BUKU

PROBALITAS

Penulis:

Risma Uly, S.Kom., MMSI

UKI Press
2019

BUKU

PROBALITAS

Penulis:
Risma Uly, S.Kom., MMSI

ISBN: 978-623-7256-07-6

Editor:
Jitu Halomoan, S.Pd., M.Pd

Penyunting/Sampul:
UKI Press

Penerbit: UKI Press
Redaksi: Jl. Mayjen Sutoyo No.2 Cawang Jakarta 13630
Telp. (021)8092425

Cetakan I Jakarta: UKI Press, 2019

UKI Press
2019

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan buku “Probalitas” dengan tepat waktu. Saya berterima kasih kepada sema pihak yang telah membantu saya di dalam memberikan, saran, nasehat, dan petunjuk yang membangun demi suksesnya penyusunan buku pertama jilid pertama ini.

Saya selaku penulis bahan ajar ini, menyadari sepenuhnya bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, saya mengharapkan kritikan dan saran yang bersifat membangun dari seluruh pembaca, agar dijadikan pedoman dalam pengembangan buku terbitan jilid selanjutnya. Semoga buku ini bermanfaat dan mendukung di dalam bidang pendidikan dan bagi pembaca. Akhir kata, saya ucapkan terimakasih, salam.

Penulis

Jakarta, 11 Maret 2019

Risma Uly, S.Kom., MMSI

DAFTAR ISI

BAB 1

PENCACAHAN

A. KAIDAH PENCACAHAN

a) Pengertian secara umum dari Kaidah Pecacahan

Pencacahan adalah merupaan bahasan awal dari matematika yang dapat digunakan sebagai alat dasar untuk mempelajari materi-materi lainnya yang umumnya bersifat kombinatorik. Di samping itu, ia juga mempunyai aplikasi di banyak area seperti: teori peluang, statistika, teori graf, teori koding, kriptografi dan analisis algoritma. Kaidah pencacahan membantu dalam memecahkan masalah untuk menghitung berapa banyaknya cara yang mungkjin terjadi dalam suatu percobaan. Kaidah pencacahan meliputi aturan pengisian tempat, permutasi dan kombinasi. Namun materi pembahasannya di dalam bahan ajar ini akan ditekankan pada:

1. Aturan Penjumlahan
2. Aturan Perkalian
3. Permutasi dan Kombinasi
4. Kombinasi dengan pengulangan

b) Konsep Dasar Pencacahan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering dihadapkan dengan masalah penghitungan. Misalnya ada berapa cara yang dapat dilakukan pada saat memasukkan sebuah kelereng ke dalam sebuah kantung, begitu pula apabila memasukkan beberapa kelereng ke dalam beberapa kantung, berapa cara memilih wakil dari beberapa kelompom mahasiswa dan masih banyak lagi kasus yang lain. Salah satu prinsip dasar yang mendasari perkembangan probabilitas terutama yang terkait dengan masalah penghitungan adalah konsep dasar pencacahan. Ada dua prinsip dasar pada konsep dasar pencacahan yaitu aturan penjumlahan dan aturan perkalian.

c) Aturan Penjumlahan (*Rule of Sum*)

d) Kaidah penjumlahan menganut prinsip umum bahwa keseluruhan sama dengan jumlah dari bagian-bagiannya. Secara umum, kaidah penjumlahan dijelaskan sebagai berikut: “Jika pekerjaan jenis pertama dapat dilakukan dengan m cara, pekerjaan jenis kedua dapat dilakukan dengan n cara, dan kedua jenis pekerjaan itu tidak dapat dilakukan secara simultan, maka banyaknya cara untuk menyelesaikan tugas-tugas tersebut adalah $m + n$ cara”. Secara umum dirumuskan sebagai berikut: “Jika ada suatu prosedur terdiri dari m-buah pekerjaan, $T1, T2, Tm$, yang masing-masing dapat dilakukan dengan cara, dan setiap pasang pekerjaan tersebut tidak dapat dilakukan secara bersamaan, maka akan ada cara untuk melakukan pekerjaan ini”.

1) Di dalam suatu laboratorium komputer ada 4 printer (merk) jenis laserjet dan 6 printer jenis deskjet.
   Jawab**:** Jika seorang praktikan diperbolehkan menggunakan kedua jenis printer tersebut, maka ada $4 + 6 = 10$ printer yang bisa dipilih untuk dipakai.
2) Aturan jumlah dapat diperluas untuk lebih dari dua tugas. Misalnya, seorang instruktur laboratorium komputer memiliki 4 jenis buku

bahasa pemrograman: 5 buku (judul) tentang C, buku tentang FORTRAN, 3 buku tentang Java, dan 5 buku tentang Pascal.

Jawab: Jika seorang praktikan dianjurkan untuk meminjam satu buku bahasa pemrograman dari sang instruktur, ada $5 + 4 + 3 + 5 = 17$ buku yang bisa dia pinjam.

e) Aturan Perkalian (*Rule of Product*)

Secara umum dirumuskan sebagai berikut: "Jika suatu prosedur dapat dipecah menjadi dua tahap dan jika tahap pertama menghasilkan m keluaran yang mungkin dan masing-masing keluaran dilanjutkan ke tahap kedua dengan n keluaran yang mungkin, maka prosedur tersebut akan menghasilkan $m \times n$ keluaran yang mungkin". Kaidah perkalian sebagaimana dikemukakan di atas dapat pula dipahami sebagai kaidah pengisian tempat yang tersedia yang diilustrasikan sebagai berikut. Berapa banyak *password* (kata kunci) dengan panjang 5 angka yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4,dan 5 jika tidak boleh ada angka berulang.

Beberapa Contoh *password* itu adalah 12345, 23415, 54231, dan seterusnya.

Perhatikan bahwa 22341, 1234, atau 522341 bukan contoh *password* dimaksud. Mengapa? Untuk dapat menentukan banyaknya cara dimaksud, dapat dilakukan secara sistematis sebagai berikut. Kita sediakan 5 tempat yang dapat ditempati 5 angka yang disediakan.

Tempat	1	2	3	4	5
Banyak cara	5	4	3	2	1

1) Tempat pertama dapat diisi dengan 5 cara, yakni angka 1, 2, 3, 4, 5
2) Tempat kedua dapat diisi dengan 4 cara
3) Demikian seterusnya hingga tempat kelima dapat diisi dengan1 cara
4) Dengan demikian, total banyaknya cara adalah ... cara

Ketika kita menghitung banyaknya cara menyusun *password* di atas, kita telah menggunakan kaidah pengisian yang tersedia, yang secara umum dijelaskan sebagai berikut :

1) Banyaknya cara mengisi tempat pertama
2) Banyaknya cara mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi
3) Banyaknyacara mengisi tempat ke-k setelah $(k - 1)$ tempat sebelumnya terisi.

f) Aturan Perkalian dan Penjumlahan Dalam Operasi Himpunan

Aturan penjumlahan dan aturan perkalian dapat juga dinyatakan ke dalam teori himpunan. Pada aturan penjumlahan, misalkan adalah himpunan-himpunan yang tak beririsan (*disjoint*). Maka banyaknya cara untuk memilih satu anggota dari masing-masing himpunan ini adalah: Pada aturan perkalian, misalkan ada himpunan-himpunan yang berhingga. Maka banyaknya cara untuk memilih satu anggota dari masing-masing himpunan dengan urutan adalah kardinalitas dari perkalian Kartesian semua himpunan tersebut. Sebagai gambaran, perhatikan contoh berikut ini. Berapa banyak bit string dengan panjang 8 bit yang bisa dimulai dengan “1” atau berakhir dengan “00”?

1) Pekerjaan 1

   Bentuk suatu string dengan panjang 8 yang dimulai dari 1.

   1. Ada satu cara untuk mengambil bit pertama (1),
   2. Ada dua cara untuk mengambil bit kedua (0 atau 1),
   3. Ada dua cara untuk mengambil bit ketiga (0 atau 1),
   4. ...
   5. Ada dua cara untuk mengambil bit kedelapan (0 atau 1)

   Maka berdasaran aturan perkalian, pekerjaan 1 dapat dilakukan dengan $1 \times 2^7 = 128$ cara.

2) Pekerjaan 2

   Bentuk suatu string dengan panjang 8 yang berakhir dengan 00.

   1. Ada dua cara untuk mengambil bit pertama (0 atau1),
   2. Ada dua cara untuk mengambil bit kedua (0 atau1),
   3. ...
   4. Ada dua cara untuk mengambil bit keenam (0 atau1),
   5. Ada satu cara untuk mengambil bit ketujuh (0),
   6. Ada satu cara untuk mengambil bit kedelapan (0).

   Maka berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 2 dapat dilakukan dengan $2^6 \times 1 \times 1 = 64$ cara.

Karena ada 128 cara untuk melakukan pekerjaan 1 dan 64 cara untuk melakukan pekerjaan 2, apakah ini berarti ada 192 buah bit string 8 bit yang berawalan dengan 1 dan berakhir dengan 00? Pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan pada waktu yang sama, dimana ketika kita melakukan pekerjaan 1 dan membuat string yang diawali dengan 1, beberapa dari string ini berakhiran 00. Karena kadangkala kita bisa melakukan pekerjaan 1 dan 2 pada saat bersamaan, maka aturan penjumlahan tidak berlaku. Jika ingin menggunakan aturan penjumlahan dalam kasus ini, maka harus mengurangkan kasus-kasus dimana pekerjaan 1 dan 2 dilakukan secara bersamaan dari total kemungkinan. Ada berapa banyak kasus yang demikian, yaitu berapa banyak string yangberawalan dengan 1 dan berakhiran dengan 00?

1. Ada satu cara untuk mengambil bit pertama (1),
2. Ada dua cara untuk mengambil bit kedua (0 atau 1),
3. ...
4. Ada dua cara untuk mengambil bit keenam (0 atau 1),
5. Ada satu cara untuk mengambil bit ketujuh (0),
6. Ada satu cara untuk mengambil bit kedelapan (0).

Berdasarkan aturan perkalian, maka $2^5 = 32$ buah kasus, dimana pekerjaan 1 dan 2 dapat dikerjakan bersama.

Karena terdapat 128 cara untuk melakukan pekerjaan 1 dan 64 cara untuk melakukan pekerjaan 2, dan 32 diantara kedua pekerjaan tersebut dilakukan pada saat yang bersamaan, maka sebenarnya adalah pada $128 + 64 - 32 = 160$ cara untuk melakukan pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 (tak bersamaan). Di dalam teori himpunan $A1$ dan $A2$ yang tidak beririsan. Maka kita memiliki prinsip inklusi-eksklusi. Teori peluang berkaitan dengan perhitungan peluang atau kemungkinan terjadinya suatu kejadian. Suatu kejadian yang merupakan bagian dari suatu kejadian yang lebih besar disebut ruang sampel. Untuk memperoleh penghitungan yang benar tentang suatu peluang kejadian, maka perlu diketahui seberapa banyak kejadian itu dapat terjadi dan seberapa banyak ruang sampelnya dapat terjadi. Oleh sebab itu, sebelum kita membicarakan tentang peluang, kita perlu mengetahui cara menghitung atau mencacah banyak terjadinya suatu kejadian atau banyak anggota suatu kejadian. Banyak anggota kejadian-kejadian sederhana dapat dengan mudah kita cacah dengan mendaftar atau mendata terlebih dahulu seluruh anggota dari ruang sampelnya.

Contoh 1
Misal dua buah uang logam dilempar secara bersamaan. Misal K adalah kejadian munculnya 1 gambar dan 1 angka. Tentukan banyak anggota A. Misal A menyatakan munculnya angka dan G menyatakan munculnya gambar. Maka ruang sampel dari pelemparan dua mata uang tersebut adalah AA, AG, GA, dan GG. Dengan demikian, maka K sebagai kejadian munculnya satu gambar dan satu angka mempunyai anggota yaitu AG dan GA. Banyak anggota K = 2.

Jika sesuatu dapat diselesaikan dalam n_1 cara yang berbeda, dan sesuatu yang lain dalam n_2 cara yang berbeda, maka kedua hal tersebut secara berurutan dapat diselesaikan dalam $n_1 \times n_2$ cara yang berbeda, maka kedua hal tersebut secara berurutan dapat diselesaikan dalam $n_1 \times n_2$ cara.

Contoh 2
Apabila ada 3 calon untuk ketua kelas dan 5 calon untuk wakilnya, maka dua jabatan itu dapat diisi dalam 3 x 5 = 15 cara.

Contoh 3

Berapa banyak bilangan-bilangan bulat positif ganjil, yang terdiri dari tiga angka yang dapat disusun dari angka-angka 3, 4, 5, 6 dan 7?

Jawab:

Bilangan yang terdiri dari angka, bentuk :

Angka ratusan	Angka puluhan	Angka satuan

Angka ratusan : Tiap angka tersedia dapat diambil sebagai ratusan, ada sebanyak 5 buah.

Angka puluhan : Karena tidak ada ketentuan bahwa ketiga angka itu berlainan, maka kelima angka itu dapat menempati angka puluhan, ada sebanyak 5 buah.

Angka satuan : Untuk satuan hanya boleh dipilih angka 3, 5 dan 7 karena bilangannya ganjil ada sebanyak 3 buah.

Jadi, banyak bilangan-bilangan yang memenuhi syarat diatas adalah 5x5x3 = 75.

Contoh 4

Dari angka 3, 5, 6, 7 dan 9 dibuat bilangan yang terdiri atas 3 angka yang berbeda. Diantara bilangan-bilangan tersebut yag kurang dari 400, banyaknya adalah ...

Jawab

Bilangan 3 angka. Buat 3 kotak

Ratusan	Puluhan	Satuan

Kotak ratusan dapat diisi 3 saja → 1 cara

Kotak puluhan dapat diisi angka 5, 6, 7, 9 → 4 cara

Kotak satuan dapat diisi angka tersisa (setelah diambil kotak ratusan dan puluhan = 2 angka) → 3 cara

Ratusan	Puluhan	Satuan
1	4	3

Banyaknya cara = 1 x 4 x 3 = 12

Contoh 5

Misalkan, dari 3 orang siswa, yaitu Algi, Bianda, dan Cahyadi akan dipilih untuk menjadi ketua kelas, sekretaris, dan bendahara dengan aturan bahwa seseorang tidak boleh merangkap jabatan pengurus kelas.

Jawab:

1) Untuk ketua kelas (K)
   Posisi ketua kelas dapat dipilih dari 3 orang, yaitu Algi (A), Bianda (B), atau Cahyadi (C).
   Jadi, posisi ketua kelas dapat dipilih dengan 3 cara.

2) Untuk Sekretaris (S)
   Jika posisi ketua kelas sudah terisi oleh seseorang maka posisi sekretaris hanya dapat dipilih dari 2 orang yang belum terpilih menjadi pengurus kelas.
   Jadi, posisi sekretaris dapat dipilih dengan 2 cara.

3) Untuk Bendahara (H)
   Jika posisi ketua kelas dan sekretaris sudah terisi maka posisi bendahara hanya ada satu pilihan, yaitu dijabat oleh orang yang belum terpilih menjadi pengurus kelas.
   Jadi, posisi bendahara dapat dipilih dengan 1 cara.

Dengan demikian, banyak cara yang dilakukan untuk memilih 3 orang pengurus kelas dari 3 orang kandidat adalah :
3 × 2 × 1 = 6 cara.

g) Faktorial

Faktorial Bilangan Asli
Hasil perkalian semua bilangan bulat positif secara berurutan dari 1 sampai dengan n disebut n faktorial dan ditulis dengan notasi $n!$
Untuk setiap bilangan asli, maka n faktorial didefinisikan sebagai
$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
$n!$ dibaca n faktorial

Hasil khusus
$\mathbf{1}! = \mathbf{1}$ dan $\mathbf{0}! = \mathbf{1}$

Faktorial bisa di pakai dalam bilangan desimal, tetapi subjek yang mempelajari hal tersebut disebut fungsi gamma. Fungsi gamma adalah perluasan dari faktorial, tetapi hasil kalinya tidak hanya terdiri dari bilangan asli. Hasil kali fungsi gamma terdiri dari bilangan real dan bilangan imaginer dengan prinsip:
$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt$ atau $\Gamma(x+1) = x!$

Contoh 1.

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$$
$$= 12$$

Contoh 2.

$$\frac{10!}{4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 151.200$$

Contoh 3

Nilai $\frac{1}{19!} - \frac{20!}{20!} + \frac{5}{21!}$

$$= \frac{20}{20!} - \frac{20}{20!} + \frac{5}{21!}$$

$$= \frac{5}{21!}$$

Contoh 4

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$= 5$$

Contoh 5

$$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 8 \times 7$$

$$= 56$$

Contoh 6

Nilai n yang memenuhi persamaan $\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = \frac{6!}{3!3!}$

Jawab:

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = \frac{6!}{3!3!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!3\times2\times1}$$

$$n^2 - 5n + 6 = 20$$

$$n^2 - 5n - 14 = 0$$

$$(n-7)(n+2) = 0$$

$n = 7$ atau $n = -2$

\

h) Permutasi

Permutasi adalah penyusunan kembali suatu kumpulan objek dalam urutan yang berbeda dari urutan yang semula. Jika terdapat suatu untai abjad abcd, maka untai itu dapat dituliskan kembali dengan urutan yang berbeda: acbd, dacb, dan seterusnya. Selengkapnya ada 24 cara menuliskan keempat huruf tersebut dalam urutan yang berbeda satu sama lain. abcd abdc acbd acdb adbc adcb bacd badc bcad bcda bdac bdca
cabd cadb cbad cbda cdab cdba dabc dacb dbac dbca dcab dcba

Setiap untai baru yang tertulis mengandung unsur-unsur yang sama dengan untai semula abcd, hanya saja ditulis dengan urutan yang berbeda. Maka setiap untai baru yang memiliki urutan berbeda dari untai semula ini disebut dengan permutasi dari abcd. Rumus permutasi adalah sebagai berikut.

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ket :
P = Permutasi
n = jumlah
k = kriteria

i) Kombinasi

Kombinasi adalah pemilihan objek tanpa memperhatikan urutannya. Kombinasi berbeda dengan permutasi yang mementingkan urutan objek. Sebagai contoh, misalkan terdapat suatu kumpulan buah: apel, jeruk, mangga, pisang. Maka {apel, jeruk} dan {jeruk, mangga, pisang} adalah merupakan kombinasi dari kumpulan tersebut. Seluruh himpunan bagian yang mungkin dibentuk dari kumpulan buah tersebut adalah:

1) tidak ada buah apa pun
2) satu buah:
   apel
   jeruk
   mangga
   pisang
3) dua buah:
   apel, jeruk
   apel, mangga
   apel, pisang
   jeruk, mangga
   jeruk, pisang
   mangga, pisang
4) tiga buah:

apel, jeruk, mangga
apel, jeruk, pisang
apel, mangga, pisang
jeruk, mangga, pisang

5) empat buah:
apel, jeruk, mangga, pisang

Kombinasi r dari sebuah himpunan S, berarti dari himpunan S diambil elemen sebanyak r untuk dijadikan sebuah himpunan baru. Dalam hal kumpulan buah di atas, himpunan {apel, jeruk, pisang} adalah sebuah kombinasi 3 dari S, sedangkan {jeruk, pisang} adalah sebuah kombinasi 2 dari S.

$$nCr = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

n = jumlah objek yang bisa dipilih
C = kombinasi
r = jumlah yang harus dipilih

B. PRINSIP DASAR MENCACAH

Prinsip dasar mencacah sering disebut dengan kaidah penggandaan. Kaidah penggandaan merupakan metode menghitung banyaknya anggota suatu kejadian tanpa terlebih dahulu mendaftar seluruh anggota kejadian tersebut. Perhitungan banyak anggota kejadian dengan kaidah penggandaan dapat didasarkan kepada metode diagram pohon yang dijelaskan di atas.

C. ATURAN PENGISIAN TEMPAT

Pada penyelesaian masalah menggunakan aturan pengisian tempat, kita mendaftar semua kemungkinan hasil secara manual. Ada beberapa cara pendaftaran dalam aturan ini, diantaranya:

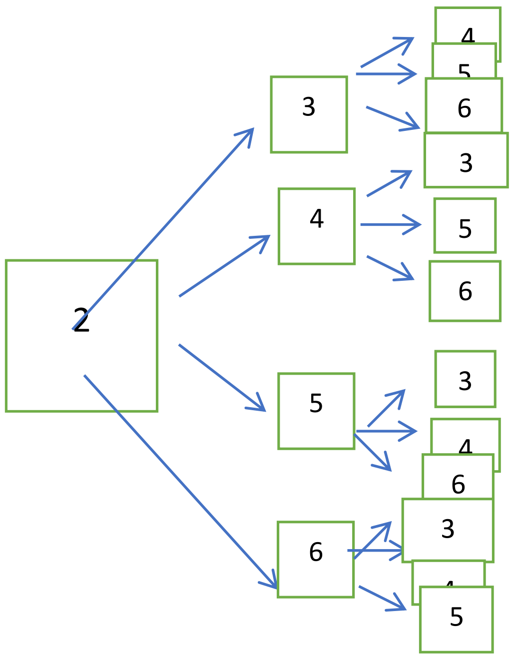
1) Diagram Pohon

Diagram pohon adalah salah satu alat yang digunakan untuk membagikan kategori besar ke dalam tingkat yang lebih kecil atau terperinci. Seperti namanya, diagram pohon berbentuk pohon yang memiliki batang dahan yang mencabang dua atau lebih. Hal ini dapat membantu kita dalam menyederhanakan suatu permasalahan yang kompleks ataupun mempermudah kita untuk mendapatkan gambaran pada suatu permasalahan yang kita hadapi. Untuk mendaftar seluruh anggota dari suatu kejadian, ada kalanya kita dapat menggunakan alat bantu berupa diagram yang disebut dengan pohon, seperti contoh berikut.

Contoh 1

Tentukanlah banyak bilangan yang terdiri dari tiga angka dan bernilai kurang dari 300, apabila bilangan tersebut dibentuk dari angka 2, 3, 4, 5, 6 dan angka yang digunakan tidak boleh berulang.

Karena bilangan yang akan ditentukan < 300, maka angka ratusan dari angka yang tersedia adalah 2. Selanjutnya angka puluhan dan satuan bebas asal tidak terjadi pengulangan angka. Bilangan-bilangan yang dapat dibentuk dapat digambarkan dengan diagram pohon seperti di bawah ini.
Jawab:



Bilangan yang dapat dibentuk adalah (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 3), (2, 4, 4), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 3), (2, 5, 4,), (2, 5, 6), (2, 6, 3), (2, 6, 4) dan (2, 6, 5). Dan banyak bilangan adalah 12.

Tabel persilangan dapat mudah ditentukan jika kita sudah memahami persoalan yang akan kita selesaikan. Pada soal ini disebutkan tiga angka yang kurang dari 300 dan terdiri dari angka 2, 3, 4, 5 dan 6. Serta angka yang digunakan untuk tidak boleh di ulang. Sehingga dapat diketahui tiga angka tersebut dimulai dari 200. Maka dapat dibuat tabel.

2 angka pertama	Angka terakhir			
	3	4	5	6
23	-	234	235	236
24	243	-	245	246
25	253	254	-	256
26	263	264	265	-

Pada tabel diatas, pasangan angka yang terletak pada diagonal tidak termasuk karena dalam aturan tidak boleh ada angka yang berulang. Oleh karena itu dapat disimpulkan terdapat 12 pasangan angka.

Contoh 2
Dua orang akan di pilih sebagai ketua dan wakil ketua OSIS dari empat calon terbaik di sekolah. Dewan kehormatan di bentuk untuk melaksanakan tugas tersebut. Dewan kehormatan terdiri dari perwakilan tiap kelas dengan membawa aspirasi kelas. Ada berapa susunan ketua-wakil ketua yang harus dipertimbangkan oleh dewan kehormatan? Misalkan calon-calon itu adalah Roni, Agus, Wini dan Bimo.

Penyelesaian

Ketua	Wakil Ketua	Pasangan
Roni	→ Agus	→ Roni, Agus
	→ Wini	→ Roni, Wini
	→ Bimo	→ Roni, Bimo
Agus	→ Roni	→ Agus, Roni
	→ Wini	→ Agus, Wini
	→ Bimo	→ Agus, Bimo
Wini	→ Roni	→ Wini, Roni
	→ Agus	→ Wini, Agus
	→ Bimo	→ Wini, Bimo
Bimo	→ Roni	→ Bimo, Roni
	→ Agus	→ Bimo, Agus
	→ Wini	→ Bimo, Wini

Karena semua kemungkinan akan berupa pasangan (ketua, wakil ketua), kita tuliskan komponen pertama (calon ketua) di bagian kolom dan komponen kedua (calon wakil ketua) di bagian baris. Pasangan-pasangan (kolom, baris) menunjukan hasil-hasil yang mungkin terjadi pada pemilihan.

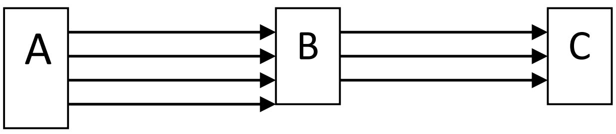
Ketua	Wakil Ketua			
	Roni	Agus	Wini	Bimo
Roni	-	Roni, Agus	Roni, Wini	Roni, Bimo
Agus	Agus, Roni	-	Agus, Wini	Agus, Bimo
Wini	Wini, Roni	Wini, Agus	-	Wini, Bimo
Bimo	Bimo, Roni	Bimo, Agus	Bimo, Wini	-

Pada tabel silang di atas, pasangan wakil ketua yang terletak pada diagonal tidak termasuk hitungan karena dalam aturan tidak diperbolehkan jabatan rangkap. Dengan menghitung semua pasangan yang mungkin, disimpulkan terdapat 12 susunan (ketua, wakil ketua). Tapi tampaknya tabel silang sulit di terapkan dalam kasus pemilihan yang lebih banyak, misalkan memilih 11 pemain dari 22.

Contoh 3
Kota A dan B dihubungkan oleh 4 jalan berbeda, kota B dan kota C dihubungkan 3 jalan yang berbeda. Jika pak Iman memulai perjalanan dari kota A, berapa carakah dia memilih jalan menuju kota C.

Jawab :

Dari A ke B terdapat 4 jalan. Dari B ke C terdapat 3 jalan



Banyak cara mencapai C dari A = (4×3) cara = 12 cara.

Contoh 4
Diketahui angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Dari angka tersebut dapat disusun bilangan puluhan, ratusan, ribuan dan seterusnya. Tentukan banyaknya kemungkinan:
1) Bilangan yang dapat disusun terdiri dari tiga angka berbeda.
2) Bilangan yang dapat disusun terdiri dari tiga angka.

3) Bilangan genap yang dapat disusun terdiri dari tiga angka berbeda.

Jawab :

1)

6	5	4

= 6 x 5 x 4
= 120 kemungkinan

2)

6	6	6

= 6 x 6 x 6
= 216 kemungkinan

3)

5	4	3

= 5 x 4 x 3
= 60 kemungkinan

Contoh 5
Andi, Budi dan Candra hendak duduk mengelilingi sebuah meja.
Berapakah banyak cara mereka dapat duduk mengelilingi meja tersebut?

Jawab :
Kalau mereka duduk berjajar banyaknya cara ada 3! = 6 yaitu sebagai berikut.
{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}

Bagaimana kalau mereka mengelilingi sebuah meja ?

Dari gambar 1 diperoleh bahwa ABC = CAB = BCA
Dari gambar 2 diperoleh bahwa ACB = CBA = BAC

Sehingga banyak cara mereka duduk hanya ada 2 cara
ternyata banyaknya cara 3 orang duduk mengelilingi sebuah meja = (3 - 1)!
Secara umum banyaknya permutasi siklis dapat ditentukan dengan rumus:

$$P = (n - 1)!$$

Contoh 6
Dua keluarga yang masing-masing terdiri dari 2 orang dan 3 orang ingin foto bersama. Banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah...
Jawab :

Pertama, anggaplah dua keluarga tersebut masing-masing merupakan dua kesatuan. Banyak posisi dua keluarga berfoto adalah:

$$2! = 2 \times 1$$
$$= 2$$

Kemudian tukar posisi antar anggota keluarga. Banyak posisi foto keluarga yan g beranggotakan 2 orang adalah:

$$2! = 2 \times 1$$
$$= 2$$

Banyak posisi foto keluarga yang beranggotakan 3 orang adalah:

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$
$$= 6$$

Dengan demikian, banyak seluruh posisi foto dua keluarga tersebut adalah:
2 × 2 × 6 = 24

Jadi, banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah 24 posisi.

Contoh 7
Pada suatu tes penerimaan pegawai, seorang pelamar wajib mengerjakan 6 soal di antara 14 soal. Soal nomor 1 sampai 3 harus dikerjakan. Banyak pilihan soal yang harus dilakukan adalah ….
Jawab :
Dari 6 soal yang wajib dikerjakan, 3 di antaranya (Nomor 1-3) harus dikerjakan, berarti tinggal 3 soal lagi yang harus dikerjakan. Sementara itu, jumlah seluruh soal adalah 14 soal. Karena 3 soal wajib dikerjakan, berarti tinggal 11 pilihan soal.

Setiap soal kedudukannya setara, oleh karena itu soal ini harus dikerjakan dengan rumus kombinasi, yaitu 3 soal dipilih dari 11 soal atau 11 kombinasi 3.

$$C_3^{11} = \frac{11!}{(11-3)!\,.\,3!}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{8! \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 16$$

Jadi, banyak pilihan soal yang harus dilakukan oleh pelamar tersebut adalah 165 cara.

Contoh 8
Ada tiga sahabat yang baru bertemu setelah sekian lama, mereka adalah Ana, Budi, dan Candra. Saat bertemu mereka saling berjabat tangan, tahukah kamu berapa banyak jabat tangan yang terjadi?

Jawab :
Ana berjabat tangan dengan Budi ditulis {Ana, Budi}. Budi berjabat tangan dengan Ana ditulis {Budi, Ana}. Antara {Ana, Budi} dan {Budi, Ana} menyatakan himpunan yang sama, hal ini disebut kombinasi. Di lain pihak {Ana, Budi}, {Budi, Ana} menunjukkan urutan yang berbeda yang berarti merupakan permutasi yang berbeda.
Dari contoh dapat diambil kesimpulan:

Permutasi = Ana – Budi, Ana – Candra, Budi – Ana,
Budi – Candra, Candra – Ana, Candra – Budi
= 6 (karena urutan diperhatikan)
Kombinasi = Ana – Budi, Ana – Candra, Budi – Candra
= 3 (karena urutan tidak diperhatikan)

$$\text{Kombinasi} = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{permutasi}}{2}$$

Jadi kombinasi dari 3 unsur yang diambil 2 unsur ditulis:

$$C_2^3 = \frac{P_2^3}{2} = \frac{3!}{2\,.\,(3-2)!}$$

Contoh 9
Dalam pelatihan bulutangkis terdapat 8 orang pemain putra dan 6 orang pemain putri. Berapakah pasangan ganda yang dapat diperoleh untuk:
a. ganda putra
b. ganda putri
c. ganda campuran

Jawab :
a. Karena banyaknya pemain putra ada 8 dan dipilih 2, maka banyak cara ada:

$$C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)!\,2!}$$

$$C_2^8 = \frac{8\,.\,7\,.\,6!}{6!\ .\ 2\,.\,1}$$

$$C_2^8 = \frac{56}{2}$$
$$= 28$$

b. Karena banyaknya pemain putri ada 6 dan dipilih 2, maka banyak cara ada:

$$C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!\,2!}$$

$$C_2^6 = \frac{6\,.\,5\,.\,4!}{4!\;.\;2\,.\,1}$$

$$C_2^6 = \frac{30}{2} = 15$$

c. Ganda campuran berarti 8 putra diambil satu dan 6 putri diambil 1, maka:

$$C_1^8 \times C_1^6 = \frac{8!}{(8-1)!\,1!} \times \frac{6!}{(6-1)!\,1!}$$

$$C_1^8 \times C_1^6 = \frac{8\,.\,7!}{7!\,.\,1} \times \frac{6\,.\,5!}{5!\,.\,1}$$

$$C_1^8 \times C_1^6 = 8 \times 6 = 48$$

Contoh 10
Dari 7 siswa putra dan 3 siswa putri akan dibentuk tim yang beranggotakan 5 orang. Jika disyaratkan anggota tim tersebut paling banyak 2 orang putri, berapakah banyaknya cara mambentuk tim tersebut?

Jawab :
Karena anggota tim ada 5 dan paling banyak 2 putri maka kemungkinannya adalah 5 putra, 4 putra 1 putri, atau 3 putra 2 putri.
Banyak cara memilih 5 putra = ${}_7C_5$
Banyak cara memilih 4 putra 1 putri = ${}_7C_4\,.\,{}_3C_1$
Banyak cara memilih 3 putra 2 putri = ${}_7C_3\,.\,{}_3C_2$

$$\begin{aligned}
&C_5^7 + C_4^7.C_1^3 + C_3^7.C_2^3 \\
&= \frac{7!}{(7-5)!\,5!} + \frac{7!}{(7-4)!\,4!}.\frac{3!}{(3-1)!\,1!} + \frac{7!}{(7-3)!\,3!}.\frac{3!}{(3-2)!\,2!} \\
&= \frac{7\,.\,6\,.\,5!}{5!\,.\,2\,.\,1} + \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4!\,.\,3\,.\,2\,.\,1}.\frac{3\,.\,2!}{2!\,.\,1} + \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4!\,.\,3\,.\,2\,.\,1}.\frac{3\,.\,2!}{2!\,.\,1} \\
&= 7\,.\,3 + 35\,.\,3 + 35\,.\,3 \\
&= 21 + 105 + 105 \\
&= 231
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya cara membentuk tim ada 231 cara.

D. CONTOH SOAL BERAGAM

1. Pada suatu tes penerimaan pegawai, seorang pelamar wajib mengerjakan 6 soal di antara 14 soal. Soal nomor 1 sampai 3 harus dikerjakan. Banyak pilihan soal yang harus dilakukan adalah

   Jawab :
   Dari 6 soal yang wajib dikerjakan, 3 di antaranya (nomor 1 - 3) harus dikerjakan, berarti tinggal 3 soal lagi yang harus dikerjakan. Sementara itu, jumlah seluruh soal adalah 14 soal. Karena 3 soal wajib dikerjakan, berarti tinggal 11 pilihan soal. Setiap soal kedudukannya setara, oleh karena itu soal ini harus dikerjakan dengan rumus kombinasi, yaitu 3 soal dipilih dari 11 soal atau 11 kombinasi 3.

   $$C_3^{11} = \frac{11!}{(11-3)!\,.3!}$$
   $$= \cdots$$
   $$= 165$$

   Jadi, banyak pilihan soal yang harus dilakukan oleh pelamar tersebut adalah 165 cara.

2. Ada tiga sahabat yang baru bertemu setelah sekian lama, mereka adalah Ana, Budi, dan Candra. Saat bertemu mereka saling berjabat tangan, tahukah kamu berapa banyak jabat tangan yang terjadi.

   Jawab:
   Ana berjabat tangan dengan Budi ditulis {Ana, Budi}. Budi berjabat tangan dengan Ana ditulis {Budi, Ana}. Antara {Ana, Budi} dan {Budi, Ana} menyatakan himpunan yang sama, hal ini disebut kombinasi. Di lain pihak {Ana, Budi}, {Budi, Ana} menunjukkan urutan yang berbeda yang berarti merupakan permutasi yang berbeda. Dari contoh dapat diambil kesimpulan:

   Permutasi = Ana – Budi, Ana – Candra, Budi – Ana,
   Budi – Candra, Candra – Ana, Candra – Budi
   = 6 (karena urutan diperhatikan)
   Kombinasi = Ana – Budi, Ana – Candra, Budi – Candra
   = 3 (karena urutan tidak diperhatikan)

   $$\text{Kombinasi} = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{permutasi}}{2}$$

   Jadi kombinasi dari 3 unsur yang diambil 2 unsur ditulis:

   $$C_2^3 = \frac{P_2^3}{2} = \cdots$$

3. Dalam pelatihan bulutangkis terdapat 8 orang pemain putra dan 6 orang pemain putri. Berapakah pasangan ganda yang dapat diperoleh untuk:
   a. ganda putra
   b. ganda putri
   c. ganda campuran

   Jawab :
   a. Karena banyaknya pemain putra ada 8 dan dipilih 2, maka banyak cara ada:

   $$C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)!\,2!}$$

   $$C_2^8 = \cdots$$

   $$C_2^8 = \frac{56}{2}$$
   $$= 28$$

   b. Karena banyaknya pemain putri ada 6 dan dipilih 2, maka banyak cara ada:
   $$C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!\,2!}$$

   $$C_2^6 = \cdots$$

   $$C_2^6 = \frac{30}{2} = 15$$

   c. Ganda campuran berarti 8 putra diambil satu dan 6 putri diambil 1, maka:
   $$C_1^8 \times C_1^6 = \frac{8!}{(8-1)!\,1!} \times \frac{6!}{(6-1)!\,1!}$$

   $$C_1^8 \times C_1^6 = \cdots \times \ldots$$

   $$C_1^8 \times C_1^6 = 8 \times 6 = 48$$

4. Dari 7 siswa putra dan 3 siswa putri akan dibentuk tim yang beranggotakan 5 orang. Jika disyaratkan anggota tim tersebut paling banyak 2 orang putri, berapakah banyaknya cara mambentuk tim tersebut?
   Jawab :
   Karena anggota tim ada 5 dan paling banyak 2 putri maka kemungkinannya adalah 5 putra, 4 putra 1 putri, atau 3 putra 2 putri.
   Banyak cara memilih 5 putra = ${}_7C_5$

Banyak cara memilih 4 putra 1 putri = ${}_7C_4 \,.\, {}_3C_1$
Banyak cara memilih 3 putra 2 putri = ${}_7C_3 \,.\, {}_3C_2$

$$C_5^7 + C_4^7 . C_1^3 + C_3^7 . C_2^3$$
$$= \frac{7!}{(7-5)!\,5!} + \frac{7!}{(7-4)!\,4!} . \frac{3!}{(3-1)!\,1!} + \frac{7!}{(7-3)!\,3!} . \frac{3!}{(3-2)!\,2!}$$
$$= \frac{7\,.\,6\,.\,5!}{5!\,.\,2\,.\,1} + \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4!\,.\,3\,.\,2\,.\,1} . \frac{3\,.\,2!}{2!\,.\,1} + \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4!\,.\,3\,.\,2\,.\,1} . \frac{3\,.\,2!}{2!\,.\,1}$$
$$= \cdots + \cdots + \cdots$$
$$= 21 + 105 + 105$$

Jadi banyaknya cara membentuk tim ada 231 cara.

E. SOAL LATIHAN

1. Ada berapa cara bila 4 orang remaja (w,x, y, z) menempati tempat duduk yang akan disusun dalam suatu susunan yang teratur?

2. Menjelang Pergantian kepengurusan BEM STMIK Tasikmalaya akan dibentuk panitia inti sebanyak 2 orang (terdiri dari ketua dan wakil ketua), calon panitia tersebut ada 6 orang yaitu: a, b, c, d, e, dan f. Ada berapa pasang calon yang dapat duduk sebagai panitia inti tersebut?

3. Sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 10 orang akan mengadakan rapat dan duduk mengelilingi sebuah meja, ada berapa carakah kelima mahasiswa tersebut dapat diatur pada sekeliling meja tersebut?

4. Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika 8 orang disediakan 4 kursi, sedangkan salah seorang dari padanya selalu duduk dikursi tertentu.

5. Dalam mengadakan suatu pemilihan dengan menggunakan obyek 4 orang pedagang kaki lima untuk diwawancarai, maka untuk memilih 3 orang untuk satu kelompok. Ada berapa cara kita dapat menyusunnya?

6. Suatu warna tertentu dibentuk dari campuran 3 warna yang berbeda. Jika terdapat 4 warna, yaitu Merah, Kuning, Biru dan Hijau, maka berapa kombinasi tiga jenis warna yang dihasilkan.

7. Dalam suatu pertemuan terdapat 10 orang yang belum saling kenal. Agar mereka saling kenal maka mereka saling berjabat tangan. Berapa banyaknya jabat tangan yang terjadi.

8. Suatu kelompok yang terdiri dari 3 orang pria dan 2 orang wanita akan memilih 3 orang pengurus. Berapa cara yang dapat dibentuk dari pemilihan jika pengurus terdiri dari 2 orang pria dan 1 orang wanita.

9. Seorang peternak akan membeli 3 ekor ayam dan 2 ekor kambing dari seorang pedagang yang memiliki 6 ekor ayam dan 4 ekor kambing. Dengan berapa cara peternak tersebut dapat memilih ternak-ternak yang di inginkannya?

   Sebuah perusahaan membutuhkan karyawan yg terdiri dari 5 putra dan 3 putri. Jika terdapat 15 pelamar, 9 diantaranya putra. Tentukan banyaknya cara menyeleksi karyawan

BAB 2

PERMUTASI

A. PENGERTIAN PERMUTASI

Permutasi adalah Sejumlah penyusunsnan unsur-unsur dalam suatu urutan tertentu yang urutannya harus diperhatikan. Dalam ilmu matematika permutasi diartikan sebagai sebuah konsep penyusunan sekumpulan objek/angka menjadi beberapa urutan berbeda tanpa mengalami pengulangan. Dalam permutasi urutan diperhatikan. Setiap objek yang dihasilkan harus berbeda antara satu dengan yang lain. Sebagai contoh, urutan huruf {ABC} berbeda dengan {CAB} begitu juga dengan {BAC} dan {ACB}.

Banyaknya permutasi r unsur dinyatakan P_r^n dengan menggunakan rumus:

$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ Untuk $r \leq n$

Rumus Permutasi

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Banyak permutasi n unsur apabila disusun k unsur k adalah dengan $k \leq n$

Contoh 1

Disebuah kelas terdapat 4 orang siswa yang dicalonkan untuk mengisi posisinya bendahara dan sekretaris. Tentukan banyaknya cara yang bisa digunakan untuk mengisi posisi tersebut.

Jawab:

Soal di atas bisa dituliskan sebagai permutasi P(4,2), n (banyaknya guru) = 4 dan k (jumlah posisi) = 2.

Kita masukkan ke dalam rumus:

$$P_{(4,2)} = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1}$$

$$= \frac{24}{2}$$

$$= 12$$

Jadi terdapat 12 cara untuk mengisi posisi tersebut.

Contoh 2

Berapakah banyaknya bilangan yang dibentuk dari 2 angka berbeda yang bisa kita susun dari urutan angka 4, 8, 2, 3, dan 5?

Jawab:

Pertanyaan di atas bisa disimpulkan sebagai permutasi yang terdiri dari 2 unsur yang dipilih dari 5 unsur, maka bisa dituliskan sebagai P(5,2). Lalu, kita masukkan ke dalam rumus :

$$P_{(5,2)} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times s2\times1}$$

$$= \frac{120}{6}$$

$$= 20$$

Jadi terdapat 20 cara penyusunan yang dapat dibentuk dari 2 angka yang berbeda-beda.

Maka ada 20 cara yang bisa dilakukan untuk menyusun bilangan tersebut menjadi 2 angka yang berbeda – beda

(48, 42, 43, 45, 84, 82, 83, 85, 24, 28, 23, 25, 34, 38, 32, 35, 54, 53, 52).

Contoh 3

Diketahui himpunan $A\ (a, b, c)$. Tentukan permutasi, jika

a. Diambil 2 unsur
b. Diambil semua (3 unsur)

Jawab:

a. Banyaknya permutasi 2 unsur dan 3 unsur

$$P_2^3 = \frac{3!}{(3! - 2!)}$$

$$= \frac{3!}{1!}$$

$$= \frac{3\times2\times1}{1}$$

$$= 6$$

b. Banyaknya permutasi 3 unsur dan 3 unsur

$$P_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!}$$

$$= \frac{3!}{0!}$$

$$= \frac{3\times2\times1}{1}$$

$$= 6$$

Contoh 4

Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika 8 orang disediakan 4 kursi, sedangkan salah seorang dari padanya selalu duduk dikursi tertentu.

Jawab:

Jika salah seorang selalu duduk dikursi tertentu maka tinggal 7 orang dengan 3 kursi kosong.
Maka banyaknya cara duduk ada :

$$
\begin{aligned}
P_3^7 &= \frac{7!}{(7-3)!} \\
&= \frac{7!}{4!} \\
&= 7.6.5 \\
&= 210 \text{ cara}
\end{aligned}
$$

Contoh 5

Tentukanlah aturan permutasi dibawah ini:

$$\mathrm{P}_2^4 = \frac{4!-4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{1\times 2\times 3\times 4}{1\times 2} = 3\times 4 = 12$$

Jawab:
Berdasarkan deskripsi pada contoh diatas tampak bahwa banyak $P = 2$ unsur diambil dari 4 unsur yang tersedia secara umum dapat disimpulkan bahwa banyak permutasi r yang diambil dari n unsur yang tersedia.

Ditentukan dengan aturan:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_r^n &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots(n-r+1) \\
&= \frac{n!}{(r)!\,n-r}
\end{aligned}
$$

Contoh 6
Berapa banyak cara menyusun 4 buku dari 6 buku ?

Jawab:
Permutasi 4 dari 6 $= P_4^6$

$$
\begin{aligned}
P_4^6 &= \frac{6!}{(6-4)!} \\
&= \frac{6!}{2!} \\
&= \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1} \\
&= 360
\end{aligned}
$$

B. JENIS-JENIS PERMUTASI

1. Permutasi Unsur – Unsur yang Sama

   Misalkan ada sebuah kata 5 huruf yaitu huruf pertama (R), huruf kedua (U), huruf ketiga (M), huruf keempat (U), huruf kelima (S), maka aka nada permutasi yang berulang karena ada dua unsur (huruf) yang sama yang sebenarnya merupakan 1 permutasi. Jika kita masukkan ke rumus yang biasa maka, permutasinya yaitu terdiri 5 dari $5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Tapi coba kita amati diantara 120 permutasi pasto ada yang berulang (double) karena ada 2 huruf yang sama. Berapa sebenarnya jumlah permutasi yang benar ?
   Jumlah permutasi jika ada unsur – unsur yang sama bisa dicari dengann rumus.

   $$P(n, l_1, l_2, \ldots l_k) = \frac{n!}{l_1!\, l_2! \ldots l_k!}$$

   Jadi dari 5 huruf "rumus" bisa dibuat susunan sebanyak
   $\frac{5!}{2!} = 3 \times 4 \times 5 = 60$ cara

   Misal huruf pembentuk "matematika" maka
   $\frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151.200\ 2!\,3!\,2! \rightarrow 2$ huruf m, 3 huruf a, dan 2 huruf t.

   Contoh 1

   Terdapat 2 bola merah, 1 bola biru dan 3 bola putih yang sama jenis dan ukurannya. Ada beberapa carakah bola-bola itu dapat disusun berdampingan.
   Penyelesaian:
   Banyaknya susunan bola-bola itu adalah

   $$\begin{aligned} \frac{6!}{2!\,3!} &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{720}{12} \\ &= 60 \end{aligned}$$

2. Permutasi dari Unsur-Unsur yang Berbeda

   Misalkan dari tiga buah angka 1, 2, dan 3 akan disusun suatu bilangan yang terdiri atas tiga angka dengan bilangan-bilangan itu tidak mempunyai angka yang sama, susunannya yang dapat dibentuk adalah (123), (132), (213), (231), (312), (321).
   Banyak cara untuk membuat susunan seperti itu $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara. Susunan yang diperoleh seperti diatas disebut permutasi 3 unsur yang diambil dari 3 unsur yang tersedia. Berdasarkan deskripsi diatas, permutasi

dapat didefinisikan sebagai berikut. Permutasi r unsur yang diambil dari n yang tersedia (tiap unsur itu berbeda) adalah susunan dari r unsur itu dalam suatu urutan $(r \leq n)$

Banyak permutasi r yang diambil dari n unsur yang tersedia dilambangkan dengan notasi.

$$\mathrm{Pr}^{\mathrm{n}}$$

Rumus itu digunakan dari n teerhadap r unsur

Jika $r = n$, maka banyak permutasi n unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia biasa yang singkat: Permutasi n unsur dilambangkan dengan notasi.

$$\mathrm{Pn}^{\mathrm{n}}$$

3. Permutasi Merupakan Pengembangan Dari Aturan Perkalian

   Permutasi adalah cara menyusun suatu unsur secara urut dengan objek yang berbeda dari kelompok unsur. Permutasi sekumpulan n dengan yang berlainan diambil secara bersama-sama

$$\mathrm{P}_n^n = n!$$

   Suatu permutasi yang diambil dari n unsur yang berlainan adalah penempatan r unsur itu dalam suatu urutan $r \leq n$ dan dinyatakan dalam notasi ${}_n\mathrm{P}_r$, $\mathrm{P(n, r)}$, $P(nr)$, P_r^n , atau ${}_n\mathrm{P}_r$. Nilai P_r^n ditentukan oleh formula berikut ini:

$$\mathrm{P}_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

   Jika diketahui n unsur, diantaranya adalah k unsur yang sama $(\mathrm{k} \leq \mathrm{n})$ maka banyaknya permutasi yang berlainan ditentukan oleh formula berikut ini:

$$\mathrm{P} = \frac{n!}{k!}$$

   Jika n unsur yang tersedia terdapat $\mathrm{n}_1$unsur yang sama n_2 unsur yang sama, dan $\mathrm{n}_3$unsur yang sama, maka banyaknya permutasi yang berlainan dari n unsur itu ditentukan oleh formula berikut ini:

   $\frac{n!}{n1!n2!n3!}$ dengan $n1 + n2 + n3 \leq n$

4. Permutasu Siklis

   Permutasi siklis adalah permutasi yang dibuat dengan menyusun unsur secara melingkar menurut arah putaran tertentu. Permutasi siklis berkaitan dengan penyusunan sederetan objek yang melingkar. Sebagai gambaran adalah susunan duduk dari beberapa orang pada meja bundar. Permutasi ini juga dikenal sebagai permutasi melingkar.

   Bila tersedia n unsur berbeda, maka banyak permutasi siklis dari n unsur itu ditentukan oleh formula:

$$\mathrm{P}_{\text{siklis}} = (n-1)!$$

Rumus itu digunakan untuk n unsur yang berbeda.

Contoh 1
Ada berapa cara 7 orang yang duduk mengelilingi meja dapat menempati ketujuh tempat duduk dengan urutan yang berlainan?

Jawab:
Banyaknya cara duduk ada

$$\begin{aligned}(7-1)! &= 6\,! \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 720 \text{ cara}\end{aligned}$$

Contoh 2
Sebuah keluarga terdiri atas 5 orang. Mereka akan duduk mengelilingi sebuah meja bundar untuk makan bersama. Berapa banyaknya cara agar mereka dapat duduk mengelilingi meja makan tersebut dengan urutan yang berbeda?

Jawab:
Permutasinya adalah sebagai berikut:
(5 -1)! = 4!
= 4 x 3 x 2 x 1
= 24

Contoh 3
5 buah kelereng yang akan disusun melingkar. Berapa cara untuk menyusunnya?

Jawab:

$$\begin{aligned}\frac{(5-1)!}{2} &= \frac{4!}{2} \\ &= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} \\ &= 12\end{aligned}$$

Contoh 4
Pada suatu pertemuan keluarga terdapat 4 sepasang suami istri yang akan duduk pada meja makan keluarga. Berapa susunan yang akan di duduk melingkar pada pertemuan makan tersebut.
Pertama tama kita mencari banyaknya cara, setelah mencari banyaknya cara kemudian kita mencari permutasinya.

Jawab:

$$(4-1)! = 3!$$
$$= 3 \times 2 \times 1$$
$$= 6$$

$$\frac{(4-1)!}{2} = \frac{3!}{2}$$
$$= \frac{3 \times 2 \times 1}{2}$$
$$= \frac{6}{2}$$
$$= 3$$

5. Permutasi berulang.

   Bila tersedia n unsur berbeda, maka banyak permutasi berulang r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia ditentukan oleh formula:

$$\mathrm{P_{berulang}} = \mathrm{n^r}, \text{dengan } \leq \mathrm{n}$$

   Contoh 1

   Berapa banyak permutasi berulang dari 3 huruf a, b, c yang disusun $2-2$?

   Penyelesaian:

   $P_2^3 = 32$
   $= 9$

   Yaitu $ab, ac, ba, bc, ca, cb, aa, bb, dan\ cc$

   Jadi banyaknya permutasi pengulangan terdapat 9

   Contoh 2

   Berapa banyak permutasi dari 4 huruf A, B, C, dan D?

   Jawab:

   Sebuah contoh permutasi atau susunan 4 huruf dalam suatu urutan yang terdiri dari

   huruf pertama (B), huruf kedua (D), huruf ketiga (A), huruf keempat (C)

   Huruf pertama dalam susunan dapat dipilih dengan 4 cara huruf A atau B atau C atau D. Kemungkinan huruf tersebut dapat ditentukan dengan cara berikut.

   Huruf dapat dipilih dengan 3 cara:

   Misalnya:

   Huruf pertama di pilih B

   Maka huruf kedua yang dapat dipilih adalah D atau A atau C.

   Huruf ketiga dapat dipilih dengan 2 cara:

   Misalnya:

   kalau huruf pertama dipilih B

Huruf kedua dipilih D
maka huruf ketiga yang dapat dipilih adalah A atau C.
Huruf keempat dapat dipilih dengan satu cara:
Misalnya:

kalau huruf pertama dipilih B
Huruf kedua dipilih D
Huruf ketiga dipilih A,
maka huruf keempat tinggal 1 pilihan yaitu huruf C.
Dengan menggunakan aturan perkalian, banyak susunan yang mungkin itu seluruhnya adalah
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$
Berdasarkan deskripsi pada contoh diatas tampak banyak permutasi 4 unsur adalah
${P_4}^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$
Banyaknya permutasi n ditentukan dengan aturan:
$\mathrm{P_n}^{\mathrm{n}} = \mathrm{n} \times (\mathrm{n}-1) \times (\mathrm{n}-2) \ldots \ldots 3 \times 2 \times 1 = \mathrm{n}!$

C. PERMUTASI YANG MEMENUHI PERSAMAAN

Mencari permutasi dengan sistem yang memenuhi persamaan dapat ditentukan menggunakan system persamaan. Maka dengan ini kita dapat menentukan n unsur dan juga permutasinya.

Contoh
Carilah nilai n yang memenuhi persamaan $7 \times \mathrm{P}_3^n = 6 \times \mathrm{P}_3^{n+1}$

$$7 \times \mathrm{P}_3^n = 6 \times \mathrm{P}_3^{n+1}$$
$$7 \times \frac{n!}{(n-3)!} = 6 \times \frac{(n+1)n!}{(n+1-3)!}$$
$$\frac{7}{(n-3)!} = \frac{6(n+1)}{(n-2)(n-3)!}$$
$$7 = \frac{6(n+1)}{n-2}$$
$$7(n-2) = 6(n+1)$$
$$7n - 14 = 6n + 6$$
$$n = 20$$

D. CONTOH SOAL BERAGAM

Lengkapilah contoh soal di bawah ini

1. Nilai n agar nP2 = 72 adalah...
   Penyelesaian:
   $n^2 - n - 72 \quad = 0$
   $(\cdots - \cdots)(\cdots + \cdots) = \cdots$
   $n = 8 \;\; n = -9$

2. Nilai n agar nP2 = 36 adalah...
   Penyelesaian:
   $n^2 - n - 36 \quad = 0$
   $(\cdots - \cdots)(\cdots + \cdots) = \cdots$
   $n = 4 \;\; n = -9$

3. Nilai n agar nP2 = 32 adalah...
   Penyelesaian:
   $n^2 - n - 32 \quad = \cdots$
   $(\cdots - \cdots)(\cdots + \cdots) = \cdots$
   $n = 4 \;\; n = -8$

4. Dalam suatu organisasi akan dipilih ketua, bendahara dan sekretaris dari 6 calon yang memenuhi kriteria. Banyak susunan yang mungkin dari 6 calon tersebut adalah...
   Penyelesaian:
   $$6\,P\,3 = \frac{6!}{(6-3)!}$$
   $$= \frac{\cdots}{\cdots}$$
   $$= \cdots$$
   $$= \cdots$$

5. Dalam suatu organisasi akan dipilih ketua, bendahara dan sekretaris dari 8 calon yang memenuhi kriteria. Banyak susunan yang mungkin dari 8 calon tersebut adalah...
   Penyelesaian:
   $$8\,P\,3 = \frac{8!}{(8-3)!}$$
   $$= \frac{\cdots}{\cdots}$$
   $$= \cdots$$
   $$= \cdots$$

6. Suatu Organisasi akan dipilij calon ketua dan wakil ketua osis yang baru dari 4 calon yang memenuhi kriteria. Banyakny susunan yang mungkin dari 4 calon tersebut adalah…
   Penyelesaian:

$$4\,P\,2 = \frac{\cdots}{(\cdots)\cdots}$$
$$= \frac{\cdots}{\cdots}$$
$$= \cdots$$
$$= \cdots$$

7. Banyak permutasi dari huruf yang terdapat pada kata SAMA SAJA adalah...
   Penyelesaian:
   $$8\,P\,2,4 = \frac{\cdots}{(\cdots)\cdots}$$
   $$= \frac{\cdots}{\cdots}$$
   $$= \cdots$$
   $$= \cdots$$

8. Banyaknya permutasi dari huruf yang terdapt pada JAKARTA adalah…
   Penyelesaian:
   $$7\,P\,1,3 = \frac{\cdots}{(\cdots)\cdots}$$
   $$= \frac{\cdots}{\cdots}$$
   $$= \cdots$$
   $$= \cdots$$

9. Ada berapa cara bila 4 orang remaja (k, l, m, n) menempati tempat duduk yang akan disusun dalam suatu susunan yang teratur?
   Penyelesaian:
   $${}_4\mathrm{P}_4 = \cdots$$
   $$= \cdots$$
   $$= \cdots$$
10. Sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 10 orang akan mengadakan rapat dan duduk mengelilingi sebuah meja, ada berapa carakah kelima mahasiswa tersebut dapat diatur pada sekeliling meja tersebut?
    Penyelesaian:
    $$\mathrm{P}_5 = (\cdots)$$
    $$= \cdots$$
    $$= \cdots$$

11. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata “STMIK”?
    Penyelesaian:
    $$5! = \cdots$$
    $$= \cdots$$
    $$= 120 \text{ kata}$$

12. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata “KAMPUS”?
    Penyelesaian:

$6! = \cdots$
$= \cdots$
$= 720 \text{ kata}$

13. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata “KANTOR”?
    Penyelesaian:
    $6! = \cdots$
    $= \cdots$
    $= 720 \text{ kata}$

14. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata “MEJA”?
    Penyelesaian:
    $4! = \cdots$
    $= \cdots$
    $= 24 \text{ kata}$

15. Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika 8 orang disediakan 4 kursi, sedangkan salah seorang dari padanya selalu duduk dikursi tertentu.
    Penyelesaian:

    $${}_7\mathrm{P}_3 = \frac{\cdots}{(\cdots)}$$
    $$= \frac{\cdots}{\cdots}$$
    $$= \cdots$$

E. SOAL LATIHAN

1. Menjelang Pergantian kepengurusan BEM STMIK Tasikmalaya akan dibentuk panitia inti sebanyak 2 orang (terdiri dari ketua dan wakil ketua), calon panitia tersebut ada 6 orang yaitu: a, b, c, d, e, dan f. Ada berapa pasang calon yang dapat duduk sebagai panitia inti tersebut?

2. Sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 10 orang akan mengadakan rapat dan duduk mengelilingi sebuah meja, ada berapa carakah kelima mahasiswa tersebut dapat diatur pada sekeliling meja tersebut?

3. Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari kata “STMIK”?

4. Peluang lulusan PNJ dapat bekerja pada suatu perusahaan adalah 0,75. Jika seorang lulusan PNJ mendaftarkan pada 24 perusahaan, maka berapakah dia dapat diterima oleh perusahaan?

5. Terdapat tiga orang (X, Y dan Z) yang akan duduk bersama di sebuah bangku. Ada berapa urutan yang dapat terjadi ?

6. Suatu kelompok belajar yang beranggotakan empat orang (A, B, C dan D) akan memilih ketua dan wakil ketua kelompok. Ada berapa alternatif susunan ketua dan wakil ketua dapat dipilih ?
7. Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika 8 orang disediakan 4 kursi, sedangkan salah seorang dari padanya selalu duduk dikursi tertentu.
8. Ada berapa cara 5 gelas warna yang mengitari meja kecil, dapat menempati kelima tempat dengan urutan yang berlainan?
9. Tentukan banyaknya permutasi siklus dari 3 unsur yaitu A, B, C ?
10. Tentukan banyaknya permutasi siklus dari 3 unsur X, Y, Z ?

DAFTAR PUSTAKA

Anonim, 2019. Teori dan Aplikasi Statistika dan Probalitas.

Budiarto, Mega Tegus. 2013. Kalkulus Peubah Banyak. Sidoarjo;Zifatama Publishing

Dale Varberg., Edwin J. Purcell. 2001. *Kalkulus Jilid I (edisi 7).* Alih Bahasa I Nyoman Susila. Batam: Interaksara.

Edwin J. Purcell., Dale Varberg. 1989. *Kalkulus dan Geometri Analitis* Jilid 2 (terjemahan I Nyoman Susila dkk). Bab 18. Jakarta: Erlangga.

Frank Ayres., J.C Ault. 1984. *Kalkulus Diferensial dan Integral* (Seri Buku Schaum). Alih Bahasa Lea Prasetyo. Jakarta: Erlangga.

Heryanto,n. 2003. Teori Peluang Diskrit. Bandung.

Howard Anton, 1981. *Calculus with Analyitical Geometri*. New York: John Willey and Sons.

Koko Martono, 1993. *Kalkulus Integral I.* Bandung: Alva Gracia.

Louis Leithold, 1986. *Kalkulus dan Geometri Analitik.* Alih Bahasa S. Nababan. Jakarta: Erlangga.

Murray R.Spiegel. Pantur Silaban, Hans Wospakrik. 1985. *Transformasi Linear*. Jakarta:Erlangga

Tom M.Apostol, 1984. *Calculus.*New York:Jhon Willey and Sons.

Prayudi. 2009. Kalkulus Lanjut, Fungsi Banyak. Variabel & Penerapan. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Walpole,R.E. 1986. Ilmu Peluang Statistik Insyur dan Ilmuwan. Bandung: ITB

]Wilfred Kaplan. 1961. *Ordinary Differential Equations.* Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company, Inc.

Ramachandran, K. M., C. P. Tsokos, 2009, Mathematical Statistics with Applications,

Ross, S. M., 2013, Simulation, Academic Press, San Diego

Ross, S. M., 2014, Introduction to Probability Models, Academic Press, Roussas, 1997, A Course in Mathematical Statistics, Academic Press, San Diego

Spiegel, M. R, J. Schiller, R. A. Srinivasan, 2000, Probabilitas dan Statistik Edisi Kedua (Terjemahan), Penerbit Erlangga, Jakarta.

Wackerly, D. D, W. Mendenhall III, R. L. Schaeffer, 2008, Mathematical Statistics with Application, Thomson Brooks/Cole, Duxbury.

Walpole, R. E., R. H. Meyers, Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Pearson Education, London