DAFTAR ISI

BAB I BILANGAN

BAB I

BILANGAN

Matematika memiliki bahasa sendiri dengan bilangan-bilangan sebagai alfabetnya. Bahasa tersebut memilkiki struktur dengan simbol-simbol penghubung, aturan-aturan operasi, dan pola pikir yang ketat (logika). Konsep-kosep ini yang sebelumnya telah dibahas dalam kuliah-kuliah matematika dasar seperti geometri, aljabar, dan kalkulus akan ditinjau ulang dalam paragraf- paragaf berikut ini.

1.1 HIMPUNAN

Salah satu konsep dasar dalam matematika adalah konsep himpunan (set), kelas atau kumpulan objek-objek yang memiliki karateristik tertentu. Himpunan semua dosen universitas atau himpunan semua huruf A, B, C, ... Z dari alfabet adalah beberapa contoh dari himpunan. Objek-objek individu dari suatu himpunan dinamakan anggota atau elemen. Setiap himpunan yang menjadi bagian dari suatu himpunan dinamakan subhimpunan (subset), msalnya A,B, C adalah salah satu subhimpunan dari A,B,C, ... Z . Himpunan yang tidak mengandung anggota disebut himpunan kosong (empty set) atau himpunan nol (null set).

1.2 BILANGAN REAL

Jenis-jenis bilangan berikut tentu telah anda kenal dengan baik:

1. Bilangan asli 1,2,3,..., disebut juga bilangan bulat positif, digunakan untuk minghitung anggota dari sebuah himpunan. Simbol-simbolnya bervariasi sesuai zaman,misalnya orang Romawi menggunakan I,II,III,IV,... Jumlah $a + b$ dan hasil kali $a \cdot b$ atau ab dari sebarang dua bilangan asli a dan b adalah juga merupakan bilangan asli. Jadi, dapat dikatakan bahwa himpunan bilangan asli adalah tertutup terhadap operasi-operasi penjumlahan dan perkalian. Dengan kata lain,himpunan bilangan asli memenuhi sifat ketertutupan(closure property) terhadap operasi-operasiini.
2. Bilangan bulat negatif dan nol yang dilambangkan berturut-turut sebagai $-1, -2, -3 \ldots$ dan 0, timbul sebagai solusi bagi persamaan-persamaan seperti $x + b = a$, dimana a dan b adalah sebarang bilangan asli. Ini mengarah pada operasi pengurangan atau invers penjumlahan dan dapat ditulis sebagai $x = a - b$.
   Himpunan bilangan bulat positif, bilangan bulat negatif dan nol disebut himpunan bilangan bulat.

3. Bilangan rasional atau perpecahan seperti $\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, \ldots$ untuk memungkinkan diperolehnya solusi bagi persamaan-persamaan seperti $bx = a$ untuk semua bilangan bulat a dan b dimana $b \neq 0$. Ini mengarah pada operasi pembagian

atau invers perkalian dan dapat ditulis sebagai $x = \frac{a}{b}$ atau $a \div b$ dimana a adalah pembilang dan b adalah penyebut.
Himpunan bilangan bulat adalah subhimpunan dari himpunan bilangan rasional karena bilangan bulat merupakan bilangan rasional dengan b =1.

4. Bilangan irasional seperti $\sqrt{2}$ dan π adalah bilangan yang bukan bilangan rasional yaitu keduanya tidak dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ (disebut hasil bagi a dengan b), dimana a dan b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
   Himpunan bilangan rasional dan irasional disebut bilangan real.

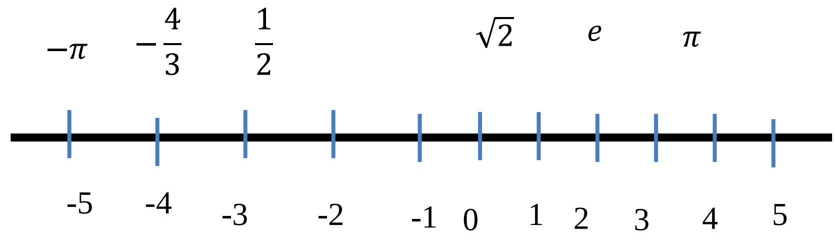
1.3 REPRESNTASI DESIMAL BILANGAN REAL

Semua bilangan real dapat dinyatakan dalam bentuk desimal, misalnya $\frac{17}{10} = 1{,}7$; $\frac{9}{100} = 0{,}09$; $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$ Dalam kasus bilangan rasional, perpanjangan desimalnya akan berakhir atau tidak berakhir, maka satu atau sekelompok digit dalam perpanjangan tersebut pada akhirnya akan berulang, sebagai contoh dalam $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142\ldots$ Dalam kasus bilangan irasional seperti$\sqrt{2} = 1{,}41423\ldots$ atau $\pi = 3{,}14259\ldots$ pengulangan semacam itu tidak terjadi. Kita dapat selalu mengasumsikan bahwa angka desimal tidak memiliki akhir, misalnya 1,375 sama dengan 1,37500000... atau 1,3749999... Untuk menunjukkan desimal yang berulang, kita kadang-kadang menempatkan titik diatas siklus angka yang berulang, yaitu $\frac{1}{7} = 0{,}142857$; $\frac{19}{6} = 3{,}16$.

Sistem desimal menggunakan sepuluh digit 0,1,2,...,9. (Simbol-simbol ini berasal dari orang-orang Hindu. Simbol tersebut digunakan di India pada 600 M dan kemudian berabad-abad sesudahnya disebarkan ke dunia berat oleh para pedagang Arab). Kita dapat merancang sistem bilangan dengan digit yang lebih sedikit atau lebih banyak, misalnya sistem biner (binary system) yang menggunakan hanya dua digit yaitu 0 dan 1.

1.4 REPRESENTASI GEOMETRIK BILANGAN REAL

Representasi geometrik suatu bilangan real adalah dengan titik-titik pada sebuah garis yang disebut sumbu real, seperti tampak pada Gambar 1.1 juga telah kita kenal dengan baik. Untuk setiap bilangan real terdapat satu dan hanya satu titik pada garis sebaliknya. Dengan kata lain terdapat korespondesi satu-satunya (lihat Gambar 1.1) korespondensi antara himpunan bilangan real dan himpunan titik pada garis tersebut. Karenanya kita sering menggunakan titik dan bilangan secara bergantian.



Gambar 1.1

(Penggunaan bergantian antara titik dan bilang ini ternyata sulit dibuktikkan; bahkan dibutuhkan aksioma-aksioma untuk mendukung hubungan antara geometri dan bilangan. Teorema Cantor-Dedekind berpengaruh besar disini).

Himpunan bilangan real disebelah kanan 0 disebut himpunan bilangan positif; himpunan bilangan real disebelah kiri 0 disebut himpunan bilangan negatif, sementara 0 sendiri bukan merupakan bilangan positif atau negatif.

(Bahwa posisi horizontal garis dan penempatan bilangan positif dan negatif berturut-turut disebelah kanan dan kirinya diambil berdasarkan konvensi).

Diantara sebarang dua bilangan rasional atau bilangan irasional pada garis terdapat takterhingga bilangan rasional dan irasional.Ini membuat kita menyebut himpunan bilangan rasional atau irasional sebagai himpunan yang rapat dimana-mana.

1.5 OPERASIONAL BILANGAN-BILANGAN REAL

Jika a, b, c merupakan anggota dari himpunan bilangan real R, maka:

1. $a + b$ dan ab adalah elemen dari R — Hukum ketertutupan
2. $a + b = b + a$ — Hukum komunitatif penjumlahan
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — Hukum asosiatif penjumlahan
4. $ab = ba$ — Hukum komunitatif perkalian
5. $a(bc) = (ab)c$ — Hukum asosiatif perkalian
6. $a(b + c) = ab + ac$ — Hukum distributif
7. $a + 0 = 0 + a = a, 1 . a = a. 1 = a$
   0 disebut sebagai identitas terhadap penjumlahan, 1 disebut sebagai identitas terhadap perkalian.
8. Untuk sebarang a terdapat sebuah bilangan x dalam R sedemikian rupa sehingga $x + a = 0$
   x disebut invers a terhadap penjumlahan dan dilambangkan sebagai $-a$.
9. Untuk sebarang $a \neq 0$ terdapat sebuah x dalam R sedemikian rupa sehingga $ax = 1$
   x disebut invers a terhadap perkalian dan dilambangkan sebagai $a^{-1}, \frac{1}{a}$

Aturan: Untuk memudahkan, operasi-operasi yang disebut pengurangan dan pembagian dinyatakan berturut-turut sebagai $a - b = a + (-b)$ dan $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ Ini memungkinkan kita untuk melakukan operasi sesuai dengan hukum-hukum aljabar yang biasa. Secara umum, himpunan sebarang seperti R yang anggota-anggotanya memenuhi sifat-sifat diatas disebut suatu field.

1.6 KETIDAKSAMAAN

Jika $a - b$ adalah sebuah bilangan bukan negatif, kita mengatakan bahwa a adalah lebih besar daripada atau sama dengan b atau b lebih kecil daripada atau sama dengan a dan menuliskan berturut-turut sebagai $a \geq b$ atau $b \leq a$. Jika tidak ada kemungkinan bahwa $a = b$ maka kita menulis $a > b$ jika titik pada sumbu real yang mewakili a terletak pada bagian kanan dari titik yangmewakili b.

Contoh $3 < 5$ atau $5 > 3$; $-2 < -1$ atau $-1 > -2$; $x \leq 3$ berarti bahwa x adalah sebuah bilangan real yang mungkin 3 atau lebih kecil dari 3.

Jika a, b dan c adalah sebarang bilangan real yang diketahui, maka:

1. $a > b, a = b$ atau $a < b$ Hukum trikotonomi
2. Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$ Hukum transitivitas

1.7 NILAI MUTLAK BILANGAN REAL

Nilai mutlak sebuah bilangan real a dilambangkan oleh $|a|$ didefinisikan sebagai a jika $a > 0, -a$ jika $a < 0$ dan 0 jika $a = 0$

Contoh $|-5| = 5, |+2| = 2, \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}, |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, |0| = 0$

1. $|ab| = |a||b|$ atau $|abc \ldots m| = |a||b||c| \ldots |m|$
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$ atau $|a + b + c + \cdots + m| \leq |a| + |b| + |c| + \cdots + |m|$
3. $|a - b| \geq |a| - |b|$ Jarak antara dua titik sebarang (bilangan real) a dan b pada sumbu real adalah $|a - b| = |b - a|$

1.8 EKSPONEN dan AKAR

Hasil kali $a \cdot a \ldots a$ sebuah bilangan real a oleh dirinya sendiri sebanyak p kali dinyatakan sebagai a^p dimana p disebut eksponen dan a disebut basis.

Aturan-aturan berikut berlaku:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
3. $(a^p)^r = a^{pr}$
4. $(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$

Aturan-aturan ini dan perluasannya untuk sebarang bilangan real boleh dilakukan selama pembagian dengan nol tidak diikutkan. Khususnya dengan menggunakan berturut-turut $p = q$ dan $p = 0$ akan diperoleh definisi $a^0 = 1, a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ 6 | Page

Jika $a^p = N$, dimana p adalah bilangan bulat positif, kita menyebut a sebagai akar pangkat ke-p dari N yang ditulis sebagai $\sqrt[p]{N}$. Mungkin saja terdapat lebih dari satu akar real ke-p dari N. Sebagai contoh, karena $2^2 = 4$ dan $(-2)^2 = 4$ terdapat dua akar kuadrat real dari 4, yaitu 2 dan -2 . Untuk akar kudrat biasanya $\sqrt{N}$ dianggap positif, jadi $\sqrt{4} = 2$ dan maka $-\sqrt{4} = -2$.

Jika p dan q adalah bilangan bulat positif, maka kita mendefinisikan $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

1.9 LOGARITMA

Jika $a^p = N, p$ disebut logaritma dari N terhadap basis a;ditulis sebagai $p \log_a N$. Jika a dan N adalah positif dan $a \neq 1$ maka hanya terdapat satu nilai real untuk p. Aturan-aturan berikut berlaku:

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^r = r \log_a M$

Dalam prakteknya terdapat dua basis yang sering digunakan, basis $a = 10$ dan basis natural $a = e = 2{,}71828 \ldots$ Sistem logaritma yang berkaitan dengan basis-basis ini berturut-turut disebut logaritma umum dan logaritma natural. Sistem logaritma umum dinyatakan dengan $\log N$, dimana indeks bawah 10 tidak dituliskan. Untuk logaritma natural lambang yang bisa digunakan adalah $\ln N$.

Logaritma umum (basis 10) biasanya digunakan ketika melakukan perhitungan. Penggunaannya menggantikan perkalian dengan penjumlah dan perpangkatan dengan perkalian. Pada era kalkulator dan komputer, proses ini sudah ketinggalan zaman akan tetapi, logaritma umum tetap berguna dalam teori dan aplikasi. Sebagai contoh skala Richter yang digunakan untuk mengukur intensitas gempa bumi adalah sebuah skala logaritma. Logaritma natural diperkenalkan untuk menyederhanakan rumus-rumus dalam kalkulus dan terbukti sangat efektif.

1.10 DASAR-DASAR AKSIOMATIK SISTEM BILANGAN REAL

Sistem bilangan dapat disusun secara logis, mulai dari sebuah himpunan aksioma atau kebenaran yang terbukti dengan sendirinya, yang biasanya diambil dari pengalaman, sebagaimana pernyataan $1 - 9$.

Jika kita mengasumsikan bilangan asli dan operasi penjumlahan dan perkalian sebgai yang diketahui meskipun kita dapat mulai lebih jauh ke belakang dengan konsep himpunan dengan R sebagai himpunan bilangan asli kita menemukan bahwa pernyataan $1-6$ berlaku, sementara pernyataan $7-9$ tidak berlaku.

Dengan mengasumsikan pernyataan 7 dan 8 sebagai persyaratan tambahan, kita mendapat bilangan $-1,-2,-3,\ldots$ dan 0. Kemudian dengan memperhatikan pernyataan 9, kita mendapatkan bilangan rasional.

Operasi-operasi dengan bilangan-bilangan yang baru diperoleh ini dapat didefinisikan dengan menggunakan aksioma $1-6$ dimana kini R adalah himpunan bilangan bulat. Operasi-operasi ini akan menghasilkan bukti-bukti dari pernyataan seperti $(-2)(-3)=6, -(-4)=4, (0)(5)=0$, dan seterusnya yang biasanya diremehkan dalam metematika dasar.

Kita juga dapat memperkenalkan konsep orde atau ketidaksamaan untuk bilangan bulat dan dari sini kita dapat memperkenalkan konsep ketidaksamaan bilangan rasional. Sebagai contoh , jika a,b,c,d adalah bilangan bulat positif, maka kita menyatakan $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad>bc$ hal serupa juga berlaku untuk bilangan bulat negatif.

Setelah kita memiliki himpunan blangan rasional dan aturan-aturan ketidaksamaan untuk bilangan rasional tersebut, maka kita dapat menyusunnya secara geometris sebagai titik-titik pada sumbu real, sebagaimana yang telah dinyatakan bilangan rasional seperti $\sqrt{2},\pi$ dan lain-lain. Bilangan irasional ini dapat didefinisikan dengan berbagai cara, salah satunya menggunakan gagasan potongan Dedekind. Dari sini kita dapat menunjukkan bahwa aturan-aturan aljabar biasa berlaku untuk bilangan irasional dan bahwa tidak ada bilangan real lain yang mungkin.

1.11 HIMPUNAN TITIK INTERVAL

Sebuah himpunan titik (bilangan real) yang terletak pada sumbu real disebut himpunan titik berdimensi satu. Himpunan titik-titik x sedemikian sehingga $a\leq x\leq b$ disebut interval tertutup dan dilambangkan sebagai $[a,b]$. Himpunan $a<x<b$ disebut dengan interval terbuka yang dilambangkan sebagai (a,b). Himpunan $a<x\leq b$ dan $a\leq x<b$ dilambangkan berturut-turut sebagai $(a,b]$ dan $[a,b)$ disebut interval-interval setengah terbuka atau setengah tertutup. Simbol x yang dapat mewakili sebarang bilangan atau titik dari himpunan disebut variabel. Bilangan a atau b disebut konstanta.

Huruf-huruf diperkenalkan untuk menyusun rumus-rumus aljabar pada sekitar tahun 1600-an. Tak lama sesudahnya, seorang ahli filsafat dan matematika Rene Descartes mengusulkan agar huruf-huruf pada akhir alfabet digunakan untuk menyatakan variabel dan huruf-huruf pada awal alfabet digunakan untuk menyatakan konstanta. Ini merupakan gagasan yang sangat baik dan masih tetap digunakan sampai saat ini.

Contoh: Himpunan semua x sedemikian sehingga $|x|<4$ atau $-4<x<4$ dilambangkan oleh $(-4,4)$ sebuah interval terbuka

Himpunan $x > a$ juga dapat ditulis sebagai $a < x < \infty$. Himpunan semacam ini disebut sebagai interval tak terhingga atau sebuah interval tak terbatas. Dengan cara yang sama $-\infty < x < \infty$ merepresentasikan semua bilangan real x.

1.12 KETERHITUNGAN

Sebuah himpunan dikatakan terhitung atau terbilang jika elemen-elemennya dapat ditempatkan dalam korespondensi satu-satu dengan bilangan asli.

Contoh: Bilangan asli genap $2,4,6,8,\ldots$ adalah sebuah himpunan yang terhitung karena berkorespondensi satu-satu sebagaimana

Himpunan yang diketahui	2	4	6	8	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Bilangan asli	1	2	3	4	...

Sebuah himpunan dikatakan tak terhingga jika himpunan tersebut dapat ditempatkan dalam korespondensi satu-satu dengan sebuah subhimpunannya sendiri. Sebuah himpunan takterhingga yang terhitung disebut takterhingga yang terhitung. Himpunan bilangan rasional adalah himpunan takterhingga yang terhitung (countable infinite) sementara himpunan bilangan irasional atau himpunan semua bilangan real adalah himpunan takterhingga yang takterhitung (non-countable infinite)

Banyaknya elemen dalam sebuah himpunan disebut bilangan kardinal. Himpunan takterhingga yang terhitung dinyatakan dengan bilangan kardinal $\aleph_0$ (huruf Yahudi aleph nol). Himpunan bilangan real atau sebarang himpunan yang dapat ditempatkan dalam korespondensi satu-satu dengan himpunan bilangan real ini diberi nama kardinal C disebut sebagai kardinalitas dari kontinum.

1.13 LINGKUNGAN

Himpunan semua titik x sedemikian sehingga $|x - a| < \delta$ dimana $\delta > 0$ disebut suatu lingkungan (neighborhood) δ dari titik a. Himpunan semua titik x sedemikian sehingga $0 < |x - a| < \delta$ terkecuali $x = a$ disebut lingkungan δ yang terhapus dari a atau sebuah bola terbuka dengan jari-jari δ disekitar a.

1.14 TITIK-TITIK LIMIT

Sebuah titik limit, titik akumulasi atau titik kluster dari sebuah himpunan bilangan adalah suatu δ bilangan l sedemikian sehingga setiap lingkungan δ yang terhaapus dari l mengandung anggota-anggota dari himpunan tersebut; yaitu seberapapun kecilnya jari-jari bola sekitar l terdapat titik-titik himpunan tersebut didalamnya. Dengan kata lain untuk sebarang $\delta > 0$ seberapapun kecilnya, kita selalu dapat menemukan sebuah anggota x dari himpunan tersebut yang tidak sama dengan l sedemikian sehingga $|x-l|<\delta$. Dengan mempertimbangkan nilai δ yang lebih kecil dan lebih kecil lagi, kita melihat bahwa pasti terdapat takterhingga banyaknya nilai x yang demikian.

Sebuah himpunan terhingga tidak memiliki limit. Sebuah himpunan takterhingga bisa memiliki titik limit, bisa juga tidak. Jadi, himpunan bilangan asli tidak memiliki titik limit sementara himpunan bilangan rasional memiliki takterhingga banyaknya titik limit.

Sebuah himpunan yang mengandung semua titik limitnya disebut himpunan tertutup. Himpunan bilangan rasional bukan merupakan himpunan tertutup karena sebagai contoh titik limit $\sqrt{2}$ bukan merupakan anggota himpunan. Akan tetapi himpunan semua bilangan real x sedemikian sehingga $0 \leq x \leq 1$ adalah sebuah himpunan tertutup.

1.15 BATAS-BATAS

Jika untuk semua bilangan x dari sebuah himpunan terdapat sebuah bilangan M sedemikian sehingga $x \leq M$, maka himpunan tersebut terbatas diatas dan M disebut sebagai batas atas. Jika untuk semua $x \geq m$ maka himpunan tersebut disebut terbatas dibawah dan m disebut batas bawah. Untuk semua x dimana $m \leq x \leq M$ himpunan disebut terbatas.

Jika $\underline{M}$ adalah sebuah bilangan sedemikian sehingga tidak terdapat anggota himpunan yang lebih besar dari $\underline{M}$ tetapi terdapat sedikitnya satu anggota yang lebih besar daripada $\underline{M}-\in$ untuk setiap $\in>0$ maka $\underline{M}$ disebut batas atas terkecil dari himpunan. Dengan cara yang sama, jika tidak terdapat anggota himpunan yang lebih kecil daripada $\overline{m}$ tetapi terdapat sedikitnya satu anggota yang lebih kecil daripada $\overline{m}+\in$ untuk setiap $\in>0$ maka $\overline{m}$ disebut batas bawah terbesar dari himpunan.

1.16 TEOREMA BOLZANO-WEIRESTRASS

Teorema Bolzano-Weirestrass menyatakan bahwa setiap himpunan takterhingga terbatas memiliki sedikitnya satu titik limit.

1.17 BILANGAN ALJABAR dan BILANGAN TRANSENDEN

Sebuah bilangan x yang merupakan solusi dari persamaan polinomial

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

Dimana $a_0 \neq 0, a_1, a_{2,} \ldots, a_n$ adalah bilangan bulat dan n adalah bilangan bulat positi yang disebut derajat dari persamaan polinomial dengan koefisien-koefisien bilangan bulat disebut bilangan transenden.

Contoh: $\frac{2}{3}$ dan $\sqrt{2}$ yang berturut-turut merupakan solusi dari $3x - 2 = 0$ dan $x^2 - 2 = 0$ adalah bilangan aljabar.

Bilangan π dan bilangan e dapat diperlihatkan sebagai bilangan transenden. Para ahli matematika masih perlu menentukan apakah sejumlah bilangan seperti $e\pi$ atau $e + \pi$ adalah bilangan aljabar atau bukan.

Himpunan bilangan aljabar adalah sebuah himpunan takterhingga terhitung, tetapi himpunan bilangan transenden merupakan takterhingga takterhitung.

1.18 SISTEM BILANGAN KOMPLEKS

Persamaan-persamaan seperti $x^2 + 1 = 0$ tidak memiliki solusi dalam sistem bilangan real karena persamaan-persamaan ini ternyata diperlukan dalam struktur matematika yang sedang dibangun, para ahli matematika pada akhir abad kesembilan belas dan awal abad kedua puluh mengembangkan sebuah sistem bilangan-bilangan yang diperluas dimana solusi-solusi tadi dapat diperoleh. Sistem baru ini kini dikenal sebagai sistem bilangan kompleks. Salah satu subhimpunan dari sistem bilangan kompleks adalah sistem bilangan real.

Kita dapat memandang bilangan kompleks sebagai bilangan dengan bentuk $a + bi$ dimana a adalah bilangan real yang disebut bagian real, b adalah bilangan real yang disebut bilangan imajiner dan $i = \sqrt{-1}$ disebut unit imajiner. Dua bilangan kompleks $a + bi$ dan $c + di$ adalah sama jika dan hanya jika hanya jika $a = c$ dan $b = d$. Kita dapat mempertimbangkan bilangan real sebagai suatu subhimpunan dari himpunan bilangan kompleks dengan $b = 0$. Bilangan kompleks $0 + 0i$ ekuivalen dengan bilangan real 0.

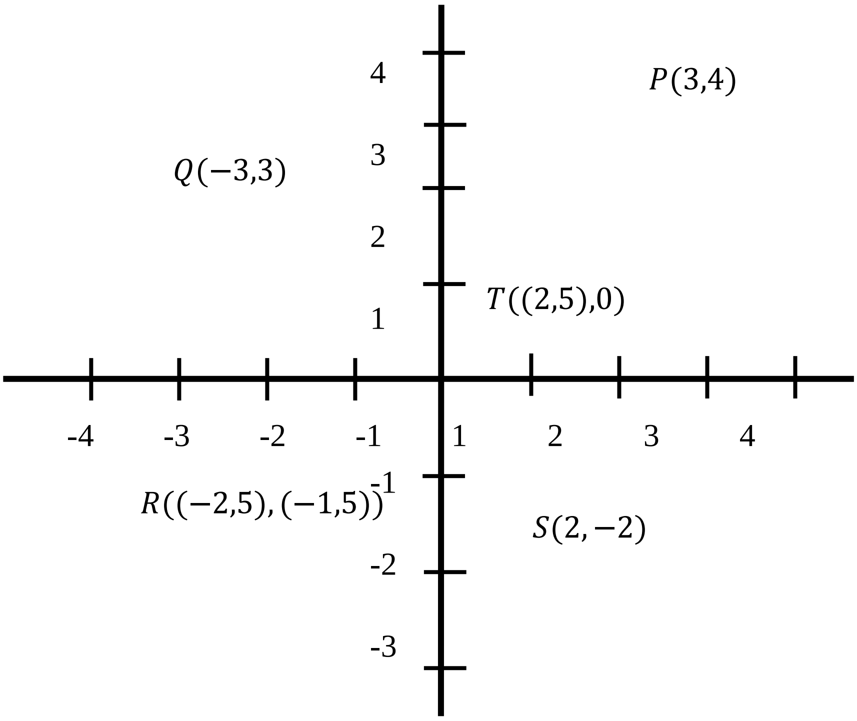
Nilai mutlak atau modulus dari $a + bi$ didefinisikan sebagai $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Konjugat kompleks dari $a + bi$ didefinisikan sebagai $a - bi$. Konjugat kompleks dari bilangan kompleks z seringkali didefinisikan sebagai $\bar{z}$ atau z^*.

Himpunan bilangan kompleks memenuhi aturan $1 - 9$ sehingga membentuk sebuah field. Dalam melakukan operasi dengan bilangan kompleks, kita dapat melakukannya sebagimana dengan aljabar bilangan real, mengganti i^2 dengan -1 jika dijumpai. Ketidaksamaan bilangan kompleks tidak terdefinisi.

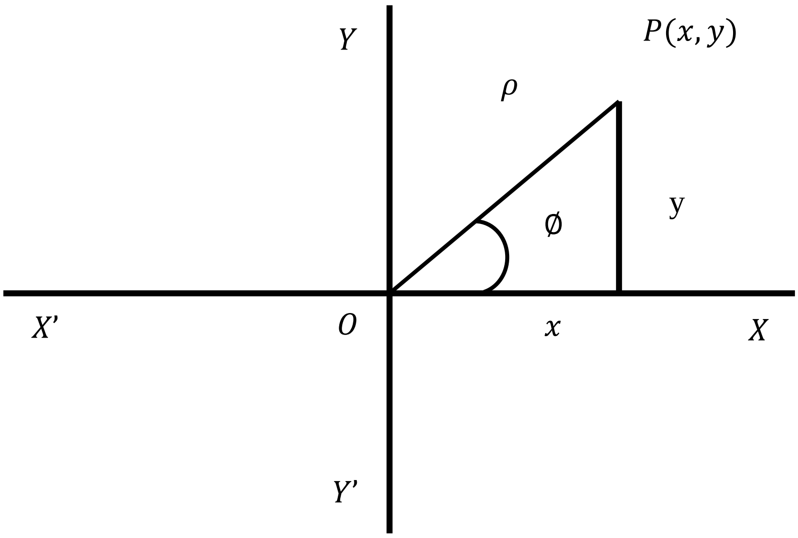
Dari sudut pandang salah satu fondasi aksiomatik bilangan kompleks akan lebih baik apabila sebuah bilangan kompleks diperlakukan sebagai sebuah pasangan berurut (a, b) dari bilangan real a dan b yang memenuhi aturan-aturan operasi tertentu yang ternyata ekuivalen dengan aturan $1 - 9$. Sebagai contoh kita dapat mendefinisikan$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $m(a, b) = (ma, mb)$ dan seterusnya. Dapat kita lihat kemudian bahwa $(a, b) = a(1,0) + b(0,1)$ dan kita dapat mengasosiakan ini dengan $a + bi$, dimana i adalah simbol untuk $(0,1)$.

1.19 BENTUK POLAR dari BILANGAN KOMPLEKS

Jika skala real dipilih untuk dua sumbu yang saling tegak lurus $X'OX$ dan $Y'OY$ (sumbu x dan sumbu y) seperti tampak pada Gambar 1.2 maka kita dapat menentukan sebarang titik pada bidang yang ditentukan oleh garis-garis ini dengan pasangan berurut bilangan (x, y) yang disebut koordinat rektangular dari titik tersebut. Contoh-contoh posisi titik-titik semacam ini ditunjukkan olehP, Q, R, S dan T pada Gambar 1.2.



Gambar 1.2



Gambar 1.3

Karena suatu bilangan kompleks $x + iy$ dapat dipandang sebagai sebuah pasangan berurut (x, y) kita dapat mempresentasikan bilangan-bilangan semacam ini dengan titik-titik dalam sebuah bidang xy yang disebut bidang kompleks atau Diagram Argand. Dari Gambar 1.3 kita melihat bahwa $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ dimana $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ dan θ yang disebut amplitudo atau argumen adalah sudut yang dibentuk oleh garis OP dengan sumbu x positif OX dari sini dapat ditulis

$$z = x + iy = \rho \cos \theta + i \sin \theta \qquad (2)$$

yang disebut bentuk polar bilangan kompleks, dimana ρ dan θ disebut koordinat polar. Untuk mempersingkat kadang-kadang digunakan simbol $\operatorname{cis} \theta$ untuk menggantikan $\cos \theta + i \sin \theta$.

Jika $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin_1)$ dan$z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin_2)$ dan dengan menggunakan rumus-rumus penjumlahan untuk sinus dan cosinius, kita dapat melihat bahwa

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \qquad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \qquad (4)$$

$$z^n = \{\rho \cos \theta + i \sin \theta\}^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \qquad (5)$$

Dimana n adalah sebarang bilangan real. Persamaan (5) kadang-kadang disebut Teorema De Moivre. Kita dapat menggunakan teorema ini untuk menentukan akar bilangan kompleks. Sebagai contoh, jika n adalah sebuah bilangan bulat positif maka$z^{\frac{1}{n}} = \{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}$

$$=\rho^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\}\ k = 1,2,3,\dots,n-1 \qquad (6)$$

Dimana dari sini dapat ditunjukkan bahwa secara umum terdapat n nilai yang berbeda untuk $z^{\frac{1}{n}}$. Kita akan melihat bahwa $e^{i\theta} = \mathrm{Cos}\theta + i\,\mathrm{Sin}\theta$ dimana

$e = 2{,}71828$ ... Ini disebut Rumus Euler.

1.20 INDUKSI MATEMATIKA

Prinsip induksi matematika adalah salah satu sifat penting dari bilangan bulat positif. Induksi matematika terutama sangat berguna dalam pembuktian pernyataan-pernyataan yang melibatkan semua bilangan bulat positif jika misalnya diketahui bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk $n = 1,2,3,4$ tetapi diduga bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk semua bilangan bulat positif.

Metode pembuktian terdiri dari langkah-langkah berikut:

1. Buktikkan pernyataan tersebut untuk $n = 1$ (suatu bilangan bulat positif yang lainnya)
2. Asumsikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$ dimana k adalah sebarang bilangan bulat positif.
3. Dari asumsi pada nomer 2 buktikkan bahwa pernyataan tersebut harus benar untuk $n = k + 1$. Ini merupakan bagian dari pembuktian yang menentukan induksi dan bisa sulit atau tidak mungkin.
4. Karena pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$ [dari langkah 1] maka pernyataan tersebut harus [dari langkah 3] benar untuk $n = i + 1 = 2$ dan dari sini untuk $n = 2 + 1 = 3$ dan seterusnya, sehingga benar untuk semua bilangan positif. (Asumsi ini yang merupakan penghubung antara kebenaran pernyataan untuk bilangan terhingga dengan kebenaran pernyataan untuk himpunan takterhingga disebut “Aksioma Induksi Matematika”).

CONTOH SOAL

OPERASI-OPERASI BILANGAN

1.1 Jika $x = 4, y = 15, z = -3, p = \frac{2}{3}, q = -\frac{1}{6}$ dan $r = \frac{3}{4}$, hitunglah

$(a) x + (y + z)$,
$(b) (x + y) + z$,
$(c) p(qr)$,
$(d) (pq)r$,
$(e) x(p + q)$.

(a) $x + (y + z) = 4 + [15 + (-3)] = 4 + 12 = 16$
(b) $(x + y) + z = (4 + 15) + (-3) = 19 - 3 = 16$

Fakta bahwa (a) dan (b) adalah sama mengilustrasikan hukum asosiatif penjumlahan

(c) $p(qr) = \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right\} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$
(d) $(pq)r = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}\left(\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$

Fakta bahwa (c) dan (d) adalah sama mengilustrasikan hukum asosiatif perkalian

(e) $x(p + q) = 4\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{4}{6} - \frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{12}{6} = 2$

Metode lain:

$x(p + q) = xp + xq = (4)\left(\frac{2}{3}\right) + (4)\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{8}{3} - \frac{4}{6} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
dengan menggunakan hukum distributif.

1.2 Jelaskan mengapa kita tidak memandang (a) $\frac{0}{0}$ (b) $\frac{1}{0}$ sebagai bilangan.

(a) Jika kita mendefinisikan $\frac{a}{b}$ sebagai bilangan (jika ada) sedemikian sehingga $bx = a$ maka $\frac{0}{0}$ adalah bilangan x tersebut sedemikian sehingga $0x = 0$. Namun ini benar untuk semua bilangan karena tidak ada bilangan unik yang dapat dipresentasikan oleh $\frac{0}{0}$ maka kita menganggapnya sebagai tidak terdefinisi
(b) Serupa dengan (a) jika kita mendefinisikan $\frac{1}{0}$ sebagai bilangan x (jika ada) sedemikian sehingga $0x = 1$ maka kita menyimpulkan bahwa tidak terdapat bilangan semacam itu. Dengan fakta-fakta tersebut kita harus melihat pembagian dengan nol sebagai tidak bermakna.

1.3 Sederhanakan $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$

$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}$ dengan syarat faktor yang dicoret $(x-3)$ tidak sama dengan nol, yaitu $x \neq 3$. Untuk $x = 3$ pecahan yang diberikan tidak terdefinisi.

BILANGAN RASIONAL dan BILANGAN IRASIONAL

1.4 Buktikkan bahwa kuadrat dari sebarang bilangan bulat ganjil. Sebarang bilangan bulat ganjil memiliki bentuk $2m+1$ karena $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ adalah 1 lebih besar daripada bilangan bulat genap $4m^2 + 4m = 2(2m^2 + 2m)$ maka tentu hasilnya adalah bilangan bulat ganjil.

1.5 Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional kuadratnya adalah 2. Misalnya $\frac{p}{q}$ adalah bilangan rasional yang kuadrat adalah 2, dimana kita mengasumsikan bahwa $\frac{p}{q}$ adalah dalam suku terendah atau p dan q tidak memiliki faktor bilangan bulat bersama kecuali ± 1 (bilangan bulat semacam itu kadang-kadang disebut relati prima). Maka $(\frac{p}{q})^2 = 2, p^2 = 2q^2$ dan p^2 adalah bilangan genap. Dari soal 1.4 p adalah genap karena jika p ganjil maka p^2 akan ganjil. Jadi $p = 2m$. Dengan mensubtitusikan $p = 2m$ kedalam $p^2 = 2q^2$ dihasilkan $q^2 = 2m^2$ sehingga q^2 adalah genap dan q adalah genap. Jika p dan q memiliki faktor bersama yaitu 2 yang bertentang dengan asumsi awal bahwa p dan q tidak memiliki faktor lain selain ± 1. Karena kontradiksi ini, maka tidak mungkin ada bilangan rasional yang nilai kuadratnya adalah 2.

1.6 Perhatikan bagaimana menentukan bilangan rasional yang kuadratnya mendekati 2. Kita membatasi diri pada bilangan rasional positif. Karena $(1)^2 = 1$ dan $(2)^2 = 4$ kita diarahkan untuk memilih bilangan rasional antara 1 dan 2 yaitu $1{,}1; 1{,}2; 1{,}3; \ldots; 1{,}9$. Karena $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ dan $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ kita meninjau bilangan rasional antara 1,4 dan 1,5 yaitu $1{,}41, 1{,}42, \ldots, 1{,}49$. Dengan melanjutkan cara ini kita dapat memperoleh angka-angka aproksimasi rasional yang lebih dekat, misalnya $(1{,}414213563)^2$ adalah lebih kecil dari 2 sementara $(1{,}414213563)^2$ adalah lebih besar dari 2.

1.7 Diketahui persamaan$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ dimana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah bilangan bulat serta a_0 dan $a_n \neq 0$. Perlihatkan bahwa jika persamaan tersebut diharuskan memiliki sebuah akar rasional $\frac{p}{q}$, maka p harus habis membagi a_n dan q harus membagi a_0. Karena $\frac{p}{q}$ adalah akar, kita akan memperoleh setelah mensubtitusikan kedalam persamaan yang diberikan dan mengalikannya dengan q^n,

$$a_o p^n + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \qquad (1)$$

Atau membaginya dengan p,

$$a_o p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} = \frac{a_n q^n}{p} \qquad (2)$$

Karena ruas kiri dari persamaan (2) adalah sebuah bilangan bulat, maka ruas kanan juga harus merupakan bilangan bulat. Lalu karena p dan q adalah relatif prima, maka p tidak habis membagi q^n sehingga harus membagia_n. Dengan cara yang samaa dengan mentransposisikan persamaan (1) dan membaginya dengan q, kita dapat melihat bahwa q harus membagi a_0.

1.8 Buktikkan bahwa $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ tidak mungkin bilangan rasional. Jika $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ maka $x^2=5+2\sqrt{6}, x^2-5=2\sqrt{6}$ dan dengan mengkuadratkan $x^4-10x^2+1=0$. Satu-satunya akar rasional yang mungkin adalah ± 1 sesuai dengan soal 1.7 dan akar-akar ini tidak memenuhi persamaan tersebut. Maka $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ yang memenuhi persamaan tidak mungkin bilangan rasional.

1.9 Buktikkan bahwa diantara sebarang dua bilangan rasional yang lain. Himpunan bilangan rasional adalah tertutup dalam operasi penjumlahan dan pembagian (penyebut bukan nol) oleh karena itu $\frac{a+b}{2}$ adalah rasional. Langkah selanjutnya adalah menjamin bahwa nilai ini adalah antara a dan b. Untuk itu asumsikan $a<b$. Pembuktian akan berjalan dengan cara yang sama dengan asumsi $b<a$. Maka $2a<a+b$, jadi $a<\frac{a+b}{2}$ dan $a+b<2b$ sehingga $\frac{a+b}{2}<b$.

KETIDAKSAMAAN

1.10 Untuk nilai-nilai x berapakah $x+3(2-x)\geq 4-x$?
$x+3(2-x)\geq 4-x$ jika $x+6-3x\geq 4-x, 6-2x\geq 4-x, 6-4\geq 2x-x, 2\geq x$ yaitu $x\leq 2$.

1.11 Untuk nilai-nilai x berapakah $x^2-3x-2<10-2x$? Ketidaksamaan yang dicari berlaku ketika $x^2-3x-2-10+2x<0, x^2-x-12<0$ atau $(x-4)(x+3)<0$
Ketidaksamaan terakhir ini hanya berlaku dalam kasus-kasus berikut:
Kasus 1: $x-4>0$ dan $x+3<0$ yaitu $x>4$ dan $x<-3$. Hal ini tidak mungkin karena x tidak mungkin secara bersamaan lebih besar daripada 4 dan lebih kecil daripada -3.
Kasus 2:$x-4<0$ dan $x+3>0$ yaitu $x<4$ dan $x>-3$. Hal ini mungkin jika $-3<x<4$. Jadi ketidaksamaan tersebut berlaku untuk himpunan semua x sedemikian sehingga $-3<x<4$.

1.12 Jika $a\geq 0$ dan $b\geq 0$, buktikkan bahwa $\frac{1}{2}(a+b)\geq\sqrt{ab}$. Pernyataan tersebut benar terbukti dalam kasus-kasus berikut (1)$a=b$, (2) a dan b keduanya nol. Untuk a dan b yang positif dan $a\neq b$, pembuktiannya adalah kontradiksi. Asumsikan kebalikkan dari permisalan dugaan bahwa $\frac{1}{2}(a+b)<\sqrt{ab}$ maka $\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)<ab$, yang dituliskan $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2<0$. Karena ruas kiri dari persamaan mengandung kuadrat, bagian tersebut tidak boleh lebih kecil daripada nol. Dengan mencapai kontradiksi ini, kita dapat menyimpulkan bahwa asumsi kita tidak benar dan pernyataan awal adalah benar.

1.13 Jika $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan $b_1, b_2, \dots, b_n$ adalah sebarang bilangan real, buktikkan ketidaksamaan Schwarz.
$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$
Untuk semua bilangan real λ, maka kita dapat menuliskan
$(a_1\lambda + b_1)^2 + (a_2\lambda + b_2)^2 + \cdots + (a_n\lambda + b_n)^2 \ge 0$
Dengan memperluas dan mengumpulkan suku-sukunya akan sampai pada
$A^2\lambda^2 + 2C\lambda + B^2 \ge 0$ (1)
Dimana $A^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, B^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2, C^2 = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ (2)
Anggota ruas kiri dari persamaan (1) adalah bentuk kuadrat dari λ karena persamaan tersebut tidak pernah negatif, diskriminannya $4C^2 - 4A^2B^2$ tidak mungkin positif. Jadi $C^2 - A^2B^2 \le 0$ atau $C^2 \le A^2B^2$ ini ketidaksamaan yang hendak dibuktikkan

1.14 Buktikan bahwa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} < 1$ untuk semua bilangan bulat positif $n > 1$.
Misalkan $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$
Maka $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$
Dengan mengurangkan $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$.Jadi$S_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$untuk semua n

EKSPONEN, AKAR, dan LOGARITMA

1.15 Hitunglah masing-masing soal berikut ini:
(a) $\frac{3^4 \cdot 3^8}{3^{14}} = \frac{3^{4+8}}{3^{14}} = 3^{4+8-14} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
(b) $\sqrt{\frac{(5\cdot 10^{-6})(4\cdot 10^2)}{8\cdot 10^5}} = \sqrt{\frac{5\cdot 4}{8} \cdot \frac{10^{-6}\cdot 10^2}{10^5}} = \sqrt{2{,}5 \cdot 10^{-9}} = \sqrt{25 \cdot 10^{-10}}$ atau $0{,}00005$
(c) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{27}{8}\right) = x$. Maka $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ atau $x = -3$
(d) $(\log_a b)(\log_b a) = u$ maka $\log_a b = x, \log_b a = y$ mengasunsikan $a, b > 0$ dan $a, b \ne 1$

Maka $a^x = b, b^y = a$ dan $u = xy$

Karena $(a^x)^y = a^{xy} = b^y = a$ kita memperoleh $a^{xy} = a^1$ atau $xy = 1$ yaitu nilai yang dicari.

1.16 Jika $M > 0, N > 0$ dan $a > 0$ tetapi $a \ne 1$, buktikan bahwa $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

Misalkan $\log_a M = x, \log_a N = y$. Maka $a^x = M, a^y = N$ sehingga $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ atau $\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$

KETERHITUNGAN

1.17 Buktikkan bahwa himpunan semua bilangan rasional antara 0 dan 1, termasuk 0 dan 1 adalah himpunan terhitung. Tulis semua pecahan dengan penyebut 2, kemudian 3, ... dengan memperhatikan pecahan-pecahan yang ekuivalen seperti $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}$, ... tidak lebih dari sekali. Maka korespondenso $1-1$ dengan bilangan asli dapat dicapai sebagai berik

Bilangan Rasional	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...
Bilangan Asli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Jadi, himpunan semua bilangan rasional antara 0 dan 1 adalah terhitung dan memiliki bilangan kardinal $\aleph_0$

1.18 Jika A dan B adalah dua himpunan yang terhitung, buktikkan bahwa himpunan yang terdiri dari semua elemen dari A atau B atau keduanya adalah juga terhitung.
Karena A adalah terhitung maka terdapat korespondensi $1-1$ antara elemen-elemen A dan bilangan-bilangan asli sehingga kita dapat menyatakan elemen-elemen ini sebagai $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dengan cara yang sama, kita dapat menyatakan elemen-elemen B sebagai $b_1, b_2, b_3, \ldots$.
Kasus 1: Misalnya elemen-elemen A semuanya berbeda dengan elemen-elemen B. Maka himpunan yang terdiri dari elemen-elemen A atau B adalah terhitung karena kita dapat menentukan korespondensi $1-1$ berikut ini.

A atau B	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...
Bilangan asli	1	2	3	4	5	6	...

Kasus 2: Jika beberapa elemen A dan B adalah sama, maka kita menghitungnya hanya sekali sebagaimana dalam soal 1.17. Dengan demikian, himpunan elemen-elemen yang termasuk dalam A atau B atau kedua-duanya terhitung.

Himpunan yang terdiri dari semua elemen yang termasuk dalam A atau B atau keduanya seringkali disebut sebagai gabungan A dan B yang dinyatakan dengan $A \cup B$ atau $A + B$.

Himpunan yang terdiri dari semua elemen yang terkandung dalam A atau B disebut irisan A dan B yang dinyatakan dengan $A \cap B$ atau AB. Jika A dan B terhitung maka $A \cap B$ juga terhitung.

Himpunan yang terdiri dari semua elemen A tetapi tidak dalam B ditulis sebagai $A - B$. Jika misalkan$\overline{B}$ sebagai himpunan elemen-elemen yang tidak ada didalam B maka kita juga dapat menulis $A - B = AB$. Jika A dan B terhitung maka demikian juga $A - B$.

1.19 Buktikkan bahwa himpunan semua bilangan rasional positif adalah himpunan terhitung.
Perhatikan semua bilangan rasional $x > 1$.dengan setiap bilangan rasional semacam ini, kita dapat mengasosiasikan satu dan hanya satu bilangan rasional $\frac{1}{x}$ dalam $0,1$ yaitu terdapat korespondensi satu-satu antara semua bilangan rasional > 1 dan semua bilangan rasional dalam $(0,1)$. Karena ini terhitung berdasarkan soal 1.17 maka himpunan bilangan rasional > 1 adalah juga terhitung. Dari soal 1.18 maka akan diperoleh bahwa himpunan yang terdiri dari semua bilangan rasional positif adalah terhitung, karena himpunan terdiri dari dua himpunan terhitung bilangan rasional antara 0 dan 1 dan bilangan rasional yang lebih besar atau sama dengan 1. Dari hasil ini kita dapat menunjukkan bahwa himpunan semua bilangan rasional adalah terhitung.

1.20 Buktikkan bahwa himpunan semua bilangan real dalam $[0,1]$ adalah tidak terhitung.
Setiap bilangan real dalam $[0,1]$ memiliki panjang desimal $a_1, a_2, a_3 \ldots$ dimana $a_1, a_2, \ldots$ adalah sebarang angka $0,1,2, \ldots ,9$.
Kita mengasumsikan bahwa bilangan yang perpanjangan desimalnya berakhir seperti $0,7324$ ditulis sebagai $0,73240000 \ldots$ dan bahwa ini sama dengan $0,732399999 \ldots$
Jika semua bilangan real dalam $[0,1]$ adalah terhitung, kita dapat menempatkannya dalam korespondensi $1 - 1$ dengan bilangan asli sebagaimana dalam daftar berikut ini:

$$1 \leftrightarrow 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \ldots$$

$$2 \leftrightarrow 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \ldots$$

$$3 \leftrightarrow 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \ldots$$

$$\vdots \leftrightarrow \vdots$$

Dengan demikian kita membentuk sebuah bilangan $0, \mathrm{b}_1\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3\mathrm{b}_4$ .... dimana$\mathrm{b}_1 \neq \mathrm{a}_{11}, \mathrm{b}_2 \neq \mathrm{a}_{22}, \mathrm{b}_3 \neq 33, \mathrm{b}_4 \neq \mathrm{a}_{44}$ ... dan dimana semua b diposisi belakang koma tidak semua angkanya 9.

Bilangan ini yang berada didalam [0,1] berada dengan semua bilangan dalam daftar diatas sehingga tidak ada didalam tersebut. Ini jelas bertentangan dengan asumsi bahwa semua bilangan dalam [0,1] diikutsertakan. Karena kontradiksi ini, maka bilangan real dalam [0,1] tidak dapat ditempatkan dalam korespondensi $1-1$ dengan bilangan asli yaitu bahwa himpunan bilangan real dalam [0,1] tidak terhitung.

TITIK LIMIT, BATAS, TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS

1.21 (a)Buktikkan bahwa himpunan takterhingga dari bilangan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{,3}, \frac{1}{4}, \ldots$ adalah terbatas.
(b)Tentukanlah batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari himpunan tersebut.
(c)Buktikan bahwa 0 adaalah titik limit himpunan tersebut.
(d) Apakah himpunan tersebut merupakan sebuah himpunan tertutup?
(e)Bagaimana himpunan ini menggambarkan Teorema Bolzano-Weierstrass?

(a) Karena semua anggota himpunan kecil daripada 2 dan lebih besar daripada -1 (misalnya), maka himpunan tersebut terbatas; 2 adalah batas atas, -1 batas bawah. Kita dapat menemukan batas atas terkecil yaitu $\frac{2}{3}$ dan batas bawah terbesar yaitu $-\frac{1}{2}$.

(b) Karena tidak ada anggota himpunan yang lebih besar daripada 1 dan kerena terdapat setidaknya satu anggota himpunan yaitu 1 yang melebihi $1-\in$ untuk setiap bilangan positif $\in$, kita melihat bahwa 1 adalah batas atas terkecil dari himpunan. Karena tidak ada anggota himpunan yang lebih kecil daripada 0 dan karena terdapat setidaknya satu anggota himpunan yang lebih kecil daripada $0+\in$ untuk setiap $\in$ yang positif (untuk tujuan ini kita selalu dapat memilih bilangan $\frac{1}{n}$ dimana n adalah sebuah bilangan bulat positif yang lebih besar daripada $\frac{1}{\epsilon}$) kita melihat bahwa 0 adalah batas bawah terbesar dari himpunan.

(c) Misalkan x adalah sebarang anggota himpunan. Karena kita selalu dapat menemukan sebuah bilangan x sedemikian sehingga $0 < |x| < \delta$ untuk sebarang bilangan positif δ yaitu kita selalu dapat memilih x sebagai bilangan $\frac{1}{n}$ dimana n adalah sebuah bilangan bulat positif yang lebih besar daripada $\frac{1}{\delta}$ kita melihat bahwa 0 adalah sebuah titik limit himpunan. Untuk menyatakan ini dengan cara lain, kita melihat bahwa setiap lingkungan δ yang terhapus dari 0 selalu mengikut sertakan anggota-anggota himpunan, seberapapun kecilnya asumsi $\delta > 0$

(d) Himpunan tersebut bukan merupakan himpunan tertutup karena titik limit 0 tidak termasuk dalam himpunan tersebut.

(e) Karena himpunan tersebut terbatas dan takterhingga, maka menurut Teorema Bolzano-Weierstrass, himpunan tersebut harus memiliki setidaknya satu titik imit. Kita telah mengetahui inilah masalahnya, sehingga teorema tersebut digambarkan.

1.22 Buktikkan bahwa $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ adalah sebuah bilangan aljabar. Misalkan $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ maka $x - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}$. Dengan memangkatkan tiga, kedua ruasnya dan menyederhanakannya, maka kita memperoleh $x^3 + 9x - 2 = 3\sqrt{3}(x^2 + 1)$. Kemudian dengan menguadratkan kedua ruas dan menyederhanakannya, maka kita memperoleh $x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 + 36x - 23 = 0$. Karena ini merupakan sebuah persamaan polinomial dengan koefisien-koefisien integral, maka $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ yang merupakan solusi adalah sebuah bilangan aljabar.

1.23 Buktikkan bahwa himpunan semua bilangan aljabar adalah terhitung. Bilangan aljabar adalah solusi persamaan polinomial dengan bentuk $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ dimana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah bilangan bulat. Misalkan $P = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| + n$. Untuk sebarang nilai P yang diketahui hanya terdapat terhingga banyaknya persamaan polinomial yang mungkin sehingga hanya terhingga banyaknya bilangan aljabar yang mungkin. Tuliskan semua bilangan aljabar yang sama dengan $P = 1,2,3,4, \ldots$ dengan menghindari pengulangan. Jadi,semua bilangan aljabar dapat ditempatkan dengan korespondesi $1 - 1$ dengan bilangan asli sehingga himpunan tersebut terhitung.

BILANGAN KOMPLEKS

1.24 Kerjakan operasi-operasi berikut.

(a) $(4-2i)+(-6+5i)=4-2i-6+5i=4-6+(-2+5)i$
$=-2+3i$

(b) $(-7+3i)-(2-4i)=-7+3i-2+4i=-9+7i$

(c) $(3-2i)(1+3i)=3(1+3i)-2i(1+3i)=3+9i-2i-6i^2=$
$3+9i-2i+6=9+7i$

(d) $\frac{-5+5i}{4-3i}=\frac{-5+5i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2}=\frac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}=\frac{-35+5i}{25}=$
$\frac{5(-7+i)}{25}=\frac{-7}{5}+\frac{1}{5}i$

(e) $\frac{i+1^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}=\frac{i-1+(i^2)(i)+(i^2)^2+(i^2)^2i}{1+i}=\frac{i-1-i+1+1}{1+i}=\frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{i-1^2}{i-1^2}=$
$\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

(f) $|3-4i||4+3i|=\sqrt{(3^2)+(-4)^2}\sqrt{(4)^2+(3)^2}=(5)(5)=25$

(g) $\left|\frac{1}{1+3i}-\frac{1}{1-3i}\right|=\left|\frac{1-3i}{1-9i^2}-\frac{1+3i}{1-9i^2}\right|=\left|\frac{-6i}{10}\right|=\sqrt{(0)^2+\left(-\frac{6}{10}\right)^2}=\frac{3}{5}$

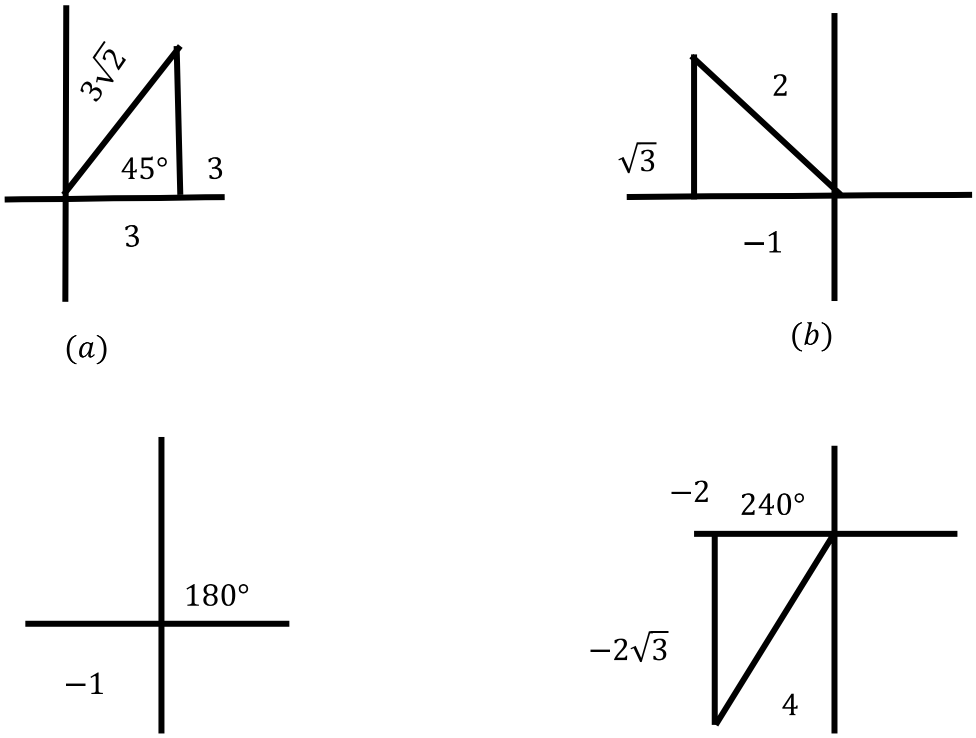
1.25 Jika z_1 dan z_2 adalah dua bilangan kompleks, buktikan bahwa $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.
Misalkan $z_1=x_1iy_1, z_2=x_2+iy_2$
Maka

$$|z_1z_2|=|(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)|=|x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)|$$

$$=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}$$

$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_1^2+y_2^2)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|x_1+iy_1||x_2iy_2|=|z_1||z_2|$$

1.26 Selesaikan $x^3-2x-4=0$. Akar-akar rasional yang mungkin berdasarkan soal 1.7 adalah $\pm1,\pm2,\pm4$. Dengan mencoba-cobakita memperoleh $x=2$ adalah sebuah akar. Dengan demikian persamaan tersebut dapat ditulis sebagai $(x-1)(x^2+2x+2)=0$. Solusi untuk persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$ adalah $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Untuk $a=1,b=2,c=2$ menghasilkan $x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i$. Himpunan solusinya adalah $2,-1+i,-1-i$.



(c) Gambar 1.4 (d)

1.27 Nyatakan dalam bentuk polar (a) $3 + 3i$ (b)$-1 + \sqrt{3}i$ (c)-1 (d)$-2 - 2\sqrt{3}i$. Lihat gambar1.4

(a) Amplitudo $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$radian. Modulus $\rho = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Maka $3 + 3i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = 3\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}\ \text{cis}\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

(b) Amplitudo $\theta = 120° = 2\frac{\pi}{3}$radian. Modulus $\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$. Maka $-1 + 3\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}) = 2\ \text{cis}\ 2\frac{\pi}{3} = 2e^{2\frac{\pi}{3}}$

(c) Amplitudo $\theta = 180° = \pi$ radian. Modulus $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$. Maka $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = \text{cis}\ \pi = e^{\pi i}$

(d) Amplitudo $\theta = 240° = 4\frac{\pi}{3}$ radian. Modulus $\rho = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = 4$. Maka $-2 - 2\sqrt{3} = 4\left(\cos 4\frac{\pi}{3} + i\sin 4\frac{\pi}{3}\right) = 4\ \text{cis}\ 4\frac{\pi}{3} = 4e^{4\frac{\pi}{3}}$

1.28 Hitung (a) $\left(-1 + \sqrt{3}i\right)^{10}$ (b)$(-1 + i)^{\frac{1}{3}}$

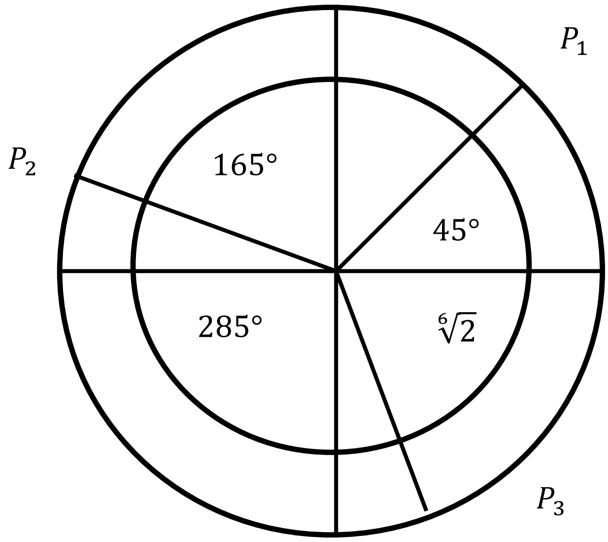
(a) Menurut soal 1.27 (b) dan Teorema De Moivre,

(b) $-1+i=\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°) = \sqrt{2}[\cos(135° + k\cdot 360°) + i\sin(135° + k \cdot 360°)]$ maka $(-1+i)^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}[\cos\left(\frac{135°+k\cdot 360°}{3}\right) + i\sin(\frac{135°+k\cdot 360°}{3})]$

Hasil-hasil untuk $k = 0,1,2$ adalah

$$\sqrt[6]{2}(\cos 45° + i\sin 45°),$$
$$\sqrt[6]{2}(\cos 165° + i\sin 165°),$$
$$\sqrt[6]{2}(\cos 285° + i\sin 285°)$$

Hasil-hasil untuk $k = 3,4,5,6,7,\ldots$ merupakan pengulangan hasil-hasil ini. Akar-akar kompleks ini dinyatakan secara geometris dalam bidang kompleks oleh titik-titik P_1, P_2, P_3 pada lingkaran dari gambar 1.5



Gambar 1.5

INDUKSI MATEMATIKA

1.29 Buktikanlah bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Pernyataan tersebut adalah benar untuk $n = 1$ karena $1^2 = \frac{1}{6}(1)(1+1)$ $(2\,.\,1+1) = 1$.

Asumsikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, maka

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

Dengan menambahkan $(k+1)^2$ pada kedua ruas, maka

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1) + k + 1\right]$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Yang menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = k + 1$ jika pernyataan tersebut benar untuk $n = k$. Tetapi karena pernyataan tersebut adalah benar untuk $n = 1$, maka jelas bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = 1 + 1 = 2$ dan untuk $n = 2 + 1 = 3$, ... yaitu, pernyataan tersebut benar untuk semua bilangan bulat positif n.

1.30. Buktikanlah bahwa $x^n - y^n$ memiliki $x - y$ sebagai sebuah faktor untuk semua bilangan bulat positif n.

Pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$ karena $x^1 - y^1 = x - y$.

Asumsikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, yaitu, asumsikan $x^k - y^k$ sebagai faktor. Perhatikanlah

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1}$$

$$= x^k(x - y) + y(x^k - y^k)$$

Suku pertama pada ruas kanan memiliki $x - y$ sebagai faktor, dan suku kedua pada ruas kanan juga memiliki $x - y$ sebagai faktor karena asumsi–asumsi di atas.

Jadi, $x^{k+1} - y^{k+1}$ memiliki $x - y$ sebagai faktor jika $x^k - y^k$ memiliki $x - y$ sebagai faktor.Karena $x^1 - y^1$ memiliki $x - y$ sebagai faktor, maka $x^2 - y^2$ memiliki $x - y$ sebagai faktor, $x^3 - y^3$ memiliki $x - y$ sebagai faktor, dan seterusnya.

1.31 Buktikanlah Ketidaksamaan Bernouli $(1 + x)^n > 1 + nx$ untuk

$n = 2, 3, \ldots$.

Jika $x > -1, x \neq 0$.Pernyataan tersebut benar untuk $n = 2$ karena

$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$.

Asumsikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, yaitu $(1 + x)^k > 1 + kx$.

Kalikanlah kedua ruas dengan $1 + x$ (yang positif karena $x > -1$).

Maka kita memperoleh $(1+x)^{k+1} > (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk $n = k+1$ jika benar untuk $n = k$.

Tetapi karena pernyataan tesebut benar untuk $n = 2$, maka pernyataan tersebut harus benar untuk $n = 2+1 = 3, \ldots$ adn begitu pula benar untuk semua bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan 2.

Perhatikanlah bahwa hasil tersebut tidak benar untuk $n = 1$. Akan tetapi, hasil yang dimodifikasi $(1+x)^n \geq 1+nx$ adalah besar untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$.

SOAL LAIN – LAIN

1.32 Buktikanlah bahwa setiap bilangan bulat positif P dapat dinyatakan secara unik dalam bentuk $P = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \cdots + a_n$ dimana a adalah 0 atau 1. Dengan membagi P dengan 2, maka kita memperoleh

$\frac{P}{2} = \frac{a_0 2^{n-1} + a_1 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} + a_n}{2}$. Maka a_n adalah sisa, 0 atau 1, yang diperoleh jika P dibagi dengan 2 dan adalah unik.

Misalkan P_1 adalah bagian $\frac{P}{2}$ yang merupakan bilangan bulat. Maka

$P_1 = a_0 2^{n-1} + a_1 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$. Dengan membagi P_1 dengan 2 kita melihat bahwa a_{n-1} adalah sisa, maka 0 atau 1, yang diperoleh ketika P_1 dibagi dengan 2 adalah unik.

Dengan melanjutkan seperti ini, semua a dapat ditentukan sebagai 0 atau 1 dan karenanya adalah unik.

1.33 Nyatakanlah bilangan 23 dalam bentuk seperti pada Soal 1.32.

Penentuan koefisien – koefisien tersebut dapat diatur sebagai berikut :

2)23

2)11 sisa 1

2)5 sisa 1

2)2 sisa 1

2)1 sisa 0

0 sisa 1

Koefisien – koefisien tersebut adalah 1 0 1 1 1. Periksa: $23 = 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2 + 1$. Bilangan 1 0 1 1 1 dikatakan merepresentasikan 23 dalam skala dua atau skala biner.

1.34 Dedekind mendefinisikan sebuah potongan, penampang, atau partisi dalam sistem bilangan rasional sebagai pemisahan semua bilangan rasional ke dalam dua kelas atau himpunan yang disebut L (kelas sebelah kiri) dan R (kelas sebelah kanan) yang memiliki sifat – sifat berikut :

I. Kelas – kelas tersebut tidak kosong (yaitu, setidaknya terdapat satu bilangan dalam setiap kelas).
II. Setiap bilangan rasional berada dalam satu kelas atau dalam kelas lainnya.
III. Setiap bilangan dalam L adalah lebih kecil dari setiap bilangan dalam R.

Buktikanlah setiap pernyataan berikut ini :

(a) Tidak mungkin terdapat bilangan terbesar L dan bilangan terkecil dalam R.

(b) Kemungkinan L memiliki bilangan terbesar dan R memiliki bilangan terkecil. Apakah jenis bilangan yang dinyatakan oleh potongan tersebut dalam kasus ini?
(c) Kemungkinan L tidak memiliki bilangan terbesar dan R memiliki bilangan terkecil. Apakah jenis bilangan yang dinyatakan oleh potongan tersebut dalam kasus ini?
(d) Kemungkinan L tidak memiliki bilangan terbesar dan R tidak memiliki bilangan terkecil. Apakah jenis bilangan yang dinyatakan oleh potongan tersebut dalam kasus ini?

(a) Misalkan a adalah bilangan rasional terbesar dalam L, dan b adalah bilangan rasional terkecil dalam R. Ini berarti $a = b$ atau $a < b$.
Kita tidak dapat memiliki $a = b$ karena menurut definisi potongan, setiap bilangan dalam L adlah lebih kecil daripada a (sehingga harus berada dalam R) tetapi lebih kecil daripada b (sehingga harus berada dalam L) dan menurut definisi sebuah bilangan rasional tidak mungkin termasuk kedua – duanya L dan R.
(b) Kemungkinan ini diindikasikan dengan, misalkan L mengandung bilangan $\frac{2}{3}$ dan semua bilangan rasional yang lebih kecil daripada $\frac{2}{3}$, sementara R mengandung semua bilangan rasional yang lebih besar daripada $\frac{2}{3}$. Di dalam kasus ini, potongan tersebut menyatakan bilangan rasional $\frac{2}{3}$. Argumen yang serupa dengan menggantikan $\frac{2}{3}$ dengan sebarang bilangan rasional yang lain menunjukkan bahwa dalam kasus semacam ini potongan tersebut mendefinisikan sebuah bilangan rasional.

(c) Kemungkinan ini diindikasikan dengan, misalkan L mengandung semua bilangan rasional yang kecil daripada $\frac{2}{3}$ sementara R mengandung semua bilangan rasioal yang lebih besar daripada $\frac{2}{3}$. Potongan ini juga mendefinisikan bilangan rasional $\frac{2}{3}$. Argumen yang sama menunjukkan bahwa potongan ini selalu mendefinisikan sebuah bilangan rasional.
(d) Kemungkinan ini diindikasikan dengan, misalkan L mengandung semua bilangan rasional negatif dan semua bilangan rasional positif yang kuadratnya lebih kecil daripada 2, sementara R mengandung semua bilangan positif yang kuadratnya lebih besar daripada 2. Kita dapat menunjukkan bahwa jika a adalah sebarang bilangan dari kelas L, maka selalu terdapat bilangan yang lebih besar dalam kelas L, sementara jika b adalah sebarang bilangan dari kelas R, maka selalu

terdapat bilanga yang lebih kecil dalam kelas R. Suatu potongan jenis ini mendefinisikan sebuah bilangan irasional.

Dari (b), (c), (d) diketahui bahwa setiap potongan 2adalam sistem bilangan rasional, yang disebut potongan potongan Dedekind, mendefinisikan suatu bilangan rasional atau bilangan irasional. Dengan menggunakan potongan Dedekind, kita dapat mendefinisikan operasi – operasi (seperti penjumlahan, perkalian dan lain sebagainya) dengan bilangan irasional.

SOAL – SOAL TAMBAHAN

OPERASI-OPERASI BILANGAN

1.35. Jika diketahui $x = -3$, $y = 2$, $z = 5$, $a = \frac{3}{2}$ dan $b = -\frac{1}{4}$, hitunglah :

(a) $(2x - y)(3y + z)(5x - 2z)$

(b) $\frac{xy - 2z^2}{2ab - 1}$

(c) $\frac{3a^2b + ab^2}{2a^2 2b^2 + 1}$

(d) $\frac{(ax+by)^2 + (ay-bx)^2}{(ay+bx)^2 + (ax-by)^2}$

Jawab: (a) 2200 (b) 32 (c) $-\frac{51}{41}$ (d) 1

1.36. Tentukanlah himpunan nilai x di mana persamaan – persamaan berikut ini benar. Buktikanlah semua langkah dalam setiap kasus.

(a) $4\{(x-2) + 3(2x-1)\} + 2(2x+1) = 12(x+2) - 2$

(b) $\frac{1}{8-x} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{4}$

(c) $\sqrt{x^2 + 8x + 7} - \sqrt{2x + 2} = x + 1$

(d) $\frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \frac{3}{5}$

Jawab : (a) 2 (b) $6, -4$ (c) $-1, 1$ (d) $-\frac{1}{2}$

1.37. Buktikanlah bahwa $\frac{x}{(z-x)(x-y)} + \frac{y}{(x-y)(y-z)} + \frac{z}{(y-z)(z-x)} = 0$ dengan memberikan pembatasan jika ada.

BILANGAN RASIONAL dan BILANGAN IRASIONAL

1.38. Tentukanlah perpanjangan desimal untuk (a) $\frac{3}{7}$, (b) $\sqrt{5}$

Jawab : (a) $0{,}428571$, (b) $2{,}2360679$

1.39. Tunjukkanlah bahwa pecahan dengan penyebut 17 dan pembilang $1, 2, 3, \ldots, 16$ memiliki 16 digit pada bagian yang berulang dari perpanjangan desimalnya. Apakah terdapat hubungan antara urutan digit dalam panjang ini?

1.40. Buktikanlah bahwa $(a)\sqrt{3},\ (b)\sqrt[3]{2}$ adalah bilangan irasional.

1.41. Buktikanlah bahwa $(a)\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3},\ (b)\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ adalah bilangan irasional.

1.42. Tentukanlah sebuah bilangan rasional positif yang kuadratnya berbeda kurang dari 0,000001 terhadap 7.

1.43. Buktikanlah bahwa setiap bilangan rasional dapat dinyatakan sebagai sebuah desimal yang berulang.

1.44. Tentukanalah nilai – nilai x untuk persamaan berikut ini :

$(a)\ 2x^3-5x^2-9x+18=0$

$(b)\ 3x^3+4x^2-35x+8=0$

$(c)\ x^4-21x^2+4=0$

Jawab: (a) $3,-2,\ \frac{3}{2}$

(b) $\frac{8}{3},-2,\pm\sqrt{5}$

(c) $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{17}),\ \frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{17})$

1.45. Jika a, b, c, d adalah rasional dan m bukan merupakan sebuah kuadrat sempurna, buktikanlah bahwa $\mathrm{a}+\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{m}}=\mathrm{c}+\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{m}}$ jika dan hanya jika $\mathrm{a}=\mathrm{c}$ dan $\mathrm{b}=\mathrm{d}$.

1.46. Buktikanlah bahwa $\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}-2\sqrt{15}+14\sqrt{3}-7}{11}$.

KETIDAKSAMAAN

1.47. Tentukanlah himpunan nilai x untuk ketidaksamaan berikut ini :

(a)$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} \geq 5$,

(b)$x(x+2) \leq 24$,

(c)$|x+2| < |x-5|$,

(d) $\frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}$

Jawab. (a) $0 < x \leq \frac{1}{2}$,

(b) $-6 \leq x \leq 4$,

(c)$x < \frac{3}{2}$,

(d)$x > 3, -1 < x < -\frac{1}{3}$, atau $x < -2$

1.48. Buktikanlah bahwa:

(a) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(b)$|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$

(c) $|x-y| \geq |x| - |y|$

1.49. Buktikanlah bahwa $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ untuk semua bilangan real x, y, z.

1.50. Jika $a^2 + b^2 = 1$ dan $c^2 + d^2 = 1$, buktikanlah bahwa $ac + bd \leq 1$

1.51. Jika $x > 0$,buktikanlah bahwa $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}$ dimana n adalah sebarang bilangan bulat positif.

1.52. Buktikanlah bahwa $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$ untuk semua bilangan real $a \neq 0$.

1.53. Perlihatkanlah bahwa dalam ketidaksamaan Schwarz (Soal 1. 13) kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a_{p=kb_{p'}}$, $p = 1, 2, 3, \dots, n$ dimana k adalah sebarang konstanta.

1.54. Jika a_1, a_2, a_3 adalah bilangan positif, buktikanlah bahwa

$$\frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

EKSPONEN, AKAR, DAN LOGARITMA

1.55. Hitunglah (a) $4^{\log_2 8}$,

(b) $\frac{3}{4}\ \log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{128}\right)$,

(c) $\sqrt{\frac{(0{,}00004)(25.000)}{(0{,}02)^5(0{,}125)}}$,

(d) $3^{-2\log_3 5}$,

(e) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - (-27)^{-\frac{2}{3}}$

Jawab. (a) 64, (b) $\frac{7}{4}$, (c) 50.000, (d) $\frac{1}{25}$, (e) $-\frac{7}{144}$

1.56. Buktikanlah (a) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$, (b) $\log_a M^r = r\ \log_a M$ dengan menyatakan pembatas, jika ada.

1.57. Buktikanlah bahwa $b^{\log_b a} = a$ dengan memberikan pembatas, jika ada.

KETERHITUNGAN

1.58. (a) Buktikanlah bahwa terdapat korespondensisatu-satu antara titik-titik dalam interval $0 \leq x \leq 1$ dan $-5 \leq x \leq -3$. (b) Berapakah bilangan kardinal dari himpunan-himpunan pada (a)?

Jawab. (b) C, bilangan kardinal dari seri kontinu.

1.59. (a) Buktikanlah bahwa himpunan semua bilangan rasional dapat dihitung. (b) Berapakah bilangan kardinal dari himpunan pada (a) ?

Jawab. (b) $\aleph_0$

1.60. Buktikanlah bahwa himpunan (a) semua bilangan real, (b) semua bilangan irrasional adalah himpunan tak terhitung.

1.61. Irisan dua himpunan A dan B yang dinyatakan oleh $A \cap B$ atau AB, himpunan yang terdiri dari semua elemen yang termasuk dalm A dan B. Buktikanlah bahwa jika A dan B terhitung, maka irisannya pun terhitung.

1.62. Buktikanlah bahwa himpunan terhitung dari sekumpulan himpunan terhitung lain adalah himpunan terhitung.

1.63. Buktikanlah bahwa bilangan kardinal dari himpunan titik-titik di dalam sebuah bujursangkar sama dengan bilangan kardinal dari himpunan titik-titik pada (a) satu sisi, (b) keempat sisi, (c) berapakah bilangan kardinalnya dalam kasus ini ? (d) Apakah hasil yang sama berlaku pada sebuah kubus ?
Jawab. (c) C

TITIK LIMIT, BATAS, TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS

1.64. Jika diketahui himpunan bilangan 1; 1,1; 0,9; 1,01; 0,99; 1,001; 0,999; ...

(a) Apakah himpunan tersebut terbatas?

(b) Apakah himpunan tersebut memiliki batas atas terkecil dan batas bawah terbesar?

Jika demikian, tentukan batas atas terkecil dan batas bawah terbesar tersebut.

(c) Apakah himpunan tersebut memiliki titik limit?

Jika demikian, tentukanlah titik limit tersebut,

(d) Apakah himpunan tersebut tertutup ?

Jawab. (a) Ya

(b) batas atas terkecil = 1,1, batas bawah terbesar = 0,9

(c) 1,
(d) Ya

1.65. Jika diketahui himpunan -0,9; 0,9; -0,999; 0,99; -0,999; 0,999

jawab pertanyaan Soal nomor 1.64.

Jawab. (a) Ya

(b) batas atas terkecil = 1,1; batas bawah terbesar = 0,9

(c) 1, -1

(d) Tidak

1.66. Berikanlah sebuah contoh himpunan yang memiliki

(a) 3 titik limit, (b) tidak ada titik limit.

1.67. (a) Buktikanlah bahwa setiap titik dari interval $0 < x < 1$ adalah titik limit.

(b) Apakah ada titik limit yang tidak termasuk dalam himpunan pada (a)? Buktikanlah jawaban Anda.

1.68. Misalkan S adalah himpunan semua bilangan rasional di dalam (0,1) yang memiliki penyebut $2^n, n = 1, 2, 3, ...$

(a) Apakah S memiliki titik limit? (b) Apakah S tertutup?

1.69. (a) Berikanlah contoh himpunan yang memiliki titik-titik limit tetapi tidak terbatas.

(b) Apakah ini bertentangan dengan Teorema Bolzano-Weierstrass? Jelaskan.

BILANGAN ALJABAR DAN BILANGAN TRANSENDEN

1.70. Buktikanlah bahwa (a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ adalah bilangan-bilangan aljabar

1.71. Buktikanlah bahwa himpunan bilangan transenden dalam (0,1) adalah himpunan takterhitung.

1.72. Buktikanlah bahwa setiap bilangan rasional adalah bilangan aljabar tetapi setiap bilangan irrasional tidak selalu merupakan bilangan aljabar.

BENTUK POLAR DARI BILANGAN KOMPLEKS

1.73. Kerjakan setiap operasi berikut ini

(a) $2(5-3i)-3(-2+i)+5(i-3)$,

(b) $(3-2i)^3$

(c) $\frac{5}{3-4i}+\frac{10}{4+3i}$,

(d) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$

(e) $\left|\frac{2-4i}{5+7i}\right|^2$

(f) $\frac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$.

1.74. Jika $z_1$dan z_2 adalah bilangan kompleks, buktikanlah

(a) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, (b)$|z_1|^2=|z_2|^2$ dengan memberikan pembatas, jika ada.

1.75. Buktikanlah (a) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$,

(b)$|z_1+z_2+z_3|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|$,

(c) $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$.

1.76. Tentukanlah semua solusi dari $2x^4-3x^3-7x^2-8x+6=0$.

Jawab. 3, $\frac{1}{2}, -1\ \pm i$

1.77. Misalkan z_1 dan z_2 direpresentasikan oleh titik-titik P_1 dan P_2 pada diagram Argand. Gambarkanlah garis OP_1 dan garis OP_2 dimana O adalah titik asal. Perlihatkanlah bahwa z_1+z_2 dapat direpresentasikan oleh titik P_3, dimana OP_3 adalah diagonal jajargenjang (paralellogram) yang memiliki sisi-sisi OP_1 dan OP_2. Ini disebut hukum jajargenjang penjumlahan bilangan kompleks. Karena ini dan sifat-sifat lain, bilangan kompleks dapat dipertimbangkan sebagai vektor dalam dua dimensi.

1.78. Interpretasikanlah secara geometris ketidaksamaan pada Soal 1.75.

1.79. Nyatakanlah dalam bentuk polar (a) $3\sqrt{3}+3i$, (b) $-2-2i$,

(c) $1-\sqrt{3i}$, (d) 5, (e) $-5i$

Jawab.(a) $6\sqrt{2}$ cis $\frac{\pi}{6}$, (b) 2 cis $\frac{5\pi}{4}$, (c) 2 cis $\frac{5\pi}{3}$, (d) 5 cis 0, (e)5 cis $\frac{3\pi}{2}$

1.80. Hitunglah (a) $[2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)][5(\cos 110^\circ + i\ \sin 110^\circ)]$,

(b) $\frac{12 \text{ cis } 16^\circ}{(3 \text{ cis } 44^\circ)(2 \text{ cis } 62^\circ)}$,

Jawab. (a) $-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2i},$ (b) $-2i$

1.81. Tentukanlah semua akar persamaan berikut dan representasikanlah secara grafik :

(a) $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i)^{\frac{1}{3}}$, (b) $(-1)^{\frac{1}{5}}$, (c) $(\sqrt{3} - i)^{\frac{1}{3}}$, (d) $i^{\frac{1}{4}}$

Jawab.

(a) $2 \text{ cis } 15^\circ,\ 2 \text{ cis } 135^\circ,\ 2 \text{ cis } 255^\circ$

(b) $\text{cis } 36^\circ,\ \text{cis } 108^\circ, \text{cis } 180^\circ = -1,\ \text{cis } 252^\circ, \text{cis } 324^\circ$

(c) $\sqrt[3]{2} \text{ cis } 110^\circ,\ \sqrt[3]{2} \text{ cis } 230^\circ,\ \sqrt[3]{2} \text{ cis } 350^\circ$

(d) $\text{cis } 22{,}5^\circ, \text{cis } 112{,}5^\circ, \text{cis } 202{,}5^\circ, \text{cis } 292{,}5^\circ$.

1.82. Buktikanlah bahwa $-1 + \sqrt{3}$ i adalah bilangan aljabar.

1.83. Jika $z_1 = \rho_1 \text{ cis } \emptyset_1$ dan $z_2 = \rho_2 \text{ cis } \emptyset_2$, buktikanlah

(a)$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \text{ cis } (\emptyset_1 + \emptyset_2)$,

(b) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \text{ cis } (\emptyset_1 - \emptyset_2$. Interpretasikanlah secara geometrik.

INDUKSI MATEMATIKA

Buktikanlah tiap-tiap pernyataan matematik berikut ini.

1.84 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

1.85. $\frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,5} + \frac{1}{5\,.\,7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

1.86. $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$

1.87. $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{3\,.\,4\,.\,5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

1.88. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1$

1.89. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

1.90. $1(5) + 2(5)^2 + 3(5)^3 + \cdots + n(5)^{n-1} = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

1.91. $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ dapat dibagi oleh $x + y$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

1.92. $(\cos \emptyset + i \sin \emptyset)^n = \cos n\emptyset + i \sin n\emptyset$. Dapatkah ini dibuktikan jika n adalah sebuah bilangan rasional?

1.93. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

1.94. $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

1.95. $(a + b)^n = a^n + nC1\, a^{n-1}b + nCa^{n-2}b^2 + \cdots + nCn - 1\, ab^{n-1} + bn$ dimana $nCr = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = nCn - r$. Disini $p! = p(p - 1) \ldots 1$ dan 0! Didefinisikan 1. Ini disebut teorema binomial. Koefisien-koefisien $nC0 = 1, nC1 = n, nC2 = \frac{n-(n-1)}{2!}, \ldots nCn = 1$ disebut koefisien-koefisien binomial nCr juga ditulis sebagai $\binom{n}{r}$

SOAL LAIN – LAIN

1.96. Nyatakanlah setiap bilangan bulat (skala 10) berikut ini dalam skala notasi yang tertera dalam kurung. (a) 87 (dua), (b) 64 (tiga), (c) 1736 (sembilan). Periksalah setiap jawaban anda.

Jawab : (a) 1010111, (b) 2101, (c) 2338

1.97. Jika sebuah bilangan adalah 144 dalam skala 5, berapakah bilangan tersebut dalam skala (a) 2, (b) 8?

1.98. Buktikanlah bahwa setiap bilangan rasional $\frac{p}{q}$ antara 0 dan 1 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots$$

Dimana a dapat ditentukan secara unik sebagai 0 atau 1, dan dimana proses tersebut dapat berakhir atau tidak. Karenanya representasi $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ disebut bentuk biner bilangan rasional tersebut. [Petunjuk: kalikanlah kedua ruas berturut – turut dengan 2 dan lihatlah sisinya].

1.99. Nyatakanlah $\frac{2}{3}$ dalam skala (a) 2, (b) 3, (c) 8, (d) 10

Jawab : (a) $0{,}1010101, \ldots$ (b) 0,2 atau $0{,}2000, \ldots$ (c) $0{,}5252, \ldots$ (d) $0{,}6666, \ldots$

1.100. Sebuah bilangan dalam skala dua adalah $11{,}01001$. Berapakah bilangan tersebut dalam skala 10?

Jawab : $3{,}18125$

1.101. Dalam skala notasi berapakah $3 + 4 = 12$?

Jawab : 5

1.102. Dalam skala 12, dua simbol tambahan t dan e harus digunakan untuk menunjukkan berturut – turut "digit" 10 dan 11. Dengan menggunakan simbol – sombol ini, representasikanlah bilangan bulat 5110 (skala 10) kedalam skala 12.

Jawab : $2e5t$

1.103. Tentukanlah sebuah bilangan rasional yang perpanjangan desimalnya sama dengan $1,636363$ ...

Jawab : $\frac{18}{11}$

1.104. Sebuah bilangan dalam skala 10 terdiri dari 6 digit. Jika digit terakhir dipindahkan dan ditempatkan sebelum digit pertama, maka bilangan baru tersebut sama dengan sepertiga dari bilangan aslinya. Tentukanlah bilangan aslinya.

Jawab : 428571

1.105. Perlihatkanlah bahwa bilangan rasional membentuk sebuah field.

1.106. Dengan menggunakn hubungan 1 – 9 pada Halaman 2 sebagai aksioma, buktikanlah bahwa

(a) $(-3)(0) = 0$, (b) $(-2)(+3) = -6$, (c) $(-2)(-3) = 6$

1.107. (a) Jika x adalah sebuah bilangan rasional yang kuadratnya lebih kecil daripada 2, tunjukkanlah bahwa $\frac{x+(2-x^2)}{10}$ adalah bilangan semacam itu yang lebih besar. (b) Jika x adalah sebuah bilangan rasional yang kuadratnya lebih besar daripada 2, tentukanlah sebuah bilangan rasional yang kuadrastnya lebih besar daripad 2 dalam bentuk x.

1.108. Perhatikanlah bagaimana anda dapat menggunakan potongan Dedekind untuk mendefinisikan

(a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, (c) $(\sqrt{3})(\sqrt{2})$, (d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

INDEKS: