots}{x-\ldots}$ - $\frac{x-\ldots}{x-\ldots} \geq 0$

$\frac{(x-\ldots)(\ldots+1)-(x-\ldots)(\ldots+2)}{(x-\ldots)(x+\ldots)} \geq 0$

$\frac{\ldots^2-\ldots-6-\ldots^2+\ldots+6}{(x-\ldots)(x+\ldots)} \geq 0$

(… - ...)(… + …) < 0

10. Bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{3x-2}{x} < x$ adalah…

Penyelesaian:

$\frac{3x-2}{x}$ - x < 0

$\frac{(\ldots-\ldots)-\ldots}{x} < 0$

$\frac{\ldots-\ldots-\ldots^2}{x} < 0$

x (… - … - …) < 0

x (… - … + …) < 0

-x (… - …)(… - …) < 0

x (…-…)(…-…) > 0

bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan adalah … < x <… atau x > …

11. $\frac{(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0$ dipenuhi oleh…

Penyelesaian:

$\frac{(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0$

(x - …)(x + …)(x + …)(x - …)$^2 \geq 0$

$$\overline{\quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\quad}$$

Jadi pertidaksamaan dari $\frac{(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0$ adalah … < x ≤ … atau x > …

12. Diketahui pertidaksamaan $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 1$, maka himpunan penyelesaiannya adalah…

    Jawab:

    $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 1 \Longrightarrow$ Dikuadratkan

    $\frac{\ldots^2+\ldots+\ldots}{\ldots^2-\ldots+\ldots} < 1$

    $\frac{(\ldots^2+\ldots+\ldots)(\ldots^2-\ldots+\ldots)}{\ldots^2-\ldots+\ldots} < 1$

-	+	+
	....	....

    $\frac{\ldots-\ldots}{(x+\ldots)^2} < 0$

    x = …

13. Tentukan asimptot datar dan asimptot tegak dari fungsi $\frac{x+2}{x-3}$ adalah…

    Penyelesaian:

    Asimptot datar:

    $y = \frac{a}{p} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

    Asimptot tegak:

    x - … = 0

    x = …

14. Sebuah mobil bergerak lurus dari sebuah kota. Jarak yang ditempuh mobil tersebut dirumuskan dengan $s = -7t + 2t^2$ (t dalam jam). Berapa lama waktu yang diperlukan oleh mobil tersebut untuk menempuh jarak sekurang-kurangnya 16 km dari kota A?

    Penyelesaian:

$s \geq 16$
$-\ldots + \ldots^2 \geq \ldots$
$-\ldots + \ldots^2 \geq \ldots$
$\ldots^2 - \ldots - \ldots \geq 0$
$(\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) \geq 0$
$t_1 = \ldots$ dan $t_2 = \ldots$
maka waktu yang diperlukan pada jarak sekurang-kurangnya 16 km pada … sampai dengan …

15. Tentukan asimptot datar dari fungsi $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 5}{2x^2 - x - 3}$

    Penyelesaian:

    $y = \frac{a}{p}$
    $y = \frac{\ldots}{\ldots}$
    jadi fungsi $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 5}{2x^2 - x - 3} = \frac{\ldots}{\ldots}$

16. Sisa pembagian $f(x) = x^3 - 1$ bila dibagi $(x^2 - 5x + 6)$ adalah…

    Penyelesaian:
    F(x) dibagi $(x - a)(x - b)$ bersisa:
    $S(x) \frac{(x-b)}{(a-b)} F(a) + \frac{(x-a)}{(b-a)} F(b)$
    $F(x) = (x^3 - 1) : (x - 2)(x - 3)$ bersisa
    $S(x) = \frac{(x-\ldots)}{(2-\ldots)} f(2) + \frac{(x-\ldots)}{(2-\ldots)} f(3)$
    $= (-\ldots + \ldots) + (\ldots - \ldots) = \ldots - \ldots$

17. Agar $\frac{x^2 - 6x - a}{x^2 - 2x - 3}$ dapat disederhanakan, maka a…

    Penyelesaian:
    Misalkan $f(x) = x^2 - 6x - a$ dan $b(x) = x^2 - 2x - 3$
    Maka pecahan dapat disederhanakan bila $f(-1) = 0$ atau $f(3) = 0$. Dari $f(\ldots) = \ldots$, maka $a = \ldots$

18. Jika diketahui $f(x) = x^2 + 2hx + h^2$, maka $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ adalah…

Penyelesaian:
$f(x+h) = (x+h)^2 + 2h(x + h) + h^2$ sehingga = $\ldots^2 + \ldots + \ldots^2 + \ldots + \ldots^2 + \ldots^2$
$f(x + h) – f(x) = (\ldots^2 + \ldots + \ldots^2) – (\ldots^2 - \ldots + \ldots^2)$
$f(x + h) – f(x) = \ldots + \ldots$

19. Bila $x^3- 4x^2 + 5x + p$ dan $x^3 + 3x – 2$ dibagi oleh $x + 1$ memberikan sisa sama, maka p sama dengan……

Penyelesaian :

$F(x) = x^3 – 4x^2 + 5x + p$ dan $g(x) = x^2 + 3x – 2$

F(x) dan g(x) mempunyai sisa yang sama jika $-10 + p = -4$ didapat p = …

20. $F(x) = x^3 – 2x^2 – 9x + k = 0$, mempunyai sepasang akar berlawanan. Nilai k = ……..

Penyelesaian :

$x_1 = -x_2$ (sepasang akar berlawanan)

$x^3 – 2x^2 – 9x + k = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_3 = 2$

$(\ldots)^3 – 2(\ldots)^2 – \ldots(\ldots) = k = 0$

$\ldots – \ldots – \ldots = k = 0$

$k = \ldots$

6.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Soal Mandiri

1. Jika diketahui pertidaksamaan $2x - 1 < x + 1 < 3 - x$, maka pemyelesaiannya adalah..

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 2 \geq 3$ adalah…

3. Diketahui pertidaksamaan $ax^2 - 2(a-1)x + a > 0$ mempunyai akar real yang berbeda, maka penyelesaiannya adalah…

4. Bila $(x^2 + x + 2)(x^2 - 9) < 0$, dipenuhi oleh…

5. Jika diketahui pertidaksamaan harga mutlak $|2x - 3| < 5$, maka nilai pertidaksamaan tersebut akan dipenuhi pada interval …

6. Diketahui pertidaksamaan $ax^2 - 2(a-1)x + a > 0$ mempunyai akar berbeda, maka penyelesaiannya adalah…

7. Diketahui pertidaksamaan harga mutlak $|3x-5| > 1$, maka nilai x yang memenuhi adalah…

8. Sebuah peluru ditembakkan ke atas dengan ketinggian ditentukan dengan pendekatan rumus h(t) = 40t – 10t^2. Berapa lama peluru itu berada pada ketinggian tidak kurang dari 30m?

9. Diketahui pertidaksamaan $\left|\frac{2x-1}{x+5}\right| \leq 3$, maka himpunan penyelesaiannya adalah…

10. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} \leq 9^{x^2+3x-2}$ adalah…

11. Tentukan domain dari fungsi rasional f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$ …

12. Tentukan asimptot datar dari fungsi f(x) = $\frac{x^4+4x-5}{2x^3+2x^2+x-2}$

13. Tentukan asimptot datar dari fungsi f(x) = $\frac{3x^2+4x-5}{2x^3+2x^2+x-2}$

14. Tentukan domain dari $\frac{2x-5}{x+4}$ adalah…

15. Tentukan daerah asal dari fungsi f(x) = $\frac{x-1}{x^2+1}$ adalah…

16. Tentukan pertidaksamaan rasional dari $\frac{x+4}{2x-1}$ adalah…

17. Tentukan daerah asal fungsi f(x) = $\frac{4x}{x^2-1}$…

18. Daerah asal fungsi f(x) = $\frac{x+2}{x-1}$ adalah…

19. Tentukan daerah hasil dari fungsi y = 4x + 2 dan buat sketsanya!

20. Tentukan domain, kodomain, dan range dari fungsi f(x) = $2x^2 + 1$!

Rangkuman

Pengertian pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan yang memiliki variabel paling tinggi berpangkat dua.

Fungsi rasional adalah fungsi yang memiliki bentuk:

V(x) = $\frac{g(x)}{h(x)}$

asimptot datarnya ada di garis y sama dengan koefisien pangkat tertinggi pembilang per koefisien penyebut. Dapat ditulis sebagai berikut

f(x) = $\frac{ax^m + bx^m - 1 \ldots + d}{px^m + q^m - 1 \ldots + u}$ di y = $\frac{a}{p}$ dengan m pangkat tertinggi dari kedua polynomial tersebut.

MODUL 7
BILANGAN IRASIONAL & OPERASINYA

A. Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan mampu mendefinisikan dan mengerti konsep tentang bilangan irasional dan cara mengoperasikannya.

B. Bahan Kajian

1. Metode Persamaan Irasional
2. Landasan Teori Pertidaksamaan Irasional
3. Metode Pertidaksamaan Irasional

MODUL 7
BILANGAN IRASIONAL & OPERASINYA

7.1 Kegiatan Pembelajaran 1. PengertianBilanganIrasional

Dalam ilmu matematika, bilangan irasional merupakan bilangan riil yang tak dapat dibagi (atau hasil baginya tak pernah berhenti). Untuk hal ini, maka bilangan irasional tak dapat dinyatakan menjadi $\frac{a}{b}$, sementara a dan b adalah bilangan bulat dengan b tak sama dengan 0. Namun bilangan irasional dapat dinyatakan dalam bentuk desimal.

Tabel 7.1.1 ContohBilanganIrasional

Bilangan	$\frac{a}{b}$	**Irasional**
$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$	Tidak ada	Ya
$\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$	Tidak ada	Ya
$\sqrt{4} = 2$	$\frac{2}{1}$	Tidak
$\pi = 3{,}14159\ldots$	Mendekati $\frac{22}{7}$	Ya
$e = 2{,}71828\ldots$	Tidak ada	Ya
0,25	$\frac{1}{4}$	Tidak

7.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Sifat –

Secara umum bilangan rasional dan irasional mempunyai sifat yang hampir sama yaitu komutatif, asosiatif, distributif, mempunyai elemen identitas, setiap elemen punya invers, dan perkalian dengan 0. Satu sifat yang berbeda adalah bilangan irasional bersifat tidak tertutup.

1. Komutatif, terhadap operasi penjumlahan dan perkalian
   Penjumlahan dan perkalian antar bilangan irasional mempunyai sifat komutatif, yang dapat dirumuskan sebagai berikut.

   $$\boxed{a \times b = b \times a \text{ dan } a + b = b + a}$$

2. Asosiatif, terhadap operasi penjumlahan dan perkalian
   Penjumlahan dan perkalian antar bilangan irasional mempunyai sifat asosiatif, yang dapat dirumuskan sebagai berikut.

   $$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \text{ dan } (a + b) + c = a + (b + c)}$$

3. Distributif
   Bilangan irasional mempunyai sifat distributif, yang dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$$

4. Unsur Identitas
   Suatu unsur i dalam suatu himpunan A merupakan unsur identitas operasi kali pada himpunan A tersebut, jika berlaku :

$$\boxed{i \times a = a \times i = a \text{ untuk setiap a beranggota A}}$$

5. Unsur Invers
   Operasi kali pada himpunan A jika berlaku :

$$\boxed{a \times b = b \times a = i}$$

6. Perkalian dengan Nol (0)
   Perkalian bilangan irasional dengan angka nol menghasilkan angka nol.

7. Sifat tidak tertutup
   Sifat tidak tertutup pada bilangan irasional disebabkan karena operasi penjumlahan dan perkalian antar bilangan irasional **dapat** menghasilkan bilangan rasional.
   Contoh:

   $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$; hasil rasional
   $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$; hasil tetap irasional

Buktikanlah bahwa $\sqrt{2}$ irasional !

Akarduamerupakanbilanganirasional.Kita akanmenunjukkandenganmenggunakankontradiksi bahwaakarduairasional.

Untukmenunjukkandengankontradiksimakakitaasumsikanbahwa pernyataan $r^2=2$ merupakan kesimpulansalah, yang benar r bilanganrasional

Olehkarenaitu, berdasarkanasumsibahwa r adalahbilanganrasional, maka r dapatdituliskanmenjadibentuk r= $\frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan bilanganbulat yang pembagi bersamaterbesaradalah 1 serta memenuhi :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$$

$$p^2=2\,q^2$$

Karenaruaskananmerupakanbilangangenapmakaruaskirijugameru pakanbilangan genap. Mengapa dikatakan genap? Karena suatu bilangan apabila dikalikan dengan bilangan genap akan menghasilkan bilangan genap .Dengandemikian p jugamerupakanbilangangenap.

Apabila p=2k dengan k adalahsuatubilanganbulat yang lain, maka diperoleh :

$$2k^2 = 2q^2$$

$$k^2 = q^2$$

Akibatnyaruaskananjugamerupakanbilangangenap. Maka q jugagenap.

Kesimpulannya p dan q merupakanbilangangenap.

Hal inikontradiksidengananggapanbahwapembagibersamaterbesardari p dan q adalah 1.

Inimembuktikanbahwa$\sqrt{2}$merupakanbilanganirasional.

7.3 Kegiatan pembelajaran 3. PengertianPersamaanIrasional

Persamaan irasional ialah persamaan yang memuat 2 atau peubahnya berada dalam tanda akar.

Contoh:

1. $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x+2}$
2. $\sqrt{(x-5)} = 2x - 11$

3. $1 + x\sqrt{5} = \sqrt{5-x}$

Persamaan$1 + x\sqrt{3} = \sqrt{2}$bukan persamaan irasional meskipun ia mengandung tanda akarkarena tidak ada variabel x di dalam tanda akar.

Secara umum persamaan irasional berbentuk

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \text{ atau } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}}$$

dengan f(x) dan g(x) suatu polinomial.

Setiap bilangan real yang jika disubstitusikan ke dalam persamaan irasional memberikan pernyataan yang benar disebut penyelesaian atau akar persamaan irasional.

Contoh:

Perhatikan persamaan $\sqrt{1-x} = 2$

Bila disubstitusikan x = -3 maka persamaan ini memberikan hasil $\sqrt{1-(-3)} = 2 \longleftrightarrow \sqrt{4} = 2 \longleftrightarrow 2 = 2$, suatu pernyataan yang benar. Jadi x =3 adalah penyelesaian.

Coba ambil x =1 , kemudian substitusikan ke persamaan dan diperoleh :

$\sqrt{1-x} = 2 \longleftrightarrow \sqrt{1-1} = 2 \longleftrightarrow 0 =$, suatu pernyataanyang salah. Jadi, 1 bukan penyelesaian.

7.4Kegiatan Pembelajaran 4.
LandasanTeoriPersamaanIrasional

Berkaitan dengan penjelasan ini, persamaanirasional mungkin mempunyai penyelesaian atau mungkin juga tidak mempunyai penyelesaian. Bila ia mempunyai penyelesaian atau mungkin juga tidak dapat tunggal atau dapat juga lebih dari satu.

Secaraumumuntukmenyelesaikanpersamaanirasionaldilakukandenganmenghilangkantandaakarpadakeduaruas, yaitudenganmengkuadratkanmasing-masingruas. Proses inidapatdilakukanbeberapa kali sampaitandaakarhilangdandiperolehpersamaanaljabarbiasaekuivalen. Hati-hatidengancarainijangansampaisalahkonsep. Berikutinidiberikanaturan main ataudalilpendukungnya. Tetapibelumtentuberlakusebaliknya.

$a^2 = b^2 \longrightarrow$ a=b. Yang benar adalah sebagai berikut.

$a^2 = b^2 \longrightarrow a^2 - b^2 = 0 \longleftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \longrightarrow$ a=b atau a-b.

Berkaitan dengan persamaan irasional, yaitu dalam bentuk $\sqrt{f(x)}$ = g(x) atau $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ haruslah dipenuhi f(x), g(x) ≥ 0

7.5Kegiatan Pembelajaran 5. MetodePersamaanIrasional

Berikut adalah beberapa aturan yang harus diperhatikan ketika menyelesaikan persamaanirasional.

1. Akar dari suatu bilangan tidak boleh negatif. Tidaklah benar jika mengatakan $\sqrt{4}$ = ± 2 yang bener adalah $\sqrt{4}=2$.

2. Bilangan di dalam tanda akar tidak boleh negatif karena akar bilangan negatif menghasilkan bilangan imajiner, bukan bilanganreal.

Mengingatpersamaanirasionalumumnyadalambentuk$\sqrt{f(x)}$ = g(x) atau $\sqrt{f(x)}$ =$\sqrt{g(x)}$ dimana f(x)dang(x)makauntukmenyelesaikannyadicariterlebih dahulu nilai x yang memenuhi:

i. f(x) ≥0

ii. g(x) ≥0

Penyelesaian dari kedua ketentuan ini biasa disebut syarat awal atau prasyarat. Selanjutnya kedua ruas dikuadratkan, dalam hal ini menentukan nilai x yang memenuhi.

iii. $(\sqrt{f(x)}^2$¿¿ = $(\sqrt{g(x)}^2$¿¿ atau $(\sqrt{f(x)}^2$¿¿ =(g(x))^2 Akhirnya, nilai x yang memenuhi (i), (ii),(iii) adalah penyelesaian dari persamaan irasional yang dimaksud.

Contoh 1 :

Tentukan nilai x yang memenuhi $\sqrt{x-3}$ = x – 5

Penyelesaian1 :

Agar berlaku $\sqrt{x-3}$ = x – 5, harus dipenuhi persyarat :

i. (x – 3) ≥ 0, diperoleh x ≥ 3

ii. x – 5 ≥ 0, diperoleh x ≥ 5

Kedua syarat ini dapat digabung x ≥ 5 selanjutnya diselesaikan

persamaan :

$\sqrt{x-3} = x - 5$

$\leftrightarrow (x - 3) = (x - 5)^2$

$\leftrightarrow x - 3 = x^2 - 10x + 25$

$\leftrightarrow x - 3 = x^2 - 10x + 25$

$\leftrightarrow (x - 7) (x + 3) = 0$

Jadi diperoleh x = 7 atau x = -3. Karena harus memenuhi x ≥ 5 maka nilai yang memenuhi adalah x = 7. Ini merupakan contoh persamaan irasional yang mempunyai penyelesaian tunggal.

Contoh2 :

Tentukan penyelesaian dari $\sqrt{x^2-16} = \sqrt{x+4}$

Penyelesaian 2:

Prasyarat :

i. $x^2 - 16 \geq 0 \longrightarrow x \leq -4$ atau $x \geq 4$, dan

ii. $x + 4 \geq 0 \longrightarrow x \geq -4$

Kedua syarat ini digabungkan sehingga didapat x=-4 atau x≥4

Kemudian kedua ruas $\sqrt{x^2-16} = \sqrt{x+4}$dikuadratkan diperoleh :

$x^2 - 16 = x + 4$

$\leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$

$\leftrightarrow x = 5$ atau $x = 4$

Dengan memperhatikan prasyarat maka himpunan penyelesaian dari persamaan diatas adalah { -4 , 5 }. Ini merupakan persamaan irasional yang mempunyai penyelesaian tidak tunggal.

Contoh3 **:**

Tentukan nilai x yang memenuhi $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1} = 6$

Penyelesaian 3:

Prasyarat :

i. $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$

ii. $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$

Syarat (i) dan (ii) dapat digabung menjadi $x \geq \frac{-1}{2}$

iii. $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1} = 6 \leftrightarrow \sqrt{x+5} = 6 - \sqrt{2x+1}$ Sesuai dengan penjelasan sebelumnya maka

$6 - \sqrt{2x+1} \geq 0 \Longleftrightarrow 6 \geq \sqrt{2x+1}$

Dari sini diperoleh

$$2x + 3 \leq 36 \Rightarrow 17\frac{1}{2} \geq x$$

Dari prasayat (i), (ii), dan (iii) diperoleh interval prasyarat :

$\frac{-1}{2} \leq x \leq 17\frac{1}{2}$ selanjutnya persamaan diselesaikan.

$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1} = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 6 - \sqrt{2x+1}$

$\Rightarrow x + 5 = 36 - 12\sqrt{2x+1} + (2x + 1)$

$\Leftrightarrow 12\sqrt{2x+1} = x + 32$

$\Rightarrow 144(2x + 1) = x^2 + 64x + 1024$

$\Leftrightarrow x^2 - 224x + 880 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 220) \Rightarrow x - 4$ atau $x = 220$

Mengacu pada prasyarat, diperoleh himpunan penyelesaian $\{4\}$

7.6 Kegiatan Pembelajaran 6. PengertianPertidaksamaanIrasional

Pertidaksamaan irasional ialah pertidaksamaan yang memuat variabel atau peubahnya berada dalam tanda akar.

Contoh:

1. $\sqrt{x^2-4} \leq \sqrt{x+2}$

2. $\sqrt{(x-5)} > 2x - 1$

Berikut ini bukan pertidaksamaan irasional

1. $1 + x\sqrt{5} < \sqrt{5x}$

7.7 Kegiatan Pembelajaran 7.

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan irasional dilakukan dengan mengubahnya menjadi pertidaksamaan ekuivalen yang tidak memuat tanda akar lagi. Umumnya, dengan mengkuadratkan kedua ruas. Prosedur ini dapat dilakukan dengan menggunakan dalil atau aturan berikut.

Misalkan a,b $\geq$ 0 maka berlaku $a \leq b \leftrightarrow a^2 = b^2 \leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

7.8 Kegiatan Pembelajaran 8. MetodaPertidaksamaanIrasional

Jika diberikan pertidaksamaan irasional yang berbentuk $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$, maka penyelesaiannya harus memenuhi syarat berikut :

i. f(x) $\geq$ 0 sebab bilangan di dalam akar tidak boleh negatif

ii. g(x) $\geq$ 0 sebab akar suatu bilangan tidak boleh negatif

iii. f(x) $\leq$ g(x) syarat (i)dan (ii) biasanya disebut syarat awal atau prasyarat.

Contoh4:

Tentukan nilai x yang memenuhi $\sqrt{(x-3)}<\sqrt{(5-x)}$

Penyelesaian 4:

Prasyarat :

i. $(x-3) \geq 0$, sehingga $x \geq 3$ $(5-x) > 0$, sehingga $x \leq 5$

ii. $\sqrt{(x-3)}<\sqrt{(5-x)} \leftrightarrow (x-3) < (5-x) \leftrightarrow x < 4$

Mengingat prasyarat (i) diperoleh penyelesaian $3 \leq x \leq 4$

Contoh 5 :

Tentukan penyelesaian dari $\sqrt{x^2-7}< 3$

Penyelesaian5 :

Prasyarat :

$x^2 - 7 \geq 0 \leftrightarrow (x -\sqrt{7}\ ) ((x +\sqrt{7}) \geq 0 \leftrightarrow x \leq \sqrt{7}$ atau $x \geq \sqrt{7}$

dengan menguadratkan kedua ruas $\sqrt{x^2-7}< 3$, akan diperoleh

$x^2 - 7 <9$

$\leftrightarrow x^2 - 16 < 0$

$\leftrightarrow (x-4)\ (x+4) < 0$

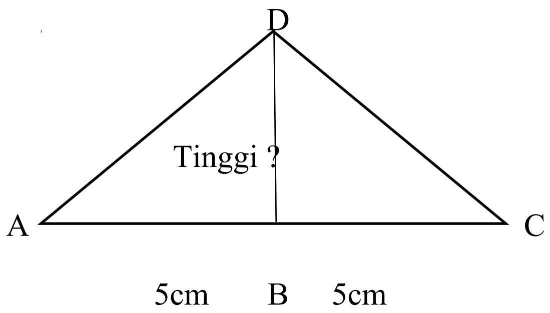
Dari sini diperoleh $-4 < x < 4$.

Mengingat prasyarat (i) maka diperoleh penyelesaian

$-4 < x < -\sqrt{7}$ atau $-\sqrt{7} \leq x < 4$

Contoh6 :

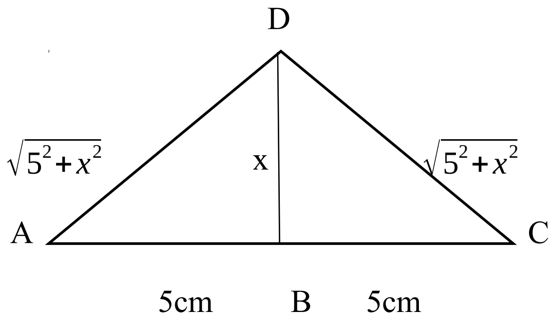
Pak Joko ingin membuat kuda-kuda atap rumah dengan menetapkan lebarya 10 meter seperti gambar berikut.



Karena bahan yang tersedia untuk satu kuda-kuda ditetapkan hanya 26 meter, dia kebingungan menentukan tinggi kuda-kuda. Dapatkah Anda membantu Pak Joko?

Penyelesaian6:

Permasalahan ini dapat dituliskan sebagai berikut.



Dari sini diperoleh persamaan yang menggambarkan permasalahan Pak Jabar di atas yaitu menentukan nilai x yang memenuhi $5 + 5 + \sqrt{5^2+x^2} + \sqrt{5^2+x^2} + x = 26$.

Kemudian disederhanakan didapatkan $2\sqrt{25+x^2} = 16 - x$. Bentuk terakhir ini adalah persamaan irasional. Penyelesaiannya dengan menggunakan metoda yang telah dibahas sebelumnya, yaitu:

$2\sqrt{25+x^2} = 16 - x$.

Prasyarat:

1. $25 + x^2 \geq 0$ atau $x^2 \geq -25$. Karena $x^2 \geq 0$ untuk setiap $x \in R$, maka setiap $x \in$ Rmemenuhi syarat pertama ini.
2. $16 - x \geq 0$. Dari sini diperoleh syarat $x \leq 16$.
3. Prasyarat tambahan yang perlu dimunculkan adalah $x \geq 0$ karena panjang kayu tidak mungkin negatif

Ketiga syarat di atas dapt digabung menjadi $0 \leq x \leq 16$

Selanjutnya dengan menggunakan metoda sebelumnya didapatkan

$2\sqrt{25+x^2} = 16 - x$

$\Longleftrightarrow 4(25 + x^2) = 16^2 - 32x + x^2$

$\Longleftrightarrow 100 + 4x^2 = 256 - 32x + x^2$

$\Longleftrightarrow 3x^2 + 32x - 156 = 0$

Gunakan rumus ABC

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-32\pm\sqrt{32^2-4.3.-156}}{2.3}$$

$$x_{1,2}=\frac{-32\pm\sqrt{1.024+1.872}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{-32\pm\sqrt{2.896}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{-32\pm 53,8}{6}$$

$$x_1=\frac{-32+53,8}{6}=3,64$$

$$x_2=\frac{-32-53,8}{6}=-14,3$$

$x_1 \approx 3,64$ *atau* $x_2 \approx -14,3$

Sesuai dengan prasyarat $0 \leq x \leq 16$ maka diperoleh penyelesaian $x \approx 3,64$. Dengan demikian Pak Joko dapat menentukan tinggi kuda-kuda kira-kira 3,64 meter

7.9 Kegiatan Pembelajaran 9. Rangkuman

1. Bilangan irasional merupakan bilangan riil yang tak dapat dibagi (atau hasil baginya tak pernah berhenti) maka bilangan irasional tak dapat dinyatakan menjadi $\frac{a}{b}$, sementara a dan b adalah bilangan bulat dengan b tak sama dengan 0. Namun bilangan irasional dapat dinyatakan dalam bentuk desimal.

2. Persamaan irasional ialah persamaan yang memuat variabel atau peubahnya berada dalam tanda akar. Secaraumumuntukmenyelesaikanpersamaanirasionaldilakukandenganmenghilangkantandaakarpadakeduaruas, yaitudenganmengkuadratkamasing-masingruas. Proses inidapatdilakukanbeberapakali sampaitandaakarhilangdandiperolehpersamaanaljabarbiasaekuivalen.

3. Pertidaksamaan irasional ialah pertidaksamaan yang memuat variabel atau peubahnya berada dalam tanda akar.Untuk menyelesaikan pertidaksamaan irasional dilakukan dengan mengubahnya menjadi pertidaksamaan ekuivalen yang tidak memuat tanda akar lagi. Umumnya, dengan mengkuadratkan kedua ruas.

7.10 Kegiatan Pembelajaran 10. DiskusiKelompok

1.Tentukan HP dari$\sqrt{x-2}$> 3

Penyelesaian :

Prasyarat : x − … ≥ 0

$\sqrt{x-2}$> …

….   > 9

⇒ x > ….

Jadi, HP = ….

2. Tentukan HP dari$\sqrt{2x-1}$< 1

Penyelesaian :

Prasyarat :... − 1 ≥ 0

x ≥ ….

$(\sqrt{2x-1})^2$< ….

….. < 1

x < …..

⇒$\frac{1}{2}$ ≤ ….< ….

Jadi , HP = …..

3. Tentukan HP dari $\sqrt{x+2} > x$

Penyelesaian :

Prasyarat :….. ≥ 0

$x \geq -2$ (i)

$x \geq 0$(ii)

$(\sqrt{x+2})^2 >$ ….

…..$> x^2$

$x^2 - x - 2 < 0$

(…..) (…..) < 0

$x >$ …dan $x <$ ….

… $< x <$ … (iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = $-2 \leq$ …<…

4. Tentukan HP dari $\sqrt{x+5} < x - 1$

Penyelesaian :

Prasyarat :…… ≥ 0

$x \geq -5$ (i)

……. > 0

$x > 1$ (ii)

$(\sqrt{x+5})^2 <$ …….

$x + 5 <$ …….

$x^2 - 3x - 4 > 0$

(……) (……) > 0

$x < -1$ atau $x > 4$(iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = x> ….

5. Tentukan HP dari$\sqrt{2x-4}>\sqrt{x-6}$

Penyelesaian :

Prasyarat :…… ≥ 0

x ≥ 2 (i)

…… ≥ 0

x ≥ 6 (ii)

…….. >¿)²

2x – 4 >…..

x > - 2 (iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = …...

6. Tentukan HP dari$\sqrt{2x-1}<\sqrt{1+x}$

Penyelesaian :

Prasyarat : $2x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$ (i)

$1 + x \geq 0$

x≥-1 (ii)

….. < $(\sqrt{1+x})^2$

2x – 1 < …..

x< 2 (iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = $\frac{1}{2}$< … < ….

7. $\sqrt{x-2}$+ x = 14, tentukannilai x-nya?

Penyelesaian :

$\sqrt{x-2}$+ x = 14 diubahmenjadi$\sqrt{x-2}$= …..

Prasyarat :……..≥ 0 maka x ≥ 2 …………(i)

…….≥ 0, maka x ≤ 14 ……..(ii)

$\sqrt{x-2}$= …..

$(\sqrt{x-2})^2 = (14 - x)^2$

$x - 2 = 196 - 28x + x^2$

……… = 0

(x – 11) (x – 18) = 0

x = ….ataux = ….(iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = …...

8.$\sqrt{3x-2}$– $\sqrt{x+7}$=$\sqrt{x-8}$, maka diubah menjadi

$\sqrt{3x-2}$=$\sqrt{x-8}$ + $\sqrt{x+7}$

Penyelesaian :

Prasyarat :….. $\geq 0 \rightarrow x \geq \frac{2}{3}$

$x + 7 \geq 0 \rightarrow$ ……

$x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 8$

$\sqrt{3x-2} = \sqrt{x-8} + \sqrt{x+7}$

…….. = ¿+ $\sqrt{x+7})^2$

$3x - 2 =$ ….. + 2 $\sqrt{x-8}\sqrt{x+7}$ + …..

…….. = $2x + 2\sqrt{x-8}\sqrt{x+7} - 1$

……. – $2\sqrt{x-8}\sqrt{x+7}$ – …….= 0

$x - 2\sqrt{x-8}\sqrt{x+7} - 1 = 0$

…… = $2\sqrt{x-8}\sqrt{x+7}$dikuadratkanlagidengansyarat

…… $\geq 0 \rightarrow x \geq 1$(i)

…… $\geq 0 \rightarrow x \geq 8$(ii)

…… = $(2\sqrt{x-8}\sqrt{x+7})^2$

$x^2 - 2x + 1 = 4(x^2 - x - 56)$

…….. = $4x^2 - 4x - 224$

$x^2 - 4x^2 - 2x + 4x + 1 + 224 = 0$

……… = 0

$3x^2 - 2x - 225 = 0$

(……) (……) = 0

$X = -\frac{25}{3}$, x = 9(iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperolehHP = ….

9. $\sqrt{2x-6} < 2$

Penyelesaian :

Prasyarat :….. ≥ 0

$2x \geq$ ….

$x \geq$ ….. (i)

……. $< 2^2$

$2x + 6 < 4$

$2x <$…..

$2x < -2$

$x <$ ….(ii)

Dari persamaan (i), (ii) diperoleh HP = …...

10. Perusahaan asuransimelakukanperhitunganpremi yang akandibayarkankepadapemegang polis dalamkurunwaktutertentu. Besarpremi yang akandibayarkanmemenuhipersamaanberikut

$$p(y) = 2 + \sqrt{4y+4}$$

Tentukanbataskurunwaktu y (dalambulan) yang diperlukanolehpemegang polis agar mendapatpremi paling banyak 6 unit!

Penyelesaian :

Agar pemegang polis mendapatpremi paling banyak 6 unit, maka p(y) haruslahkurangdariatausamadenganenam.

p (y) ≤ 6

$2+\sqrt{4y+4} \leq 6$

$2+¿$........... ≤ 6

$2+¿$...........≤ 6

...................≤ 3

...................≤ 2

...................$\leq 2^2$

$y+1 \leq$ ....

$y \leq$ ....

Syarattambahan : y + 1 ≥ 0 <=> y ≥ -1

Dengandemikian. Himpunanpenyelesaiandaripertidaksamaan di atasadalah.................

Jadi, bataskurunwaktu yang diperlukanolehpemegang polis agar mendapatpremi paling banyak 6 unit adalah.....................

11. Apakah $\frac{3}{17}$ termasuk bilangan irasional?

Ya, $\frac{3}{17}$ merupakan bilangan irasional karena ....

12. Tentukan HP dari $\sqrt{\frac{4}{x-2}} \geq \sqrt{\frac{3}{x-1}}$

Penyelesaian :

Prasyarat : $\frac{4}{x-2} \geq 0$

...... ≥ ....

x≤......(i)

$\frac{3}{x-1} \geq 0$

.... ≥ ....

$x \leq$ .... (ii)

$\left(\sqrt{\frac{4}{x-2}}\right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{3}{x-1}}\right)^2$

.... ≥ ....

.... ≥ ....

.... ≥ ....

.... ≥ .... (iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = …...

13. Tentukan HP dari $\sqrt{x^2-2x-3} \leq \sqrt{3x+3}$

Penyelesaian :

Prasyarat : $x^2-2x-3 \geq 0$

¿......)¿.......) ≥ 0

$x = ¿$ .... $x = ¿$ .... (i)

$3x + 3 \geq 0$

.... ≥ .... (ii)

$\left(\sqrt{x^2 - 2x - 3}\right)^2 \leq \left(\sqrt{3x+3}\right)^2$

............................≤ ....

............................≤ 0

¿ .....) ¿ ......)

$x = ¿$ ...... $x = ¿$ .... (iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = …...

14. Tentukan HPdari$\sqrt{3x^2 - 6x} > 2x - 4$

Penyelesaian :

Prasyarat : $3x^2 - 6x \geq$ 0

.... ≥ 0

$x \geq 0 \; x \geq 2$ (i)

$2x - 4 \geq 0$

.... ≥ ....

.............≥ .... (ii)

$\left(\sqrt{3x^2 - 6x}\right)^2 > (2x - 4)^2$

.... ¿ ....

.... ¿ ....

.... ¿ ....

¿ ....)¿.........)

$x=$¿ .... $x=$¿........ (iii)

Dari persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh HP = …...

15. Apakah hasil dari $\sqrt{121}+\sqrt{20}$ rasional ?

$\sqrt{121}+\sqrt{20}$ = 11 + $\sqrt{4.5}$

= ....

Hasil dari $\sqrt{121}+\sqrt{20}$ ....

7.11 Kegiatan Pembelajaran 11. Soal Mandiri

1. Apakah 0,12111111… adalahbilanganirasional?

2. Tentukanbilanganpecahan$\frac{a}{b}$paling sederhanadaribilangan0,123123123123123…. !

3. Apakah$\sqrt{16}$ adalah bilangan irasional ?Mengapa ?

4. Apakah$\sqrt{7}$ adalah bilangan rasional ?Mengapa ?

5. Selesaikanlahpersamaanirasional$\sqrt{5-2x}$ = -x + 1

6. Selesaikanlahpersamaanirasional$\sqrt{2x+1}$ = $\sqrt{x}$ + 1

7. Selesaikanlahpersamaanirasional$\sqrt{2x+4} = \frac{2x+1}{2}$

8. Selesaikanlahpersamaanirasional –x +1 = $\sqrt{3-x}$

9. Selesaikanlahpersamaanirasional$\sqrt{x}$ -1 = $\sqrt{5-x}$

10. Tentukan HP dari$\sqrt{x+5} < 4$

11. Tentukan HP dari$\sqrt{2+3x} \leq \sqrt{3+2x}$

12. Tentukan HP dari$\sqrt{2x+1} \geq 2$

13. Tentukan HP dari$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} \geq 0$

14. Tentukan HP dari$\sqrt{x^2-4} > x - 3$

15. Tentukan HP dari$\sqrt{x^2-x-2} < 2$

16. Tentukan HP dari$\sqrt{x^2} \geq 2\sqrt{x^2-1}$

17. Sebuahsepedamelaju di jalanrayaselama t detikdenganpanjanglintasan (dalam meter) ditentukanolehpersamaanberikut .

$$s(t) = \sqrt{t^2 - 10t + 4}$$

Jikapanjanglintasansepedasekurang-kurangnyaadalah 4 meter, tentukannilai t yang memenuhi!

18. TentukanHP dari $\sqrt{\frac{4x+5}{2x+1}} \geq \sqrt{\frac{7}{2x+1}}$

19. Tentukan HP dari $\sqrt{\frac{4}{x-3}} \geq \sqrt{\frac{3}{2x-1}}$

20. Tentukan HP dari $\sqrt{x^2-3x-10} \leq \sqrt{x+2}$

21. Tentukan HP dari $\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x+4} >$¿

22. Tentukan HP dari $\sqrt{\frac{2}{x}+1} > \sqrt{3-\frac{1}{x}}$

23.Tentukan HP dari $\sqrt{x^2+8x-20} > 2\sqrt{7}$

24. Tentukan HP dari $\sqrt{\frac{3}{x^2-3x+2}} < \sqrt{\frac{5}{x^2-4x+3}}$

25. Tentukan HP dari $\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} \leq 1$

MODUL 8

FUNGSI EKSPONEN,LOGARITMA,DAN TRIGONOMETRI

A. Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan mampu memahami, serta menyelesaikan operasi fungsi eksponen, logaritma dan trigonometri.

B. Bahan Kajian

1. Fungsi Eksponen beserta Grafiknya
2. Sifa-sifat fungsi Eksponen
3. Persamaan dan Pertidaksamaan Fungsi Eksponen
4. Fungsi Logaritma beserta Kurvanya
5. Sifat-sifat Fungsi Logaritma
6. Persamaan dan Pertidaksamaan Fungsi Logaritma
7. Mengubah eksponen menjadi Logaritma dan sebaliknya
8. Trigonometri

MODUL 8

FUNGSI EKSPONEN,LOGARITMA,DAN TRIGONOMETRI

8.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Fungsi Eksponen

Eksponen sering kita kenal dengan sebutan pangkat. Definisi eksponen adalah nilai yang menunjukkan derajat kepangkatan (berapa kali bilangan tersebut dikalikan dengan bilangan tersebut juga. Bentuk a^n (baca: a pangkat n) disebut bentuk eksponensial atau perpangkatan. a disebut dengan bilangan pokok (basis) dan n disebut eksponennya. Jika n adalah bilangan bulat positif maka definisi dari eksponen.

*a*n = *axaxax* …..*xa* (*a* sejumlah n faktor)

contoh : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Dalam eksponen, bilangan pangkat tidak selamanya selalu bernilai bulat positif tetapi dapat juga bernilai nol, negatif, dan pecahan.

a. Eksponen (pangkat) nol

Jika $a \neq 0$ maka $a^0 = 1$

Contoh :

1. $2^0 = 1$
2. $3^0 = 1$
3. $128384^0 = 1$

b. Eksponen (pangkat) negatif dan pecahan

Jika n dan n adalah bilangan bulat positif maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

contoh :

$2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$
$2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

8.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Sifat-Sifat Eksponen

a) $a^m.a^n = n^{m+n}$
b) $a^m : a^n = a^{m-n}$
c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$
d) $(a \,.\, b)^m = a^m \,.\, b^m$
e) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
f) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
g) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
h) $a^0 = 1$

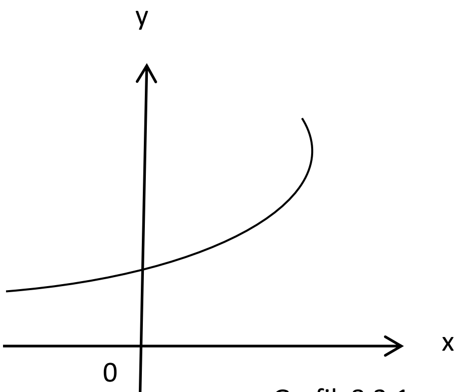
Contoh:

1. $7^2 \,.\, 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$
2. $5^5 : 5^3 = 5^{5-3} = 5^2$
3. $(8^2)^3 = 8^{2 \times 3} = 8^6$
4. $(3 \,.\, 6)^2 = 3^2 \,.\, 6^2$
5. $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2}$
6. $\frac{1}{4^6} = 4^{-6}$
7. $\sqrt[4]{3^6} = 3^{\frac{6}{4}}$
8. $2^0 = 1$

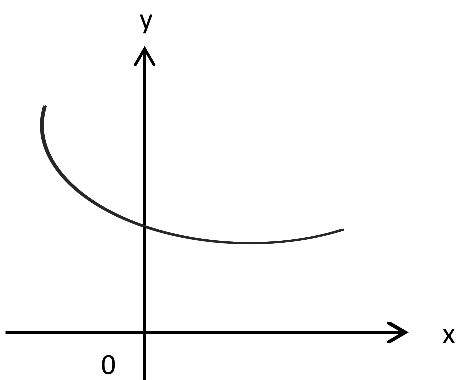
8.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Grafik Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen ialah pemetaan bilangan real x ke bilangan ax dengan a $>$ 0 dan a $\neq$ 1. apabila a > dan a $\neq$ 1, x∈R maka f:(x) = ax kemudian disebut sebagai fungsi eksponen. Fungsi eksponen, y = f(x) = ax : a > 0 dan a $\neq$ 1 mempunyai beberapa sifat-sifat sebagai berikut:

- Kurva terletak di atas sumbu x (definit positif)
- Memotong sumbu y di titik (0,1)
- Mempunyai asimtot datar y = 0 (sumbu x). Arti asimtot adalah garis yang tersebut sejajar dengan sumbu x.
- Grafik monoton naik untuk bilangan x > 1
- Grafik momotong turun untuk bilangan 0 < x



Grafik 8.3.1



Grafik 8.3.2

8.4 Kegiatan Pembelajaran PersamaanFungsi Eksponen

1. Bentuk $a^{f(x)} = 1$

   Jika $a^{f(x)} = 1$ dengan a > 0 dan a≠0, maka f(x) = 0

   Contoh : Tentukan Himpunan penyelesaian dari :

   a. $5^{3x-6} = 1$
   b. $3^{2x^2+3x-5} = 1$

   Penyelesaian :

   a. $5^{3x-6} = 1$
      $5^{3x-6} = 5^0$
      $3x - 6 = 0$
      $3x = 6$
      $x = 2$

   b. $3^{2x^2+3x-5} = 1$
      $3^{2x^2+3x-5} = 3^0$
      $2x^2 + 3x - 5 = 0$
      $(2x + 5)(x - 1) = 0$
      $2x + 5 = 0 \qquad x - 1 = 0$
      $x = -\frac{5}{2}$ dan $x = 1$

2. Bentuk $a^{f(x)} - a^p$

   Jika $a^{f(x)} - a^p$ dengan a>0 dan a≠0, maka f(x) = p

   Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian dari:

   a. $4^{2x-1} = 1024$
   b. $3^{2x-7} = \frac{1}{27}$

c. $\sqrt{5^{3x-10}} = \frac{1}{125}$

Penyelesaian :

a. $4^{2x-1} = 1024$
$4^{2x-1} = 4^5$
$$2x - 1 = 5$$
$2x = 6$
$$x = 3$$

b. $3^{2x-7} = \frac{1}{27}$
$3^{2x-7} = 3^{-3}$
$$2x - 7 = -3$$
$$2x = 4$$
$x = 2$

c. $\sqrt{5^{3x-10}} = \frac{1}{125}$
$5^{\frac{3x-10}{2}} = 5^{-3}$
$5^{\frac{3x-10}{2}} = 5^{-3}$
$$\frac{3x - 10}{2} = -3$$
$$3x - 10 = -6$$
$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3}$$
$$x = 1\frac{1}{3}$$

3. Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan a>0 dan a$\neq$ 0, maka f(x)=g(x)

Contoh :

a. $16^{x^2+x} = 64^{x^2-1}$
b. $25^{x+3} = (0{,}1)^{1-x}$

Penyelesain :

a. $16^{x^2+x} = 64^{x^2-1}$

$$4^{2(x^2+x)} = 4^{3(x^2-1)}$$
$$2x^2 + 2x = 3x^2 - 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$

$x = 3$dan$x = -1$

Jadi HP, $\{-1{,}3\}$

b. 25^{x+3} = $(0{,}1)^{1-x}$

$$5^{2(x+3)} = 5^{-1(1-x)}$$
$$2x + 3 = -1 + x$$
$$2x - x + 3 + 1 = 0$$
$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

4. Bentuk $A(a^{f(x)})^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + c$

Dengan misalkan $a^{f(x)}$ = p, maka bentuk persamaan di atas dapat diubah menjadi persamaan kuadrat : $Ap^2 + Bp + C = 0$

$$Contoh:\ 2^{2x} -\ 2^{x+3} + 16 = 0$$

Penyelesaian :

$$2^{2x} -\ 2^{x+3} + 16 = 0$$
$$2^{2x} -\ 2^{x}.2^{3}\ + 16 = 0$$

Dengan misalkan 2^x = p, maka persamaan menjadi

$p^2 - 8p$ +16 = 0
$(p-4)(p-4)$ = 0

$$p = 4$$

Untuk p = 4 → $2^x = 4$
$2^x = 2^2$

x = 2
Jadi HP = {2}

8.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Pertidaksamaan Eksponen

Dalam pertidaksamaan eksponen, sifat-sifat yang digunakan diataranya:

1. Untuk a > 1,
   fungsi(x) = a^x merupakan fungsi naik. Hal ini berarti, pada x_1, x_2R berlaku x_1<x_2 jika dan hanya jika $(x_1) < (x_2)$.

2. Untuk 0 < a < 1 ,
   $(x) = a^x$merupakan fungsi turun. Hal ini berarti, padax_1, x_2R berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika (x_1)>(x_2).

   Contoh :
   Tentukan himpunan penyelesaian dari :$5^{-2x+2} + 74.(5^{-x}) - 3 \geq 0$

   Jawab :

$$5^{2x+2} + 74.(5^{-x}) - 3 \geq 0$$

$$5^2(5^{-2x}) + 74.(5^{-x}) - 3 \geq 0$$

$$25\ (5^{-x})^2 + 74.(5^{-x}) - 3 \geq 0$$

   Misalkan y = 5 –x

   25y2 + 74y – 3 ≥ 0

$$(25y - 1)(y + 3) \geq 0$$

$$y \leq -3\ atau\ y \leq$$

8.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Fungsi Logaritma

Logaritma adalah kebalikan dari suatu perpangkatan. Jika sebuah perpangkatan $a^c = b$, maka dapat dinyatakan logaritma sebagai:

$y = {}^{a}\log x$

Dimana :

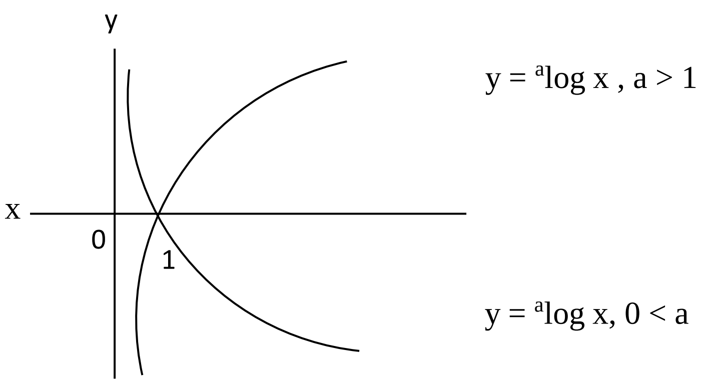
a = bilangan pokok/ basis

x = bilangan yang di logaritmakan/numerous

Syarat : $a > 0$, $a \neq 1$, dan $x > 0$

8.7 Kegiatan Pembelajaran 7. Kurva Fungsi Logaritma

Bentuk grafik fungsi logaritma $y = {}^{a}\log x$ bergantung dari nilai basisnya (bilangan pokok). Jika $a > 1$, maka grafiknya naik, dan jika $0 < a < 1$, maka grafiknya turun. Untuk lebih jelasnya, perhatikan grafik berikut



Kurva 8.5.1

8.8 Kegiatan Pembelajaran 8.Sifat – Sifat Logaritma

1. Perkalian Logaritma

   ${}^{a}\log (p \times q) = {}^{a}\log p + {}^{a}\log q$

   Contoh : Sederhanakanlah: ${}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 8$

   Penyelesaian:

   ${}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 8 = {}^{2}\log (4 \times 8) = {}^{2}\log 32 = 5$

2. Pembagian Logaritma

   ${}^{a}\log \frac{p}{q} = {}^{a}\log p - {}^{a}\log q$

   Contoh : Sederhanakanlah: ${}^{7}\log 217 - {}^{7}\log 31$

   Penyelesaian :

   ${}^{7}\log 217 - {}^{7}\log 31 = {}^{7}\log \left(\frac{271}{31}\right) = {}^{7}\log 7 = 1$

3. Perpangkatan Logaritma

   ${}^{a}\log b^{n} = n \times {}^{a}\log b$
   Contoh :Sederhanakanlah: $2 \log 25 - 3 \log 5 + \log 20$

   Penyelesaian:

   $2 \log 25 - 3 \log 5 + \log 2$
   $= \log 252 - \log 53 + \log 20$
   $= \log \left(\frac{25^2}{5^3}\right) + \log 20$ $= \log$
   $5 + \log 20$ $=$
   $\log (5 \times 20)$

$= \log 100 = 2$

4. Pengubahan Bilangan Pokok Logaritma 1

   $^{a}\log b = \frac{\boldsymbol{n}_{\log \boldsymbol{b}}}{\boldsymbol{n}_{\log \boldsymbol{a}}}$

   Contoh :Jika $^{2}\log 3$= a,nyatakan bentuk logaritma $^{8}\log 3$ kedalam a.

   Penyelesaian:

   $^{8}\log 3 = \frac{\log 3}{\log 8}$
   $^{8}\log 3 = \frac{\log 3}{\log 2^{3}}$
   $^{8}\log 3 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$
   $^{8}\log 3 = \frac{1}{3} \times {}^{2}\log 3$ $\quad$ $^{8}\log 3 = \frac{1}{3}$ a

5. Pengubahan Bilangan Pokok Logaritma 2

   $^{a}\log b = \frac{1}{b_{\log a}}$

   Contoh : Tentukan nilai dari $^{2}\log 8$!

   Penyelesaian :

   $^{2}\log 8 = \frac{1}{8_{\log 2}}$
   $^{2}\log 8 = \frac{1}{8_{\log 8^{\frac{1}{3}}}}$
   $^{2}\log 8 = \frac{1}{\frac{1}{3}}$
   $^{2}\log 8 = 3$

6. Perluasan Sifat Perkalian Logaritma

${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$

Contoh : Hitunglah nilai logaritma dari ${}^2\log 25 \times {}^5\log 3 \times {}^9\log 32$!

Penyelesaian :

${}^2\log 25 \times {}^5\log 3 \times {}^3\log 32$
$= {}^2\log 5^2 \times {}^5\log 3 \times {}^3\log 2^5$
$= 2\ {}^2\log 5 \times \quad {}^5\log 3 \times 5\,{}^3\log 2$
$= 2 \times 5 \times {}^2\log 5 \times {}^5\log 3 \times {}^3\log 2$
$= 10 \times {}^2\log 2 = 10 \times 1 = 10$

7. Perluasan Sifat Perpangkatan Logaritma 1

$$a^n{}_{\log b^m} = \frac{m}{n} \times a_{\log b}$$

Contoh :Hitunglah nilai logaritma dari $2^2{}_{log 4^3}$

Penyelesaian:

$2^2{}_{log 4^3} = \frac{3}{2} \times {}^2\log 4$
$= \frac{3}{2} \times {}^2\log 2^2$
$= \frac{3}{2} \times 2 = 3$

8. Perluasan Sifat Perpangkatan Logaritma 2

$a^n{}_{\log b^n} = {}^a\log b$

Contoh :Jika ${}^2\log 3 = a$,nyatakan logaritma ${}^8\log 27$ ke dalam bentuk a!

Penyelesaian:

${}^8\log 27 = 2^3{}_{\log 3^3} = {}^2\log 3 = a$

9. Perluasan dari Bentuk Umum Logaritma

$$a^{{}^{a}\log b} = b$$

Contoh :Sederhanakanlah 7 ^{7}log 25!:

Penyelesaian :

7 ^{7}log 25 = 25

10. Invers Pembagian Logaritma

$^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = -\,{}^{a}\log\left(\frac{c}{b}\right)$

Contoh : Tentukan nilai logaritma dari $^{4}\log\left(\frac{32}{2}\right)$!

Penyelesaian :

$^{4}\log\left(\frac{32}{2}\right) = -{}^{4}\log\left(\frac{2}{32}\right)$

$= -{}^{4}\log\left(\frac{1}{16}\right)$

$= -\,{}^{4}\log 4^{-2}$

$= -\,(-2)\,{}^{4}\log 4 = 2$

8.9 Kegiatan Pembelajarn 9. Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma yaitu suatu persamaan yang perubahnya merupakan numerus atau bilangan pokok logaritma.

$^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$

Syarat : hasil yang harus memenuhi $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

Contoh :

Log (x-1) + log (x+2) = log 6

Log (x-1) (x+2) = log 6

$^{2}\log (x^2 - 2x - x + 2) = {}^{2}\log 6$

$^{2}\log x^2 - 3x + 2 = {}^{2}\log 6$

$x^2 - 3x + 2 = 6$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x + 1) (x - 4) = 0$

x = -1 (tidak memenuhi), ingat syarat

x = 4

Jadi, Himpunan penyelesaian = (4)

$^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x) \longrightarrow g(x) = h(x)$

Syarat :

Hasil yang harus memenuhi :

1. g(x) > 0
2. h(x) > 0
3. f(x) > 0 dan f(x) ≠ 1

Contoh :

$$^{(3x-1)}\log (3x - 2) = {}^{(3x-1)}\log (4x - 4)$$

$$3x - 2 = 4x - 4$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

Syarat :

$3x - 2 = 6 - 2 = 4$

$4x - 4 = 8 - 4 = 4$ Terpenuhi, Jadi $x = 2$

$2x - 1 = 4 - 1 = 3$

8.10 Kegiatan Pembelajaran 10. Pertidaksamaan Logaritma

Pertidaksamaan logaritma merupakan pertidaksamaan yang memuat bentuk logaritma yang berkaitan langsung dengan tanda ketaksamaan yaitu >, ≥ , <, dan ≤.

a. Untuk $a > 1$

${}^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) > g(x)$

${}^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) < g(x)$

Syarat numerus :

$f(x) > 0$, $g(x) > 0$

Contoh :

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan ${}^{2}\log(x + 1) > 3$

Penyelesaian :

${}^{2}\log(x + 1) > {}^{2}\log 2^{3}$

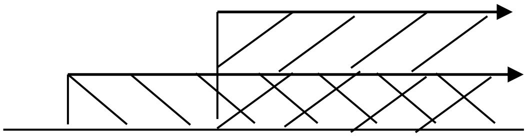
${}^{2}\log(x + 1) > {}^{2}\log 8$

$x + 1 > 8$

$x > 7$……………………………..1

syarat : $x + 1 > 0$, $x > -1$………..2

$1 \cap 2$



Jadi, $x > 7$

b. Untuk bilangan pokok $0 < a < 1$

${}^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x)$ maka $f(x) < g(x)$

${}^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x)$ maka $f(x) > g(x)$

syarat numerus

$f(x) > 0$

$g(x) > 0$

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari ${}^{1/2}\log (2x - 3) > -3$

Penyelesaian :

${}^{1/2}\log (2x - 3) > -3$

${}^{1/2}\log (2x - 3) > {}^{1/2}\log (\frac{1}{2})^{-3}$

${}^{1/2}\log () > {}^{1/2}\log (2^{-1})^{-3}$

${}^{1/2}\log (2x - 3) > {}^{1/2}\log 2^{3}$

${}^{1/2}\log (2x - 3) > {}^{1/2}\log 8$

$2x - 3 < 8$

$2x < 11$

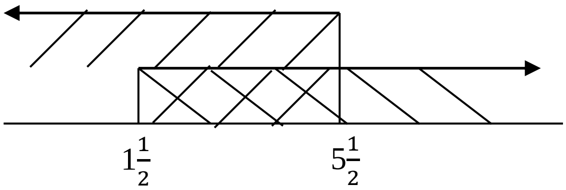
$x < 5\frac{1}{2}$

Syarat :

$2x - 3 > 0$

$X > 1\frac{1}{2}$

$1 \cap 2$



Jadi, $1 \cap 2$

$1\frac{1}{2} < x < 5\frac{1}{2}$

8.11 Kegiatan Pembelajaran 11. MengubahBentuk Eksponen Menjadi Bentuk Logaritma Dan Sebaliknya.

Logaritma merupakan invers (kebalikan) dari bentuk eksponen (bentuk pangkat).

${}^{a}\log b = c$ berarti $a^{c} = b$

Contoh :

a. Ubahlah bentuk logaritma ke bentuk pangkat.
   a. ${}^{5}\log 25 = 2$
   b. ${}^{2}\log 16 = 4$

c. ${}^{e}\log x = 5$

Penyelesaian :
a. $5^2 = 25$
b. $2^4 = 16$
c. $e^5 = x$

b. Ubahlah bentuk pangkat ke bentuk logaritma.
a. $4^2 = 16$
b. $c^8 = 246$
c. $7^3 = 343$

Penyelesaian :
a. ${}^{4}\log 16 = 2$
b. ${}^{c}\log 246 = 8$
c. ${}^{7}\log 343 = 3$

8.12 Kegiatan Pembelajaran 12. Pengertian Trigonometri

Trigonometri (dari bahasa Yunanitrigo non = tiga sudut danme tro =mengukur) adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudutsegi tiga dan fungsiTrigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen.

Kemudian di dalam trigonometri matematika mempunyai tiga fungsi yang pertama ialah sinus yang merupakan perbandingan sisi ketiga (segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°) yang di depan sudut dengan sisi miring, lalu fungsi trigonometri kedua ialah kosinus atau cosinus yang merupakan perbandingan sisi segitiga yang terletak disudut dengan sisi miring dan fungsi dasar trigonometri matematika yang ketiga ialah tangan yang merupakan perbandingan sisi segitiga yang terletak disudut.

8.13 Kegiatan Pembelajaran 13. Rumus-Rumus Trigonometri

$$\mathrm{SinA} = \frac{a}{c}$$

$$\mathrm{CosA} = \frac{b}{c}$$

$$\mathrm{TanA} = \frac{\mathrm{sinA}}{\mathrm{cosA}}$$

$$\mathrm{CotanA} = \frac{1}{\mathrm{tanA}} = \frac{\mathrm{cosA}}{\mathrm{sinA}} = \frac{b}{a}$$

$$\mathrm{SecA} = \frac{1}{\mathrm{cosA}} = \frac{c}{b}$$

$$\mathrm{CosecA} = \frac{1}{\mathrm{sinA}}$$

a. Rumus Identitas Trigonometri

$$\mathrm{Sin2A} + \mathrm{Cos2A} = 1$$

$$1 + \tan 2A = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 A} = \mathrm{Sec2A}$$

$$1 + \mathrm{Cot2A} = \frac{1}{\mathrm{Sin}^2 A} = \mathrm{Cosec2A}$$

b. Rumus Jumlah Dan Selisih Sudut Trigonometri

$$\mathbf{sin(A + B) = sinAcosB + cosAsinB}$$

$$\mathbf{Sin(A - B) = sinAcosB - cosAsinB}$$

$$\mathbf{Cos(A+B) = cosAcosB - sinAsinB}$$

$$\mathbf{Cos(A - B) = cosAcosB + sinAsinB}$$

$$\mathbf{Tan(A+B) = \frac{tanA + tanB}{1 - tanAtanB}}$$

$$\mathbf{Tan(A-B) = \frac{tanA - tanB}{1 + tanAtanB}}$$

c. Rumus Perkalian Trigonometri

$$2\sin A\cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$
$$2\cos A\sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$
$$2\cos A\cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$
$$2\sin A\sin B = -\cos(A + B) + \cos(A - B)$$

d. Rumus Jumlah Dan Selisih Trigonometri

$$\mathbf{SinA + sinB = 2sin\tfrac{1}{2}(A + B)cos\tfrac{1}{2}(A - B)}$$

$$\mathbf{SinA - sinB = 2cos\frac{1}{2}(A + B)sin\frac{1}{2}(A - B)}$$

$$\mathbf{CosA - cosB = 2cos\frac{1}{2}(A + B)cos\frac{1}{2}(A - B)}$$

$$\mathbf{CosA - cosB = -2sin\frac{1}{2}(A + B)sin\frac{1}{2}(A - B)}$$

e. Rumus Sudut Rangkap Dua Dan Tiga Trigonometri

$$\mathbf{sin2A = 2sinAcosA}$$

$$\mathbf{cos2A = cos2A - sin2\,A = 1 - 2sin2A}$$
$$\mathbf{= 2cos2A - 1}$$

$$\mathbf{tan2A = \frac{2tanA}{1 - tan^2 A} = \frac{2cotA}{cot^2 A - 1} = \frac{2}{cotA - tanA}}$$

f. Rumus Sudut Rangkap Tiga

$$\mathbf{Sin3A = 3sinA - 4sin3A}$$

$$\mathbf{Cos3A = 4cos3A - 3cosA}$$

g. Rumus Setengah Sudut Trigonometri

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\mathrm{COS}\,A}{\sin A}$$

8.14 Kegiatan Pembelajaran 14. Contoh Soal Trigonometri

1. Tentuan lah nilai dari 2 cos 45^o cos 15^o

   Pembahasan:

   nilai 2 cos 45^o cos 15^o = cos (45^o +15^o) + cos (45^o – 15^o)

   = cos 60^o + cos 30^o

   $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   $=1\ \sqrt{3}$

2. Buktikan bahwa sin θ cot θ = cos θ.

   Pembahasan:

$$\sin\theta \cot\theta = \sin\theta \, . \, \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cos\theta$$

3. Buktikan bahwa $tanx + cosx = sinx\ (secx + cotx)$.

   Pembahasan:

$$\boldsymbol{Sin\ x}\ (\boldsymbol{sec\ x}\ +\ cot\ x)\ =\ sin\ x\ sec\ x\ +\ sin\ x\ cot\ x$$

$$= \sin x\ \frac{1}{\cos x} + \sin x\ \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x$$

$$= \tan x\ +\ \cos x$$

4. Buktikan lah bahwa $sin\ 80^o + sin\ 40^o = \sqrt{3 \cos 20^o}$

   Pembahasan :

   $\sin 80^o + \sin 40^o = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$
   $= 2 \sin \frac{1}{2}(80^o + 40^o) \cos \frac{1}{2}(80^o - 40^o)$
   $= 2 \sin \frac{1}{2}(120^o) \cos \frac{1}{2}(40^o)$
   $= 2 \sin 60^o \cos 20^o$
   $= 2 (\frac{1}{2}\sqrt{3}) \cos 20^o$
   $= \sqrt{3} \cos 20^o$

5. Jika $sin\alpha = \frac{3}{5}$ dan α merupakan sudut lancip, tentukan nilai $sin 2\alpha$.

   Pembahasan:

   $sin\ \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow cos\alpha = \frac{4}{5}$

   Sehingga,

   $sin\ 2\alpha = 2 \cdot sin\alpha\ cos\alpha$

   $sin\ 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

6. Jika $\sin \propto = \frac{3}{5}$ dan $\propto$ merupakan sudut lancip, tentukan nilai $\sin 2 \propto$

   Pembahasan :

   $\sin 2 \propto = 2 .\ sin \propto \cos \propto$
   $Sin\ 2 \propto = 2 . \frac{3}{5} . \frac{4}{5}$

$Sin\ 2 \propto = \frac{6}{25}$

7. Jika diketahui nilai $tan\ \propto = \frac{2}{3}$. Jika sudut $\propto$ merupakan sudut lancip maka tentukan nilai $\tan 2 \propto$. Pembahasan:

$$\tan 2 \propto = \frac{2 \cdot \tan \propto}{1 - \tan^2 \propto}$$

$$\tan 2 \propto = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$\tan 2 \propto = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}}$$

$$\tan 2 \propto = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}$$

$$\tan 2 \propto = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5}$$

$$\tan 2 \propto = \frac{12}{5}$$

8. Buktikan $\tan x \sin x + \cos x = \sec x$

Bukti:

$$\tan x \sin x + \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ x } \sin x + \cos x$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec x$$

9. Tentukan nilai dari $\tan 105^o$

Jawab:

$$\tan 105^o = \tan(60^o + 45^o)$$

Maka:

$$\tan 105^o = \frac{\tan(60^o + 45^o)}{1 - \tan(60^o + 45^o)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \,.\, 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \text{x} \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= (2 + \sqrt{3})$$

10. Tentukan nilai dari $\cos 75^o$

Jawab:

$$\cos 75^o = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + + \cos 2\ (75^o)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 150^o}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}))}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\ (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})} = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(2 - \sqrt{3}\,)} \; = \; \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{Jadi, } \cos 75^{o} \; = \; \frac{1}{2}\sqrt{2 \; - \sqrt{3}}$$

8.15 Kegiatan Pembelajaran 15. Rangkuman

1. Fungsi Eksponen

   Eksponen adalah nilai yang menunjukkan derajat kepangkatan (berapa kali bilangan tersebut dikalikan dengan bilangan tersebut juga.

   a. Eksponen (pangkat) nol

      Jika $a \neq 0$ maka $a^0 = 1$

   b. Eksponen (pangkat) negatif dan pecahan

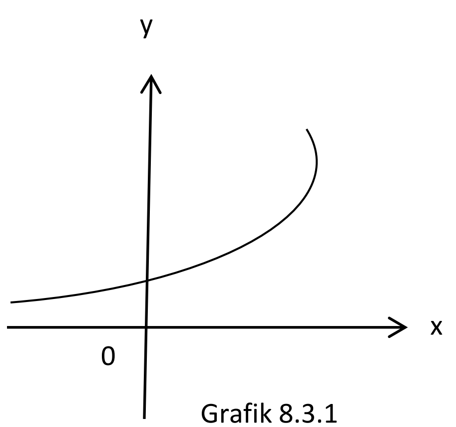
      Jika n dan n adalah bilangan bulat positif maka,

      $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

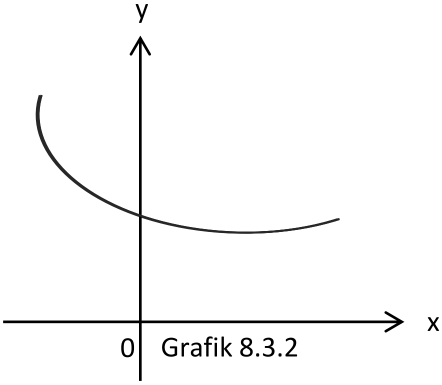
   A. Sifat – Sifat Eksponen

   - $a^m . a^n = n^{m+n}$
   - $a^m : a^n = a^{m-n}$
   - $(a^m)^n = a^{m \times n}$
   - $(a . b)^m = a^m . b^m$
   - $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
   - $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
   - $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
   - $a^0 = 1$

   B. Grafik Fungsi Eksponen



Grafik 8.3.1



Grafik 8.3.2

C. Persamaan Eksponen

a. Bentuk $a^{f(x)} = 1$

Jika $a^{f(x)}= 1$ dengan a > 0 dan a≠0, maka f(x) = 0

b. Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan a>0 dan a$\neq$ 0, maka f(x)=g(x

c. Bentuk $A(a^{f(x)})^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + c$

Dengan misalkan $a^{f(x)}$ = p, maka menjadi : $Ap^2 + Bp + C = 0$

D. Pertidaksamaan Eksponen

Dalam pertidaksamaan eksponen, sifat-sifat yang digunakan diataranya:

a. Untuk a > 1

Fungsi (x) = a^x merupakan fungsi naik. Hal ini berarti, pada $x_{1\,,}x_2$ R berlaku x_1<x_2 jika dan hanya jika $(x_1) < (x_2)$.

b. Untuk 0 < a < 1 ,$(x) = a^x$

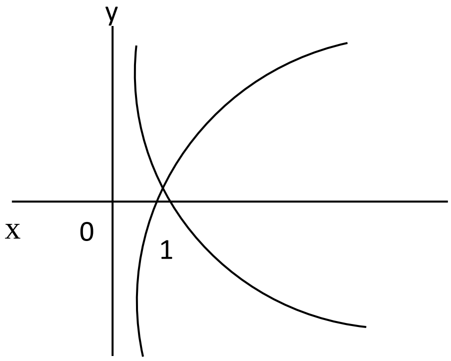
Merupakan fungsi turun. Hal ini berarti, pada $x_{1\,,}x_2$

R berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika (x_1)>(x_2).

2. Fungsi Logaritma

   y = $^a\log x$

A. Kurva Fungsi Logaritma



y = $^a\log x$, a > 1

y = $^a\log x$, 0 < a

Kurva 8.5.1

B. Sifat – Sifat Logaritma

- $^a\log (p \times q) = {}^a\log p + {}^a\log q$
- $^a\log \boldsymbol{\frac{p}{q}} = {}^a\log p - {}^a\log q$
- $^a\log b^n = n \times {}^a\log b$
- $^a\log b = \frac{\boldsymbol{n_{\log b}}}{\boldsymbol{n_{\log a}}}$
- $^a\log b = \frac{1}{b_{\log a}}$
- $^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$
- $a^n{}_{\log b^m} = \frac{m}{n} \times a_{\log b}$
- $a^n{}_{\log b^n} = {}^a\log b$
- $a^{a_{\log b}} = b$
- $^a\log \left(\frac{b}{c}\right) = -\, {}^a\log \left(\frac{c}{b}\right)$

C. Persamaan Eksponen

   $^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$

D. Pertidaksamaan Logaritma

a. Untuk a > 1

$^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) > g(x)$

$^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) < g(x)$

b. Untuk bilangan pokok 0 < a < 1

$^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x)$ maka $f(x) < g(x)$

$^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x)$ maka $f(x) > g(x)$

E. Mengubah Bentuk Eksponen Menjadi Bentuk Logaritma dan Sebaliknya.

$^{a}\log b = c$ berarti $a^{c} = b$

3. Trigonometri

Trigonometri adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudutsegi tiga dan fungsi Trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen.

A. Rumus Trigonometri

- $\mathrm{SinA} = \frac{a}{c}$
- $\mathrm{CosA} = \frac{b}{c}$
- $\mathrm{TanA} = \frac{\mathrm{sinA}}{\mathrm{cosA}}$
- $\mathrm{CotanA} = \frac{1}{\mathrm{tanA}} = \frac{\mathrm{cosA}}{\mathrm{sinA}} = \frac{b}{a}$
- $\mathrm{SecA} = \frac{1}{\mathrm{cosA}} = \frac{c}{b}$
- $\mathrm{CosecA} = \frac{1}{\mathrm{sinA}}$

8.16Kegiatan Pembelajaran 16. Soal Diskusi Kelompok Eksponen, Logaritma, dan Trigonometri

1. Hasil dari :

   a. $8^3 + 8^4 = 8^{(\ldots \times \ldots)}$

   $= \ldots$

   $= \ldots$

   b. $\frac{23^{12}}{23^3} = 23^{(\ldots - \ldots)}$

   $= \ldots$

   $= \ldots$

   c. $\left(\frac{5}{14}\right)^3 = \frac{\ldots^{\ldots}}{\ldots^{\ldots}}$

   $= \ldots$

   d. $(32^4)^5 = \ldots^{(\ldots \times \ldots)}$

   $= \ldots$

   e. $\sqrt[3]{8^2} = \ldots^{\frac{\ldots}{\ldots}}$

   $= \ldots$

2. Tentukanlah bentuk sederhana dari $\frac{4(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$

   Jawab :

   $\frac{4(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$

   $= \frac{\ldots}{\ldots} \times \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

3. Hitunglah nilai dari $\frac{10a^{-3}b^4}{5a^{-2}b^3}$

   Jawab :

   $\frac{10a^{-3}b^4}{5a^{-2}b^3} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

   $= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

4. Hasil dari $\sqrt[3]{0{,}125} + \frac{1}{\sqrt[5]{32}} + (0{,}5)^2$ adalah...

   Jawab :

   $\sqrt[3]{0{,}125} + \frac{1}{\sqrt[5]{32}} + (0{,}5)^2$
   =…..+…....+...........
   =…..+.....
   =…..+......

5. Jika $3^{x-y} = \frac{1}{81}$ dan $2^{x-y} = 16$ maka nilai dari $x + y$ adalah…

   Jawab :
   (1) ....=.... …..=....   ...=....
   (2) ....=…. ....=....

   Dari 1 dan 2 diperoleh ....=..... ...=...
   Didapatkan nilai, x = … dan y = ...
   Jadi,......

6. Nilai x yang memenuhi $3^{x2-2x-5} < \frac{1}{9}$ adalah..

   Jawab :

   $$3^{x2-2x-5} < \frac{1}{9}$$

   =.......... < ....
   Maka .....<.....

7. Akar-akar persamaan $2.3^{4x} - 20.3^{2x} + 18 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Nilai $x_{1+} x_2$ adalah....

Jawab :

.........−......+....=...

.... −......+....=...

.... −......+....=...

Jadi, $x_{1+} x_2$ = ...

8. ^{2}log 2x = 3

^{2}log 2x.= ^{2}log….

……….=……….

……….= $\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

……….=……….

9. $^2\log(3x + 1) - {}^2\log(x - 3) = 3$

……….........−……….......= ^{2}log…

$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ = ……

……….............= …..

……….............=……

…..=…..

10. Tentukan penyelesaian dari : ^{5}log x > 2

Jawab :

^{5}log x > 2

^{5}log x > ……

x > ….   ……...........(1)

Syarat numerus :
x > …   ………………(2)

1 ∩ 2

Jadi , HP : {… … . }

11. Tentukan penyelesaian dari : $\log^2 x + \log x^2 + 1 = 0$

Jawab :

$\log^2 x + \log x^2 + 1 = 0$
$(\ldots..)^{\ldots} + \ldots \log \ldots + 1 = 0$

Misalkan, log x = …
… + … + … = 0
(… + …) (… + …) = 0
….. + ….. = 0
…… = …….

Untuk …. = …..   →log x = …
Log x = … → (eksponen) …. = x
$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ = x

Jadi nilai x adalah…

12. Tentukanlah penyelesaian dari : ${}^3\log x \leq 4$
Jawab

${}^3\log x < 4$
${}^3\log x < \cdots$
$x < \cdots$ 1

Syarat Numerus :

x > 2

1 ∩ 2

Jadi, HP : {..........}

13. Tentukanlah penyelesaian dari : ${}^{2}log(x+1) \geq 3$

Jawab :

${}^{2}log(x+1) \geq 3$
${}^{2}log(x+1) \geq \cdots$
$x+1 > \cdots$
$x > \cdots$ 1

Syarat Numerus :

$$x + 1 > 0$$

$x > \cdots - \cdots$

$x > \cdots$ 2

1 ∩ 2

Jadi, HP : {..........}

14. Tentukanlah penyelesaian dari : $log(x-6) < 1$

Jawab :

$\log(x-6) < 1$
$\log(\mathrm{x}-6) < \cdots$
$x - 6 \; > \; \cdots$
$x > \; \cdots$ 1

Syarat Numerus :
$x \; - 6 > 0$
$x \; > \cdots \; - \; \cdots$
$x \; > \cdots$ 2

1 ∩ 2

Jadi, HP : {..........}

15. Nilai dari cos $465°$ − cos $195°$ adalah..

Jawab :

$$\text{Cos}\ldots - \text{Cos}\ldots = -2 \text{ Sin} \left(\frac{\ldots + \ldots}{2}\right) \times \text{Sin} \left(\frac{\ldots - \ldots}{2}\right)$$
$$\text{Cos}\ldots° - \text{Cos}\ldots° = -2 \text{ Sin} \left(\frac{\ldots°+\ldots°}{2}\right) \times \text{Sin} \left(\frac{\ldots°-\ldots°}{2}\right)$$
$$= \; -2 \text{ Sin} \left(\frac{\ldots\ldots°}{2}\right) \times \; \text{Sin}\left(\frac{\ldots\ldots°}{2}\right)$$
$$= -2 \text{ Sin}\ldots.° \times \; \text{Sin} \ldots °$$
$$= -2 \times \ldots.. \times \ldots..$$
$$= \ldots..$$

Jadi nilai cos $465°$ − cos $195°$ adalah …

16. Nilai dari $\frac{\sin 270° \times \cos 135° - \tan 135°}{\sin 150° \times \cos 225°}$ adalah …

Jawab :

$$\frac{\sin 270° \times \cos 135° - \tan 135°}{\sin 150° \times \cos 225°}$$

$$= \frac{\sin(.....°+ .....°)\times\cos(.....°-.....°)-\left(\frac{\sin.....°}{\cos......°}\right)}{\sin(.....°+ .....°)\times\cos(.....°+ ......°)}$$

$$= \frac{-\sin.....°\times(-\cos......°)-\left(\frac{\sin.....°}{-\cos......°}\right)}{\sin.....°\times\cos.....°}$$

$$= \frac{.....\times(........)-\left(\frac{.............}{.............}\right)}{........\times\left(\frac{.............}{.............}\right)}$$

$$= \frac{.......................................}{.....................................}$$

$$= \frac{.......................................}{.....................................} \times \frac{....}{....}$$

$$= \frac{................................}{.....}$$

$$= \frac{................................}{.....}$$

$=.................$

Jadi, Nilai $\frac{\sin 270°\times\cos 135°-\tan 135°}{\sin 150°\times\cos 225°}$ adalah ….

17. Buktikan $\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}= \tan^2\alpha - \tan^2$!

Jawab :

$$\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} - \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\, x\, \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\, x\, \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$= \cdots\cdots\cdots - \sec^2\alpha\tan^2\beta$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots - (1+\tan^2\alpha)\tan^2\beta$$

$$= \tan^2\alpha + \tan^2\alpha\tan^2\beta - \tan^2\beta - \tan^2\alpha\tan^2\alpha\tan^2\beta$$

$$= \tan^2\alpha - \tan^2\beta$$

18. Buktikan $(\sin a\text{-}\cos a)^2 = 1 - 2\sin a\cos a$

Jawab :

$(\sin a - \cos a)^2 = \sin^2 - \cdots\cdots\cdots + \cos^2 a$

$= \sin^2 a + \cdots\cdots - 2\sin a\cos a$

$= 1 - 2\sin a\cos a$

19. Buktikan $(\tan\theta - cot\theta) = \frac{1-2\cos^2\theta}{sin\theta\ cos\theta}$

Jawab :

$$tan\theta - cot\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} - \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{sin\theta\ cos\theta}$$

$$= \frac{1 - \cdots\cdots - \cdots\cdots}{sin\theta\ cos\theta}$$

$$= \frac{1 - \cdots\cdots}{\sin\theta\cos\theta}$$

20. Buktikan $tanx\ sinx + cosx = secx$

Jawab :

$$tanx\ sinx + cosx = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \times sinx + cosx$$

$$= \frac{1}{\dots\dots}$$

$$= secx$$

21. Buktikan $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

Jawab :

$$1 + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \dots\dots\dots$$

22. Buktikan $\frac{2-\sec^2 \beta}{\sec^2 \beta} = 1 - 2\sin^2 \beta$

Jawab :

$$\frac{2-\sec^2 \beta}{\sec^2 \beta} = \frac{2 - \frac{\dots\dots}{\dots\dots}}{\frac{1}{\cos^2 \beta}}$$

$$= \frac{\frac{2\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} - \frac{1}{\cos^2 \beta}}{\frac{1}{\cos^2 \beta}}$$

$$= \frac{\frac{2\cos^2\beta - 1}{\cos^2\beta}}{\frac{1}{\cos^2\beta}}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{1}$$

$$= 2(1 - \sin^2\beta) - 1$$

$$= 2 - 2\sin^2\beta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\beta$$

23. Buktikan (cos$a$+sin$a$)^2-(cos$a$-sin$a$)^2= 4sin$a$cos$a$

Jawab :

(cos$a$+sin$a$)^2-(cos$a$-sin$a$)^2

= cos^2a-2sin$a$cos$a$+sin$^2 a$ - ($\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$)

= $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$+sin$^2 a$-cos$^2 a$+2sin$acosa$- sin$^2 a$

= 4sin$a$cos$a$

24. Buktikan (tan$a$+cot$a$) cos$^2 a$ = cot$a$

Jawab :

$$(\tan\alpha + \cot\alpha)\cos^2\alpha = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cos^2\alpha$$

$$= \left(\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)\cos^2\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)\cos^2\alpha$$

$$= \left(\frac{\dots\dots\dots\dots}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

25. Buktikan $\cos^4 a$-$\cos^2 a$ =$\sin^2 a$

Jawab :

$\cos^2 a$-$\cos^2 a$

$= (\cos^2 a)^2$-$(\cdots\cdots)$

$= (1$-$\sin^2 a)^2$-$1+\sin^2 a)$

$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$= \sin^4 a$-$\sin^2 a$

8.17 Kegiatan Pembelajaran 17. Latihan Soal Mandiri Eksponen

1. Tentukan hasil dari :
   a. $\sqrt[3]{5^2}$
   b. $\frac{6^5}{36^2}$
   c. $(5.4)^3$
   d. $\frac{27^4}{3^6}$
   e.

2. Bentuk sederhana dari : $(\frac{2a^6b^{-4}}{16a^9b^{-1}})^{-1}$

3. Tentukan penyelesaian dari persamaan eksponensial berikut ini:
   a. $2^{2x-7} = 8^{1-x}$
   b. $3^{5x-10} = 1$
   c. $2^{2x} - 2^{x+3} = 0$
   d. $3^{x+2} + 3^x = 10$
   e. $2^{x^2-5x =} 2^6$

4. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponensial berikut ini:
   a. $2^{2x+3} > 8^{x-5}$
   b. $3^{x-4} > 1$
   c. $3^{2x} - 4.3^x + 27^3 \geq 0$
   d. $2^{2x} - 7.2^x > 8$

8.18 Kegiatan Pembelajaran 18. Latihan Soal Mandiri Logaritma

1. Jika $^{2}\log x = 3$.Tentukan nilai x!

2. Hitunglah nilai logaritma dari :
   a. $^{3}\log 5 - {}^{3}\log 15 + {}^{3}\log 9$!
   b. $^{2}\log 4 + ({}^{2}\log 8)$
   c. $^{2}\log 8 + {}^{3}\log 9$
   d. $^{2}\log 4 + {}^{2}\log 12 - {}^{2}\log 6$
   e. $\log 25 + \log 5 + \log 80$
   f. $\frac{\log 9}{\log 27}$

3. Jika $^{4}\log 64 = x$. Tentukan nilai x!

4. Tentukan penyelesaian dari persamaan logaritma berikut!
   a. $^{5}\log 2x = {}^{5}\log 20$
   b. $^{3}\log (3x + 1) = {}^{3}\log 25$
   c. $^{x}\log (2x + 3) = {}^{x}\log (x + 9)$
   d. $^{4}\log (5x + 4) = 3$ e.
   $^{2}\log (2x^2 + 15) = {}^{2}\log (x^2 + 8x)$

5. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan logaritma berikut!
   a. $^{5}\log 3x + 5 < {}^{5}\log 35$
   b. $^{3}\log (2x + 3) > {}^{3}\log 15$
   c. $^{2}\log (6x + 2) < {}^{2}\log (x + 27)$
   d. $^{2}\log (5x - 14) < 6$
   e. $^{4}\log (2x^2 + 24) > {}^{4}\log (x^2 + 10x)$

8.19 Kegiatan Pembelajaran 19. Latihan Soal Mandiri Trigonometri

1. Buktikan bahwa $\sec^4 a - \sec^2 a = \tan^4 a + \tan^2 a$

2. Dengan menggunakan rumus $\sin(\alpha \pm \beta)$ tentukan nilai dari $\sin 165^o$

3. Tentukanlah nilai dari $\cos 75^o + \sin 75^o$

4. Tunjukkanlah bahwa $\cos 90^O + A = - \sin A$

5. Nyatakan persamaan $\cos x - \cos 3x$ menjadi dalam bentuk hasil kali

6. Jika $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ dan αadalah sudut lancip, tentukan nilai $\sin^2 \alpha$

7. Tentukan nilai fungsi cosinus untuk sudut 120° dengan menggunakan rumus pada sudut rangkap!

8. Diketahui $\alpha + \beta$ sudut lancip dengan$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5}$. Hitunglah nilai $\sin \frac{1}{2} \alpha$ dan $\sin \frac{1}{2} \beta$!

9. Nyatakan perbandingan trigonometri $\sin \frac{3}{4} \alpha$ dalam sudut $1 \frac{1}{2} \alpha$!

10. Diketahui $\sin A = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Tentukannilai $\sin 2A$!

MODUL 9
TRIGONOMETRI

1. **Capaian Pembelajaran**
   Mahasiswa diharapkan mampu mengerti pengertian persamaaan,pertidaksamaan dan juga rumus-rumus trigonometri.

2. **Bahan Kajian**
   1. Memahami pengertian dari persamaan dan pertidaksamaan trigonometri
   2. Mengetahui rumus-rumus trigonometri
   3. Dapat membedakan sin,cos,tan dalam trigonometri

3. **Tujuan Materi**
   1. Agar memahami konsep dan pengertian dalam trigoinometri

MODUL 9
TRIGONOMETRI

9.1 Kegiatan Pembelajaran 1. Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang didalam nya memuat perbandingan dari x.Persamaan trigonometri terbagi menjadi dua bentuk yaitu berbentuk kalimat terbuka dan berbentuk identitas.untuk menyelesaikan persamaan trigonometri pada kalimat terbuka itu artinya menentukan nilai variabel yang ada pada persamaan tersebut.dengan begitu,persamaan tersebut bisa benar.

Ada tiga jenis rumus yang bisa digunakan dalam menyelesaikan persamaan trigonometri,antara lain sebagai berikut :

a. Apabila sin x = sinα maka x = $\alpha + k.360°$, kemudian x = $(180 - \alpha$ ¿+ k.360°
b. Apabila cos x = cos α maka x = α + k.360° , kemudian x = -α + k.360°
c. Apabila tan x = tan αmaka x = α + k,180° ,yang mana k merupakan bilangan bulat.

Bentuk persamaan trigonometri fungsi sinus :

Grafik fungsi sinus memiliki periodik,membentuk bukit dan juga lembah.Oleh karna itu untuk fungsi sinus untuk satu besar sudutakan sama dengan nilai dari fungsi sinus untuk yang besar sudut lain.

Bentuk persamaan trigonometri fungsi cosinus :

Grafik fungsi cosinusjuga bersifat periodik,membentuk bukit dan lembah.Bedanya hanya terletak pada awal mulanya.Di dalam satu periode pada fungsi sinus dasar y=sin x dimulai dari 0(nol).dan kembali ke 0(nol).Kemudian,pada satu periode fungsi cosinus dasar y=cos x ini dimulai dari 1(satu) dan kembali ke 1(satu).Untuk nilai fungsi cosinus dasar y=cos x yaitu 1 dan nilai terendahnya yaitu -1.Nilai fungsi cosinus untuk satu besar sudut itu akan sama dengan nilai fungsi cosinus yang besar sudut yang lainnya.

Bentuk persamaan trigonometri fungsi tangen :

Grafik fungsi tangen ini berbeda dengan fungsi sinus dan cosinus,grafiknya tidak membentuk bukit dan juga lembah.hal ini disebabkan oleh nilai tangen yang tidak terdefinisi dalam besar sudut 90° dan 270°.Dengan demikian,dalam rentang 0° sampai 360° terdapat dua buah asimtot.Sama halnya dengan fungsi sinus dan cosinus,nilai tertinggi fungsi y = tan x yaitu 1 dan nilai terendah adalah -1.

Perbandingan trigonometri

1. Perguluran sudut
   a. Radian
   b. Derajat

1 Putaran = 360°

Keliling = 360°

$2\pi r = 360°, jika\, r = 1$

2π rad = 360°

π rad = 180°

9.2 Kegiatan Pembelajaran 2. Pertidaksamaan Trigonometri

Pertidaksamaan trigonometri adalah suatu pertidaksamaan yang memuat fungsi-fungsi trigonometri.Himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan trigonometri akan mudah ditentukan apanola menggunakan skesta grafik fungis trigonometri.

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan trigonometri :

1. Tentukan besar sudut pembuat nolnya (akar-akarnya) dengan cara ubah semua tanda menjadi (=),lalu selesaikan persamaan yang berbentuk untuk mencari akar-akarnya.
2. Semua akarnya garis dengan gambar pada garis bilangan dan,
   tentukan tanda setiap daerah yang berbentuk (+ atau -).
3. Arsir daerah yang diminta (arsir positif jika tanda pesamaannya lebih dari¿ dan arsir negatif jika tanda persamaannya kurang dari¿)
4. Buat himpunan penyelesaiannya dari daerah arsiran yang terbentuk.

9.3 Kegiatan Pembelajaran 3. Rumus Trigonometri

Dua sudut :

Sin(a+b) = sin a cos b + cos a sin b

Sin(a-b) = sin a cos b – cos a sin b

Cos(a+b) =cos a cos b – sin a sin b

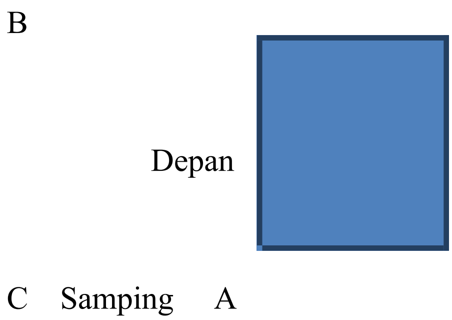
Cos(a-b) = cos a cos b + sin a sin b

$$\text{Tan}(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Tabel 9.3.1 Rumus trigonometri

α	0°	30°	45°	60°	90°
Sinα	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	**1**
Cos α	**1**	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
Tan α	**0**	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	∞

Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku



Gambar 9.3.1 Segitiga siku-siku

1. Sinus A = Sisi depan = De

Sisi miring Mi

2. Cosinus A = Sisi samping = Sa
Sisi miring Mi
3. Tangen A = Sisi depan = De
Sisi samping Sa
4. Cosinus A = Miring
Depan
5. Secan A = Miring
Samping

6. Cotangen A = Samping
Depan

9.4 Kegiatan Pembelajaran 4.Contoh Soal

1. Tentukan nilai dari 2 cos 75° cos 15°

Penyelesaian :

Rumusnya : 2 cos a cos b = cos (a+b) + cos (a-b)

Nilai 2 cos 75° cos 15° = cos (75+15)° dan cos (75-15)°

$$= \cos 90° + \cos 60°$$

$$= 0 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Maka,nilai dari 2 cos 75° cos 15° adalah $\frac{1}{2}$

2. $\dfrac{\text{Sin (a-b)}}{\text{Tan a – tan b}}$ =........

Penyelesaian :

$\dfrac{\text{Sin (a-b)}}{\text{Tan a – tan b}} = \dfrac{\text{sin a cos b – cos a sin b}}{\dfrac{\sin a}{\cos a} - \dfrac{\sin b}{\cos b}}$

$= \dfrac{\text{sin a cos b – cos a sin b}}{\dfrac{\text{Sin a cos b – cos a sin b}}{\text{Cos a cos b}}}$

$= \dfrac{\text{sin a cos b - cos a sin b x cos a cos b}}{\text{Sin a cos b – cos a sin b}}$

= Cos a cos b

3. Nyatakan sudut dalam satuan radian(rad) 270°

Penyelesaian :

Konversi :

1π radian = 180°

Jadi, $= 270° \times \dfrac{\pi}{180°}$

$= \dfrac{3}{2}\pi\, rad$

4. Jika sin a = $\dfrac{3}{5}$ dan tan a $= \dfrac{4}{5}$, $\alpha\ dan\ \beta$ adalah sudut lancip,maka sin ($\alpha + \beta$¿ adalah.....

Penyelesaian :

Sin(α $dan \beta$ ¿ = sin α. Cos β + cos α sin β

$=\frac{3}{5}.\frac{3}{5}+\frac{4}{5}.\frac{4}{5}$

= 1

5. Jika tan 5° = x , tentukan nilai tan 50°.......

Penyelesaian :

Tan 50° = tan (45°+5°¿

= tan 45° + tan 5°

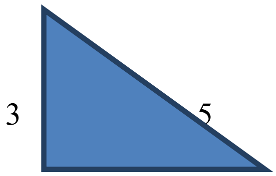
1-tan 45° tan 5°

= 1 + X

1 – X

6. Diketahui tan A $=\frac{3}{4}$dengan sudut lancip,nilai 2 cos A adalah......

Penyelesaian :



Tan A $=\frac{3}{4}$

2 cos A = 2 . $\frac{4}{5}$4

$=\frac{8}{5}$

7. Dalam segitiga ABC diketahui b=8cm,c=5cm,dan sudut A=60°.Panjang sisi a adalah....

Penyelesaian :

$a^2 = b^2 + c^2$ 2bc.cos A

$= 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60°$

$= 64 + 25 - 80 . \frac{1}{2}$

$= 64 + 25 - 40$

$= 89 - 40$

$= 49$

$a = \sqrt{49}$

$= 7$

8. Nilai x yang memenuhi persamaan sin x = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ untuk 0 $° \le x \le 360°$ adalah...

Penyelesaian :

Sin x = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ = sin 60°

Kemungkinan 1 :

X = 60° + k.360°

untuk k = 0,diperoleh x = 60°

untuk k = 1,diperleh x = 420°

Kemungkinan 2 :

X = (180 – 60)° + k.360°

X = 120° + k.360°

Untuk k = 0,diperoleh x = 120°

Untuk k = 1,diperoleh x = 480°

Jadi,nilai x yang memenuhi persamaan tersebut bila dinyatakan dalam notasi himpunan adalah ($60°, 120°¿$

9. Himpunan penyelesaian dari persamaan cos 2x – 5 sin x + 2 = 0 untuk$0 \leq x \leq \pi$ adalah...

Penyelesaian :

Ubah cos 2x menjadi 1-2 $\sin^2$ x

(1-2$\sin^2$ x) – 5 sin x + 2 = 0

-2 $\sin^2$ x – 5 sin x + 3 = 0

2 $\sin^2$ x – 5 sin x + 3 = 0

(2 sin x-1) (x + 3)

Sin x = -3 (tidak memenuhi)

Sin x = $\frac{1}{2}$

X =30 + k.360

K = 0 = 30

180 – 30 + k.360

K = 0 = 150

Jadi,x nya adalah 30 dan 150

10. Ubah lah dalam satuan radian

1). $60°$

2). $75°$

Penyelesaian :

1). $180° = \pi$ rad

$$60° = \frac{60°}{180°}\pi \text{ rad}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \text{rad}$$

2). $75° = \dfrac{75°}{180°}\pi$ rad

$$= \frac{15°}{36°}\pi \text{ rad}$$

$$= \frac{5}{12}\pi \text{ rad}$$

11. Ubahlah dalam satuan derajat

1). $\dfrac{1}{2}\pi$ radian

2). $\dfrac{3}{4}\pi$ radian

Penyelesaian :

1). $\dfrac{1}{2}\pi rad = \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{\pi} \times 180°$

$$= \frac{1}{2} \times 180°$$

$= 90°$

2). $\frac{3}{4}\pi rad = \dfrac{\frac{3}{4}\pi}{\pi} \times 180°$

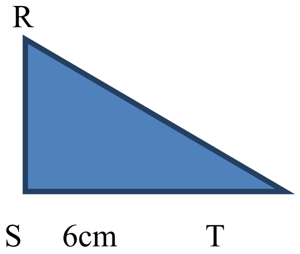
$= \frac{3}{4} \times 180°$

$=135°$

12. Diketahui segitiga RST,dengan sudut T = 60°,dan ST = 6cm.Hitunglah.....
    a).Keliling segitiga RST
    b).(Sin sudut T)^2 + (sin sudut R)^2

Penyelesaian :

a).



$\text{Cos } T = \frac{6}{RT}$

$\text{Cos } 60° = \frac{6}{RT}$

$\frac{1}{2} = \frac{6}{RT}$

RT = 12

RS = $\sqrt{12^2 + 6^2}$ RST = RS + ST + RT

$= \sqrt{144 - 36}$ $= 6\sqrt{3} + 6 + 12$

$= \sqrt{108}$ $= 18 + 6\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

b . (Sin sudut ¿ T)^2 + (Sudut¿ R)^2

(Sin 60)^2 + (Sin 30)^2

$(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}$¿^{2}

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$\frac{4}{4} = 1$

13. Hitunglah dari setiap pernyataan trigonometri berikut
    a). Sin 60° × Cos 30° + Cos 60° × Sin 30°
    b). 2 (Tan 45°)^2 + (Cos 30°) – (Sin 60°)^2

Penyelesaian :

a). Sin 60° × Cos 30° + Cos 60° × Sin 30°

$\frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$$\frac{4}{4} = 1$$

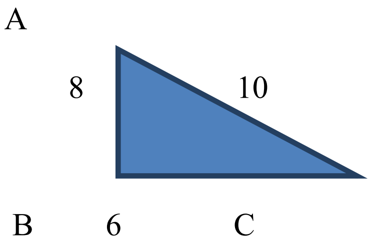
b). $2\,(\tan 45°)^2 + (\cos 30°) - (\sin 60°)^2$

$2\,(1)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2$

$2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4}$

$\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

14. Diketahui siku-siku ABC,sudut B = 90°,sin C = $\frac{4}{5}$,AC = 10.Ditanya BC.....



Penyelesaian :

Sin C = $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} = \frac{AB}{10}$

AB = $\frac{40}{5}$

= 8

$$BC = \sqrt{10^2 + 8^2}$$

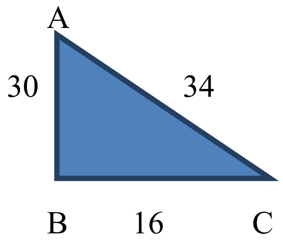
$$= \sqrt{100 + 64}$$

$$= \sqrt{36}$$

= 6 cm

15. Diketahui siku-siku ABC,susut B = 90°,Cos C = $\frac{8}{17}$ dan BC = 16cm.Berapa siku-siku ABC.....

Penyelesaian :



$$\text{Cos C} = \frac{8}{17} = \frac{16}{AC}$$

$$AC = \frac{272}{8}$$

$$= 34$$

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{34^2 - 16^2}$$

$$= \sqrt{1156 - 256}$$

$$= \sqrt{900}$$

= 30

Luas ABC = $\frac{16 \times 30}{2}$

$= 240$ cm

9.5 Kegiatan Pembelajaran 5. Rangkuman

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang didalam nya memuat perbandingan dari trigonometri'

Ada tiga jenis rumus yang bisa digunakan dalam menyelesaikan persamaan trigonometri,antara lain sebagai berikut :

a. Apabila sin x = sinα maka x = $\alpha + k.360°$, kemudian x = (180$-\alpha$ ¿+ k.360°
b. Apabila cos x = cos α maka x = α + k.360° , kemudian x = -α + k.360°
c. Apabila tan x = tan α maka x = α + k,180° ,yang mana k merupakan bilangan bulat.

Pertidaksamaan trigonometri adalah suatu pertidaksamaan yang memuat fungsi-fungsi trigonometri

Rumus trigonometri dua sudut **:**

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Tabel 9.5.1 sin,cos.tan

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Sinα	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	**1**
Cos α	**1**	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
Tan α	**0**	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	∞

9.6 Kegiatan Pembelajaran 6. Diskusi kelompok

1. Tentukan nilai dari 2 cos 60° cos 30°

Penyelesaian :

Rumusnya : 2 cos a cos b = cos (a+b) + cos (a-b)

Nilai 2 cos 60° cos 30° = cos (...+...)° dan cos (...-...)°

= cos ......°+ cos .....°
= .....+ ...
= 0

2. Sin (x-y) =........

Tan x – tan y

Penyelesaian :

Sin (x-y) = ... – ....

Tan x – tan y $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ - $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$= \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;-\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;-\; \ldots\ldots\ldots\ldots}$

....

= .... x $\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

= Cos x cos y

3. Nyatakan sudut dalam satuan radian 360°

Penyelesaian :

Konversi

1π radian = 180 °

Jadi, = ...$\times\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$=2\pi\, rad$

4. Jika sin a = $\frac{2}{5}$ dan tan a $=\frac{4}{5}$, $\alpha\, dan\, \beta$ adalah sudut lancip,maka sin ($\alpha+\beta$¿ adalah.....

Penyelesaian :

Sin($\alpha\, dan \beta$ ¿ = sin α. Cos β + cos α sin β

$=\frac{\cdots}{\cdots}.\frac{\cdots}{\cdots}+\frac{\cdots}{\cdots}.\frac{\cdots}{\cdots}$

= 4

5. Jika tan 3° = x , tentukan nilai tan 60°.......

Penyelesaian :

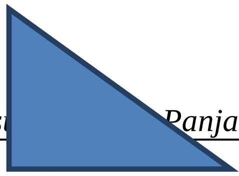
Tan 60° = tan (...°+…° ¿

$= \frac{.....° + ...°}{.......................°}$

$= \frac{1 + X}{1 \quad - X}$

6. Diketahui tan A $=\frac{2}{4}$dengan sudut lancip,nilai 2 cos A adalah......

Penyelesaian :



Tan =

$\underline{...3 ui\ b=8\ cm, c=5\ cm, dan\ s}$ $\underline{Panjang\ sisi\ a\ adalah ....}$

2 5

2 cos A = 2 . $\frac{\cdots}{\cdots}$4

$=\frac{\cdots}{\cdots}$

7. Dalam segitiga ABC diketahui b=5cm,c=8cm,dan sudut A=60°.Panjang sisi a adalah....

Penyelesaian :

$a^2 = b^2 + c^2$ 2bc.cos A

= ..... + ... – ....cos 60°

= ... + ... – ....$\cdot\cdots$

= .... +... – ...

= .... – .....

= .....

a = $\sqrt{\ldots}$

= .....

8. Nilai X yang memenuhi persamaan sin x = $\frac{1}{2}$ untuk 0 $° \leq x$ 360 °adalah....

Penyelesaian :

Sin X =$\frac{1}{2}$ sin 30°

Kemungkinan 1 :

X = ...° + k.....°

K= 0 diperoleh x =....°

K= 1 diperoleh x = ...°

Kemungkinan 2 :

X= (... - ....)° + k.....°

X= ....° + k.....°

K= 0, diperoleh x = ...°

K= 1, diperoleh x = ...°

Jadi,nilai x yang memenuhi persamaan tersebut bila dinyatakan dalam notasi himpunan adalah ($30°, 120°¿$

9. Himpunan penyelesaian dari persamaan cos 2x – 5 sin x + 1 = 0 untuk $0 \leq x \leq \pi$ adalah....

Penyelesaian :

(1-2 $\sin^2$ x) – 5 sin x + 1 = 0

-2 $\sin^2$ x – 5 sin x + 2 = 0

2 $\sin^2$ x – 5 sin x + 2 = 0

(2 sin x -1) (x + 2)

Sin x = -2 (tidak memenuhi)

Sin x = $\frac{1}{2}$

X = 30 + k.360

K = 0 = 30

180 – 30 + k.360

K = 0 = 150

Jadi,x nya adalah 30 dan 150

10. Ubah lah dalam satuan radian

1). 50°
2). 85°

Penyelesaian :

1). 180° = π rad

$50° = \frac{\dots°}{\dots°}\pi$ rad

$= \frac{5}{18}\pi$rad

2). $85° = \frac{\dots°}{\dots°}\pi$ rad

$= \frac{\dots°}{\dots°}\pi$ rad

$= \frac{17}{36}\pi$ rad

11. Ubahlah dalam satuan derajat
    1). $\frac{3}{2}\pi$ radian
    2). $\frac{5}{4}\pi$ radian

Penyelesaian :

1). $\frac{3}{2}\pi\, rad = \frac{\dots}{\dots} \times \dots\dots°$

$= \frac{\dots}{\dots} \times \dots\dots°$

= 270°

2). $\frac{5}{4}\pi rad = \frac{\frac{\dots}{\dots}\pi}{\pi} \times \dots\dots^\circ$

$= \frac{\dots}{\dots} \times \dots\dots^\circ$

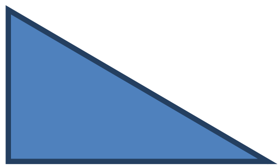
$=225^\circ$

12. Diketahui segitiga PQR,dengan sudut Q = 60°,dan QR = 10cm.Hitunglah.....
    a).Keliling segitiga PQR
    b).(Sin sudut R)^2 + (sin sudut P)^2

Penyelesaian :

a).

P



Q10cm R

$\text{Cos } R = \frac{\dots}{\dots}$

$\text{Cos } 60^\circ = \frac{\dots}{\dots.}$

$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

PR = 20

PQ = $\sqrt{\dots^2 - \dots^2}$

PQR = PQ + QR + PR

$=\sqrt{\ldots.-\ldots}$ $= \ldots\sqrt{\ldots} + \ldots. +$

$=\sqrt{\ldots\ldots}$ $= 30 + 10\sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3}$

b . (Sin *sudut R*)^2 + (Sin *sudutP*)^2

(Sin 60)^2 + (Sin 30)^2

$(\frac{\ldots}{\ldots}\sqrt{\ldots})^2 + (\frac{\ldots}{\ldots}¿^2$

$\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots.}{\ldots.}$

$\frac{\ldots}{\ldots.}=1$

13. Hitunglah dari setiap pernyataan trigonometri berikut
    a). Sin 90° × Cos 30° + Cos 90° × Sin30°
    b). 2 (Tan 30°)^2 + (Cos 60°) – (Sin 90°)^2

Penyelesaian :

a). Sin 90° × Cos 30° + Cos 90° × Sin 30°

$(\ldots) \times \frac{\ldots}{\ldots}\sqrt{\ldots} + (\ldots) \times \frac{\ldots}{\ldots}$

$\frac{\ldots}{\ldots}\sqrt{\ldots} + \ldots$

$\frac{2}{2}\sqrt{3}$

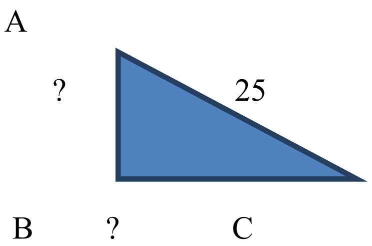
b). 2 (tan 30°)^2 + (Cos 60°) – (Sin 90°)^2

$2\,(\frac{\ldots}{\ldots})^2 + \frac{\ldots}{\ldots} - (\ldots)^2$

$2 + \frac{\dots}{\dots\dots} - (-\frac{\dots}{\dots\dots}$ ¿

$\frac{8}{4} - \frac{1}{2}$

14. Diketahui siku-siku ABC,sudut B = 90°,sin C = $\frac{6}{4}$,AC = 25.Ditanya BC.....



Penyelesaian :

$\text{Sin } C = \frac{AB}{AC} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$AB = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$= \dots\dots$

$BC = \sqrt{\dots\dots^2 + \dots\dots^2}$

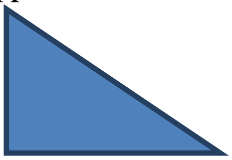
$= \sqrt{\dots\dots + \dots\dots}$

$= \sqrt{\dots\dots}$

= 20 cm

15. Diketahui siku-siku ABC,sudut B = 90°,Cos C = $\frac{9}{12}$ dan BC = 12cm.Berapa siku-siku ABC.....

Penyelesaian :



Cos C = $\frac{\dots}{\dots.} = \frac{\dots}{\dots.}$

AC = $\frac{\dots.}{\dots.}$

= ...

AB = $\sqrt{AC^2 - BC^2}$

= $\sqrt{\dots^2 - \dots.^2}$

= $\sqrt{\dots - \dots}$

= $\sqrt{\dots..}$

= .....

Luas ABC = $\frac{\dots \times \dots}{\dots}$

= 108 cm

9.7 Kegiatan Pembelajaran 7.Soal

1. Apa yang dimaksud dengan persamaan trigonometri?
2. Sebutkan tiga sejenis rumus yang bisa digunakan dalam menyelesaikan persamaan trigonometri?
3. Apa yamg dimaksud dengan pertidaksamaan trigonometri?
4. Jelaskan bentuk persamaan trigonometri fungsi sinus!
5. Jelaskan bentuk persamaan trigonometri fungsi cosinus!
6. Jelaskan bentuk persamaan trigonometri fungsi tangen!
7. Ubahlah kedalam bentuk radian
   a. $270°$
   b. $210°$
8. Ubahlan kedalam bentuk derajat
   a. $\frac{6}{5}$
   b. $\frac{11}{9}$
9. Diketahui segitiga ABC dengan sudut B = 90°,sudut C 60 °,dan BC = 9cm
   a. Keliling segitiga ABC
   b. (Sin sudut C $)^2$ + (Sin sudut A $)^2$
10. Hitunglah pernyataan trigonometri dari 2 (tan 45° $)^2$ + (cos 30°) – (sin 60°$)^2$
11. Diketahui $\tan\theta = \frac{7}{25}$,$\theta$lancip.Berapakan nilai dari Sinθ. cos θ
12. Pada suatu segitiga siku-siku ABC, dengan $sudut\, 90°$, AB = 24 dan BC =7cm.Hitunglah Sin A dan Cos A....

13. Jika A + B = $\frac{\pi}{3}$ dan cos A cos B =$\frac{5}{8}$,Maka cos (A – B) adalah....
14. Dalam segituga ABC diketahui B = 8 cm, C = 5 cm, dan sudut A = 60.Panjang sisi A adalah.....
15. Diketahui cos (A-B) = $\frac{3}{5}$ dan cos A cos B = $\frac{7}{25}$, nilai tan A tan B adalah....

DAFTAR PUSTAKA

Matematika XYZ untuk SMA/MA Jilid 1

X-Press UN SMA/MA 2020 Matematika IPA

Erlangga X-Press UN SMA/MA 2020 Matematika IPS

https://blog.ruangguru.com/matematika-kelas-8-cara-menyelesaikan-sistem-persamaan-linear-dua-variabel-spldvErlangga X-Press UN SMA/MA 2019 Matematika IPA

Detik-detik UN Matematika 2018/2019

Bahan ajar mata kuliah aljabar dan trigonometri (FKIP) 2012

http://www.studybelajar.com

http://rumus.co.id

http://matematikastudycenter.com

http://ruangguru.com

rumus-matematika.com

ilmuku-duniaku14.blogspot.com

supermatematika.com

http://www.konsep-matematika.com

http://edscyclopedia.com

\http://rumusrumus.com

ttp://www.ayoksinau.com

http://id.m.wikipedia.org

http://rumus-matematika.com/penjelasan-lengkapmetode-substitusi-dan-eliminasi/

https://brainly.co.id/tugs/13338556

https://www.partnermaematika.com/2018/01/sistem -persamaan-linear-tigavariabel.html

http://ilmuku-duniaku14.blogspot.com/2018/07/kumpulan-soal-cerita-dan-pembahasan_3.html?m=1

Buku UN tahun 2019-2020

https://www.yuksinau.id/pertidaksamaan-linear-dua-variabel/

Lumbantoruan, Jitu Halomoan. 2012. *Bahan Ajar Mata Kuliah Aljabar dan Trigonometri*. Jakarta: Universitas Kristen Indonesia.

Priyatno, Sigit, dkk. 2019. *Erlangga X-PRESS UN SMA/ MA 2019 Matematika Program IPA*. Jakarta: Erlangga.

Purwoko dan Fendi. 2013. *Fisika 1 SMA Kelas X*. Bogor: Yudhistira.

Simangunsong, Wilson. 2010. *PKS Matematika SMA dan MA Kelas X*. Jakarta: Gematama.

Simangunsong, Wilson. 2010. *PKS Matematika SMA dan MA Kelas XI*. Jakarta: Gematama.

Simangunsong, Wilson. 2010. *PKS Matematika SMA dan MA Kelas XII*. Jakarta: Gematama.

Suhirman, Paulus Totok Trisunu. 2019. *Siap UN 2019*. Bekasi: SMA Santo Bellarminus Bekasi.
https://www.studiobelajar.com/fungsi-kuadrat/
https://maths.id/fungsi-kuadrat.php
https://www.quipper.com/id/blog/mapel/matematika/sifat-fungsi-kuadrat-dan-cara-membentuknya/

https://www.konsep-matematika.com/2015/09/sifat-sifat-pertidaksamaan.html

http://rumus-matematika.com/pengertian-dan-metode-penyelesaian-pertidaksamaan-kuadrat/
https://yos3prens.wordpress.com/2014/07/28/fungsi-rasional-dan-asimtot/
https://contohsoaldanmateripelajaran-211.blogspot.com/1974/02/contoh-soal-fungsi-rasional.html
Bank SoalMatematika SMA/Ma

https://smatika.blogspot.com/2016/12/pertidaksamaan-irasional-atau-bentuk.html
https://www.slideshare.net/fitrimhey/buku-ajar-persamaan-irasional22-7113

https://www.advernesia.com/blog/matematika/bilangan-rasional-dan-irasional/

http://soulmath4u.blogspot.com/2013/10/persamaan-irasional.html

https://www.pinterpandai.com/bilangan-rasional-dan-irasional/

https://blogmipa-matematika.blogspot.com/2018/01/cara-menentukan-penyelesaian-pertidaksamaan-bentuk-akar.html

http://ainimathematic.blogspot.com/2011/04/persamaan-irrasional.html

https://www.danlajanto.com/2016/02/penerapan-penerapan-pertidaksamaan.html

https://asimtot.wordpress.com/2010/07/25/bukti-bahwa-akar-dua-adalah-bilangan-irrasional/

Lumbantoruan, Jitu H. 2012. Bahan Ajar Mata Kuliah Aljabar dan Trigonometri.

https://www.studiobelajar.com/persamaan-pertidaksamaan-eksponen/

https://id.wikipedia.org/wiki/Trigonometri

https://rumus.co.id/rumus-sudut-rangkap/

https://blogmipa-matematika.blogspot.com/2017/06/sifat-sifat-logaritma.html?m=0

http://imathsolution.blogspot.com/2015/10/menyelesaikan-persamaan-dan_12.html?m=1

https://rumus.co.id/contoh-soal-logaritma/
https://www.matematrick.com/2016/06/kumpulan-soal-dan-pembahasan-identitas.html?m=1
http://www.sainsseru.com/2018/02/contoh-trigonometri-jumlah-dan-selisih.html?m=1
http://imathsolution.blogspot.com/2017/08/menyelesaikan-trigonometri-sudut-ganda.html
https://rumusrumus.com/rumus-trigonometri