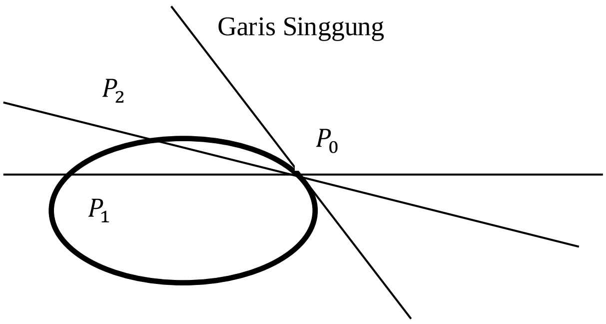
BAB 4

TURUNAN

4.1 KONSEP DEFINISI TURUNAN

Hanya terdapat sedikit konsep yang membentuk matematika dan konsep-konsep tersebut tidak saling berkaitan. Turunan, elemen fundamental dari kalkulus diferensial, adalah sebagiam dari konsep ini. Cabang matematika yang disebut analisis, yang salah satu bagiannya adalah kalkulus lanjut, merupakan hasil akhir. Terdapat dua masalah yang mengarah pada ditemukannya turunan. Masalah yang lebih awal, yaitu mendefinisikan dan merepresentasikan garis singgung terhadap sebuah kurva pada salah satu titiknyam telah menjadi pemikiran oara ahli filsafat yunani pada zaman dahulu. Masalah yang lain, yaitu mempresentasikan kecepatan sesaat dari sebuah benda yang gerakannya tidak konstan, lebih merupakan masalah pada abad ketujuhbelas. Pada akhir abad tersebut, masalah-masalah ini dan hubungan-hubungannya dapat diselesaikan. Seperti biasa, banyak ahli matematika yang meberikan sumbangannya, tetapi Isaac Newton dan Gottfried Wilhem Leibniz-lah yang secara independen menyatukan sejumlah pemikiran secara terorganisir.

Masalah garis singgung memberikan sebuah interpretasi visual mengenai turunan dan dapat dipikirkan walau bagaimanapun kompleksnya suatu aplikasi tertentu. Ini mengarah pada definisi turunan sebagai limit hasilbagi selisih yang dapat dijelaskan sebagi berikut. (Lihat Gambar 4-1).



Gambar 4-1

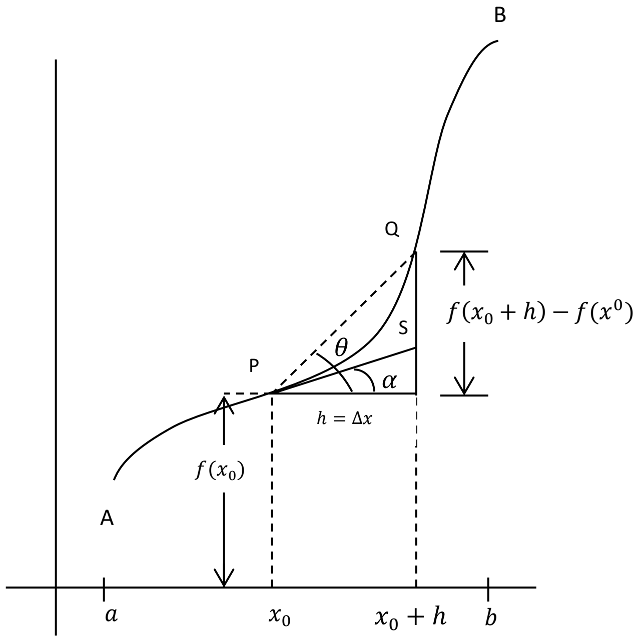
misalkan $P_0\ (x_0)$ adalah suatu titik pada grafik $y = f(x)$. Misalkan $P(x)$ adalah sebuah titik yang berada di dekatnya pada grafik fungsi f yang sama. Maka garis yang melewati kedua titik ini disebut garis potong. Kemiringannya m_s, adalah

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dimana Δx disebut kenaikan dalam x dan Δy disebut kenaikan dalam y. Selain itu kemiringan tersebut dapat ditulis sebagai

$$m_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dimana $h = x - x_0 = \Delta x$. Lihat gambar 4-2



Gambar 4-2

Kita dapat membayangkan suatu barisan garis yang terbentuk pada saat $h \to 0$. Garis limit dari barisan garis ini adalah garis singgung terhadap grafik pada P_0. Untuk membuat penalaran ini tepat, limitnya (jika ada), dituliskan dalam bentuk;

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Limit ini diberi nama $f'(x_0)$. Ini disebut turunan fungsi f pada nilai domainnya x_0. Jika limit ini dapat dibentuk pada setiap titik dari subdomain dari domain f, maka f dikatakan dapat didiferensiasi pada subdomain tersebut dan fungsi baru f' telah terbentuk.

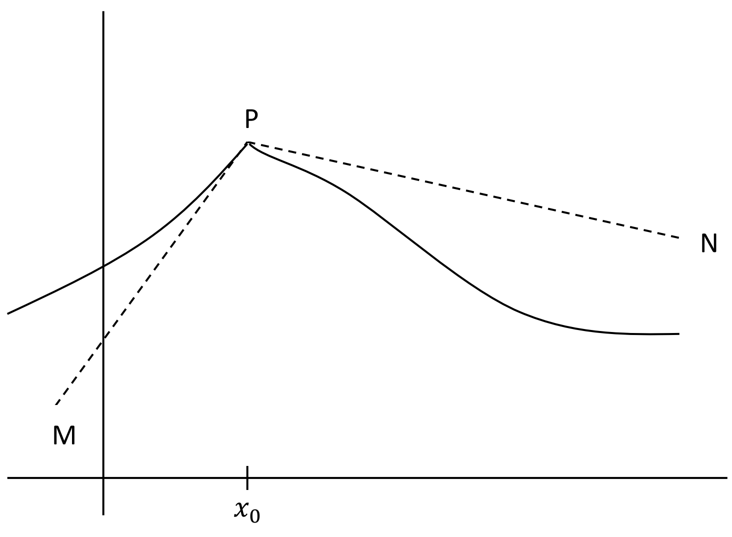
Konsep limit ini tidak dapat dipahami hingga pertengahan abad kesembilanbelas. Satu contoh sederhana menggambarkan masalah konseptual yang dihadapi para ahli matematika dari tahun 1700-an hingga waktu itu. Misalkan grafik f adalah parabola $y = x^2$, maka dengan sedikit manipulasi aljabar akan dihasilkan

$$m_s = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

Newton, Leibnitz dan ahli-ahli pada zaman itu hanya memisalkan $h = 0$ dan mengatakan bahwa $2x_0$ adalah kemiringan garis singgung pada P_0. Akan tetapi , ini menimbulkan persoalan dengan munculnya $\frac{0}{0}$ pada bentuk tengahnya. Pemahaman kalkulus yang benar adalah dalam pemahaman mengenai bagaimana pengenalan sesuatu yang baru (turunan, yaitu limit dari hasilbagi selisih) menyelesaikan dilema ini

Catatan 1 : Pembentukan fungsi-fungsi baru dari hasilbagi selisih adalah tidak terbatas pada f'. Limit hasilbagi selisih akan ada, maka f'' dapat dibentuk dan seterusnya dan seterusnya.

Catatan 2 : Karena kontinuitas sebuah funsi adalah sifat yang sangat kuar, kita mungkin berpikir bahwa kemampuan untuk didiferensiasi akan mengikuti. Ini tidak selalu benar, seperti diperlihatkan pada Gambar 4-3.



Gambar 4-3

Teorema : Jika f dapat didiferensiasi pada sebuah nilai domain, maka f kontinu pada nilai tersebut

4.2 TURUNAN RUAS KANAN DAN RUAS KIRI

Status turunan pada titik akhir dari domain f, dan dalam keadaan khusus lainnya, dijelaskan oleh definisi-definisi berikut. Turunan ruas-kanan dari $f(x)$ pada $x = x_0$ didefinisikan sebagai

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3}$$

Jika limit ini ada. Perhatikan bahwa dalam kasus ini $h(= \Delta x)$ terbatas hanya untuk nilai-nilai positif pada saat h mendekati nol. Demikian juga, turunan ruas-kiri dari $f(x)$ pada $x = x_0$ didefinisikan sebagai

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4}$$

Jika limit ini ada. Dalam kasus ini h terbatas untuk nilai-nilai negatif pada saat h mendekati nol. Sebuah fungsi f memiliki turunan pada $x = x_0$ jika dan hanya jika $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

4.3 DIFERENSIABILITAS DALAM INTERVAL

Jika sebuah fungsi memiliki turunan pada semua titik dari sebuah interval, maka fungsi tersebut dikatakan dapat didferensiasi dalam interval tersebut. Khususnya jika f didefinisikan dalam interval tertutup $a \leq x \leq b$, yaitu$[a, b]$. Maka f dapat didiferensiasi dalam interval tersebut jika dan hanya jika $f'(x_0)$ ada untuk setiap x_0 sedemikian rupa sehingga $a < x_0 < b$ dan jika $f'_+(a)$ dan $f'_-(b)$ keduanya ada. Jika sebuah fuingsi memiliki turunan kontinu, maka fungsi tersebut kadang-kadang disebut dapat didiferensiasi secara kontinu.

4.4 DIFERENSIABILITAS BAGIAN DEMI BAGIAN

Sebuah fungsi disebut dapat didiferensiasi bagian demi bagian (*piecewise differentiable*) atau mulus bagian demi bagian dalam sebuah interval $a \leq x \leq b$ jika $f'(x)$ adalah kontinu bagian demi bagian. Contoh grafik fungsi kontinu bagian demi bagian diberikan pada Halaman 39. Persamaan garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ pada titik dimana $x = x_0$ ditentukan oleh

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (7)$$

Fakta bahwa sebuah fungsi tersebut dapat kontinu pada sebuah titik dan tidak dapat didiferensiasi ditunjukkan secara grafik pada Gambar 4-3. Dalam kasus ini, terdapat dua garis singgung di P yang direpresentasikan sebagai PM dan PN. Kemiringan dari garis-garis singgung ini berturut-turut adalah $f'_-(x_0)$ dan $f'_+(x_0)$.

4.5 DIFERENSIAL

Misalkan $\Delta x = dx$ adalah pertambahan x. Maka

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (8)$$

Ini disebut pertambahan dalam $y = f(x)$. Jika $f(x)$ adalah kontinu dan memiliki turunan pertama yang kontinu dalam sebuah interval, maka

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x = f'(x)dx + dx \qquad (9)$$

Dimana $\epsilon \to 0$ pada saat $\Delta x \to 0$. Pernyataan

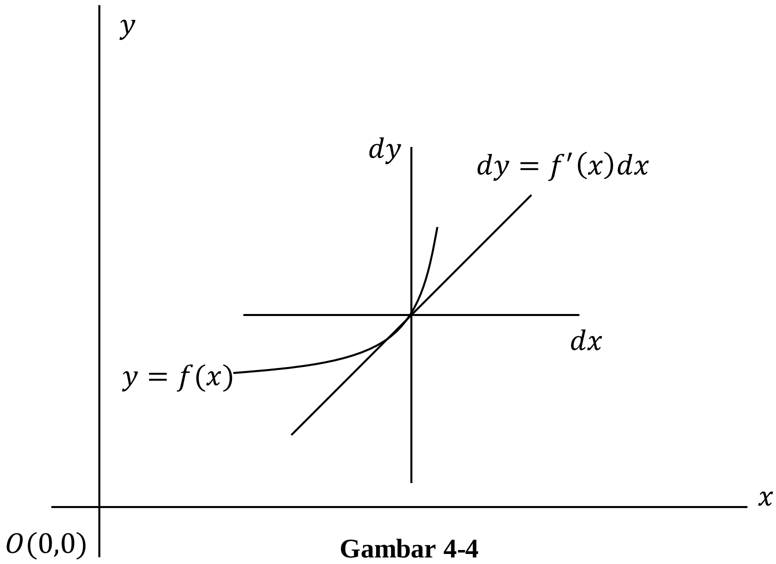
$$\boxed{dy = f'(x)dx \qquad (10)}$$

Disebut diferensial dari y atau $f(x)$ atau bagian utama (*principal part*) dari Δy. Perhatikanlah bahwa secara umum $\Delta y = dy$. Akan tetapi, jika $\Delta x = dx$ adalah kecil, maka dy diperkirakan mendekati Δy (lihat Soal 4.11). besarnya dx, disebut diferensial daro x, dan dy tidak harus kecil. Karena definisi (8) dan (10), kita seringkali menulis

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (11)}$$

Disini ditekankan bahwa dx dan dy bukan merupakan limit dari Δx dan Δy pada saat $\Delta x \to 0$, karena limit-limit ini adalah nol sementara dx dan dy tidak selalu nol. Sementara itu, jika dx diketahui kita dapat menentukan dy dari persamaan (10), yaitu, dy sebagai suatu variabel tidak bebas yang ditentukan dari variabel bebas dx untuk x yang diketahui. Secara geometri, dy direpresentasikan pada Gambar 4-1, untuk nila $x = x_0$ yang tertentu, oleh segmen garis SR, sementara Δy direpresentasikan oleh QR.

Intrepretasi geometrik dari turunan sebagai kemiringan garis singgung di sebuah titik pada kurva adalah salah satu aplikasi yang fundamental. Aplikasi penting lain dari turunan adalah sebagai representasi dari kecepatan sesaat dalam penyusunan model-model fisis. Secara khusus, sudut pandang fisika ini biasa digunakan untuk memperkenalkan diferensial. Hukum Gerak Newton pertama dan kedua secara tidak langsung menyatakan bahwa lintasan dari sebuah benda ditentukan oleh gaya yang bekerja padanya, dan jika gaya-gaya tersebut tiba-tiba hilang, maka benda akan bergerak ke arah tangensial dari lintasan pada titik dimana gaya tersebut hilang (titik bebas). Jadi, sifat lintasan dalam lingkungan kecil titik bebas menjadi perhatian. Dengan pola pikir semacam ini, perhatikanlah gagasan berikut



Gambar 4-4

Misalkan grafik sebuah fungsi f direpresentasikan oleh $y = f(x)$. Misalkan $x = x_0$ adalah nilai domain di mana f' ada (yaitu, fungsi dapat didiferensiasi pada nilai tersebut). Buatlah fungsi linear baru.

$$dy = f'(x_0)dx$$

Dengan dx sebagai variabel domain (bebas) dan dy adalah variabel daerah hasil yang dihasilkan oleh aturan ini. Fungsi linear ini memiliki interpretasi grafik sebagaimana ilustrasi pada Gambar 4-4.

Sebuah sistem koordinat dapat dibuat dengan titik pusat pada P_0, sumbu dx yang sejajar dengan sumbu x, dan sumbu dy sejajar dengan sumbu y. Dalam sistem kooridnat ini, persamaan linear kiata adalah persamaan garis singgung terhadap grafik pada P_0. Ini merupakan representasi lintasan pada lingkungan kecil titik tersebut; dan jika lintasan adalah lintasan benda, persamaan linear merepresentasikan lintasan barunya ketika semua gaya dihilangkan. dx disebut diferensial x dan dy disebut diferensial y. Karena persamaan linear di atas berlaku pada setiap titik dalam domain f di mana fungsi tersebut memiliki turunan, subskrip dapat dihilangkan dan kita dapat menulis.

$$dy = f'(x)dx$$

Pengamatan penting berikut ini harus dilakukan.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{Dimana } \frac{dy}{dx} \text{ tidak sama dengan } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Di lain pihak, dy dan Δy adalah saling berkaitan. Secara khusus,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Berarti bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$-\varepsilon < \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} < \varepsilon$$

Bilamana $|\Delta x| < \delta$. Maka dx adalah sebuah variabel bebas dan sumbu x dan dx sejajar; sehingga, dx dapat diasumsikan sama dengan Δx. Dari sini dapat dituliskan

$$-\varepsilon\Delta x < \Delta y - dy < \varepsilon\Delta x$$

Atau

$$dy - \varepsilon\Delta x < \Delta y - dy < dy + \varepsilon\Delta x$$

Dari hubungan ini kita melihat bahwa dy adalah perkiraan untuk Δy dalam lingkungan kecil x, dy disebut bagian utama dari Δy. Representasi f' dengan $\frac{dy}{dx}$ memiliki indikasi aljabar yang sangat menarik dan akan muncul dalam banyak bagian berikutnya. Sesungguhnya, notasi ini diperkenalkan oleh Leibniz (sebelum munculnya gagasan-gagasan mengenai limit) dan merupakan alasan utama mengapa pendekatannya terhadap kalkulus lebih banyak diikuti dibandingkan pendekatan Newton.

4.6 DIFERENSIASI FUNGSI KOMPOSIT

Banyak fungsi yang merupakan komposisi dari fungsi-fungsi yang lebih sederhana. Sebagai contoh, jika f dan g memiliki aturan hubungan $u = x^3$ dan $y = \sin u$, maka $y = \sin x^3$ adalah aturan untuk sebuah fungsi komposit $F = g(f)$. Domain dari F adalah subhimpunan (himpunan bagian) dari domain F di mana nilai-nilai daerah hasilnya yang bersesuaian berada dalam domain g. Aturan diferensiasi fungsi komposit disebut aturan rantai dan direpresentasikan oleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\,[F'(x) = g'(u)f'(x)]$$

Dalam contoh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x^3)}{dx} = \cos x^3\,(3x^2 dx)$$

Arti penting dari aturan rantai tidak perlu terlalu ditekankan. Aplikasi yang sesuai merupakan hal yang penting dalam diferensiasi fungsi ini, dan hal tersebut memainkan peranan penting dalam mengubah variabel integrasi, seperti halnya mengubah variabel dalam model-model matematika yang melibatkan persamaaan diferensial.

4.7 DIFERENSIASI IMPLISIT

Aturan hubungan sebuah fungsi mungkin tidak eksplisit. Sebagai contoh, aturan $y = f(x)$ adalah implisit terhadap persamaan $x^2 + 4xy^5 + 7xy + 8 = 0$. Lebih lanjut tidak ada alasan untuk percaya bahwa persamaan ini dapat diselesaikan untuk y dalam bentuk x. Akan tetapi, dengan mengansumsikan domain yang sama (yang dijelaskan oleh variabel bebas x) anggota persamaan dari ruas kiri dapat diartikan sebagai komposisi fungsi-fungsi dan didiferensiasi dengan benar. Dalam contoh ini, diferensiasi terhadap x menghasilkan

$$2x + 4\left(y^5 + 5xy^4\frac{dy}{dx}\right) + 7\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Perhatikanlah bahwa persamaan ini dapat diselesaikan untuk $\frac{dy}{dx}$ sebagai fungsi dari x dan y (tetapi tidak untuk x semata).

4.8 ATURAN-ATURAN DIFERENSIASI

Jika f, g dan h adalah fungsi-fungsi yang dapat didiferensiasi, maka aturan-aturan diferensiasi berikut berlaku.

1. $\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) + g'(x)$

2. $\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) - g'(x)$

3. $\frac{d}{dx}\{Cf(x)\} = C\frac{d}{dx}f(x) = Cf'(x)$ di mana C adalah sembarang konstanta

4. $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

5. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$

   $= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ jika $g(x) \neq 0$

6. Jika $y = f(u)$dimana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx}$ (12)

   $= f'\{g(x)\}g'(x)$

Dengan cara yang sama, jika $y = f(u)$ dimana $u = g(v)$ dan $v = h(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad (13)$$

Hasil persamaan *(12)* dan *(13)* seringkali disebut aturan rantai untuk diferensiasi fungsi komposit.

7. Jika $y = f(x)$ dan $x = f^{-1}(y)$; maka $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{dx}{dy}$ saling berkaitan dengan

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \qquad (14)}$$

8. Jika $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, maka

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad (15)}$$

4.9 DIFERENSIASI FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER

Berikut ini kita mengansumsikan bahwa u adalah fungsi x yang dapat didferensiasi; jika $u = x, \frac{du}{dx} = 1$. Fungsi-fungsi invers didefinisikan menurut aturan utama yang diberikan dalam Bab 3.

1. $\frac{d}{dx}(C) = 0$
2. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$