DAFTAR ISI

BAB 3
FUNGSI, LIMIT, DAN KONTINUITAS

3.1 FUNGSI

Sebuah fungsi terdiri dari himpunan domain, himpunan daerah hasil (*range*) , dan aturan korespondensi yang memberikan tepat satu elemen pada daerah hasil untuk setiap elemen pada domain. Definisi fungsi ini tidak memberikan batasan mengenai sifat dasar dari elemen-elemen kedua himpunan. Akan tetapi, pada awal pembahasan tentang kalkulus, elemen-elemen ini akan merupakan bilangan-bilangan real. Aturan korespondensi dapat terwujud dalam berbagai bentuk, tetapi dalam kalkulus lanjut seringkali hubungan ini dalam wujud sebuah persamaan atau himpunan persamaan.

Jika elemen-elemen dari domain dan daerah hasil diwakili oleh berturut-turut x dan y, dan f melambangkan fungsinya, maka aturan hubungan akan berbentuk $y = f(\text{x})$. Perbedaan antara f dan $f(x)$ harus terus diingat. f menyatakan fungsi sebagaimana didefinisikan pada paragraf pertama. Simbol y dan $f(x)$ adalah simbol yang berbeda untuk nilai-nilai daerah hasil (atau bayangan) yang berkorespondensi dengan nilai-nilai domain x. Akan tetapi “praktek yang umum” yang mempermudah penyajian adalah membaca $f(x)$ sebagai “bayangan x terhadap fungsi f” dan kemudian menggunakannya ketika mengacu kepada fungsi. (Sebagai contoh, lebih sederhana untuk menulis sin x daripada “fungsi sinus, yang nilai bayangannya adalah sin x.”) Penyimpanan dari notasi yang presisi ini akan muncul dalam pembahasan karena kegunaannya dalam menyajikan gagasan.

Variabel domain x disebut domain bebas (atau variabel terikat/dependen). Variabel y merepresentasikan korespondensi nilai-nilai dalam daerah hasilnya., adalah variabel tidak bebas (atau variabel independen).

Catatan: Tidak ada alasan khusus dalam penggunaan x, y, dan f untuk merepresentasikan domain, daerah hasil, dan fungsi. Banyak huruf-huruf lain yang dapat digunakan.

Terdapat banyak cara untuk menghubungkan elemen-elemen dari dua himpunan. [Tidak semuanya harus berkorespondensi sebuah nilai daerah-hasil yang unik dengan sebuah nilai domain tertentu.] Sebagai contoh, jika diketahui persamaan $y^2 = x$, terdapat dua pilihan y untuk setiap nilai positif x. Sebagai contoh lain, pasangan (a,b), (a,c), (a,d), dan (a,e) dapat dibentuk dan kembali korespodensi ke nilai domainnya tidak unik. Karena kemungkinan-kemungkinan yang demikian, sejumlah buku, khususnya buku-buku lama, membedakan antara fungsi-fungsi bernilai ganda dengan fungsi-sungsi bernilai tunggal. Sudut pandang ini tidak konsisten dengan definisi kami atau dengan penyajian modern. Agar tidak terjadi ambiguitas, kalkulus dan aplikasinya membutuhkan satu bayangan tunggal yang diasosiasikan dengan setiap nilai domain. Aturan korespondensi bernilai rangkap menimbulkan sekumpulan fungsi (misalnya bernilai tunggal). Jadi, aturan $y^2 = x$ digantikan dengan sepasang aturan $y = x^{\frac{1}{2}}$ dan $y = -x^{\frac{1}{2}}$ dan fungsi yang muncul melalui penentuan domain-domain. (Lihat bagian selanjutnya mengenai grafik untuk ilustrasi gambar.)

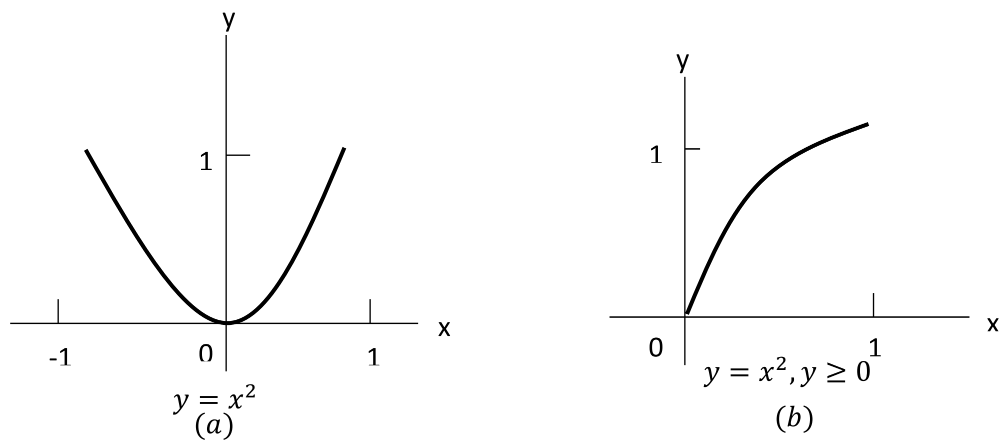
CONTOH

1. Jika untuk setiap bilangan dalam $-1 \leq x \leq 1$ kita mengasosiasikan sebuah bilangan y yang ditentukan oleh x^2, maka interval $-1 \leq x \leq 1$ adalah domain. Aturan $y = x^2$ menghasilkan daerah hasil $-1 \leq y \leq 1$. Keseluruhannya adalah sebuah fungsi f.
   Bayangan fungsional dari x ditentukan oleh $y = f(x) = x^2$. Sebagai contoh, $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ adalah bayangan dari $-\frac{1}{3}$ terhadap fungsi f.
2. Barisan pada Bab 2 dapat diinterpretasikan sebagai fungsi. Untuk barisan tak terhingga anggaplah domain sebagai himpunan bilangan bulat positif. Aturannya adalah definisi u_n dan daerah hasil diperoleh dari aturan ini. Untuk menggambarkan, misalkan $U_n = \frac{1}{n}$ di mana $n =$ 1, 2, … Maka daerah hasil berisi elemen-elemen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ... Jika fungsi dilambangkan dengan f, maka kita dapat menulis $f(n) = \frac{1}{n}$.
   Sambil membaca bab ini, akan sangat berguna apabila Anda mempelajari kembali Bab 2, dan secara khusus membandingkan bagian-bagian yang sama.
3. Untuk setiap waktu t setelah tahun 1800 kita dapat mengasosiasikan sebuah nilai P untuk populasi penduduk Amerika Serikat. Hubungan antara P dan t mendefinisikan sebuah fungsi, misalnya F, dan kita dapat menulis $P = F(t)$.
4. Untuk saat ini, baik domain maupun daerah hasil suatu fungsi telah dibatasi oleh himpunan-himpunan bilangan real. Pada akhirnya batasan ini akan dihilangkan. Untuk mendapatkan pernyataan umum, pikirkan peta dunia pada sebuah globe dengan garis lintang dan bujur sebagai kurva-kurva koordinat. Asumsikan terdapat sebuah aturan yang menghubungkan domain ini dengan suatu daerah hasil yang merupakan area bidang yang memiliki sistem koordinat Cartesius rektangular. (Sehingga tercipta sebuah peta rata yang dapat digunakan untuk navigasi dan tujuan-tujuan lain.) Titik-titik domain tersebut dinyatakan sebagai pasangan bilangan $(\theta, \emptyset)$ dan titik-titik daerah hasil dinyatakan sebagai pasangan (x,y). Himpunan-himpunan dan aturan korespondensi ini menyusun sebuah fungsi yang variabel bebas dan variabel tidak bebasnya bukan merupakan bilangan real tunggal, tetapi merupakan pasangan bilangan real.

3.2 GRAFIK FUNGSI

Sebuah fungsi *f* menentukan sebuah himpunan pasangan bilangan real yang berurut (*x*,*y*). Plot pasangan ini (*x*, *f*(*x*)) dalam sebuah sistem koordinat adalah grafik *f*. Hasilnya dapat diasumsikan sebagai sebuah representasi gambar dari fungsi.

Sebagai contoh, grafik-grafik fungsi dijelaskan oleh $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, dan $y^2 = x$, $0 \le x \le 1, y \ge 0$ seperti tampak pada Gambar 3-1.



Gambar 3-1

3.3 FUNGSI-FUNGSI TERBATAS

Jika terdapat konstanta M yang sedemikian sehingga $f(x) \le M$ untuk semua *x* dalam sebuah interval (atau himpunan bilangan lain), maka kita mengatakan bahwa *f* terbatas di atas dalam interval (atau himpunan) tersebut dan menyebutkan *M* sebagai batas atas fungsi.

Jika terdapat konstanta m yang sedemikian sehingga $f(x) \ge m$ untuk semua *x* dalam sebuah interval, maka kita mengatakan bahwa *f*(*x*) adalah terbatas di bawah dalam interval tersebut dan menyebut m sebagai batas bawah. Jika $m \le f(x) \le M$ dalam sebuah interval, kita mengatakan *f*(*x*) terbatas. Seringkali, saat kita ingin mengindikasikan bahwa sebuah fungsi terbatas, maka kita menuliskan $|f(x)| < P$.

CONTOH

1. $f(x) = 3 + x$ adalah terbatas dalam $-1 \le x \le 1$. Batas atas adalah 4 (atau sebarang bilangan yang lebih besar dari 4). Batas bawah adalah 2 (atau sebarang bilangan yang lebih kecil dari 2).

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah tidak terbatas dalam $0 < x < 4$ karena dengan memilih *x* cukup dekat dengan nol,maka *f*(*x*) dapat dibuat sebesar yang kita inginkan sehingga tidak ada batas atas. Akan tetapi, batas bawah diketahui sebagai $\frac{1}{4}$ (atau sebarang bilangann yang lebih kecil dari $\frac{1}{4}$).

Jika *f*(*x*) memiliki batas atas, maka *f*(*x*) memiliki batas atas terkecil; jika *f*(*x*) memiliki batas bawah, maka *f*(*x*) memiliki batas bawah terbesar. (Lihat Bab 1 mengenai definisi-definisi ini.)

3.4 FUNGSI-FUNGSI MONOTONIK

Sebuah fungsi disebut bertambah secara monotonik dalam sebuah interval jika untuk sebarang dua titik x_1 dan x_2 dalam interval tersebut sedemikian sehingga $x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$. Jika $f(x_1) < f(x_2)$, maka fungsi tersebut dikatakan bertambah sepenuhnya. Dengan cara yang sama, jika $f(x_1) \geq f(x_2)$ ketika $x_1 < x_2$, maka *f*(*x*) berkurang secara monotonik; tetapi jika $f(x_1) > f(x_2)$, fungsi tersebut dikatakan berkurang sepenuhnya.

3.5 FUNGSI-FUNGSI INVERS , NILAI-NILAI UTAMA

Misalkan *y* adalah variabel daerah hasil dari fungsi *f* dengan variabel domain *x*. Lebih lanjut, misalkan korespondensi antara nilai-nilai domain dan daerah hasil adalah satu-satu. Maka fungsi yang baru f^{-1}, disebut fungsi invers dari *f*, dapat dibuat dengan menukar domain dan daerah hasil dari *f*. Informasi ini dinyatakan dalam bentuk $x = f^{-1}(y)$.

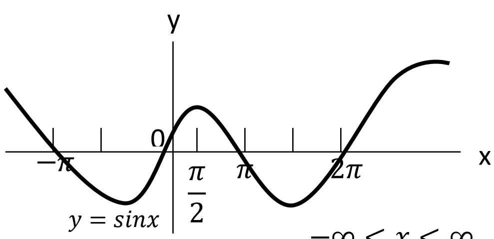
Karena Anda bekerja dengan fungsi invers, seringkali lebih memudahkan untuk menamai ulang variabel domain sebagai *x* dan menggunakan *y* untuk melambangkan bayangan-bayangannya, sehingga notasinya adalah $x = f^{-1}(y)$. Secara khusus, ini memungkinkan pernyataan grafik fungsi invers dengan domainnya pada sumbu horizontal.

Catatan: f^{-1} tidak berarti *f* pangkat negatif satu. Ketika digunakan dengan fungsi, notasi f^{-1}selalu menunjukkan fungsi invers terhadap *f*. Jika elemen-elemen domain dan daerah hasil dari *f* bukan merupakan korespodensi satu-satu (ini tentunya berarti bahwa beberapa elemen domain yang berbeda memiliki bayangan yang sama), maka kumpulan fungsi satu-satu dapat dibuat. Tiap-tiap fungsi tersebut dinamakan cabang. Seringkali lebih mudah untuk memilih satu cabang ini, yang disebut cabang utama, dan menyatakannya sebagai fungsi invers f^{-1}. Nilai-nilai daerah hasil *f* yang menyusun cabang utama, sehingga menyusun domain f^{-1}, disebut nilai-nilai utama. (Sebagaimana akan tampak pada bab yang membahas fungsi dasar adalah merupakan praktek umum untuk menyebutkan nilai-nilai utama ini untuk kelas fungsi tersebut.)

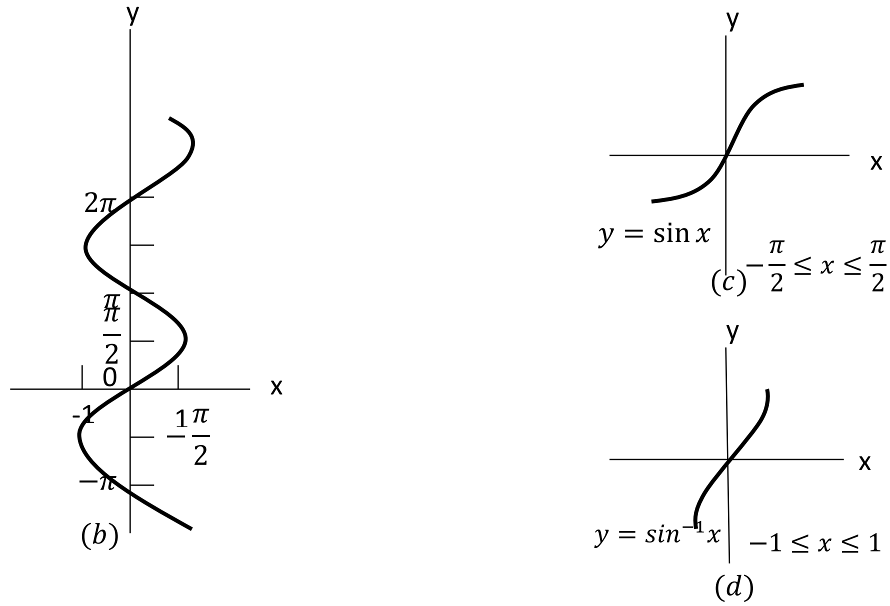
CONTOH Asumsikan bahwa f dihasilkan oleh $y = \sin x$ dan domainnya adalah $-\infty \leq x \leq \infty$. Maka terdapat tak terhingga banyaknya nilai domain yang memiliki bayangan yang sama. (Bagian terhingga dari grafik diperlihatkan pada Gambar 3-2(a).) Pada Gambar 3-2(b) grafik tersebut diputar pada garis sejauh 45° sehingga sumbu x berada diposisi sumbu y. Kemudian variabel-variabel ini dipetukarkan, sehingga sumbu x kembali lagi ke horizontal. Kita lihat bahwa bayangan dari sebuah nilai x adalah tidak unik. Oleh karena itu, sebuah himpunan nilai-nilai utama harus dipilih untuk menentukan fungsi invers. Pilihan cabang dicapai dengan membatasi domain fungsi awal, sin x. Sebagai contoh, pilih $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Maka terdapat korespodensi satu-satu antara elemen-elemen dari domain ini dan bayangan-bayangannya dalam $-1 \leq x \leq 1$. Jadi f^{-1} dapat didefinisikan dalam interval ini sebagaimana domainnya. Gagasan ini diperlihatkan pada Gambar 3-2(c) dan Gambar 3-2(d). Dengan domain f^{-1} yang direpresentasikan pada sumbu horizontal dan oleh variabel x, kita menulis $y = sin^{-1}x, -1 \leq x \leq 1$.

Jika $x = -\frac{1}{2}$, maka nilai daerah hasilnya adalah $y = -\frac{\pi}{6}$.

Catatan: Dalam aljabar, b^{-1} berarti $\frac{1}{b}$ dan fakta bahwa bb^{-1} menghasilkan elemen identitas 1 tidak lain merupakan aturan aljabar yang digeneralisasi dari aritmatika. Penggunaan lambang eksponensial yang sama untuk fungsi invers dibenarkan karena karakteristik aljabar yang serupa juga diperlihatkan oleh $f^{-1}[f(x)] = x$ dan $f[f^{-1}(x)] = x$.



(a)



Gambar 3-2

3.6 NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM

Perkembangan kalkulus pada abad ketujuh belas banyak diilhami oleh pertanyaan-pertanyaan yang berkaitan dengan nilai-nilai ekstrim fungsi. Hal paling penting dalam kalkulus dan aplikasinya adalah masalah nilai ekstrim lokal, yang disebut maksimum relatif dan minimum relatif. Jika grafik dari sebuah fungsi dianalogikan dengan jalur yang melintasi bukit dan lembah, nilai ekstrim lokal adalah titik tertinggi dan terendah disepanjang jalur tersebut. Sudut pandang intuitif ini matematika melalui definisi berikut ini.

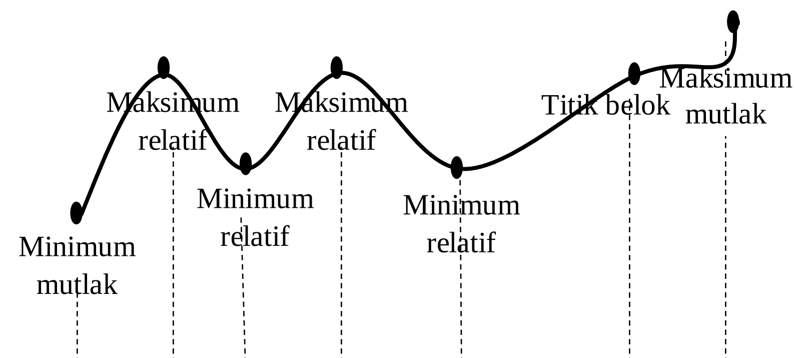
Definisi: Jika terdapat sebuah interval terbuka (*a*,*b*) yang mengandung *c* sedemikian sehingga $f(x) < f(c)$ untuk semua *x* selain *c* dalam interval tersebut, maka *f*(*c*) merupakan maksimum relatif dari *f*. Jika $f(x) > f(c)$ untuk semua x pada (*a*,*b*) selain *c*, maka *f*(*c*) adalah nilai minimum relatif dari *f*. Fungsi-fungsi mungkin memiliki beberapa nilai ekstrim relatif. Di lain pihak, beberapa fungsi mungkin tidak memiliki satupun, sebagaimana dalam kasus fungsi yang bertambah atau berkurang sepenuhnya sebagaimana didefinisikan sebelumnya.

Definisi: Jika c berada dalam domain *f* dan untuk semua *x* dalam domain dari fungsi tersebut $f(x) \leq f(c)$, maka *f*(*c*) adalah maksimum mutlak dari fungsi *f*. Jika untuk semua *x* dalam domain tersebut $f(x) \geq f(c)$, maka *f*(*c*) adalah minimum mutlak dari fungsi *f*. (Lihat Gambar 3-3.)

Catatan: Jika didefinisikan dalam interval tertutup, fungsi-fungsi yang bertambah dan berkurang sepenuhnya memiliki nilai ekstrim mutlak.

Nilai ekstrim mutlak tidak selalu harus unik. Sebagai contoh, jika grafik suatu fungsi adalah garis horizontal, maka setiap titik adalah maksimum mutlak dan minimum mutlak.

Catatan: Satu titik belok juga diperlihatkan pada Gambar 3-3. Terdapat tumpang tindih dengan nilai ekstrim relatif dalam representasi titik-titik semacam ini melalui turunan-turunan yang akan dibahas dalam soal-soal Bab 4.



Gambar 3-3

3.7 JENIS-JENIS FUNGSI

Penting untuk disadari bahwa terdapat sekelompok fungsi fundamental dalam kalkulus dasar dan kalkulus lanjut. Fungsi-fungsi ini disebut fungsi elementer. Fungsi-fungsi ini dapat dihasilkan dari sebuah variabel real *x* melalui operasi-operasi aljabar dasar, termasuk pangkat dan akar, atau mereka memiliki interpretasi geometrik yang cukup sederhana. Sebagaimana dinyatakan dari nama "fungsi elementer", terdapat kategori fungsi yang lebih umum (yang mana, pada kenyataannya, adalah tergantung pada fungsi elementer). Beberapa di antaranya akan dibahas lebih lanjut dalam buku ini. Fungsi-fungsi elementer dijelaskan di bawah ini.

1. Fungsi-fungsi polinomial memiliki bentuk

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

   di mana $a_0, \dots, a_n$ adalah kostanta dan *n* adalah bilangan bulat positif yang disebut derajat dari polinomial jika $a_0 \neq 0$. Teorema fundamental aljabar menyatakan bahwa dalam field bilangan kompleks setiap persamaan polinomial memiliki setidaknya satu akar. Sebagai konsekuensi dari teorema ini, dapat dibuktikan bahwa setiap polinomial berderajat *n* memiliki *n* akar dalam field kompleks. Ketika bilangan kompleks digunakan, polinomial secara teoretis dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari *n* faktor linier; dengan batasan kita atas bilangan real, maka dimungkinkan bahwa *2k* akar adalah kompleks. Dalam kasus ini, *k* faktor yang menghasilkannya akan kuadratik. (Akar-akarnya adalah pasangan kompleks yang konjugat.) Polinomial $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = (x-3)(x^2 - 2x + 5)$ menggambarkan gagasan ini.

2. Fungsi-fungsi aljabar adalah fungsi-fungsi $y = f(x)$ yang memenuhi persamaan dengan bentuk

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

   di mana $P_0(x), \dots, P_n(x)$ adalah polinomial-polinomial dalam *x*.
   Jika fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dari dua polinomial, yaitu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ di mana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial-polinomial, fungsi ini disebut fungsi aljabar rasional; atau jika tidak dapat dinyatakan sebagai hasilbagi dari dua polinomial, fungsi ini disebut fungsi aljabar irasional.
3. Fungsi-fungsi transenden adalah fungsi-fungsi yang bukan merupakan fungsi aljabar, dengan kata lain, tidak memenuhi persamaan. Perhatikan analogi dengan bilangan-bilangan real, polinomial berkorespondensi dengan bilangan bulat, fungsi rasional berkorespondensi dengan bilangan rasional, dan seterusnya.

3.8 FUNGSI-FUNGSI TRANSENSDEN

Berikut ini adalah fungsi yang kadang-kadang disebut fungsi-fungsi transenden elementer.

1. Fungsi Eksponensial: $f(x) = a^x, a \neq 0{,}1$.
2. Fungsi Logaritma: $f(x) = log_a x, a \neq 0{,}1$. Fungsi ini dan fungsi eksponensial adalah fungsi-fungsi invers. Jika $a = e = 2,\ 71828$ ..., disebut basis logaritma natural, kita menulis $f(x) = log_e x = \ln x$, disebut logaritma natural *x*.
3. Fungsi Trigonometri: (Juga disebut fungsi sirkuler karena interpretasi geometriknya adalah satuan lingkaran):

$$\sin x, \cos x, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Variabel *x* umumnya dinyatakan dalam radian (π radian = 180°). Untuk nilai-nilai *x* yang real, sin *x* dan cos *x* terletak antara -1 dan 1 termasuk didalamnya.

Berikut ini adalah beberapa sifat dari fungsi trigonometri:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = csc^2 x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \sin(-x) = -\sin x$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\ cox\ y \mp \sin x \sin y \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x\ \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

4. Fungsi Invers Trigonometri. Berikut ini adalah daftar fungsi-fungsi invers trigonometri dan nilai-nilai utamanya:
   $(a) y = \sin^{-1} x, \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$
   $(b) y = cos^{-1} x, (0 \leq y \leq \pi)$
   $(c) y = tan^{-1} x, \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$
   $(d) y = csc^{-1} x = sin^{-1} \frac{1}{x}, \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$
   $(e) y = sec^{-1} x = cos^{-1} \frac{1}{x}, (0 \leq y \leq \pi)$
   $(f) y = cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - tan^{-1} x, (0 < y < \pi)$
5. Fungsi Hiperbolik dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi eksponensial seperti dituliskan di bawah ini. Fungsi-fungsi ini dapat diinterpretasikan secara geometrik, seperti halnya fungsi trigonometri tetapi dengan satuan hiperbola.

   $(a) \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $(d) \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

   $(b) \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $(e) \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

   $(c) \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad$ $(f) \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

   Berikut ini adalah sejumlah sifat dari fungsi hiperbolik ini:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh\ y \pm \cosh x \sinh y \qquad \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x\ \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \qquad \tanh(-x) = -\tanh x$$

6. Fungsi invers Hiperbolik. Jika $x = \sinh y$ maka $y = \sinh^{-1} x$ adalah invers sin hiperbolik dari x. Daftar berikut ini menyajikan nilai-nilai utama dari fungsi invers hiperbolik dalam bentuk logaritma natural dan domain-domain bernilai real.
   $(a) sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, untuk semua x
   $(b) cosh^{-1} x = \ln(\ x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$

$$(c)\ tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$$
$$(d)\ csch^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right), x \neq 0$$
$$(e)\ sech^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1$$
$$(f)\ coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), |x| > 1$$

3.9 LIMIT FUNGSI

Misalkan *f*(*x*) dapat didefinisikan dan bernilai tunggal untuk semua nilai *x* disekitar *x* = x_0 dengan pengecualian untuk $x = x_0$ itu sendiri (yaitu, dalam lingkungan δ yang terhapus dari x_0). Kita mengatakan bahwa bilangan *l* adalah 2untuk sebarang bilangan positif ϵ (seberapapun kecilnya) kita dapat menentukan bilangan positif δ (biasanya tergantung pada ϵ) sedemikian sehingga $|f(x) - l| < \epsilon$ bilamana $0 < |x - x_0| < \delta$. Dalam kasus semacam ini, kita juga menyatakan bahwa *f*(*x*) mendekati l pada saat *x* mendekati x_0 dan menulis $f(x) \rightarrow l$ pada saat $x \rightarrow x_0$.

Dengan kata lain, ini berarti kita dapat membuat *f*(*x*) mendekati *l* dengan memilih *x* yang cukup dekat dengan x_0.

CONTOH Misalkan $f(x) = \begin{vmatrix} x^2\ jika\ x \neq 2 \\ 0\ \ jika\ x = 2 \end{vmatrix}$. Maka saat *x* semakin dekat ke 2 (*x* mendekati 2), *f*(*x*) semakin mendekati 4. Jadi, kita menduga bahwa $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Untuk membuktikan ini kita harus melihat apakah definisi limit di atas (dengan l = 4) terpenuhi. Perhatikan bahwa $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, yaitu limit *f*(*x*) pada saat $x \rightarrow 2$ tidak sama dengan nilai *f*(*x*) pada *x* = 2 karena berdasarkan definisi *f*(2) = 0. Limit tersebut sesungguhnya adalah 4 meskipun jika *f*(*x*) tidak dapat didefinisikan pada *x* = 2.

3.10 LIMIT KANAN DAN LIMIT KIRI

Dalam definisi limit tidak ada batasan mengenai bagaimana *x* harus mendekati x_0. Kadang-kadang lebih mudah untuk membatasi pendekatan ini. Dengan meninjau *x* dan x_0 dari kanan atau dari kiri. Kita mengindikasikan pendekatan ini berturut-turut dengan menuliskan $x \rightarrow x_0 +$ dan $x \rightarrow x_0 -$.

Jika $\lim_{x\to x_0+} f(x) = l_1$ dan $\lim_{x\to x_0-} f(x) = l_2$, kita menyebut l_1 dan l_2 berturut-turut sebagai limit kanan dan limit kiri dari *f* pada x_0 dan menyatakannya sebagai $f(x_0+)$ atau $f(x_0 + 0)$ dan $f(x_0-)$ atau $f(x_0 - 0)$. Lambang ϵ, definisi δ dari limit f(x) pada saat $x \rightarrow x_0 +$ atau $x \rightarrow x_0 -$ adalah sama dengan definisi δ dari limit untuk $x \rightarrow x_0$ kecuali untuk fakta bahwa nilai-nilai x adalah terbatas pada berturut-turut $x > x_0$ atau $x < x_0$.

Kita mempunyai $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ jika dan hanya jika $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = l$.

3.11 TEOREMA LIMIT

Jika $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, maka

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A + B$
2. $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = A - B$
3. $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = AB$
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \qquad jika\ B \neq 0$

Hasil yang sama berlaku untuk limit-limit kanan dan kiri.

3.12 KETAKTERHINGGAAN (*INFINITY*)

Kadang-kadang terjadi bahwa pada saat $x \to x_0, f(x)$ bertambah atau berkurang tanpa batas. Dalam kasus semacam ini, merupakan hal yang lazim untuk menulis berturut-turut $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ atau $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Simbol $+\infty$ (juga ditulis sebagai ∞) dan $-\infty$ dibaca berturut-turut sebagai plus tak terhingga (atau tak terhingga) dan minus tak terhingga, tetapi harus ditekankan bahwa simbol-simbol tersebut bukanlah bilangan.

Dalam bahasa yang lebih presisi, kita mengatakan bahwa $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ jika untuk setiap bilangan positif M kita dapat menetukan sebuah bilangan positif δ (tergantung pada M secara umum) sedemikian sehingga $f(x) > M$ bilamana $0 < |x - x_0| < \delta$. Dengan cara yang sama, kita mengatakan bahwa $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ jika untuk setiap bilangan positif M kita dapat menentukan sebuah bilangan positif δ sedemikian sehingga $f(x) < -M$ bilamana $0 < |x - x_0| < \delta$. Hal yang serupa juga berlaku untuk $x \to x_0 +$ atau $x \to x_0 -$.

Seringkali kita berkeinginan untuk memeriksa perilaku sebuah fungsi saat x bertambah atau berkurang tanpa batas. Dalam kasus semacam ini merupakan hal yang lazim untuk menulis berturut-turut $x \to +\infty$ (atau ∞) atau $x \to -\infty$.

Kita mengatakan bahwa $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$, atau $f(x) \to l$ sebagaimana $x \to +\infty$, jika untuk sebarang bilangan positif ϵ kita dapat menentukan sebah bilangan positif N

(tergantung pada ϵ secara umum) sedemikian rupa sehingga $|f(x) - l| < \epsilon$ bilamana $x > N$. Definisi yang serupa juga dapat dirumuskan untuk $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3.13 LIMIT-LIMIT KHUSUS

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
2. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$, $\quad \lim_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\quad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x} = 1$

3.14 KONTINUITAS

Misalkan *f* didefinisikan untuk semua *x* yang mendekati $x = x_0$ dan juga pada $x = x_0$ (dalam lingkungan δ dari x_0). Fungsi *f* disebut kontinu pada $x = x_0$ jika $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Perhatikan bahwa ini mengimplikasi tiga kondisi yang harus terpenuhi agar $f(x)$ kontinu pada $x = x_0$.

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ harus ada.
2. $f(x_0)$ harus ada, artinya $f(x)$ dapat didefinisikan pada x_0.
3. $l = f(x_0)$

Singkatnya, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ adalah nilai untuk *f* pada $x = x_0$ berdasarkan perilaku *f* dalam lingkungan kecil x_0, maka *f* adalah kontinu dititik ini.

Dengan cara yang sama, jika *f* adalah kontinu pada x_0, kita dapat menulis ini dalam bentuk yang disarankan $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$.

CONTOH

1. Jika $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ maka dari contoh pada Halaman 36 $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Tetapi $f(2) = 0$. Sehingga $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ dan fungsi tersebut tidak kontinu pada $x = 2$.
2. Jika $f(x) = x^2$ untuk semua *x*, maka $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$ dan $f(x)$ kontinu pada $x = 2$.

Titik-titik di mana $f(x)$ tidak kontinu disebut diskontinuitas dari f dan f dikatakan diskontinu pada titik-titik tersebut.

Dalam menggambarkan grafik suatu fungsi yang kontinu, pensil tidak pernah perlu diangkat dari atas kertas, sementara untuk sebuah fungsi yang diskontinu hal itu tidak terjadi karena terdapat sebuah loncatan. Tentu saja ini hanyalah sifat karakteristiknya dan bukan merupakan suatu definisi kontinuitas atas diskontinuitas.

Sebagai alternatif definisi kontinuitas di atas, kita dapat mendefinisikan f sebagai kontinu pada $x = x_0$ jika untuk sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ bilamana $|x - x_0| < \delta$. Perhatikan bahwa ini tidak lain merupakan definisi limit dengan $l = f(x_0)$ dan penghilangan batas bawah $x \neq x_0$.

3.15 KONTINUITAS KANAN DAN KIRI

Jika f dapat didefjnisikan hanya untuk $x \geq x_0$, definisi di atas tidak berlaku. Dalam kasus semacam ini kita menyebut f kontinu (di kanan) pada $x = x_0$ jika $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$, yaitu jika $f(x_0 +) = f(x_0)$. Demikian juga, f kontinu (di kiri) pada $x = x_0$ jika $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$, yaitu $f(x_0 -) = f(x_0)$. Definisi-definisi bentuk ϵ dan δ dapat diberikan.

3.16 KONTINUITAS DALAM SEBUAH INTERVAL

Sebuah fungsi f dikatakan kontinu dalam sebuah interval jika fungsi tersebut kontinu pada semua titik dalam interval tersebut. Khususnya, jika f dapat didefinisikan dalam interval tertutup $a \leq x \leq b$ atau $[a, b]$, maka f adalah kontinu dalam interval jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ untuk $a < x_0 < b$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ dan $\lim\limits_{x \to b+} f(x) = f(b)$.

3.17 TEOREMA KONTINUITAS

Teorema 1. Jika f dan g kontinu pada $x = x_0$, maka demikian juga fungsi-fungsi yang nilai-nilai bayangannya memenuhi hubungan $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x)$ dan $\frac{f(x)}{g(x)}$, yang terakhir hanya jika $g(x_0) \neq 0$. Hasil yang serupa berlaku untuk kontnuitas dalam sebuah interval.

Teorema 2. Fungsi-fungsi yang dijelaskan berikut ini adalah kontinu dalam setiap interval terhingga: (a) semua polinomial; (b) sin x dan cos x; (c) $a^x,\ a > 0$.

Teorema 3. Misalkan fungsi f adalah kontinu pada nilai domain $x = x_0$. Selain itu misalkan juga sebuah fungsi g, yang diwakili oleh $z = g(y)$, adalah kontinu pada y_0, di mana $y = f(x)$ (nilai daerah hasil dari f yang berkorespondensi dengan x_0 adalah nilai domain dari g). Dalam hal ini, sebuah fungsi baru, yang disebut fungsi komposit, $f(g)$, yang direpresentasikan oleh $z = g[f(x)]$, dapat dibuat di mana fungsi tersebut kontinu pada titik domainnya $x = x_0$. [Orang menyatakan bahwa suatu fungsi kontinu dari sebuah fungsi kontinu adalah kontinu.]

Teorema 4. Jika $f(x)$ adalah kontinu dalam sebuah interval tertutup, maka $f(x)$ terbatas dalam interval tersebut .

Teorema 5. Jika $f(x)$ adalah kontinu pada $x = x_0$ dan $f(x_0) > 0$ [atau $f(x_0) < 0$], maka terdapat sebuah interval pada $x = x_0$ di mana $f(x_0) > 0$ [atau $f(x_0) < 0$].

Teorema 6. Jika sebuah fungsi $f(x)$ adalah kontinu dalam sebuah interval atau bertambah sepenuhnya atau berkurang sepenuhnya, maka fungsi inversnya $f^{-1}(x)$ adalah bernilai tunggal, kontinu, dan bertambah sepenuhnya atau berkurang sepenuhnya.

Teorema 7. Jika $f(x)$ adalah kontinu dalam $[a,b]$ dan jika $f(a) = A$ dan $f(b) = B$, maka untuk sebarang bilangan C antara A dan B terdapat setidaknya satu bilangan c dalam $[a,b]$ sedemikian sehingga $f(c) – C$. Ini kadang-kadang disebut teorema nilai perantara (*intermediate value theorem*).

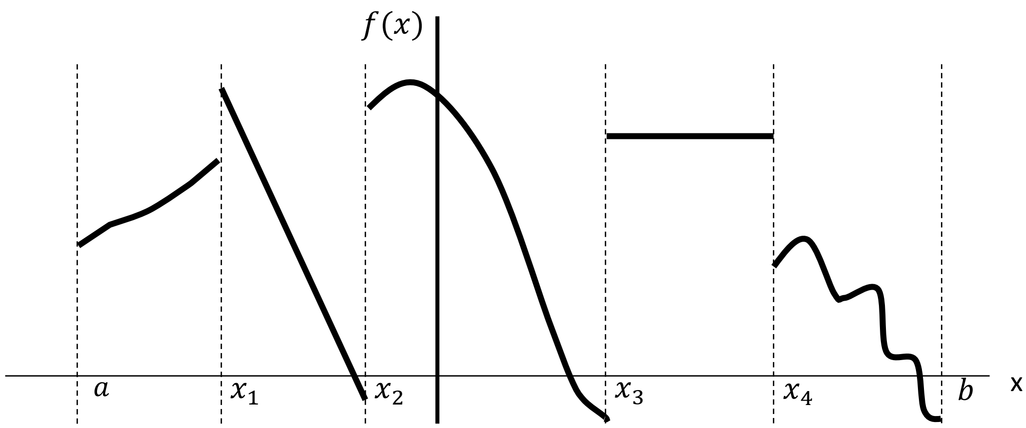
Teorema 8. Jika $f(x)$ adalah kontinu dalam $[a,b]$ dan jika $f(a)$ dan $f(b)$ memiliki tanda yang berlawanan, maka terdapat setidaknya satu bilangan c sehingga $f(c) = 0$ di mana $a < c < b$. Ini berkaitan dengan Teorema 7.

Teorema 9. Jika $f(x)$ kontinu dalam sebuah interval tertutup, maka $f(x)$ memiliki sebuah nilai maksimum M untuk setidaknya satu nilai x dalam inteval tersebut dan sebuah nilai minimum m untuk setidaknya satu nilai x dalam interval tersebut. Selain itu, nilai untuk $f(x)$ adalah semua nilai antara m dan M untuk satu atau lebih nilai x dalam interval.

Teorema 10. Jika $f(x)$ adalah kontinu dalam sebuah interval tertutup dan jika M dan m adalah berturut-turut batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari $f(x)$, terdapat setidaknya satu nilai x dalam interval di mana $f(x) = M$ atau $f(x) = m$. Ini berkaitan dengan Teorema 9.

3.18 KONTINUITAS BAGIAN DEMI BAGIAN

Sebuah fungsi dikatakan kontinu bagian demi bagian (*piecewise continous*) dalam sebuah interval $a \leq x \leq b$ jika interval tersebut dapat dibagi lagi menjadi sejumlah sehingga subinterval di mana setiap fungsi adalah kontinu dan memiliki limit kanan dan limit kiri yang terhingga. Fungsi semacam ini hanya memiliki sejumlah terhingga diskontinuitas. Contoh dari sebuah fungsi yang kontinu bagian demi bagian dalam $a \leq x \leq b$ diperlihatkan secara grafik pada Gambar 3.-4. Fungsi ini memiliki diskontinuitas pada x_1, x_2, x_3, dan x_4.



Gambar 3-4

3.19 KONTINUITAS SERAGAM

Misalkan f kontinu dalam sebuah interval. Maka menurut definisi pada setiap titik x_0 dari interval tersebut dan untuk sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat mencari $\delta > 0$ (yang secara umum akan tergantung pada ϵ dan titik tertentu x_0) sedemikian rupa sehingga $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ bilamana $|x - x_0| < \delta$. Jika kita dapat menentukan δ untuk setiap ϵ yang berlaku untuk semua titik dalam interval (yaitu jika δ tergantung hanya pada ϵ dan tidak pada x_0), kita mengatakan bahwa f adalah kontinu seragam (*uniformly continuous*) dalam interval tersebut.

Sebagai alternatif, f adalah kontinu seragam dalam sebuah interval jika untuk sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ bilamana $|x_1 - x_2| < \delta$ di mana x_1 dan x_2 adalah dua titik sebarang dalam interval.

Teorema. Jika f adalah kontinu dalam sebuah interval tertutup,maka f adalah kontinu seragam dalam interval tersebut.

3.20 CONTOH SOAL

FUNGSI

3.1. Misalkan $f(x) = (x-2)(8-x)$ untuk $2 \leq x \leq 8$. (*a*) Tentukan *f*(6) dan *f*(-1), (*b*) Apakah domain dari fungsi *f*(*x*)? (*c*) tebtukanlah *f*(1-2*t*) dan tentukanlah domain dari fungsi tersebut, (*d*) tentukanlah *f*[*f*(3)], *f*[*f*(5)]. (*e*) Gambarkan grafik *f*(*x*).

(*a*) $f(6) = (6-2)(8-6) = 4.2 = 8$.

$f(-1)$ tidak terdefinisi karena $f(x)$ hanya terdefinisi untuk $2 \leq x \leq 8$.

(b) Himpunan dari semua x sedemikian rupa sehingga $2 \leq x \leq 8$.

(c) $f(1-2t) = \{(1-2t)-2\}\{8-(1-2t)\} = -(1+2t)(7+2t)$ di mana t sedemikian sehingga $2 \leq 1-2t \leq 8$, yaitu $-\frac{7}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2}$.

(d) $f(3) = (3-2)(8-3) = 5$.

$f[f(3)] = f(5) = (5-2)(8-5) = 9$.

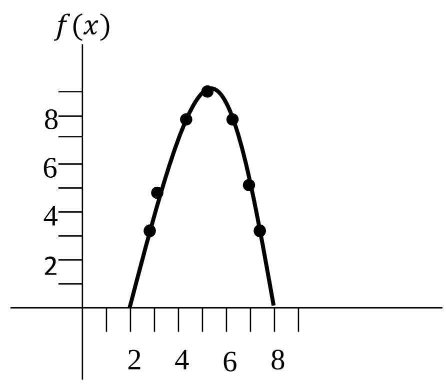
$f(5) = 9$ sehingga $f[f(5)] = f(9)$ tidak terdefinisi.

(e) Tabel berikut ini menunjukkan $f(x)$ untuk berbagai nilai x.

x	2	3	4	5	6	7	8	2,5	7,5
$f(x)$	0	5	8	9	8	5	0	2,75	2,75

Plotlah titik-titik (2,0), (3,5), (4,8), (5,9), (6,8), (7,5), (8,0), (2,5,2,75), (7,5,2,75).

Titik-titik ini hanyalah sebagian kecil dari tak terhingga banyaknya titik pada grafik yang dicari yang tampak dalam Gambat 3-5. Himpunan titik-titik ini mendefinisikan sebuah kurva yang merupakan bagian dari sebuah parabola.



Gambar 3-5

3.2. Misalkan $g(x) = (x-2)(8-x)$ untuk $2 < x < 8$. (a) Bahaslah perbedaan grafik $g(x)$ dengan grafik $f(x)$ pada Soal 3.1. (b) Berapakah batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari $g(x)$? (c) Apakah $g(x)$ mencapai batas atas terkecil dan batas bawah terbesarnya untuk sebarang nilai x dalam domain dari fungsi $g(x)$? (d) Jawablah bagian (b) dan (c) untuk fungsi $f(x)$ dari Soal 3.1.

(a) Grafik $g(x)$ sama dengan grafik pada Soal 3.1 kecuali bahwa titik (2,0) dan (8,0) hilang, karena $g(x)$ tidak terdefinisi pada $x = 2$ dan $x = 8$.

(b) Batas atas terkecil $g(x)$ adalah 9. Batas bawah terbesar $g(x)$ adalah 0.

(c) Batas atas terkecil $g(x)$ diperoleh pada nilai x = 5. Batas bawah terbesar $g(x)$ tidak tercapai, karena tidak terdapat nilai x dalam domain fungsi sedemikian sehingga $g(x) = 0$.

(d) Sebagaimana pada (b), batas atas terkecil $f(x)$ adalah 9 dan batas bawah terbesar $f(x)$ adalah 0. Batas atas terkecil $f(x)$ diperoleh untuk nilai x = 5 dan batas bawah terbesar $f(x)$ diperoleh pada x = 2 dan x = 8.

Perhatikanlah bahwa sebuah fungsi, seperti $f(x)$, yang kontinu dalam sebuah interval tertutup mencapai batas atas terkecilnya dan batas bawah terbesarnya pada sejumlah titik dalam interval tersebut. Akan tetapi, sebuah fungsi seperti $g(x)$, yang tidak kontinu dalam sebuah interval tertutup tidak perlu mencapai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar. Lihat Soal 3.34.

3.3. Misalkan $f(x) = 1\begin{cases} 1, & \text{jika } x \text{ adalah bilangan rasional} \\ 0, & \text{jika } x \text{ adalah bilangan irasional} \end{cases}$

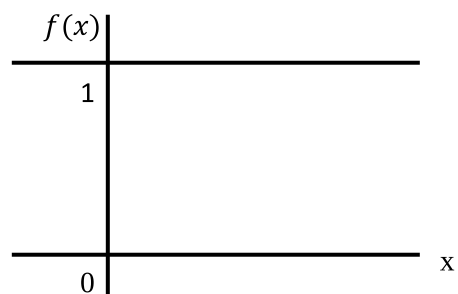
(a) Tentukanlah $f\left(\frac{2}{3}\right), f(-5), f(1{,}41423), f\left(\sqrt{2}\right)$, ($b$) Gambarkanlah grafik $f(x)$ dan jelaskanlah mengapa grafik tersebut menyesatkan.

(a) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ = 1 karena $\frac{2}{3}$ adalah sebuah bilangan rasional

$f(-5)$ = 1 karena -5 adalah sebuah bilangan rasional

$f(1{,}41423)$ = 1 karena 1,41423 adalah sebuah bilangan rasional

$f\left(\sqrt{2}\right)$ = 0 karena $\sqrt{2}$ adalah sebuah bilangan irasional

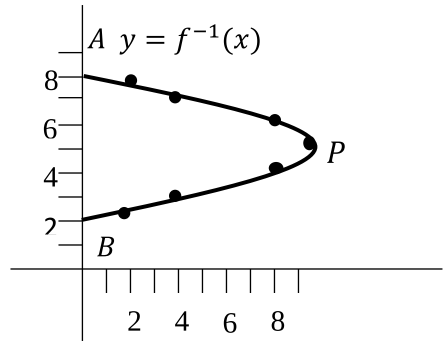


Gambar 3-6

(b) Grafik tersebut diperlihatkan pada Gambar 3-6. Karena kedua himpunan bilangan rasional dan irasional adalah rapat, maka kesan visualnya adalah bahwa kedua bayangan berkorespondensi dengan setiap nilai domain. Pada kenyataannya setiap nilai domain hanya memiliki satu nilai daerah hasil.

3.4. Dengan mengacu pada Soal 3.1: (a) Gambarkanlah grafik dengan sumbu-sumbu yang dipertukarkan, sehingga menggambarkan dua pilihan yang mungkin untuk definisi f^{-1}. (b) Selesaikanlah x dalam bentuk y untuk menentukan persamaan-persamaan yang menjelaskan kedua cabang, dan kemuadian pertukarkanlah variabel-variabelnya.

(a) Grafik $y = f(x)$ diperlihatkan oleh Gambar 3-5 pada Soal 3.1(a). Dengan mempertukarkan sumbu-sumbu (dan variabel-variabel), maka kita mmeperoleh bentuk grafik Gambar 3-7. Gambar ini mengilustrasikan bahwa terdapat dua nilai y untuk setiap nilai x, sehingga terdapat dua cabang. Kedua-duanya dapat digunakan untuk mendefinisikan f^{-1}.



Gambar 3-7

(b) Kita memiliki $y = (x-2)(8-x)$ atau $x^2 - 10x + 16 + y = 0$. Solusi untuk persamaan kuadrat ini adalah $x = 5 \pm \sqrt{9-y}$.

Setelah mempertukarkan variabel-variabelnya

$$y = 5 \pm \sqrt{9-x}.$$

Pada grafik, *AP* merepresentasikan $y = 5 + \sqrt{9-x}$, dan *BP* menunjukkan $y = 5 - \sqrt{9-x}$. Kedua cabang dapat merepresentasikan f^{-1}.

Catatan: Titik di mana kedua cabang bertemu disebut titik cabang.

3.5. (a) Buktikanlah bahwa $g(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ adalah berkurang sepenuhnya dalam $0 \le x \le 9$. (b) Apakah fungsi tersebut berkurang secara monotonik dalam interval ini? (c) Apakah $g(x)$ memiliki invers bernilai tunggal?

(a) $g(x)$ adalah berkurang sepenuhnya jika $g(x_1) > g(x_2)$, bilamana $x_1 < x_2$. Jika $x_1 < x_2$ maka $9 - x_1 > 9 - x_2 . \sqrt{9-x_1} > \sqrt{9-x_2}, 5 + \sqrt{9-x_1} > 5 + \sqrt{9-x_2}$ yang menunjukkan bahwa $g(x)$ adalah berkurang sepenuhnya.

(b)Ya, sebarang fungsi yang berkurang sepenuhnya adalah juga berkurang secara monotonik, karena jika $g(x_1) > g(x_2)$ maka $g(x_1) \ge g(x_2)$ juga akan berlaku. Akan tetapi, jika $g(x)$ berkurang secara monotonik, maka fungsi tersebut tidak selalu berkurang sepenuhnya.

(c)Jika $y = 5 + \sqrt{9-x}$, maka $y - 5 = \sqrt{9-x}$ atau dengan mengkuadratkannya, $x = -16 + 10y - y^2 = (y-2)(8-y)$ dan x adalah sebuah fungsi y yang bernilai tunggal, yaitu fungsi invers adalah bernilai tunggal.

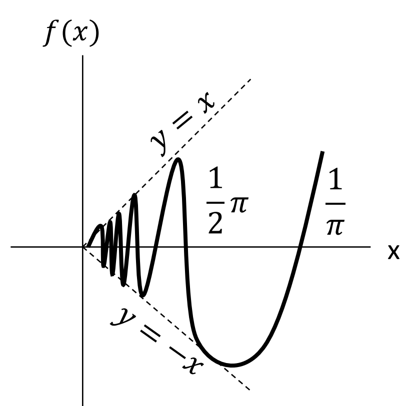
Secara umum, sebuah fungsi yang berkurang (atau bertambah) sepenuhnya memiliki sebuah invers bernilai tunggal (lihat Teorema 6. Halaman 38).

Hasil-hasil dari soal ini dapat diinterpretasikan secara grafik dengan menggunakan gambar pada Soal 3.4.

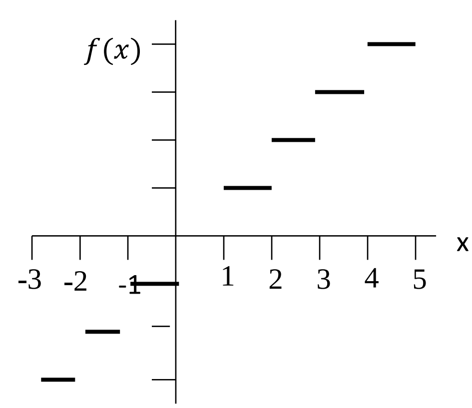
3.6. Gambarkanlah grafik untuk fungsi-fungsi. $(a) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $(b) f(x) = [x] =$ bilangan bulat terbesar $\leq x$

(a) Grafik yang dicari tampak pada Gambar 3-8. Karena $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$, grafik tersebut termasuk antara $y = x$ dan $y = -x$. Perhatikan bahwa $f(x) = 0$ ketika $\sin \frac{1}{x} = 0$ atau $\frac{1}{x} = m\pi, m = 1,2,3,4, \ldots$, yaitu, di mana $x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots$ Kurva tersebut berosilasi tak terhingga, terutama antara $x = \frac{1}{\pi}$ dan $x = 0$.

(b) Grafik yang dicari tampak pada Gambar 3-9. Jika $1 \leq x < 2$, maka $[x] = 1$. Jadi $[1{,}8] = 1, [\sqrt{2}] = 1, [1{,}99999] = 1$. Akan tetapi, $[2] = 2$. Demikian juga untuk $2 \leq x < 3, [x] = 2$, dan seterusnya. Jadi, terdapat lompatan-lompatan pada bilangan-bilangan bulat. Fungsi tersebut kadang-kadang disebut fungsi anak tangga atau fungsi langkah.



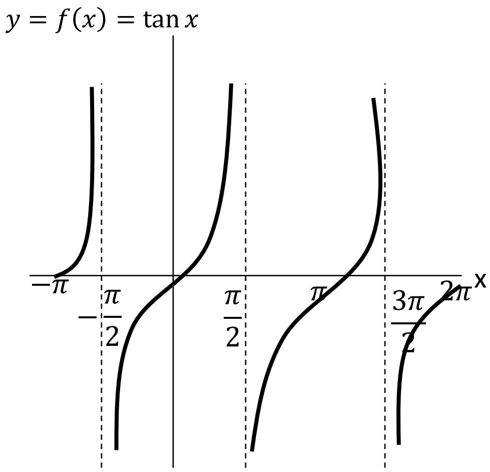
Gambar 3-8



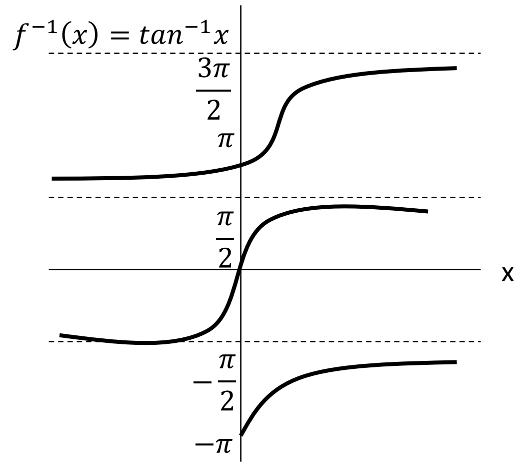
Gambar 3-9

3.7. (a) Gambarkanlah grafik $f(x) = tan\ x$. (b) Gambarkanlah grafik dari sejumlah bilangan tak terhingga cabang yang tersedia untuk definisi $tan^{-1}x$. (c) Perlihatkanlah secara grafik mengapa hubungan antara x dan y bernilai ganda. (d) Tunjukkanlah nilai-nilai utama yang mungkin untuk $tan^{-1}x$. (e) Dengan menggunakan pilihan Anda, hitunglah $tan^{-1}(-1)$.

(a) Grafik $f(x) = tan\ x$ tampak pada Gambar 3-10 di bawah ini.



Gambar 3-10



Gambar 3-11

(b) Grafik yang dicari diperoleh dengan mempertukarkan sumbu-sumbu x dan y pada grafik (a). Hasilnya, dengan sumbu-sumbu diorientasikan seperti lazimnya, tampak pada Gambar 3-11 di atas.

(c) Pada Gambar 3-11 dari butir (b), garis vertikal sebarang memotong grafik dengan tak terhingga banyaknya titik. Jadi, hubungan y dengan x adalah bernilai rangkap dan tak terhingga banyaknya cabang tersedia untuk tujuan pendefinisian $tan^{-1}x$.

(d) Untuk mendefinisikan $tan^{-1}x$ sebagai fungsi bernilai tunggal, tampak jelas dari grafik bahwa kita hanya dapat melakukannya dengan membatasi nilainya untuk sebarang dari yang berikut ini: $-\frac{\pi}{2} < tan^{-1}x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < tan^{-1}x < \frac{3\pi}{2}$, dan seterusnya. Kita setuju untuk mengambil yang pertama untuk mendefinisikan nilai utama.

Perhatikanlah bahwa cabang manapun yang digunakan untuk mendefinisikan $tan^{-1}x$, fungsi yang dihasilkan adalah bertambah sepenuhnya.

(e) $tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ adalah satu-satunya nilai yang terletak antara $-\frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\pi}{2}$, yaitu merupakan nilai utama menurut pilihan kita pada butir (d).

3.8. Perhatikanlah bahwa $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}, x \neq -1$, menjelaskan sebuah fungsi aljabar irasional.

Jika $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ maka $(x+1)y - 1 = \sqrt{x}$ atau dengan mengkuadratkannya, $(x+1)^2y^2 - 2(x+1)y + 1 - x = 0$, ini adalah sebuah persamaan polinomial dalam y yang koefisien-koefisiennya adalah polinomial dalam *x*. Jadi, $f(x)$ adalah sebuah fungsi aljabar. Akan tetapi, fungsi tersebut bukan merupakan hasilbagi dari dua polinomial, sehingga merupakan fungsi aljabar irasional.

3.9. Jika $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, buktikanlah bahwa kita dapat memilih suatu nilai utama dari fungsi invers, $cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), x \geq 1$.

Jika $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. Maka dengan menggunakan rumus kuadrat, $e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$. Jadi, $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1}$.

Karena $y - \sqrt{y^2-1} = \left(y - \sqrt{y^2-1}\right)\left(\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{y+\sqrt{y^2-1}}\right) = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$, maka kita juga dapat menulis $x = \pm\ln(y + \sqrt{y^2-1})$ atau $cosh^{-1}y = \pm\ln(y + \sqrt{y^2-1})$

Dengan memilih tanda + untuk mendefinisikan nilai utama dan menggantikan *y* dengan *x*, kita memperoleh $cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Pilihan $x \geq 1$ dibuat sehingga fungsi invers adalah real.

LIMIT

3.10. Jika $(a) f(x) = x^2, (b) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$, maka buktikanlah bahwa $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

(a) Kita harus menunjukkan bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menemukan $\delta > 0$ (tergantung pada ϵ secara umum) sedemikian sehingga $|x^2 - 4| < \epsilon$ ketika $0 < |x - 2| < \delta$.

Pilihlah $\delta \leq 1$ sedemikian sehingga $0 < |x - 2| < 1$ atau $1 < x < 3, x \neq 2$. Maka $|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| < \delta|x+2| < 5\delta$.

Jika δ dimisalkan sebagai 1 atau $\frac{\epsilon}{5}$, yang manapun yang lebih kecil, maka kita memperoleh $|x^2-4|<\epsilon$ bilamana $0<|x-2|<\delta$ dan hasil yang dicari terbukti.

Kita tertarik untuk memperhatikan sejumlah nilai numerik tertentu. Jika misalnya kita berkeinginan untuk membuat $|x^2-4|<0{,}05$, kita dapat memilih $\delta=\frac{\epsilon}{5}=\frac{0{,}05}{5}=0{,}01$. Untuk melihat apakah yang terjadi memang sungguh-sungguh demikian, perhatikan bahwa jika $0<|x-2|<0{,}01$ maka $1{,}99<x<2{,}01$ $(x\neq 2)$ dan maka $3{,}9601<x^2<4{,}0401, -0{,}0399<x^2-4<0{,}0401$ dan tentu saja $|x^2-4|<0{,}05$ $(x^2\neq 4)$. Kenyataan bahwa ketidaksamaan-ketidaksamaan ini juga berlaku pada $x=2$ hanyalah merupakan suatu kebetulan.

(b) Tidak ada perbedaan antara bukti untuk kasus ini dan bukti pada butir (a), karena dalam kedua kasus kita tidak mengikutsertakan $x = 2$.

3.11. Buktikanlah bahwa $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}=-8$.

Kita harus menunjukkan bahwa untuk sebarang $\epsilon>0$ kita dapat menetukkan $\delta>0$ sedemikian sehingga $\left|\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}-(-8)\right|<\epsilon$ ketika $0<|x-1|<\delta$. Karena $x\neq 1$, kita dapat menulis $\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}=\frac{(2x^3-4x^2-3x-3)(x-1)}{x-1}=2x^3-4x^2-3x-3$ setelah meniadakan faktor yang sama $x-1\neq 0$.

Kemudian kita harus menunjukan bahwa untuk sebarang $\epsilon>0$, kita dapat menentukkan $\delta>0$ sedemikian sehingga $|2x^3-4x^2-3x+5|<\epsilon$ ketika $0<|x-1|<\delta$. Dengan memilih $\delta\leq 1$, kita memperoleh $0<x<2, x\neq 1$.

$|2x^3-4x^2-3x+5|=|x-1||2x^2-2x-5|<\delta|2x^2-2x-5|<\delta(|2x^2|+|2x|+5)<(8+4+5)\delta=17\delta$. Dengan memisalkan δ sebagai yang lebih kecil antara 1 dan $\frac{\epsilon}{17}$, hasil yang dicari akan diperoleh.

3.12. Misalkan $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-3|}{x-3}, & x\neq 3\\ 0, & x=3\end{cases}$, (a) Gambakanlah grafik dari fungsi. (b) Tentukanlah $\lim\limits_{x\to 3+}f(x)$. (c) Tentukanlah $\lim\limits_{x\to 3-}f(x)$. (d)Tentukanlah $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

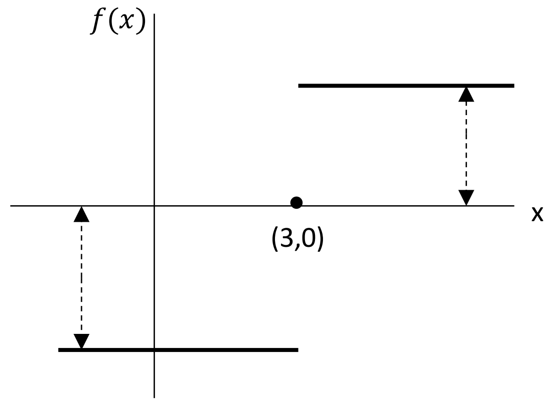
(a) Untuk $x>3, \dfrac{|x-3|}{x-3}=\dfrac{x-3}{x-3}=1$.

Untuk $x<3, \dfrac{|x-3|}{x-3}=\dfrac{-(x-3)}{x-3}=-1$.

Maka grafik, yang tampak pada Gambar 3-12, terdiri dari garis-garis $y = 1, x > 3; y = -1, x < 3$ dan titik (3,0).

(b) Sebagaimana $x \to 3$ dari kanan, $f(x) \to 1$, yaitu $\lim_{x \to 3+} f(x) = 1$, sebagaimana tampak jelas dari grafik. Untuk membuktikan ini kita harus menunjukkan bahwa jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat menentukkan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - 1| < \epsilon$ bilamana $0 < x - 1 < \delta$.

Dan karena $x > 1, f(x) = 1$ maka bukti terdiri dari hal yang sepele bahwa $|1 - 1| < \epsilon$ bilamana $0 < x - 1 < \delta$.



Gambar 3-12

(c) Saat $x \to 3$ dari ruas kiri, $f(x) \to -1$, yaitu $\lim_{x \to 3-} f(x) = -1$. Sebuah bukti dapat dirumuskan sebagaimana pada (b).

(d) Karena $\lim_{x \to 3+} f(x) \neq \lim_{x \to 3-} f(x), \lim_{x \to 3} f(x)$ tidak ada.

3.13. Buktikanlah bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 1}{x} = 0$.

Kita harus menunjukkan bahwa jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menentukkan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\left|\frac{x \sin 1}{x - 0}\right| < \epsilon$ ketika $0 < |x - 0| < \delta$.

Jika $0 < |x| < \delta$, maka $\left|\frac{x \sin 1}{x}\right| = |x| \left|\frac{\sin 1}{x}\right| \leq |x| < \delta$ karena $\left|\frac{\sin 1}{x}\right| \leq 1$ untuk semua $x \neq 0$.

Dengan demikian $\delta = \epsilon$, kita melihat bahwa $\left|\frac{x \sin 1}{x}\right| < \epsilon$ ketika $0 < |x| < \delta$, yang memberikan pembuktian.

3.14. Hitunglah $\lim_{x \to 0+} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$.

Pada saat $x \to 0+$ kita menduga bahwa $\frac{1}{x}$ bertambah tak terhingga, $e^{\frac{1}{x}}$ bertambah tak terhingga, $e^{-\frac{1}{x}}$ mendekati 0, dan $1 + e^{-\frac{1}{x}}$ mendekati 1; sehingga limit yang dicari adalah 2.

Untuk membuktikan dugaan ini kita harus menunjukkan bahwa, jika diketahui $\epsilon > 0$, kita dapat menentukkan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\left|\frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} - 2\right| < \epsilon \text{ ketika } 0 < x < \delta$$

Maka

$$\left|\frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} - 2\right| = \left|\frac{2-2-2e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}\right| = \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

Karena fungsi di ruas kanan lebih kecil daripada 1 untuk semua $x > 0$, sebarang $\delta > 0$ akan benar ketika $e \geq 1$. Jika $0 < \epsilon < 1$, maka $\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1} < \epsilon$ ketika $\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2} > \frac{1}{\epsilon}, e^{\frac{1}{x}} > \frac{2}{\epsilon} - 1, \frac{1}{x} > \ln\left(\frac{2}{\epsilon} - 1\right)$; atau $0 < x < \frac{1}{\ln(2,\epsilon-1)} = \delta$.

3.15. Jelaskanlah secara tepat apa yang dimaksud oleh pernyataan $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \infty$ dan buktikanlah keabsahan dari pernyataan ini. Pernyataan ini berarti bahwa untuk setiap bilangan positif M, kita dapat menentukkan sebuah bilangan positif δ (tergantung pada M secara umum) sedemikian sehingga

$$\frac{1}{(x-1)^4} > 4 \text{ ketika } 0 < |x-1| < \delta$$

Untuk membuktikan ini perhatikan bahwa

$$\frac{1}{(x-1)^4 > M} \text{ ketika } 0 < (x-1)^4 < \frac{1}{M} \text{ atau } 0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}}.$$

Dengan memilih $\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$, hasil yang dicari akan diperoleh.

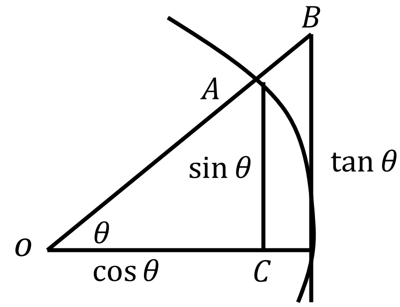
3.16. Berikanlah bukti geometrik bahwa $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

Gambarlah sebuah lingkaran dengan pusat di O dan jari-jari OA = OD = 1, seperti tampak pada Gambar 3-13. Pilih titik B pada perpanjangan OA dan titik

C pada OD sehingga garis BD dan AC tegaklurus terhadap OD.

Secara geometrik terbukti bahwa

Luas segitiga $OAC <$ Luas sektor $OAD <$ Luas segitiga OBD



Gambar 3-13

yaitu

$$\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

Dengan membagi dengan $\frac{1}{2}\sin\theta$,

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

atau

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Saat $\theta \to 0, \cos\theta \to 1$ dan karenanya diperoleh $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

TEOREMA LIMIT

3.17. Jika $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ada, maka buktikanlah bahwa limit tersebut unik.

Kita harus menunjukkan bahwa jika $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ dan $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2$, maka $l_1 = l_2$.

Dengan hipotesis, jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \text{ ketika } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} \text{ ketika } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Maka sesuai dengan sifat nilai mutlak butir 2 pada Halaman 3.

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

yaitu, $|l_1 - l_2|$ lebih kecil daripada sebarang bilangan positif ϵ (berapapun kecilnya) sehingga pasti nol. Jadi, $l_1 = l_2$.

3.18. Jika $\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$, maka buktikanlah bahwa terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|B| \text{ untuk } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Karena $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, kita dapat menentukkan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|g(x) - B| < \frac{1}{2}|B|$ untuk $0 < |x - x_0| < \delta$.

Dengan menuliskan $B = B - g(x) + g(x)$, maka kita memperoleh

$$|B| \leq |B - g(x)| + |g(x)| < \frac{1}{2}|B| + |g(x)|$$

yaitu, $|B| < \frac{1}{2}|B| + |g(x)|$, sehingga diperoleh $|g(x)| > \frac{1}{2}|B|$.

3.19. Jika diketahui $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ dan $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, maka buktikanlah (a) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$, (b) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$, (c) $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ jika $B \neq 0$, (d) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ jika $B \neq 0$.

(a) Kita harus menunjukkan bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menentukkan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$|[f(x) + g(x)] - (A + B)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ ketika } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Dengan menggunakan sifat nilai mutlak butir 2, Halaman 3, maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (A + B)| &= |[f(x) - A] - [g(x) - B]| \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \end{aligned}$$

Dengan hipotesis, jika diketahui $\epsilon > 0$ kita dapat menentukan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ketika } 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

$$|f(x) - B| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ketika } 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

Maka dari persamaan $(1), (2)$, dan (3),

$$|[f(x)+g(x)]-(A+B)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \text{ ketika } 0<|x-x_0|<\delta$$

di mana δ dipilih yang lebih kecil antara δ_1 dan δ_2.

(b) Kita memperoleh

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-AB| &= |f(x)[g(x)-B]+B[f(x)-A]| \\ &\le |f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A| \\ &\le |f(x)||g(x)-B|+(|B|+1)|f(x)-A| \end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, kita dapat menentukan δ_1 sedemikian $|f(x)-A|<1$ untuk $0<|x-x_0|<\delta_1$, yaitu $A-1<f(x)<A+1$, sehingga $f(x)$ terbatas, yaitu $|f(x)|<P$ di mana P adalah sebuah konstanta positif.

Karena $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, jika diketahui $\epsilon>0$ kita dapat menentukan $\delta_2>0$ sedemikian rupa sehingga $|g(x)-B|<\frac{\epsilon}{2P}$ untuk $0<|x-x_0|<\delta_2$.

Karena $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, jika diketahui $\epsilon>0$ kita dapat menentukan $\delta_3>0$ sedemikian rupa sehingga $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ untuk $0<|x-x_0|<\delta_2$.

Dengan menggunakan ini dalam persamaan (4), kita memperoleh

$$|f(x)g(x)-AB|<P.\frac{\epsilon}{2P}+(|B|+1).\frac{\epsilon}{2(|B|+1)}=\epsilon$$

untuk $0<|x-x_0|<\delta$ di mana δ lebih kecil daripada $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ dan karenanya pembuktian selesai.

(c) Kita harus menunjukkan bahwa untuk sebarang $\epsilon>0$ kita dapat menentukan $\delta>0$ sedemikian rupa sehingga

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|g(x)-B|}{|B||g(x)|}<\epsilon \quad \text{ketika } 0<|x-x_0|<\delta$$

Dengan hipotesis, jika diketahui $\epsilon>0$ kita dapat menentukan $\delta_1>0$ sedemikian rupa sehingga

$$|g(x)-B|<\frac{1}{2}B^2\epsilon \text{ ketika } 0<|x-x_0|<\delta_1$$

Menurut Soal 3.18, karena $\lim_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0$ kita dapat menentukan $\delta_2>0$ sedemikian rupa sehingga

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|B| \quad \text{ketika} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

Karenanya jika δ lebih kecil daripada δ_1 dan δ_2 kita dapat menulis

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B||g(x)|} < \frac{\frac{1}{2}B^2\epsilon}{|B|.\frac{1}{2}|B|} = \epsilon \qquad \text{bilamana} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta$$

dan hasil yang dicari terbukti.

(d) Dari butir (b) dan (c),

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x).\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x).\frac{1}{g(x)} = A.\frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

Ini juga dapat dibuktikan secara langsung (lihat Soal 3.69).

Hasil di atas juga dapat dibuktikan dalam kasus-kasus $x \to x_0+, x \to x_0-, x \to \infty, x \to -\infty$.

Catatan: Dalam bukti (a) kita telah menggunakan hasil-hasil $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$ dan $|g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$, sehingga hasil akhir diperoleh sebagai $|f(x) + g(x) - (A + B)| < \epsilon$. Tentu saja bukti akan sama keabsahannya jika kita menggunakan 2ϵ (atau sebarang kelipatan positif lainnya dari ε) sebagai pengganti ϵ. Cara yang serupa juga berlaku untuk bukti-bukti $(b), (c)$, dan (d).

3.20. Hitunglah tiap limit fungsi berikut ini, dengan menggunakan teorema limit

(a)
$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 6x + 4) = \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}(-6x) + \lim_{x\to 2}4$$
$$= \left(\lim_{x\to 2}x\right)\left(\lim_{x\to 2}x\right) + \left(\lim_{x\to 2} - 6\right)\left(\lim_{x\to 2}x\right) + \lim_{x\to 2}4$$
$$= (2)(2) + (-6)(2) + 4 = -4$$

Dalam prakteknya langkah-langkah perantara dihilangkan.

(b)
$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(2x-1)}{x^2 + 3x - 2} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x+3)\lim\limits_{x\to -1}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2 + 3x - 2)} = \frac{2.(-3)}{-4} = \frac{3}{2}$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{6x^4 + x^3 - 3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{6 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{3}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty} 6 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{3}{x^3}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

menurut Soal 3.19.

(d) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4-h}-2}{h} . \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

(e) $$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} . \sqrt{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 1.0 = 0$$

Perhatikanlah bahwa pada $(c), (d)$, dan (e) jika kita menggunakan teorema-teorema limit secara tidak pandang bulu kita memperoleh apa yang disebut sebagai bentuk-bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$ dan $\frac{0}{0}$. Untuk menghindari jalan buntu semacam ini, perhatikanlah bahwa dalam setiap kasus tersebut bentuk limit dimodifikasi hingga sesuai. Untuk metode-metode penghitungan limit lainnya, lihat Bab 4.

KONTINUITAS

(Asumsikan bahwa nilai-nilai di mana kontinuitas didemonstrasikan adalah nilai-nilai domain interior kecuali jika dinyatakan berbeda.)

3.21. Buktikanlah bahwa $f(x) = x^2$ kontinu pada $x = 2$.

Metode 1: Menurut Soal 3.10, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$ dan karenanya $f(x)$ adalah kontinu pada $x = 2$.

Metode 2: Kita harus menunjukkan bahwa jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan $\delta > 0$ (tergantung pada ϵ) sedemikian sehingga $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| < \epsilon$ ketika $|x - 2| < \delta$. Pola-pola pembuktian diberikan pada Soal 3.10.

3.22. (a) Buktikanlah bahwa $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$ adalah tidak kontinu pada $x = 0$. (b) Dapatkah kita mendefinisi ulang $f(0)$ sehingga $f(x)$ adalah kontinu pada $x = 0$?

(a) Dari soal 3.13, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Tetapi limit ini tidak sama dengan $f(0) = 5$, sehingga $f(x)$ diskontinu pada $x = 0$.

(b) Dengan mendefinisi ulang $f(x)$ sehingga $f(0) = 0$, fungsi menjadi kontinu. Karena fungsi tersebut dapat dibuat kontinu pada satu titik hanya dengan mendefinisi ulang fungsi pada titik tersebut, kita menyebut titik tersebut diskontinuitas yang dapat dihilangkan.

3.23. Apakah fungsi $\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$ kontinu pada $x = 1$?

$f(1)$ tidak ada, sehingga $f(x)$ tidak kontinu pada $x = 1$. Dengan mendefinisi ulang $f(x)$ sehingga $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = -8$ (lihat Soal 3.11), fungsi menjadi kontinu pada $x = 1$, artinya $x = 1$ adalah diskontinuitas yang dapat dihilangkan.

3.24. Buktikanlah bahwa jika $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu pada $x = x_0$, demikian juga $(a)\ f(x) + g(x), (b)\ f(x)g(x), (c)\ \frac{f(x)}{g(x)}\ jika\ f(x_0) \neq 0$.

Hasil-hasil ini diperoleh dengan segera dari bukti-bukti yang diberikan pada Soal 3.19 dengan mengasumsikan $A = f(x_0)$ dan $B = g(x_0)$ dan menulis kembali $0 < |x - x_0| < \delta$ sebagai $|x - x_0| < \delta$, dalam hal ini $x = x_0$ termasuk didalamnya.

3.25. Buktikanlah bahwa $f(x) = x$ kotinu pada sebarang titik $x = x_0$.

Kita harus menunjukkan bahwa, jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \epsilon\ ketika\ |x - x_0| < \delta$. Dengan memilih $\delta = \epsilon$, hasil tersebut segera diperoleh.

3.26. Buktikanlah bahwa $f(x) = 2x^3 + x$ adalah kontinu pada sebarang titik $x = x_0$.

Karena x adalah kontinu pada sebarang titik $x = x_0$ (Soal 3.25) maka demikian juga adalah $x.x = x^2, x^2.x = x^3. 2x^3$ dan akhirnya $2x^3 + x$, dengan menggunakan teorema (Soal 3.24) bahwa jumlah dan hasilkali dari fungsi-fungsi kontinu adalah kontinu.

3.27. Buktikanlah bahwa jika $f(x) = \sqrt{x-5}$ untuk $5 \leq x \leq 9$, maka $f(x)$ adalah kontinu dalam interval ini.

Jika x_0 adalah sebarang titik sedemikian rupa sehingga $5 < x_0 < 9$, maka $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{x-5} = \sqrt{x_0 - 5} = f(x_0)$. Selain itu, $\lim_{x\to 5+} \sqrt{x-5} = 0 = f(5)$ dan $\lim_{x\to 9-} \sqrt{x-5} = 2 = f(9)$. Jadi, hasil-hasil tersebut diperoleh.

Di sini kita telah menggunakan hasil bahwa $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt{f(x_0)}$ jika $f(x)$ adalah kontinu pada x_0. Bukti ϵ, δ yang diperoleh secara langsung dari definisi, juga dapat digunakan.

3.28. Untuk nilai-nilai x berapakah dalam domain definisi, tiap-tiap fungsi berikut ini adalah kontinu?

$(a)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Jawab. semua x kecuali $x = \pm 1$ (di mana penyebutnya adalah nol)

$(b)\ f(x) = \dfrac{1+\cos x}{3+\sin x}$

Jawab. semua x

$(c)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{10+4}}$

Jawab. semua $x > -10$

$(d)\ f(x) = 10^{-\frac{1}{(x-3)^2}}$

Jawab. semua $x \neq 3$ (lihat Soal 3.55)

$(e)\ f(x) = \begin{cases} 10^{-\frac{1}{(x-3)^2}}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$

Jawab. semua x, karena $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

$(f) f(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$

Jika $x > 0, f(x) = \frac{x-x}{x} = 0$. Jika $x < 0, f(x) = \frac{x+x}{x} = 2$. Pada $x = 0, f(x)$ tidak dapat didefinisikan. Dengan demikian $f(x)$ adalah kontinu untuk semua x kecuali $x = 0$.

$$(g)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x}, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Seperti pada $(f), f(x)$ adalah kontinu untuk $x < 0$. Maka karena

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{x+x}{x} = \lim_{x\to 0-} 2 = 2 = f(0)$$

jelas bahwa $f(x)$ adalah kontinu (dari ruas kiri) pada $x = 0$

Jadi, $f(x)$ adalah kontinu untuk semua $x \leq 0$, yaitu, kontinu di manapun dalam domain definisinya.

(h) $f(x) = x \csc x = \dfrac{x}{\sin x}$ *Jawab.* semua x kecuali $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

(i) $f(x) = x \csc x, f(0) = 1$. Karena $\lim_{x\to 0} x \csc x = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 = f(0)$, kita melihat bahwa $f(x)$ adalah kontinu untuk semua x kecuali $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$. [bandingkanlah dengan butir (h)].

KONTINUITAS SERAGAM

3.29. Buktikanlah bahwa $f(x) = x^2$ adalah kontinu seragam pada $0 < x < 1$.

Metode 1: Dengan menggunakan definisi.

Kita harus menunjukkan bahwa jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|x^2 - {x_0}^2| < \epsilon$ ketika $|x - x_0| < \delta$, di mana δ tergantung hanya pada ϵ dan tidak pada x_0 di mana $0 < x_0 < 1$.

Jika x dan x_0 adalah sebarang titik pada $0 < x < 1$, maka

$$|x^2 - {x_0}^2| = |x + x_0||x - x_0| < |1 + 1||x - x_0| = 2|x - x_0|$$

Jadi, jika $|x - x_0| < \delta$ maka $|x^2 - {x_0}^2| < 2\delta$. Dengan memilih $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, kita melihat bahwa $|x^2 - {x_0}^2| < \epsilon$ ketika $|x - x_0| < \delta$, di mana δ tergantung hanya pada ϵ dan tidak pada x_0. Dengan demikian, $f(x) = x^2$ adalah kontinu seragam dalam $0 < x < 1$.

Hal diatas dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $f(x) = x^2$ adalah kontinu seragam dalam $0 \leq x \leq 1$.

Metode 2: Fungsi $f(x) = x^2$ adalah kontinu dalam sebuah interval tertutup $0 \leq x \leq 1$. Dengan demikian, menurut teorema pada Halaman 38 fungsi tersebut kontinu seragam pada $0 \leq x \leq 1$ dan sehingga begitu pula dalam $0 < x < 1$.

3.30. Buktikanlah bahwa $f(x) = \frac{1}{x}$ tidak kontinu seragam pada $0 < x < 1$.

Metode 1: Misal $f(x) =$ adalah kontinu seragam dalam interval yang diketahui. Maka untuk sebarang $\epsilon > 0$ kita harus dapat menentukan δ, misalnya, antara 0 dan 1, sedemikian sehingga $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ketika $|x - x_0| < \delta$ untuk semua x dan x_0 dalam interval tersebut.

Misalkan $x = \delta$ dan $x_0 = \frac{\delta}{1+\epsilon}$. Maka $|x - x_0| = \left|\delta - \frac{\delta}{1+\epsilon}\right| = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\delta < \delta$.

Akan tetapi, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\epsilon}{\delta}\right| = \frac{\epsilon}{\delta} > \epsilon$ (karena $0 < \delta < 1$).

Jadi, kita memperoleh kontradiksi dan karenannya $f(x) = \frac{1}{x}$ tidak mungkin kontinu seragam dalam $0 < x < 1$.

Metode 2: Misalkan x_0 dan $x_0 + \delta$ adalah sebarang dua titik pada (0,1). Maka

$$|f(x_0) - f(x_0 + \delta)| = \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta}\right| = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)}$$

Dapat dibuat lebih besar daripada sebarang bilangan positif dengan memilih x_0 cukup dekat ke 0. Dengan demikian, fungsi tersebut tidak mungkin kontinu seragam.

SOAL LAIN-LAIN

3.31. Jika $y = f(x)$ adalah kontinu pada $x = x_0$ dan $z = g(y)$ adalah kontinu pada $y = y_o$ di mana $y_0 = f(x_0)$, maka buktikanlah bahwa $z = g\{f(x)\}$ adalah kontinu pada $x = x_0$.

Misalkan $h(x) = g\{f(x)\}$. Karena berdasarkan hipotesis $f(x)$ dan $g(y)$ adalah kontinu berturut-turut pada x_0 dan y_0, maka kita memperoleh

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} g(y) = g\left(\lim_{x \to x_0} y\right) = g(y_0) = g\{f(x_0)\}$$

Maka

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g\{f(x)\} = g\left\{\lim_{x \to x_0} f(x)\right\} = g\{f(x_0)\} = h(x_0)$$

yang membuktikan bahwa $h(x) = g\{f(x)\}$ adalah kontinu pada $x = x_0$.

3.32. Buktikanlah Teorema 8, Halaman 38.

Misalkan $f(a) < 0$ dan $f(b) > 0$. Karena $f(x)$ adalah kontinu, maka pasti terdapat interval $(a, a + h), h > 0$ di mana $f(x) < 0$. Himpunan titik-titik $(a, a + h)$ memiliki batas atas dan karenanya memiliki batas atas terkecil, yang kita sebut c. Maka $f(c) \leq 0$. Kemudian, kita tidak dapat memiliki $f(c) < 0$, karena jika $f(c)$ adalah negatif kita akan dapat menentukan sebuah interval di sekitar c (termasuk nilai-nilai yang lebih besar daripada c) di mana $f(x) < 0$, tetapi karena c adalah batas atas terkecil, hal ini tidak mungkin, dan karenanya kita memperoleh $f(c) = 0$ sebagaimana yang dicari.

Jika $f(a) > 0$ dan $f(b) < 0$, maka alasan yang serupa dapat digunakan.

3.33. (a) Jika diketahui $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 10$, maka hitunglah $f(1)$ dan $f(2).(b)$ Buktikanlah bahwa $f(x) = 0$ untuk sejumlah bilangan real x sedemikian sehingga $1 < x < 2.(c)$ Perlihatkanlah bagaimana menghitung nilai x pada (b).

$$(a)\ f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 7(1) - 10 = -4. f(2)$$
$$= 2(2)^3 - 3(2)^2 + 7(2) - 10 = 8$$

(b) Jika $f(x)$ adalah kontinu dalam $a \leq x \leq b$ dan jika $f(a)$ dan $f(b)$ memiliki tanda yang berlawanan, maka terdapat sebuah nilai x antara a dan b sedemikian rupa sehingga $f(x) = 0$ (Soal 3.32).

Untuk menerapkan teorema ini kita hanya perlu menyadari bahwa polinomial yang diketahui adalah kontinu dalam $1 \leq x \leq 2$, karena kita telah menunjukkan pada (a) bahwa $f(1) < 0$ dan $f(2) > 0$. Jadi, terdapat sebuah bilangan c antara 1 dan 2 sedemikian rupa sehingga $f(c) = 0$.

(c) $f(1{,}5) = 2(1{,}5)^3 - 3(1{,}5)^2 + 7(1{,}5) - 10 = 0{,}5$. Maka dengan menerapkan teorema (b) kembali, kita melihat bahwa akar yang dicari terletak antara 1 dan 1,5 dan "kemungkinan besar" lebih dekat ke 1,5 daripada ke 1, karena $f(1{,}5) = 0{,}5$ memiliki nilai lebih dekat ke 0 daripada $f(1) = -4$ (ini tidak selalu merupakan kesimpulan yang valid tetapi dalam prakteknya cukup berharga untuk dicari).

Jadi kita meninjau $x = 1{,}4$. Karena $f(1{,}4) = 2(1{,}4)^3 - 3(1{,}4)^2 + 7(1{,}4) - 10 = -0{,}592$, maka kita menyimpulkan bahwa terdapat sebuah akar antara 1,4 dan 1,5 yang kemungkinan besar lebih mendekati 1,5 daripada 1,4.

Dengan melanjutkan dalam cara ini, kita memperoleh akar adalah 1,46 hingga 2 angka desimal.

3.34. Buktikanlah Teorema 10, Halaman 39.

Jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, maka kita dapat menentukan x sedemikian rupa sehingga $M - f(x) < \epsilon$ sesuai definisi batas atas terkecil M.

Maka $\frac{1}{M-f(x)} > \frac{1}{\epsilon}$, sehingga $\frac{1}{M-f(x)}$ tidak terbatas dan sehingga tidak mungkin kontinu menurut Teorema 4, Halaman 38. Akan tetapi, jika kita misalkan bahwa $f(x) \neq M$, maka karena $M - f(x)$ adalah kontinu, menurut hipotesis, $\frac{1}{M-f(x)}$ juga harus kontinu. Mengenai kontradiksi ini, kita harus memperoleh $f(x) = M$ untuk setidaknya satu nilai x dalam interval.

Dengan cara yang sama, kita dapat menunjukkan bahwa terdapat sebuah x dalam interval tersebut sedemikian rupa sehingga $f(x) = m$ (Soal 3.93).

3.21 SOAL-SOAL TAMBAHAN

FUNGSI

3.35. Tentukanlah domain definisi terbesar di mana setiap aturan korespodensi berikut mendukung penyusun sebuah fungsi

$$(a)\ \sqrt{(3-x)(2x+4)},\quad (b)\ \frac{(x-2)}{(x^2-4)},\quad (c)\ \sqrt{\sin 3x},\quad (d)\ \log_{10}(x^3-3x^2 - 4x + 12)$$

Jawab. $(a) - 2 \leq x \leq 3,\ (b)\ semua\ x \neq \pm 2,\ (c)\ \frac{2m\pi}{3} \leq x \leq (2m+1)\frac{\pi}{3}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,\ (d)\ x > 3, -2 < x < 2.$

3.36. Jika $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, x \neq 2$, maka tentukanlah:

$$(a)\ \frac{5f(-1) - 2f(0) + 3f(5)}{6}, (b) \left\{f\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2, (c) f(2x-3);$$

$$(d) f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right), x \neq 0; (e)\ \frac{f(h) - f(0)}{h}, h \neq 0; (f)\ f\{f(x)\}$$

Jawab. $(a) \frac{61}{18},\ (b)\ \frac{1}{25},\ (c)\ \frac{6x-8}{2x-5}, x \neq 0, \frac{5}{2}, 2,\ (d)\ \frac{5}{2}, x \neq 0{,}2,\ (e)\ \frac{7}{2h-4}, h \neq 0{,}2,\ (f)\ \frac{10x+1}{x+5}, x \neq -5{,}2$

3.37. Jika $f(x) = 2x^2, 0 < x \leq 2$, maka tentukanlah (a) batas atas terkecil dan (b) batas bawah terbesar dari $f(x)$. Tentukanlah apakah $f(x)$ mencapai batas atas terkecil dan batas bawah terbesarnya.

Jawab. (a) 8 (b) 0

3.38. Gambarkanlah grafik dari setiap fungsi berikut ini.

$(a)\ f(x) = |x|, -3 \leq x \leq 3$

$$(b)\ f(x) = 2 - \frac{|x|}{x}, -2 \leq x \leq 2$$

$$(c) \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$(d) f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

$(e)\ f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$

$(f) \frac{x - [x]}{x}$ di mana $[x] =$ bilangan bulat terbesar $\le x$

$(g)\ f(x) = \cosh x$

$(h)\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$(i)\ f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$(j)\ f(x) = \frac{sin^2 x}{x^2}$

3.39. Gambarkanlah grafik untuk $(a)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (b)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (c) y^2 = 2px$, dan $(d) y = 2ax - x^2$, di mana a, b, p adalah konstanta-konstanta yang diketahui. Pada kasus-kasus yang manakah, terdapat tepat satu nilai y untuk setiap nilai x, sehingga memungkinkan pendefinisian fungsi f, dan memungkinkan kita untuk menulis $y = f(x)$? Pada kasus manakah cabang-cabang tersebut harus didefinisikan?

3.40.(a) Dari grafik $y = \cos x$ gambarkanlah grafik yang diperoleh dengan mempertukarkan variabel-variabel, dan karenanya akan diperoleh $cos^{-1} x$ dengan memilih cabang yang sesuai. Nyatakanlah pilihan nilai utama dari $cos^{-1} x$ yang mungkin. Dengan menggunakan pilihan ini, tentukanlah $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Apakah nilai ini tergantung pada pilihannya? Jelaskanlah.

3.41. Kejakanlah butir (a) dan (b) dari Soal 3.40 untuk $(a) y = sec^{-1} x, (b) y = cot^{-1} x$.

3.42. Jika diketahui grafik untuk $y = f(x)$, perlihatkanlah bagaimana memperoleh grafik untuk $y = f(ax + b)$, di mana a dan b adalah konstanta-konstanta yang diketahui. Ilustrasikanlah prosedur dengan menggambarkan grafik untuk $(a) y = \cos 3x, (b) y = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right), (c) y = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

3.43. Gambarkanlah grafik untuk $(a) y = e^{-|x|}, (b) y = \ln|x|,\ \ (c) y = e^{-|x|} \sin x$.

3.44. Dengan menggunakan nilai-nilai utama konvensional pada Halaman 35 dan 36, hitunglah:

$(a) sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$(b) tan^{-1}(1) - tan^{-1}(-1)$

$(c) cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$(d) cosh^{-1}\sqrt{2}$

$(e) e^{-coth^{-1}\left(\frac{25}{7}\right)}$

$(f) sin^{-1}x + cos^{-1}x, -1 \leq x \leq 1$

$(g) sin^{-1}(\cos 2x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$(h) sin^{-1}(cos\ 2x), \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

$(i)\ \tanh(csch^{-1}3x), x \neq 0$

$(j)\ \cos(2tan^{-1}x^2)$

Jawab. $(a) -\frac{\pi}{3}$ $(b) \frac{\pi}{2}$ $(c) -\frac{\pi}{3}$ $(d) \ln(1+\sqrt{2})$ $(e) \frac{3}{4}$ $(f) \frac{\pi}{2}$ $(g) \frac{\pi}{2} - 2x$ $(h) 2x - \frac{3\pi}{2}$ $(i) \frac{|x|}{x\sqrt{9x^2+1}}$ $(j) \frac{1-x^4}{1+x^4}$

3.45. Hitunglah $(a) \cos\{\pi \sinh(\ln 2)\}$, $(b) cosh^{-1}\{\coth(\ln 3)\}$.

Jawab. $(a) -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(b) \ln 2$

3.46. (a) Buktikanlah bahwa $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ jika nilai-nilai utama konvensional pada Halaman 35 diambil. (b) Apakah demikian juga dengan $tan^{-1}x + tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$? Jelaskanlah.

3.47. Jika $f(x) = tan^{-1}x$, maka buktikanlah bahwa $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, jelaskanlah kasus untuk $xy = 1$.

3.48. Buktikanlah bahwa $tan^{-1}a - tan^{-1}b = cot^{-1}b - cot^{-1}a$.

3.49. Buktikanlah identitas berikut:

$(a) 1 - tanh^2x = sech^2x$, $(b) \sin 3x = 3\sin x - 4sin^3x$,

$(c) \cos 3x = 4cos^3x - 3\cos x$, $(d) \tanh\frac{1}{2}x = (\sinh x)/(1+\cosh x)$,

$(e) \ln|\csc x - \cot x| = \ln\left|\ln\left|\tan\frac{1}{2}x\right|.\right|$

3.50. Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum relatif dan mutlak dari: $(a) f(x) \frac{(\sin x)}{x}, f(0) = 1$; $(b) f(x) = \frac{(sin^2x)}{x^2}, f(0) = 1$. Jelaskanlah kasus-kasus di mana $f(0)$ tidak terdefinisi atau $f(0)$ terdefinisi tetapi $\neq 1$.

LIMIT

3.51. Hitunglah limit-limit berikut ini, pertama-tama dengan menggunakan definisi dan kemudian dengan menggunakan teorema-teorema limit.

$$(a)\lim_{x\to 3}(x^2-3x+2),\quad (b)\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x-5},\quad (c)\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2},\quad (d)\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x},$$

$$(e)\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^4-16}{h},\quad (f)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Jawab. $(a)2,\quad (b)-\frac{1}{7},\quad (c)4,\quad (d)-\frac{1}{4},\quad (e)32,\quad (f)\frac{1}{2}.$

3.52. Misalkan $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 2x+5, & x>0\end{cases}$. (a) Gambarkanlah grafik $f(x)$. Hitunglah $(b)\lim_{x\to 2}f(x)$, $(c)\lim_{x\to -3}f(x)$, $(d)\lim_{x\to 0+}f(x)$, $(e)\lim_{x\to 0-}f(x)$, $(f)\lim_{x\to 0}f(x)$, dengan memberikan alasan Anda dalam setiap kasus.

Jawab. $(b)9,\quad (c)-10,\quad (d)5,\quad (e)-1,\quad (f)$tidak ada

3.53. Hitunglah $(a)\lim_{h\to 0+}\frac{f(h0-f(0+)}{h}$, dan $(b)\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0-)}{h}$, di mana $f(x)$ adalah fungsi dari Soal 3.52.

Jawab. $(a)2,\qquad (b)3$

3.54. (a) Jika $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, hitunglah $\lim_{x\to 0}f(x)$, dengan membuktikan jawaban Anda. (b) Apakah jawaban Anda untuk (a) masih sama jika kita meninjau $f(x)=x^2.\cos\frac{1}{x}, x\neq 0, f(0)=2$? Jelaskanlah.

3.55. Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to 3}10^{-\frac{1}{(x-3)^2}}=0$ dengan menggunakan definisi.

3.56. Misalkan $f(x)=\frac{1+10^{-\frac{1}{x}}}{2-10^{-\frac{1}{x}}}, x\neq 0, f(0)=\frac{1}{2}$. Hitunglah $(a)\lim_{x\to 0+}f(x)$, $(b)\lim_{x\to 0-}f(x)$, $(c)\lim_{x\to 0}f(x)$, dengan membuktikan jawaban untuk semua kasus.

Jawab. $(a)\frac{1}{2},\qquad (b)-1,\qquad (c)$tidak ada

3.57. Tentukanlah $(a)\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}$, $(b)\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}$. Gambarkanlah jawaban Anda secara grafik.

Jawab. $(a)1,\qquad (b)-1$

3.58. Jika $f(x)$ adalah fungsi yang dapat didefinisikan sebagaimana pada Soal 3.56, apakah $\lim_{x\to 0}f(|x|)$ ada? Jelaskanlah.

3.59. Jelaskanlah dengan tepat apanyang dimaksud ketika seseorang menulis:

$$(a)\lim_{x\to 3}\frac{2-x}{(x-3)^2}=-\infty,\quad (b)\lim_{x\to 0+}(1-e^{\frac{1}{x}}=-\infty,\quad (c)\lim_{x\to\infty}=\frac{2x+5}{3x-2}=\frac{2}{3}.$$

3.60. Buktikanlah bahwa $(a)\lim_{x\to\infty}10^{-x}=0,\quad (b)\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x+\pi}=0.$

3.61. Jelaskanlah mengapa $(a)\lim_{x\to\infty}\sin x$ tidak ada, $(b)\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sin x$ tidak ada.

3.62. $f(x)=\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$, maka hitunglah $(a)\lim_{x\to\infty}f(x), (b)\lim_{x\to-\infty}f(x), (c)\lim_{x\to 0+}f(x),$

$$(d)\lim_{x\to 0-}f(x), (e)\lim_{x\to 0}f(x)$$

Jawab. $(a)2,\quad (b)\frac{1}{6},\quad (c)2,\quad (d)\frac{1}{6},\quad (e)$tidak ada

3.63. Jika $|x|=$ bilangan bulat terbesar $\leq x$, maka hitunglah $(a)\lim_{x\to 2+}\{x-[x]\}, (b)\lim_{x\to 2-}\{x-[x]\}.$

Jawab. $(a)0,\qquad (b)1$

3.64. Jika $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, maka buktikanlah bahwa $(a)\lim_{x\to x_0}\{f(x)\}^2=A^2, (b)\lim_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$. Generalisasi yang manakah yang Anda duga benar? Dapatkah Anda membuktikannya?

3.65. Jika $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ dan $\lim_{x\to x_0}g(x)=B$, maka buktikanlah bahwa

$(a)\lim_{x\to x_0}\{f(x)-g(x)\}=A-B,\ (b)\lim_{x\to x_0}\{af(x)+bg(x)\}=aA+bB$ di mana $a,b=$ konstanta sebarang.

3.66. Jika limit-limit dari $f(x), g(x)$, dan $h(x)$ adalah berturut-turut A, B, dan C, maka buktikanlah bahwa:

$(a)\lim_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)+h(x)\}=A+B+C,\ (b)\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)h(x)=ABC.$ Generalisasikan hasil-hasil ini.

3.67. Hitunglah masing-masing dari yang berikut ini dengan menggunakan teorema limit.

$$(a)\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left\{\frac{2x^2-1}{(3x+2)(5x-3)}-\frac{2-3x}{x^2-5x+3}\right\}\qquad Jawab. (a)-\frac{8}{21}$$

$$(b)\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)(2x+3)}{(5x-3)(4x+5)}\qquad (b)\frac{3}{10}$$

$(c) \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1}\right)$ $\quad (c) 1$

$(d) \lim_{x\to1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{2x}{3x+5}\right)$ $\quad (d) \frac{1}{32}$

3.68. Hitunglah $\lim_{h\to2} \frac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$. (Petunjuk: Misalkan $8 + h = x^3$). *Jawab*. $\frac{1}{12}$

3.69. Jika $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, maka buktikanlah secara langsung bahwa $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

3.70. Jika diketahui $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$, maka hitunglah:

$(a) \lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{x}$ $\quad (c) \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ $\quad (e) \lim_{x\to0} \frac{6x - \sin 2x}{2x + 3\sin 4x}$ $\quad (g) \lim_{x\to0} \frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$

$(b) \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x}$ $\quad (d) (x-3)\csc \pi x$ $\quad (f) \lim_{x\to0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

$(h) \lim_{x\to1} \frac{3\sin \pi x - \sin 3\pi x}{x^3}$

Jawab. $(a) 3$, $(b) 0$, $(c) \frac{1}{2}$, $(d) -\frac{1}{\pi}$, $(e) \frac{2}{7}$, $(f) \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ $(g) -1$ $(h) 4\pi^3$

3.71. Jika $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, maka buktikanlah bahwa:

$(a) \lim_{x\to0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = b - a;$ $\quad (b) \lim_{x\to0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln\frac{a}{b}, a, b > 0;$

$(c) \lim_{x\to0} \frac{\tanh ax}{x} = a$

3.72. Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ jika dan hanya jika $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = 1$.

KONTINUITAS

Dalam soal-soal berikut ini asumsikan domain terbesar yang mungkin kecuali dinyatakan berbeda.

3.73. Buktikanlah bahwa $f(x) = x^2 - 3x + 2$ adalah kontinu pada $x = 4$.

3.74. Buktikanlah bahwa $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah kontinu (a) pada $x = 2$, (b) dalam $1 \leq x \leq 3$.

3.75. Selidikilah kontinuitas dari setiap fungsi berikut ini pada titik-titik yang diindikasikan:

$(a) f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0, f(0) = 0, x = 0$

$(b) f(x) = x - |x|; x = 0$

$(c) f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, x \neq 2, f(2) = 3, x = 2$

$(d) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & 1 < x < 2 \end{cases}; x = 1$

Jawab. (a) diskontinu, (b) kontinu, (c) kontinu, (d) diskontinu.

3.76. Jika $[x]$ = bilangan bulat terbesar $\leq x$, selidikilah kontinuitas dari $f(x) = x - [x]$ dalam interval $(a) 1 < x < 2, (b) 1 \leq x \leq 2$.

3.77. Buktikanlah bahwa $f(x) = x^3$ adalah kontinu pada setiap interval terhingga.

3.78. Jika $\frac{f(x)}{g(x)}$ dan $g(x)$ adalah kontinu pada $x = x_0$, maka buktikanlah bahwa $f(x)$ pasti kontinu pada $x = x_0$.

3.79. Buktikanlah bahwa $f(x) = \frac{tan^{-1} x}{x}, f(0) = 1$ adalah kontinu pada $x = 0$.

3.80. Buktikanlah bahwa polinomial adalah kontinu pada setiap interval terhingga.

3.81. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinomial-polinomial, maka buktikanlah bahwa $\frac{f(x)}{g(x)}$ adalah kontinu pada setiap titik $x = x_0$ di mana $g(x_0) \neq 0$.

3.82. Berikanlah titik-titik diskontinuitas dari setiap fungsi berikut ini.

$(a) f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-4)}$ $\qquad$ $(c) f(x) = \sqrt{(x-3)(6-x)}, 3 \leq x \leq 6$

$(b) f(x) = x^2 \frac{\sin 1}{x}, x \neq 0, f(0) = 0$ $\qquad$ $(d) f(x) = \frac{1}{1 + 2 \sin x}$

Jawab. $(a) x = 2,4$, (b)tidak ada, (c)tidak ada,

$$(d) x = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi, \frac{11\pi}{6} + 2m\pi, m = 0,1,2, \ldots.$$

KONTINUITAS SERAGAM

3.83. Buktikanlah bahwa $f(x) = x^3$ adalah kontinu seragam dalam $(a) 0 < x < 2, (b) 0 \leq x \leq 2, (c)$ sebarang interval terhingga.

3.84. Buktikanlah bahwa $f(x) = x^2$ adalah titik kontinu seragam dalam $0 < x < \infty$.

3.85. Jika a adalah sebuah konstanta, maka buktikanlah bahwa $f(x) = \frac{1}{x^2}$ adalah (a) kontinu pada $a < x < \infty$ jika $a \geq 0$, (b) kontinu seragam dalam $a < x < \infty$ jika $a > 0$, (c) tidak kontinu seragam dalam $0 < x < 1$.

3.86 Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah kontinu seragam dalam interval yang sama, maka buktikanlah bahwa $(a) f(x) \pm g(x)$ dan $(b) f(x)g(x)$ adalah kontinu seragam dalam interval tersebut. Nyatakanlah dan buktikanlah teorema analog untuk $\frac{f(x)}{g(x)}$.

SOAL LAIN-LAIN

3.87. Berikanlah bukti "ϵ, δ" dari teorema pada Soal 3.31.

3.88. (a) Buktikanlah bahwa persamaan $\tan x = x$ memiliki akar real positif dalam masing-masing interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2}, \ldots$

(b) Ilustrasikan hasil pada (a) dengan menggambar grafik $y = \tan x$ dan $y = x$ dan menentukan titik-titik potongnya.

(c) Tentukanlah nilai akar positif terkecil dari $tan x = x$.

Jawab. (c) sekitar 4,49

3.89. Buktikanlah bahwa hanya terdapat solusi real untuk $\sin x = x$ yaitu $x = 0$.

3.90. (a) Buktikanlah bahwa $\cos x \cosh x + 1 = 0$ memiliki akar real tak terhingga.

(b) Buktikanlah bahwa untuk nilai-nilai x yang besar akarnya akan mendekati $\cos x = 0$.

3.91. Buktikanlah bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = 0$.

3.92. Misalkan $f(x)$ kontinu pada $x = x_0$ dan asumsikan $f(x_0) > 0$. Buktikanlah bahwa terdapat sebuah interval $(x_0 - h, x_0 + h)$, di mana $h > 0$, di mana $f(x) > 0$. (Lihat Teorema 5, Halaman 38.) [Petunjuk: Perhatikanlah bahwa kita dapat membuat $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0)$. Kemudian perhatikanlah bahwa $f(x) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| > \frac{1}{2} f(x_0) > 0.$]

3.93. (a) Buktikanlah Teorema 10 Halaman 48, untuk batas bawah terbesar m (lihat Soal 3.34). (b) Buktikanlah Teorema 9, Halaman 38 dan jelaskanlah hubungannya dengan Teorema 10.

GLOSARIUM

Aljabar : salah satu cabang matematika yang mempelajari penyederhanaan serta pemecahan masalah menggunakan simbol yang menjadi pengganti konstanta atau variabel.

Aljabar irasional : fungsi yang variabel bebasnya berpangkat bilangan bulat.

Aljabar rasional : fungsi yang variabel bebasnya terdapat dibawah tanda akar.

Diskontinu : tidak kontinu, tidak bersinambung.

Eksponensial : sebuah operasi matematika, ditulis sebagai bilangan yang melibatkan dua bilangan, basis atau bilangan pokok badan eksponen atau pangkat n.

Elementer : sebuah homonim karena arti-artinya memiliki ejaan dan pelafalan yang sama tetapi maknanya berbeda.

Fundamental : sebuah pernyataan fundamental atau kebenaran umum atau dasar realitas.

Fungsi : dalam istilah matematika merupakan pemetaan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain).

Hiperbolik : salah satu hasil kombinasi dari fungsi-fungsi eksponen.

Horizontal : sejajar horizon (langit bagian bawah yang berbatasan dengan bumi menurut pandangan mata).

Infinity : jumlah yang tak berakhir.

Interval : suatu himpunan bilangan real dengan sifat bahwa setiap bilangan yang terletak di antara dua bilangan dalam himpunan itu juga termasuk ke dalam himpunan.

Kompleks : suatu kesatuan yang terdiri dari sejumlah bagian, khususnya yang memiliki bagian yang saling berhubungan dan saling tergantung.

Komposit : kata sifat yang berarti susunan atau gabungan.

Kontinu : berkesinambungan, berkelanjutan, terus-menerus.

Korespodensi : istilah umum yang merujuk kepada aktivitas penyampaian maksud yang berhubungan dengan relasi dan fungsi.

Monotonik : sebuah fungsi yang memiliki nilai semakin besar maka secara mutlak nilai fungsi tersebut akan semakin naik sehingga fungsi tersebut dikatakan monoton naik, sedangkan fungsi yang semakin turun maka fungsi tersebut disebut dengan fungsi monoton turun.

Polinomial : biasa disebut suku banyak merupakan pernyataan matematika yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien.

Teorema nilai perantara : analisis matematika yang menyatakan bahwa untuk tiap nilai di antara batas atas terkecil dan batas bawah terbesar bayangan suatu fungsi kontinu terdapat titik terkait dalam ranah fungsi tersebut yang dipetakan terhadap titik itu.