BMP.UKI: SCP-04-MD-PKIM-II-2022

BUKU MATERI PEMBELAJARAN

MATEMATIKA KIMIA

Disusun oleh:

Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN KIMIA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
JAKARTA
2023

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan pertolonganNya penulisan Buku Materi Pembelajaran (BMP) Matematika Kimia ini dapat diselesaikan. Terima kasih untuk seluruh dosen dan segenap rekan kerja di Prodi pendidikan Kimia FKIP UKI yang turut membantu dan mendukung proses penulisan buku ini.

Buku ini ditulis untuk membantu proses pembelajaran pada mata kuliah Matematika Kimia yang dapat digunakan oleh seluruh mahasiswa untuk belajar secara mandiri. Selain itu, buku ini dapat juga digunakan di dalam kelas dalam proses tatap muka dengan dosen pegampu dengan menggunakan model pembelajaran berpusat pada mahasiswa atau yang biasa disebut dengan *Student Centered Learning (SCL)*. Kiranya buku ini dapat digunakan dan membantu memaksimalkan proses pembelajaran untuk memcapai kompetensi lulusan yang kreatif, inovatif unggul dan kompeten.

Setiap kritik dan saran yang membangun dapat disampaikan kepada penulis untuk meningkatkan kualitas BMP ini. Kiranya Tuhan memberkati kita semua.

Jakarta, Maret 2023

Penulis

Santri Chintia Purba

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PETUNJUK PENGGUNAAN BMP

Bagian ini memuat cara penggunaaan modul supaya peserta didik dapat mencapai tujuan yang diinginkan. Bagian ini juga memuat tentang peran dosen mengenai tata belajar dengan menggunakan modul. Berikut ini dijabarkan petunjuk penggunaan BMP Matematik Kimia yaitu:

a. Petunjuk bagi mahasiswa

   Mahasiswa mengikuti langkah-langkah kegiatan pembelajaran yang sudah ada di dalam modul yaitu dengan memahami materi yang dijabarkan didalam modul baik secara mandiri maupun kelompok. Mahasiswa harus mempersiapkan alat tulis dan alat hitung yang dibutuhkan.

   Waktu pembelajaran yang dibutuhkan disetiap modul adalah sebanyak dua minggu, yaitu 2 sks dikali dengan dua. Sehingga total waktu yang dibutuhkan adalah 200 menit per modul.

   Mahasiswa dapat memahami materi dan menyelesaikan soal-soal latihan maupun tugas yang diberikan sesuai dengan waktu yang ditentukan.

   Evaluasi akan dilakukan disetiap akhir satu modul dengan melakukan quis yang diberikan oleh dosen.

   Soal latihan yang dimuat didalam modul ini dapat digunakan untuk evaluasi *self assessment* mahasiswa, untuk melihat sejauh mana pemahaman mahasiswa akan materi yang ada.

   Soal-soal yang tersedia beragam yang terdiri dari soal latihan yang mudah, sedang dan sukar. Sehingga mahasiswa dapat meningkatkn pemahamannya dan kemampuan berpikirnya akan materi dan permasalahan yang ada.

b. Peran dosen

   Dosen sebagai fasilitator pembelajaran mengarahkan peserta didik melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan strategi pembelajaran yang digunakan yaitu *Teacher Centered Learning* (SCL). Dosen menjelaskan tata cara menggunakan modul dan menjelaskan kegiatan pembelajran yang akan dilakukan. Pembelajaran dilakukan dengan kooperatif learning, yaitu mahasiswa membentuk kelompok-kelompok kecil yang terdiri dari 3-4 orang. Anggota kelompok dipilih secara acak dan disesuaikan dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Dosen menjelaskan beberapa materi dan mendiskusikannya bersama mahasiswa, selanjutnya mahasiswa akan melakukan diskusi kelompok sesuai dengan topik dan bahan diskusi yang diberikan.
Dosen akan memperhatikan kondisi diskusi peserta didik dan peserta didik dapat bertanya kepada dosen jika ada materi yang sulit untuk dipahami.
Selanjutnya dosen uga berperan mengevaluasi proses pembelajaran yang dilakukan dengan menggunakan isntrumen yang disusun yaitu dengan melakukan quiss di setiap akhir topik yang diselesaikan.

CAPAIAN PEMBELAJARAN LULUSAN

Sikap :

- Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
- Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
- Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
- Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinil orang lain.
- Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman

perguruan tinggi.

- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN KIMIA</td></tr>
<tr><td colspan="7">RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER</td></tr>
<tr><td>MATA KULIAH</td><td colspan="2">KODE</td><td>RUMPUN MK</td><td>BOBOT (SKS)</td><td>SEMESTER</td><td>TANGGAL PENYUSUNAN</td></tr>
<tr><td>Matematika Kimia</td><td colspan="2">161241023</td><td>Sains Dasar</td><td>2</td><td>Genap (2)</td><td>1 Maret 2023</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OTORISASI</td><td colspan="3">Pengembang RPS</td><td colspan="2">Koordinator RMK</td><td>Kaprodi</td></tr>
<tr><td colspan="3">Santri Chintia Purba,S.Pd.,M.Sc.</td><td colspan="2">Nova Irawati Simatupang, M.Pd</td><td>Dr.Familia Novita Simanjuntak</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capaian Pembelajaran (CP)</td><td colspan="6">CPL</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Sikap :
Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atautemuan orisinil orang lain.
Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :
Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasiilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan,desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkanhasil analisis informasi dan data.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td>ampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja yan Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :
Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :
Menguasai prinsip dan konsep
Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari</td></tr>
<tr><td colspan="2">CPMK</td></tr>
<tr><td></td><td>Mampu menjelaskan prinsip dasar
Mampu menguasai konsep dasar dan teori matematika</td></tr>
<tr><td>Deskripsi Singkat MK</td><td colspan="2">Pada mata kuliah ini mahasiswa belajar tentang prinsip-prinsi dan konsep teori matematika terutama mengenai dasar-dasar matematika untuk kimia.</td></tr>
<tr><td>Bahan Kajian</td><td colspan="2">Sistem bilangan
Trigonometri
Bangun datar dan Bangun ruang
Limit
Differensial
Integral
Aljabar; fungsi</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pustaka</td><td colspan="2">Utama:
Purba, Santri C. 2022. Buku Materi Pembelajaran Matematika Dasar. Jakarta:UKI Press.
Thomas, Weir and Hans. 2010. Thomas' Calculus (Twelfth edition). Boston: Pearson.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Penunjang:
Purcell E.J and Varberg (2003). Calculus. Prentice Hall an Inc. New jersey
Wrede. R and Spiegel. M. (2002). Advanced Calculus. McGraw Hill Companies. New York
Boyce. W.A and Diprima (1992). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. New Jersey</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Media Pembelajaran</td><td>Perangkat lunak:</td><td>Perangkat keras:</td></tr>
<tr><td>MS Windows
MS Office Power Point
MS Windows Media PlayerInternet Explorer</td><td>Laptop
Spidol board markerWhiteboard
PosterLCD</td></tr>
<tr><td>Nama Dosen</td><td colspan="2">Santri Chintia Purba,S.Pd.,M.Sc.</td></tr>
<tr><td>Matakuliah syarat</td><td colspan="2">-</td></tr>
</table>

	Sub-CP-MK	Bahan Kajian				Penilaian

Mg Ke-	ampuan Akhir yang Direncanakan)	(Materi Pembelajaran)	Bentuk dan Metode Pembelajaran (Media dan sumber belajar)	Estimasi Waktu	Pengalaman Belajar Mahasiswa	Kriteria	Indikator	Bobot %)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1-2	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Sistem Bilangan Riil, eksponensial dan logaritma	Sistem Bilangan, sifat-sifat bilangan, sifat-sifat urutan system bilangan riil, Sistem Bilangan riil, Bentuk Pangkat: Pangkat Positif dan Pangkat negatif, bentuk akar, pangkat pecahan, Grafik eksponen dan persamaannya, dan Logaritma.	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa memahami sistem bilangan riil Mahasiswa mampu menguasai materi sistem bilangan, bentuk pangkat, akar dan logaritma	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	12,5%
3-4	Mampu memahami dan menganalisi bangun datar dan bangun ruang	Bangun datar, jenis-jenis bangun datar, persegi, persegi Panjang, trapezium, segitiga, laying-layang, lingkaran	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Menjelaskan pengertian konsep dasar dan mengitung serta membedakan bangun datar dan bangun ruang	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	12,5%
5-6	Mampu memahami dan menjelaskan tentang konsep dasar-dasar matematika yang meliputi persamaan linier, sistem persamaan linier, persamaan linear dua variabel, persamaan linear tiga variabel	Persamaan linear satu variabel, dua Variabel dan tiga variabel beserta penyelesaiannya. Metode-metode penyelesaian dalam menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dan pertidaksamaan linear.	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa menguasai persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel Mahasiswa mampu menentukan dan menganlisis persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	12,5%

7-8	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Fungsi	Pengertian fungsi, sifat fungsi yaitu surjektif, injektif dan bijektif, Grafik fungsi, Jenis-jenis fungsi, operasi pada fungsi, aturan fungsi, fungsi komposisi dan fungsi invers.	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa dapat menentukan nilai fungsi Mahasiswa mampu menganalisis jenis-jenis fungsi Mahasiswa menguasai operasi fungsi seperti komposisi dan invers suatu fungsi	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	12,5%
9-10	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi trigonometri, grafik dan aplikasinya	Pengertian Trigonometri, ukuran sudut, perbandingan trigonometri, koordinat kutub, identitas trigonometri, grafik fungsi trigonometri, aturan sinus, aturan kosinus, luas segitiga, rumus-rumus trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan trigonometri dan aplikasi trigonometri.	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa memahami manfaat trigonometri Mahasiswa menguasai konsep trigonometri dan aplikasinya	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	12,5%
11-12	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-	Pengertianlimit, definisi limit dengan epsilon delta, operasi limit, limit tak hingga dan asimtot limit.	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Memahami materi kemiringan sebuah grafik Menentukan limit dari sebuah fungsi beserta hukum-hukumnya, menganalisis keberadaan sebuah limit fungsi, membuktikan limit satu arah dan menentukan keberadaan limitnya, fungsi yang kontinu dan tidak kontinu, limit fungsi hingga maupun tak hingga.	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	12,5%

	konsep pada materi Limit dan kekontinuan.							
13-14	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Turunan dan aplikasinya	Pengertian Turunan, Rumus Dasar turunan, turunan sebagai suatu perubahan, Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa dapat menentukan nilai tangen atau kemirungan sebuah dungsi dengan menentukan turunan fungsi Mahasiswa mampu menggunakan aturan-aturan dalam penurunan fungsi Mahasiswa mengaplikasikan turunan Mahasiswa menguasai konsep turunan dalam fungsi trigonometri Mahasiswa memahami aturan Chain dalam turunan Mahasiswa menguasai konsep turunan pada fungsi implisit Mahasiswa memahami kelinearan sebuah fungsi	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	12,5%

15-16	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada Integral	Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu, Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa memahami definisi dan konsep integral Mahasiswa memahami hubungan integral dengan sigma maupun limit Mahasiswa memahami aturan pada definite integral Mahasiswa mampu menggunakan teorema dasar kalkulus Mahasiswa memahami Integral substitusi Mahasiswa mengevalusi indefinite integrals Mhasiswa menentukan luas kurva dengan integral substitusi	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	10

SISTEM PENILAIAN

I. Skala nilai akhir dalam huruf dan angka:

Rentang Skor Nilai Akhir	**80,0-100**	**75,0-79,9**	**70,0-74,9**	**65,0-69,9**	**60,0-64,9**	**55,0- 59,9**	**50,0-54,9**	**45,0-49,9**	**<49,9**
Nilai Huruf	A	A-	B+	B	B-	C+	C	D	E
Nilai Angka	4	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,0	0

II. Presentase Tahap Penilaian Tugas dan kewajiban mahasiswa

Tugas : 20%, Quis : 20%, UTS/Project 1: 25%, UAS/Project 2 : 25%, Afektif : 10%

Terima kasih atas kerja sama dan kerja keras mahasiswa sekalian.

Jakarta, 1 Maret 2023

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr.Familia Novita Simanjuntak

Disusun oleh,
Dosen Pengampu

Santri Chintia Purba,S.Pd.,M.Sc.

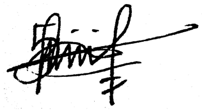
KONTRAK PERKULIAHAN

Kontrak perkuliahan merupakan kesepakatan antara dosen pengampu mata kuliah dengan mahasiswa yang ditanda tangani oleh ketua kelas. Adapun kontrak perkuliahan di dalam mata kuliah Matematika Dasar Prodi pendidikan Kimia Semester Genap TA 2021/2022 yaitu :

1. Setiap Mahasiswa memiliki BMP
2. Keterlambatan paling lama 10 menit.
3. Setiap tugas dikumpulkan ontime sesuai dengan deadline yang disepakati, konsekuensi telat pengurangan nilai -5 dihari yang sama, -10 lebih dari sehari.
4. Perkuliahan diawali dengan Doa yang dipimpin secara bergantian.
5. Setiap mahasiswa bersedia ditempatkan dikelompok yang disusun oleh dosen.
6. Evaluasi Pembelajaran dilakukan dengan Quis, Penugasan dan Project.
7. Perkuliahan online dilakukan dengan 1 sks dosen menjelaskan, 1 sks mahasiswa mandiri atau diskusi melalui BMP yang sudah disediakan.

Demikianlah kontak perkuliahan ini disusun untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya. Untuk hal-hal kesepakatan lainnya dapat diatur kemudian sesuai dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Disepakati oleh,

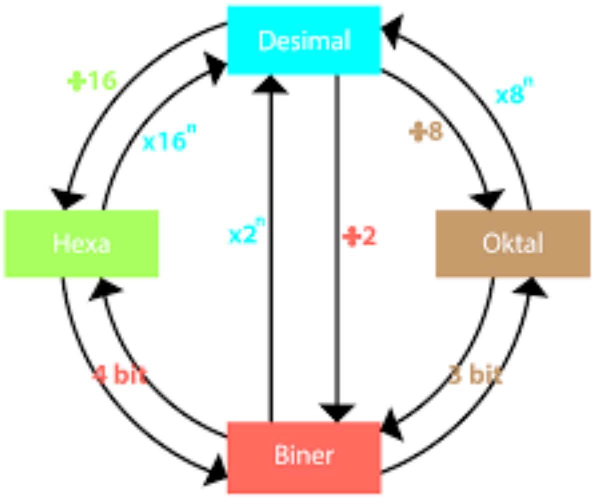
Dosen Pengampu Mata Kuliah	Ketua Kelas
	
Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc.	**Yesni Glory**
NIP/NIDN : 191660/0330039402	**NIM : 2216150004**

MODUL 1

SISTEM BILANGAN RIIL, BENTUK AKAR, EKSPONENSIAL, DAN LOGARITMA

Be the best version of yourself.

-SCP



Pendidikan Kimia

FKIP UKI

MODUL 1 SISTEM BILANGAN RIIL, BENTUK AKAR, EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Sistem bilagan riil merupakan salah satu materi dasar matematika yang sangat penting untuk dipahami dan dikuasai oleh peserta didik sistem bilangan adalah seperangkat susunan satuan yang teratur secara teori dan asas yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan secara matematis. Sistem bilangan riil berarti bilangan yang teratur dan dioperasikan secara matematis adalah bilangan riil. Bilangan riil biasanya disebut sebagai bilangan nyata.

   Modul satu ini akan mepelajari tentang system bilangan riil yaitu mulai dari jenis-jenis himpunan pada bilangan, sifat-sifat bilangan, operasi pada bilangan. Selain itu, pada modul ini juga akan dibahas tentang perkalian berulang atau perpangkatan atau biasa disebut dengan eksponensial, juga sifat-suifatnya beserta operasi pada perpangkatan. Selain itu juga memuat Bentuk akar dan bentuk logaritma. Dalm hal ini dijabarkan secara terinci dan jelas berbagai bentuk persamaan logaritma dan fungsi-fungsi pada logaritma dan eksponen.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Satu

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
   - Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinil orang lain.
   - Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan
   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
4. Prasyarat Kompetensi
   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep dasar perkalian berulang dan penjumlahan berulang. Memahami konsep dasar bilangan dan mampu mengoperasikannya.
5. Kegunaan Modul Satu
   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi system bilangan riil, bentuk akar, eksponensial dan logaritma. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada.
6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok
   Materi pada Modul satu ini, diantaranya Sistem Bilangan, sifat-sifat bilangan, sifat-sifat urutan system bilangan riil, Sistem Bilangan riil, Bentuk Pangkat : Pangkat Positif dan Pangkat negatif, bentuk akar, pangkat pecahan, Grafik eksponen dan persamaannya, dan Logaritma.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-1 : Menguasai Sistem Bilangan, bentuk akat dan bentuk pangkat positif dan negatif.
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan system bilangan, Perpangkatan dan Logaritma. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Sistem Bilangan, Bentuk Pangkat dan Logaritma. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Materi Sistem Bilangan Riil

1.1 Sistem Bilangan

Menurut KBBI bilangan merupakan satuan dalam sistem matematis yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan. Sedangkan sistem merupakan susunan yang teratur dari pandangan, teori, asas, dan sebagainya. Sehingga disimpulkan bahwa sistem bilangan adalah seperangkat susunan satuan yang teratur secara teori dan asas yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan secara matematis. Sistem bilangan riil berarti bilangan yang teratur dan dioperasikan secara matematis adalah bilangan riil. Bilangan riil biasanya disebut sebagai bilangan nyata.

Dalam Matematika Dasar terdapat konsep dari himpunan obyek-obyek, khususnya tentang konsep himpunan dari bilangan-bilangan yang banyak sekali diterapkan untuk matematika maupun penerapan di bidang-bidang yang lain. Himpunan bilangan yang penting untuk diketahui adalah himpunan bilangan Asli, himpunan bilangan Cacah, himpunan bilangan Bulat, himpunan bilangan Rasional, himpunan bilangan Irrasional (tak terukur), dan himpunan bilangan Real. Diharapkan mahasiswa dapat memahami konsep himpunan bilangan yang penting untuk diketahui dan mampu menggunakan sifat-sifat dari himpunan bilangan.

Berikut ini jenis-jenis himpunan bilangan yang merupakan bagian dari himpunan bilangan riil.

1. Himpunan bilangan asli atau sering juga disebut dengan himpunan bilangan bulat positif yang dituliskan dengan
$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$$
2. Himpunan bilangn cacah biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{W}$ yang berasal dari Bahasa inggris yaitu *whole numbers*, dinotasikan dengan

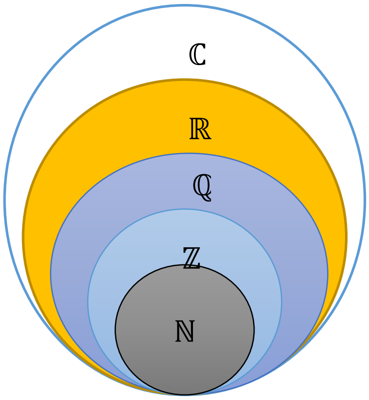
$$\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$$

3. Himpunan bilangan bulat ditulis dengan $\mathbb{Z}$ yang berasal dari Bahasa Jerman yaitu Zahlen yang artinya bilangan. Himpunan bilangan bulat terdiri dari bilangan nol, bilangan negartif dan bilangan positif, yang dituliskan dengan

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

4. Himpunan bilangan rasional/terukur merupakan bilangan ang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dimana a dan b merupakan bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0. Bilangan rasional memuat bilangan bulat, bilangan asli, bilangan cacah, bilangan prima, bilangan decimal yang terukur. Selanjutnya bilangan decimal ataupun pecahan yang tidak terukur disebut sebagai bilangan Irrasional. Contoh bilangan Irrasional yang terkenal adalah $\sqrt{2}$, π , e dan sebagainya. Bilangan rasional biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$ dan bilangan Irrasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}^*$.
5. Himpunan bilangan riil adalah sekelompok bilangan nyata yang memuat bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional dan Irrasional. Bilangan ini biasanya dinotasikan dengan $\mathbb{R}$.
6. Himpunan Bilangan Kompleks merupakan bilangan himpunan bilangan terbesar di matematika yang memuat seluruh bilangan riil dan bilangan imajiner yang biasnya dilambangkan dengan $\mathbb{C}$.

Sistem bilangan diatas dapat disimpulkan seperti gambar berikut:



Gambar 1 Sistem Bilangan

Di dalam bahan ajar ini, bilangan yang akan dibahas hanyalah sampai bilangan riil.

1.2 Sifat-sifat Bilangan Riil

1. Komutatif (pertukaran)

   Sifat komutatif pada bilangan riil yaitu terhadap penjumlahan dan perkalian

   $a + b = b + a$ dan $ab = ba$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Asosiatif

   Sifat asosiatif pada bilangan riil berlaku pada operasi penjumlahan dan perkalian yaitu

   $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. Distributif

   Sifat distributive perkalian pada bilangan riil dinyatakan dengan

   $(a + b)c = ac + bc$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. Identitas

   Unsur identitas pada bilangan riil dibagi menjadi dua yaitu

   - Terhadap operasi penjumlaha unsur identitasnya adalah 0 sehingga $a + 0 = a$

- Terhadap operasi perkalian unsur identitasnya adalah 1 sehingga $a.1 = a$.

5. Invers

   Invers pada bilangan riil dibagi menjadi dua yaitu

   - Terhadap operasi penjumlaha inversnya adalah lawan dari bilangan itu sendiri yaitu $-a$, sehingga $a + (-a) = 0$.
   - Terhadap operasi perkalian inversnya adalah kebalikan dari bilangan itu sendiri yaitu $\frac{1}{a}$, sehingga $a.\frac{1}{\square} = 1$.

6. Jika a dan b dua bilangan Real, maka terdapat suatu bilangan Real c sehingga $a + c = b$. Bilangan c ini kita nyatakan dengan $b - a$ yang disebut selisih dari b dan a. Selisih $a - a$ kita nyatakan dengan simbol 0. Simbol 0 ini selanjutnya disebut nol.

1.3 Sifat-sifat Urutan Bilangan Riil

1. Trikotomi

   Jika a dan b adalah bilangan riil, maka berlaku $a < b$ atau $a > b$ atau $a = b$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Transitif

   Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. Penambahan

   $a < b$ jika dan hanya jika $a + c < b + c$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. Perkalian

7. $a < b$ jika dan hanya jika $ac < bc$ untuk c positif dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.
8. $a < b$ jika dan hanya jika $ac > bc$ untuk c negatif dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1.4 Sistem Bilangan Riil

Himpunan bilangan riil dengan semua operasi dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya dinamakan system bilangan riil. Penulisan himpunan dalam bentuk interval/selang yaitu :

1. Interval tertutup

$$\{x|a \leq x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\} = [a, b]$$

2. Interval terbuka

$$\{x|a < x < b,\ x \in \mathbb{R}\} = (a, b)$$

3. Interval setengah terbuka atau setengah tertutup

$$\{x|a \leq x < b,\ x \in \mathbb{R}\} = [a, b)$$

atau

$$\{x|a < x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\} = (a, b]$$

4. Interval tak terbatas

$$\{x|x \geq b,\ x \in \mathbb{R}\} = [b, \infty)$$

atau

$$\{x|x < a,\ x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, a]$$

1.5 Bentuk Pangkat

Salah satu kegunaan notasi pangkat adalah untuk menyederhanakan atau meringkas penulisan bilangan. Contohnya 100.000.000 dapat dtuliskan dengan notasi pangkat yaitu 10^8. Notasi pangkat ini dapat menghemat tempat sehingga banyak digunakan dalam perumusan maupun penyederhanaan perhitungan yang bernilai besar maupun kecil. Penggunaan pangkat ini banyak ditemukan pada perhitungan di Kimia, Biologi, Fisika, Ekonomi dan sebagainya.

a. Pangkat bulat positif

Perkalian berulang suatu bilangan dapat dinatakan dalam bentuk bilangan berpangkat yang biasa disebut dengan pengkat bilangan positif. Sebagai contoh

$$5 = 5^1$$

$$5.5 = 5^2$$

$$5.5.5 = 5^3$$

$$5.5.5.5.5.5.5 = 5^7$$

bentuk 5^7 dibaca dengan "lima pangkat tujuh". Bilangan 5 disebut sebagai bilangan pokok atau bilangan dasar sedangkan 7 disebut sebagai pangkat atau eksponen.

Secara umum, bilangan berpangkat didefinisikan dengan

Jika $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka
$$a^n = a.a.a.a \ldots a.a.a$$
disebut sebagai perkalian a sebanyak n kali.
a disebut bilangan pokok dan n disebut sebagai pangkat.

Contoh :

1. $4^3 = 4.4.4 = 64$
2. $128 = 2.2.2.2.2.2.2 = 2^7$
3. $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$
4. $-5.-5.-5.-5.-5 = (-5)^5$
5. $-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

b. Sifat-sifat Pangkat bulat positif

Pada bilangan berpangkat positif dapat dilakukan beberapa operasi aljabar yaitu operasi perkalian, pembagian dan pemangkatan. Berikut ini beberapa sifat dan ketentuan pada bilangan bulat berpangkat positif diantaranya adalah

1) Jika $a \in R$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$a^p . a^q = a^{p+q}$

Contoh :

$3^7 . 3^4 . 3 = 3^{7+4+1} = 3^{12}$

$25. 5^7 . 5^6 = 5^2 . 5^7 . 5^6 = 5^{2+7+6} = 5^{15}$

2) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Contoh :

$2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$

$3^5 : 3^8 = 3^{5-8} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

$125 : 5 = 5^3 : 5^1 = 5^{3-1} = 5^2$

3) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $(a^p)^q = a^{p.q} = a^{pq}$

Contoh :

$$(7^2)^4 = 7^8$$

$$(x^3)^5 = x^{15}$$

4) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p adalah bilangan bulat maka $(ab)^p = a^p b^p$.

Contoh :

$(2x^3y^2)^4 = 2^4 x^{3.4} y^{2.4} = 2^4 x^{12} y^8$

$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^2 = \frac{2^2 x^6}{3^2 y^4}$

c. Pangkat buat negatif dan nol

Jika bentuk perpangkatan dari bilangan dasar kurang dari satu dan nol maka akan diperoleh pangkat bilangan bulat negarif dan nol. Prinsip pangkat bilangan bulat negatif sama dengan prinsip pada pangkat bilangan bulat positif.

Contoh :

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = 3^{-1}.3^{-1}.3^{-1}.3^{-1} = 3^{-4}$$

$$a^{-1}: a^{-3} = a^{-1-(-3)} = a^{2}$$

Untuk mendefinisikan a^ndengan a bilangan riil dan n bilangan bulat negative dan nol, maka dapat digunakan teorema-teorema perpangkatan pada bilangan bulat positif, seperti :

$\frac{a^n}{a^n} = 1$, Jika teorema $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ digunakan maka akan diperoleh $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ dan untuk $q = p + n$ maka diperoleh $\frac{a^p}{a^q} = \frac{\square^p}{a^{p+n}} = a^{p-(p+n)} = a^n$.

Dengan demikian dapat disimpulkan teorema berikut ini

> Jika $a \neq 0$, $a \in R$ dan n bilangan bulat positif maka $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dan $a^0 = 1$.

Contoh :

Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut ini

1) $\frac{a^2b^2}{ab}.\frac{c^2}{a}$
2) $\frac{3^2 5x}{15y^2}$
3) $(2xyz^2)^3\left(\frac{x^2y}{y^2z}\right)$
4) $\frac{wuv^2}{w^2z} + \frac{w}{u^2v}$
5) $\frac{x^2z^3}{x^{-3}yz^{-2}}$

Jawab :

1) $\frac{a^2b^2}{ab}.\frac{c^2}{a} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b}$

$$= a^{2-2}b^{2-1}c^2$$

$$= a^0bc^2$$

$$= bc^2$$

2) $\frac{3^2 5x}{15y^2} = \frac{3^2.5.x}{3.5.y^2}$

$$= 3^{2-1}5^{1-1}xy^{-2}$$

$$= 3.5^0.xy^{-2}$$

$$= 3xy^{-2}$$

3) $(2xyz^2)^3\left(\frac{x^2y}{y^2z}\right) = (2^3x^3y^3z^6)\left(\frac{x^2y}{y^2z}\right)$

$$= 2^3x^{3+2}\,y^{3+1-2}z^{6-1}$$

$$= 2^3x^5y^2z^4$$

4) $\frac{wuv^2}{w^2z} + \frac{w}{u^2v} = \frac{wu^{1+2}v^{2+1}+w^{1+2}z}{w^2u^2vz}$

$$= \frac{wu^3v^3 + w^3z}{w^2u^2vz}$$

$$= \frac{u^3v^3 + w^2z}{wu^2vz}$$

5) $\frac{x^2z^3}{x^{-3}yz^{-2}} = \frac{x^{2-(-3)}z^{3-(-2)}}{y}$

$$= \frac{x^5z^5}{y}$$

$$= \frac{(xz)^5}{y}$$

4.Rangkuman

1. Jenis-jenis himpunan bilangan yang merupakan bagian dari himpunan bilangan riil:
   Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots\}$

   Himpunan bilangn cacah $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$

   Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

   Himpunan bilangan rasional/terukur $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$. Bilangan Irrasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}^*$. Contoh bilangan Irrasional yang terkenal adalah $\sqrt{2}$, π , e dan sebagainya.

Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

Himpunan Bilangan Kompleks $\mathbb{C}$.

2. Sifat-sifat Bilangan Riil : Komutatif, Asosiatif, Distributif, Identitas Invers.
3. Sifat-sifat Urutan Bilangan Riil : Trikotomi, Transitif, Penambahan, Perkalian.
4. Bentuk Pangkat yaitu bentuk pangkat positif dan Negatif.
5. Jika $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka
$$a^n = a.a.a.a \ldots a.a.a$$
disebut sebagai perkalian a sebanyak n kali. a disebut bilangan pokok dan n disebut sebagai pangkat.
6. Jika $a \in R$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $a^p . a^q = a^{p+q}$
7. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka
$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
8. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $(a^p)^q = a^{p \cdot q} = a^{pq}$
9. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p adalah bilangan bulat maka $(ab)^p = a^p b^p$.
10. Jika $a \neq 0$, $a \in R$ dan n bilagan bulat positif maka
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dan $a^0 = 1$.

5. Latihan

Sederhanakanlah bentuk pangkat berikut ini

1. $(3x^2 . y^{-5})(-3x^{-8} . y^9)$
2. $\frac{5x^5y^2}{7x^3y^{-5}}$
3. $\frac{6\sqrt{10x}}{3\sqrt{2x^2}}$
4. $\frac{5^{2-n}-(0,2)^n}{5^{1-n}+(0,2)^n}$
5. $(8x^3 . y^{12})^{\frac{1}{6}}$
6. $\frac{(ab^2c)^3(ac^3)^5}{(a^4bc^5)^2}$
7. $\frac{(ac^2)(a^3b)^2+(a^2b)^5(bc^3)^3}{(a^3bc^2)^2}$

8. $\frac{2x^2yz^3}{(xyz^2)^3+(x^2yz)^2}$

9. $\frac{3mn^2}{(2km^2n)-(3mn^5)^2}$

10. $\frac{(p^2qr)^2(r^4s)^6+(ps^2)^3}{(p^2r)^3(qs^2)+(p^4rs)^2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Gambarkanlah dalam suatu skema tentang pembagian system bilangan riil!
2. Tentukanlah nilai $y \in R$ sehingga $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2y+3}{3}+8\right)+16\right)+8\right)=1$
3. Jika $1{,}54^2 = 2{,}3716$, maka 154^2 adalah
4. Nilai dari $(4^{-1}+3^{-2}+7^{-1})^{-1}$ adalah
5. Jika $2a^3+3a^3+a^3+4a^3=1250$ maka nilai a^2+a adalah

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-2: Menguasai Bentuk Akar dan Logaritma
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan bentuk akara dan Logaritma. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Bentuk akar dan Logaritma. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*
3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

1.6 Bentuk Akar

Akar pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman yang bernama Christoff Rudolf didalam bukunya yang berjudul Die Cross dengan simbol $\sqrt{\ }$. Simbol tersebut dipilih karena memiliki kemiripan dengan huruf "r" yang diambil dari kata "radix" yang merupakan bahasa latih dari akar pangkat dua yang merupakan kebalikan dari kuadrat. Pernyataan yang ditulis dengan tanda akar disebut bentuk akar.

Bentuk akar merupakan bagian dari bilangan rasional dan irrasional. Bentuk akar biasanya digunakan sebagai bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangakt pecahan. Contohnya seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ dan sebagainya.

a. Sifat bentuk akar

   Adapun beberapa sifat bentuk akar yaitu

   1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
   2) $p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p+q)\sqrt[n]{a}$
   3) $p\sqrt[n]{a} - q\sqrt[n]{a} = (p-q)\sqrt[n]{a}$
   4) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

5) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dimana $b \neq 0$

6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

b. Operasi hitung bentuk akar

1) Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Jika a, b dan c adalah bilangan rasional positif, maka berlaku persamaan berikut

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

dan

$$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

Contoh :

1. $8\sqrt{8} + 3\sqrt{8} + \sqrt{8} = (8 + 3 + 1)\sqrt{8}$
$= 12\sqrt{8}$
$= 24\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 - 5 + 4)\sqrt{2}$
$= 2\sqrt{2}$
3. $5\sqrt{7} + 6\sqrt{28} - 3\sqrt{63} = 5\sqrt{7} + 12\sqrt{7} - 27\sqrt{7}$
$= (5 + 12 - 27)\sqrt{7}$
$= -10\sqrt{7}$

2) Operasi Perkalian dan Pembagian

Jika a, b dan c adalah bilangan rasional positif, maka berlaku persamaan berikut

$$\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

dan

$$\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Contoh :

1. $\sqrt{4}.\sqrt{8} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

2. $\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}.3\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}.\sqrt{2}\right)$

$= 9-\sqrt{6}$

3. $\sqrt{300}:\sqrt{6} = \sqrt{\frac{300}{6}}$

$= \sqrt{50}$

$= \sqrt{25}.\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}$

4. $5\sqrt{2}-2\sqrt{8}+4\sqrt{18} = 5\sqrt{2}-2\sqrt{4}.\sqrt{2}+4.\sqrt{9}.\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}-4\sqrt{2}+12\sqrt{2}$

$= (5-4+12)\sqrt{2}$

$= 13\sqrt{2}$

c. Merasionalkan Bentuk Akar

Suatu bentuk pecahan dimana penyebutnya mengandung bentuk akar, maka dapat disederhanakan degan merasionalkan bentuk akar yang ada. Merasionalkan bentuk pecahan dari penyebut tersebut maka pembilang dan penyebut harus dikalikan dnegan bentuk rasional dari bentuk akar yang ada pada penyebutya. Berikut ini beberapa bentuk penyederhanaan bentuk akar dengan cara merasionalkan penyebutnya adalah

1) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

2) $\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}}.\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$

3) $\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}}.\frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$

4) $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}.\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$

5) $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}$

Contoh :

Rasionalkanlah penyebut dari pecahan berikut ini:

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
2. $\frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Jawab :

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2}$$

$$= -(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

2. $\frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}} . \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$= \frac{(2-\sqrt{7})(4\sqrt{2}+\sqrt{3})}{32-3}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt{14}-\sqrt{21}}{29}$$

1.7 Pangkat Pecahan

Bilangan riil yang memenuhi persamaan $a^n = b$, disebut sebagai akar pangkat n dari b yang dinotasika dengan $a = \sqrt[n]{b}$. Akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$ dapat juga ditulis sebagai bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$. Demikian juga sebaliknya, bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$ dapat ditulis sebagai akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$.

Jika $m, n \in N$ dengan $n \neq 1$, dan a adalah bilangan riil yang tidak negatif maka:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dan } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Jadi $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

Berikut ini beberapa sifat pangkat pecahan

a. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$a^p . a^q = a^{p+q}$$

b. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$a^p : = a^{p-q}$$

c. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

d. Jika $a \in R$, $a \neq 0$ dan $p, q \in Q$ maka

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

e. Jika $a \in R$, dan $p, q, r \in Q$ maka

$$(a^p . b^q)^r = (a^p)^r (b^q)^r = a^{pr} . b^{qr}$$

f. Jika $a, b \in R$, $b \neq 0$, dan $p, q, r \in Q$ maka

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^r = \frac{a^{pr}}{b^{qr}}$$

Contoh :

1. $3^{\frac{1}{3}} . 3^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}} = 3^{\frac{17}{6}}$

2. $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{7}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} y\right)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{x^{\frac{14}{15}}}{x^{\frac{2}{15}} y^{\frac{2}{5}}}$

3. $\dfrac{a^{-3} b^2 c}{abc} = a^{-3-1} b^{2-1} c^{1-1} = a^{-4} b$

4. Jika n memenuhi perkalian $25^{0,25}$ sebanyak n kali dituliskan dengan $25^{0,25} \times 25^{0,25} \times 25^{0,25} \times \ldots \times 25^{0,25} = 125$, maka nilai $(n-3)(n+2)$ adalah

Jawab :

$25^{0,25} \times 25^{0,25} \times 25^{0,25} \times \ldots \times 25^{0,25} = 125$

$(25^{0,25})^n = 125$

$(5^{0,5})^n = 5^3$

$5^{0,5n} = 5^3$

$0,5n = 3$

$n = 6$

maka $(n-3)(n+2) = (6-3)(6+2) = 3.8 = 24$

5. Jika $4^x - 4^{x-1} = 6$ maka $(2x)^x = \cdots$

   Jawab :

   $4^x - 4^{x-1} = 6$

   $2^{2x} - 2^{2(x-1)} = 6$

   $2^{2x}(1 - 2^{-2}) = 6$

   $2^{2x}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 6$

   $2^{2x}\left(\frac{3}{4}\right) = 6$

   $2^{2x} = 8$

   $2^{2x} = 2^3$

   $$2x = 3 \text{ maka } x = \frac{3}{2}$$

   Sehingga diperoleh

   $$(2x)^x = \left(2.\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = (3)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

1.8 Fungsi Eksponen dan Grafiknya

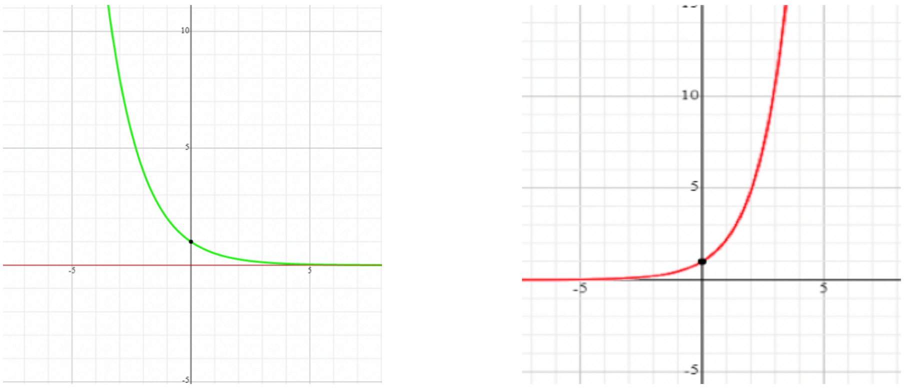
Fungsi eksponen adalah pemetaan bilangan real x ke a^x yang bentuk umum- nya dituliskan dengan $f(x) = a^x$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ untuk $a \in R$ mempunyai beberapa sifat sebagai berikut:

1. Kurva dari fungsi eksponen terletak diatas sumbu x disebut juga den- gan definit positif.
2. Memotong sumbu y di titik $(0, 1)$
3. Mempunyai garis yang sejajar dengan sumbu x(asimtot datar) $y = 0$

4. Grafik akan berbentuk monoton naik untuk $f(x) = a^x$
5. Grafik monoton turun untuk $f(x) = a^{-x}$

Untuk lebih jelasnya, berikut ini contoh gambar grafik fungsi eksponen



(a) $f(x) = a^x$ (b) $f(x) = a^{-x}$

Gambar 2 Grafik fungsi eksponen

1.9 Bentuk Persamaan Eksponen

Bentuk persamaan eksponen adalah persamaan yang di dalamnya terdapat pangkat-pangkat yang terbentuk sebagai fungsi x dimana x adalah bilangan peubah. Berikut ini beberapa persamaan Eksponen:

1. Jika $a^{f(x)} = 1$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = 0$.

2. Jika $a^{f(x)} = a^p$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = p$.

3. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x)$=$g(x)$.

4. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, $b > 0$ dan $b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$.

Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dimana $a^{f(x)} = p$ maka bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $Ap^2 + Bp + C = 0$.

1.10 Logaritma

Logaritma merupakan suatu operasi invers atau kebalikan dari perpangkatan (eksponen). Di dalam eksponen kita mencari hasil pangkat sedangkan logaritma digunakan untuk menentukan besar pangkatnya. Logaritma dapat didefinisikan seperti berikut ini

> Jika diketahui suatu perpangkatan dengan $a^c = b$ maka bentuk tersebut dapat diubah ke dalam bentuk logaritma menjadi
> $$\log_a b = c \text{ atau } {}^a\!log\, b = c$$
> untuk $a \neq 1$, dan $a > 0$.

Dalam hal ini a disebut sebagai basis logaritma, b sebagai bilangan yang dicari nilai logaritmanya atau biasa disebut dengan numerus dan c adalah besar pangkat atau nilai logaritma. Jika ditemukan penulisan logaritma tanpa basis, maka secara umum basis dari logaritma tersebut adalah 10. Misalnya ${}^{10}log\ a = \log a$. Namun jika basis dari bentuk logaritma adalah $e = 2{,}718$ maka bentuk logaritma tersebut disebut sebagai logaritma natural, biasanya dinotasikan dengan ln.

Sebagai contoh, misalkan diberikan bentuk logaritma seperti ${}^{2}log\ 8 = c$, maka dapat kita temukan bahwa $c = 3$, karena $2^3 = 8$. Berdasarkan contoh tersebut dapat disimpulkan bahwa logaritma merupakan suatu operasi kebalikan nilai yang menjadi pagkat dari suatu bilangan tertenttu. Berikut ini beberapa contoh lain dari hubungan antara bentuk perpangkatan dan Logaritma.

Tabel 1. Hubungan Bentuk pangkat dan Logaritma

Bentuk Pangkat	**Bentuk Logaritma**
$3^5 = 243$	${}^{3}log\ 243 = 5$
$3^{-5} = \dfrac{1}{243}$	${}^{3}log\ \frac{1}{243} = -5$
$9^{\frac{3}{2}} = 27$	${}^{9}log\ 27 = \frac{3}{2}$

Penyelesaian soal-soal logaritma tidak dapat lepas dari penggunaan sifat-sifat logaritma itu sendiri. Adapun beberapa sifat logaritma diantarnya adalah

1. $^{a}log\ a = 1$
2. $^{a}log\ 1 = 0$
3. $^{a^n}log\ b^m = \frac{m}{n}\ ^{a}log\ b$, *dengan* $n \neq 0$.
4. $^{a}log\ b = \frac{1}{^{b}\log a}$
5. $^{a}log\ b = \frac{^{p}log\ b}{^{p}log\ b}$, dengan $p > 0$, dan $p \neq 1$.
6. $a^{^{a}log\ b} = b$
7. $^{a}log\ b \times\ ^{b}log\ c =\ ^{a}log\ bc$
8. $^{a}log\ bc =\ ^{a}log\ b +\ ^{a}log\ c$
9. $^{a}log \frac{b}{c} =\ ^{a}log\ b -\ ^{a}log\ c$

Contoh :

1. $^{5}\log 125 =\ ^{5}\log 5^3$
$= 3.\ ^{5}\log 5$
$= 3.1$
$= 3$
2. $^{9}\log 64 +\ ^{9}\log 125 =\ ^{9}\log 64 \times 125$
$=\ ^{9}\log 8000$
$=\ ^{9}\log 8000$
$=\ ^{3^2}\log 20^3$
$= \frac{3}{2}\ ^{3}\log 20$

atau dapat juga diselesaikan dengan

$$^{9}\log 64 +\ ^{9}\log 125 =\ ^{3^2}\log 4^3 +\ ^{3^2}\log 5^3$$
$$= \frac{3}{2}\ ^{3}\log 4 + \frac{3}{2}\ ^{3}\log 5$$

$$= \frac{3}{2} ({}^{3}log\ 4{\times}5)$$

$$= \frac{3}{2}\ {}^{3}log\ 20$$

3. Jika diketahui ${}^{3}log\ 2 = A$, ${}^{3}log\ 5 = B$ dan ${}^{6}log\ 3 = C$, maka tentukanlah nilai dari ${}^{12}log\ 50$ dan ${}^{5}log\ 24$.

   Jawab :

$${}^{18}\log 50 = \frac{{}^{3}log\ 50}{{}^{3}log\ 18}$$

$$= \frac{{}^{3}log\ 25{\times}2}{{}^{3}log\ 3{\times}6}$$

$$= \frac{{}^{3}log\ 5^2 + {}^{3}log\ 2}{{}^{3}log\ 3 + {}^{3}log\ 6}$$

$$= \frac{2.\ {}^{3}log\ 5 + {}^{3}log\ 2}{1 + \frac{1}{C}}$$

$$= \frac{2B + A}{\frac{C+1}{C}}$$

$$= \frac{2BC + AC}{C + 1}$$

$${}^{5}\log 24 = {}^{5}\log 3 \times 8$$

$$= {}^{5}\log 3 + {}^{5}\log 8$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{{}^{3}log\ 8}{{}^{3}log\ 5}$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{{}^{3}log\ 2^3}{B}$$

$$= \frac{1 + 3.\ {}^{3}log\ 2}{B}$$

$$= \frac{1 + 3A}{B}$$

4. $\sqrt{2}^{\,{}^{2}\log 81} = 2^{\frac{1}{2}\,{}^{2}\log 81}$

$$= 2^{\frac{1}{2}\,{}^{2}\log 9^2}$$

$$= 2^{\,{}^{2}\log (9^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2^{\,{}^{2}\log 9}$$

$$= 9$$

5. Diketahui ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, tentukanlah nilai dari ${}^{60}\log 36$.

   Jawab :

$${}^{60}\log 36 = \frac{{}^{2}\log 36}{{}^{2}\log 60}$$

$$= \frac{{}^{2}\log(4\times 9)}{{}^{2}\log(4\times 3\times 5)}$$

$$= \frac{{}^{2}\log 2^2 + {}^{2}\log 3^2}{{}^{2}\log 2^2 + {}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 5}$$

$$= \frac{2 + 2\,{}^{2}\log 3}{2 + {}^{2}\log 3 + ({}^{2}\log 3\,.\,{}^{3}\log 5)}$$

$$= \frac{2 + 2a}{2 + a + ab}$$

6. Jika solusi dari persamaan $5^{x+5} = 7^x$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = {}^{a}\log 5^5$, maka nilai $a = \cdots$

   Jawab :

$$5^{x+5} = 7^x$$

$$\log 5^{x+5} = \log 7^x$$

$$(x+5)\log 5 = x\log 7$$

$$x\log 5 + 5\log 5 = x\log 7$$

$$5\log 5 = x\log 7 - x\log 5$$

$$5\log 5 = x\log\frac{7}{5}$$

$$x = \frac{\log 5^5}{\log\frac{7}{5}} = {}^{\frac{7}{5}}\log 5^5$$

Karena $x = {}^{a}\log 5^5 = {}^{\frac{7}{5}}\log 5^5$ maka $a = \frac{7}{5}$

4 Rangkuman

1. Beberapa sifat bentuk akar yaitu
   i. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
   ii. $p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p+q)\sqrt[n]{a}$
   iii. $p\sqrt[n]{a} - q\sqrt[n]{a} = (p-q)\sqrt[n]{a}$
   iv. $\sqrt[n]{a}b = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
   v. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dimana $b \neq 0$
   vi. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
2. Jika $m, n \in N$ dengan $n \neq 1$, dan a adalah bilangan riil yang tidak negatif maka:
   $$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dan } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
3. Berikut ini beberapa persamaan Eksponen:
   i. Jika $a^{f(x)} = 1$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = 0$.
   ii. Jika $a^{f(x)} = a^p$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = p$.
   iii. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x)$=$g(x)$.
   iv. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, $b > 0$ dan $b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $f(x)$ = 0.
   v. Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dimana $a^{f(x)} = p$ maka bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $Ap^2 + Bp + C = 0$.
4. Jika diketahui suatu perpangkatan dengan $a^c = b$ maka bentuk tersebut dapat diubah ke dalam bentuk logaritma menjadi
   $$\log_a b = c \text{ atau } {}^{a}log\ b = c$$

untuk $a \neq 1$, dan $a > 0$.

5. Beberapa sifat logaritma diantarnya adalah

    i. ${}^{a}log\ a = 1$

    ii. ${}^{a}log\ 1 = 0$

    iii. ${}^{a^n}log\ b^m = \frac{m}{n}\ {}^{a}log\ b,\ dengan\ n \neq 0.$

    iv. ${}^{a}log\ b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

    v. ${}^{a}log\ b = \frac{{}^{p}log\ b}{{}^{p}log\ b}$, dengan $p > 0$, dan $p \neq 1$.

    vi. $a^{{}^{a}log\ b} = b$

    vii. ${}^{a}log\ b \times {}^{b}log\ c = {}^{a}log\ c$

    viii. ${}^{a}log\ bc = {}^{a}log\ b + {}^{a}log\ c$

    ix. ${}^{a}log\frac{b}{c} = {}^{a}log\ b - {}^{a}log\ c$

5 Latihan

Sederhanakanlah bentuk akar berikut ini

1) $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

2) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}$

3) $\frac{2-\sqrt{xy}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}$

4) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^3}}}}$

5) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[10]{\sqrt{x^5y^3}}}}$

6) $\sqrt{\sqrt[7]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a^7bc^3}}}}}}$

Jika $a^{f(x)} = a^p, a > 0, a \neq 0$, maka $f(x) = p$. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan berikut ini.

7) $2^{4x-1} = 128$
8) $5^{3x-6} = 1$
9) $2^{2x-7} = \frac{1}{32}$
10) $9^{x^2+x} = 27^{x^2-1}$
11) $25^{x+2} = (0{,}2)^{\mathbf{1-x}}$
12) $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$
13) $25^{x+3} = 5^{x-1}$
14) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{2x+1}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2^{4x-1}}}{128}}$
15) $\sqrt{8^{3x+2} = (16)^{\frac{3}{4}}}$
16) $3^{2x+2} + 8.3^x - 1 = 0$

Tentukanlah nilai logaritma berikut ini

17) $\frac{({}^4\log 3)({}^4\log 6)}{({}^4\log 9)({}^8\log 2)+({}^4\log 9)({}^8\log 3)}$
18) ${}^{\frac{1}{2}}\log 5 \times {}^5\log 4 \times {}^2\log\frac{1}{8} \times ({}^5\log 25)^2$
19) $\frac{{}^3\log\sqrt{6}}{({}^3\log 18)^2 - ({}^3\log 2)^2}$
20) $2\ {}^6\log 16 - 3\ {}^6\log 4 + {}^6\log 9$
21) ${}^2\log\left({}^2\log\sqrt{\sqrt{2}}\right)$
22) Jika diketahui ${}^2\log 3 = a$, ${}^3\log 5 = b$ dan ${}^5\log 7 = c$ maka tentukanlah
    a. ${}^7\log 2$
    b. ${}^{125}\log 72$
    c. ${}^{128}\log 49 + {}^9\log 343 + {}^6\log 7$

23) Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen $9^{2x-4} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4}$ adalah …

24) Jika $2^x = m$ dan $2^y = n$ dengan $x > 0$ dan $y > 0$ maka $\frac{2x+3y}{x+2y} = \cdots$

6 Evaluasi Pembelajaran

Jika nilai $x = 2^{10}$, maka tentukanlah nilai bentuk akar berikut ini

1. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5}}}$
2. $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}}}$
3. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}}}$
4. $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^{15}}}}}}}$

Tentukanlah nilai logaritma berikut ini

5. $^{2}\log \frac{4}{3} + 2.\ ^{2}\log \sqrt{12}$
6. $2\,^{5}\log 15 +\ ^{5}\log 4 - 2\,^{5}\log 6$
7. $^{3}\log 4 +\ ^{9}\log \frac{1}{2} -\ ^{27}\log 5^{-2}$
8. $5^{\,^{125}\log 27} + 3^{\,^{9}\log 64}$
9. $^{6}\log 4\ .\ ^{64}\log 5\ .\ ^{\frac{1}{27}}\log 8\ .\ ^{2}\log 81\ .\ ^{625}\log 36$
10. Jika diketahui $^{2}\log 5 = p$, $^{5}\log 7 = q$ dan $^{7}\log 9 = c$ maka tentukanlah
    a. $^{3}\log 2 +\ ^{7}\log 2 -\ ^{9}\log 5 +\ ^{2}\log 36$
    b. $^{81}\log 70$
    c. $7^{\,^{2}\log 3 +\ ^{2}\log 21}$

11. Jika ${}^{2}\log x + {}^{2}\log y = 12$ dan $3\,{}^{2}\log x - {}^{2}\log y = 4$ maka $x + y =$ …

12. Nilai x yang memenuhi $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x} - \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{-x} = \frac{3}{2}$ adalah …

13. Jika diketahui $a^{b} = 2^{2020} - 2^{2019}$, tentukanlah nilai $a + b$

14. Jika $x > 0$ dan $x \neq 0$ pada $x^{k} = \frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{x}$, maka nilai k adalah…

15. Diketahui ${}^{64}\log\sqrt{16^{x-4}} = \frac{1}{2}$. Nilai x yang memebuhi persamaan persebut adalah …

16. Akar-akar persamaan $2.9^{x} - 5.3^{x} + 10 = 7$ adalah a dan b. Nilai ab dan $a^{2} + b^{2}$ adalah …

7 Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul
   Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul satu ini menuntun mahasiswa memahami materi Sistem Bilangan Riil secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.
2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.
3. Daftar Istilah

Sistem	Bilangan	Akar	Komutatif
Asosiatif	Transitif	Identitas	Invers
Logaritma	Eksponen	*Zahlen*	*Whole*

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson

Eie, M, Chang, Shou-Te. 2010. *A course on Abstract Algebra.* Singapore: World Scientific.

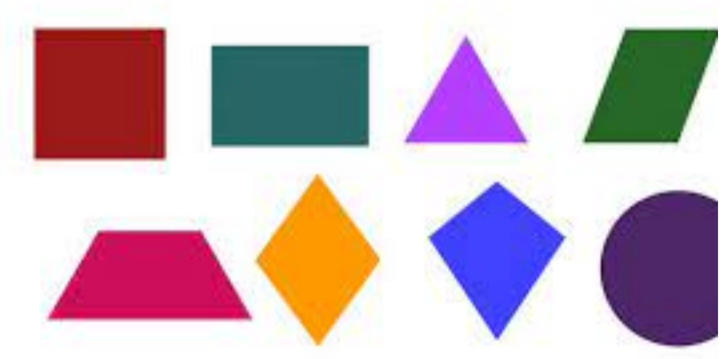
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 2

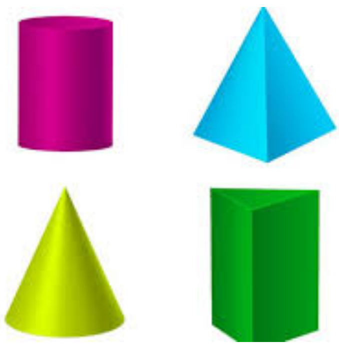
BANGUN DATAR DAN BANGUN RUANG

Perjuang yang sesungguhnya dilakukan ketika tidak ada orang lain yang melihat namun ketika kita bertanggungjawab pada komitmen diri sendiri.

SCP



Pendidikan Kimia
FKIP UKI



MODUL 2 BANGUN DATAR DAN BANGUN RUANG

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Bangun datar dan bangun ruang merupakan materi dasar matematika yang biasa disebut dengan geometri. Geometri menjadi salah satu materi yang dipelajari sejak dini di bangku sekolah. Materi ini dapat dipahami dengan menggunakan kemampuan mengimajinasikan suatu bentuk ataupu bangun tertentu.

   Didalam modul ini akan disajikan berbagai materi yang bekaitan dengan bidang datar yaitu: persegi, persegi panjang, segitiga, trapezium, jajar genjang, belah ketupat, laying-layang dan lingkaran. Setiap materi disajikan dengan memuat berbagai gambar dan contoh soal. Selanjutnya juga memuat materi tentang bangun ruang yaitu kubus, balok, limas, tabung, prisma, kerucut, dan bola. Setiap materi disajikan dengn berbagai gambar dan contoh soal yangmenarik. Modul ini dapat digunakan mahasiswa baik secara mandiri maupu kelompok untuk meningkatkan kemampuan geometri dari setiap mahasiswa.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Dua

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
   - Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atautemuan

orisinil orang lain.

- Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus : Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuan penelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Diharapkan mahasiswa dapat mendeskripsikan pengertian himpunan, menuliskan himpunan dalam berbagai cara penulisan himpunan, menyebutkan macam-macam himpunan, menentukan relasi pada himpunan dan menggunakan operasi-operasi himpunan.

4. Prasyarat Kompetensi

   Untuk memahami materi pada modul ini, adapun kompetensi prasyarat yang dimiliki yaitu kemampuan didalam mengoperasikan berbagai macam bentuk himpunan Bilangan, Operasi Bilangan dan Secara khusus seluruh sifat-sifat pada Sistem Bilangan Riil yaitu yang terdapat pada modul satu.

5. Kegunaan Modul Dua

   Modul dua ini berguna untuk menjadi sumber belajar mahasiswa untuk memahami materi Himpunan baik dengan pembelajaran individu maupun berkelompok. Materi yang disajikan lengkap sehinggga memudahkan mahasiswa memahami setiap materi dengan baik.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini adalah Bidang datar: Persegi, persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapezium, belah ketupat, laying-layang, dan lingkaran, Bangun Ruang: Kubus, Balok, Prisma, kerucut, limas, tabung dan bola

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke-3: Menguasai Bidang datar: Persegi, persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapezium, belah ketupat, laying-layang, dan lingkaran

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Bidang datar: Persegi, persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapezium, belah ketupat, laying-layang, dan lingkaran. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Bidang datar: Persegi, persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapezium, belah ketupat, laying-layang, dan lingkaran. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

Geometri berasal dari Bahasa Yunani yaitu geo yang berarti “bumi", dan metron yang berarti “pengukuran”. Sehingga geometri disebut sebagai ilmu ukur, atau ilmu bangun. Geometri merupakan cabang matematika yang berkaitan tentang bentuk, ukuran, posisi relatif gambar, dan sifat ruang.

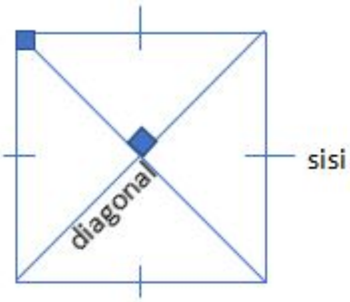
Geometri muncul secara independen di sejumlah budaya awal sebagai ilmu pengetahuan praktis tentang panjang, luas, dan volume, dengan unsur-unsur dari ilmu matematika formal. Geometri sedara sederhana dibagi dalam dua tenis, yaitu geometri dimensi dua dan geometri dimensi tiga.

Geometri dalam dua dimensi adalah suatu bentuk yang berupa dua dimensi, yang berarti bangunan tersebut hanya melibatkan panjang dan lebar. Geometri dalam dua dimensi ini basa juga disebut dengan bidang datar. Berbagai bidang datar yang dipelajari dalam modul ini yaitu persegi, persegi panjang, segitiga, jajar genjang, trapesium, belah ketupat, layang-layang, dan lingkaran.

Selanjutnya Geometri dalam tiga dimensi adalah suatu bentuk yang berupa tiga dimensi, yang berarti bangunan tersebut melibatkan panjang, lebar dan tinggi. Geometri tida dimensi ini bias disebut denganbangun ruang baik itu bangun rang sisi datar maupun bangun ruano sisi lengkung. Bebagai tenis bentuk bangun ruang yaitu kubus, balok, prisma, kerucut, limas, tabbing dan Bola.

2.1 Persegi

Persegi atau bujur sangkar adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang sama panjang dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.



Gambar 3 Persegi

Sifat-sifat persegi yaitu sebagai berikut.

- Memiliki empat sisi yang sama panjang (dua pasang sisi yang sejajar).
- Mempunyai empat sudut siku-siku.

- Memiliki dua diagonal yang saling berpotongan tegak lurus.

Semua jenis bangun datar pasti memiliki keliling, tidak terkecuali bangun datar persegi. Menghitung keliling persegi dapat dengan cara mengalikan 4 sisinya. Hal ini dikarenakan keliling persegi merupakan penjumlahan keempat sisinya yang sama panjang. Sehingga rumus keliling persegi adalah

$$Keliling\ (K) = sisi + sisi + sisi + sisi$$

atau

$$Keliling\ (K) = 4 \times sisi$$

Selain keliling, bangun datar persegi juga memiliki luasan, dimana luasan persegi dihitung dengan menguadratkan panjang sisinya. Sehingga rumus untuk luas persegi adalah

$$Luas\ (L) = (sisi\ persegi)^2$$

$$Luas\ (L) = s^2$$

Contoh :

Tentukanlah Keliling dan luas taman yang berbentuk persegi yang memiliki sisi 3 m.

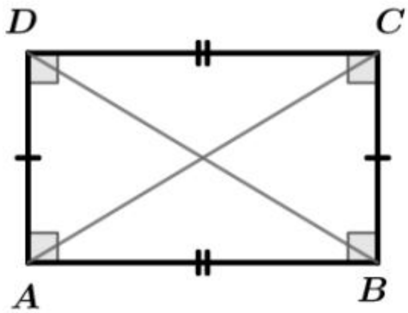
Jawab:

$$Keliling\ (K) = 4 \times sisi = 4 \times 3m = 12m$$

$$Luas\ (L) = (3m)^2 = 9m^2$$

2.2 Persegi Panjang

Persegi panjang adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh dua pasang sisi yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.

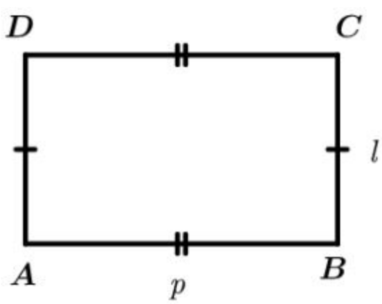


Gambar 4 Persegi Panjang

Sifat-sifat persegi panjang yaitu sebagai berikut.

- Memiliki empat buah sisi. Dalam persegi panjang ABCD tersebut terdapat empat sisi yaitu sisi AB, BC, CD, dan DA.
- Sisi-sisi yang sejajar dan berhadapan sama panjang. Dalam persegi panjang ABCD, sisi-sisi yang sejajar dan berhadapan adalah sisi AB dengan sisi CD dan sisi BC dengan sisi AD.
- Memiliki dua diagonal yang sama panjang. Dalam persegi panjang di atas terdapat diagonal AC dan diagonal BD. Kedua diagonal memiliki ukuran yang sama.
- Memiliki empat sudut siku-siku. Dalam persegi panjang ABCD, terdapat sudut ABC, sudut BCD, sudut CDA, dan sudut DAB yang masing-masing berukuran 90^o atau sudut siku-siku.
- Memiliki dua simetri lipat dan simetri putar.

Perhatikan gambar berikut



Gambar 5 Persegi panjang dengan panjang p dan lebar l

Keliling persegi panjang dapat ditentukan dengan menjumlahkan seluruh sisi dari persegi yaitu:

$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = p + l + p + l = 22 + 2l$$

atau

$$Keliling(K) = 2(p + l)$$

Selanjutnya Luas persegi panjang dapat ditentukan dengan mengalikan panjang persegi panjang terhadap lebar dari persegi panjang, yang dituliskan dengan:

$$Luas\ (L) = panjang \times lebar = p \times l$$

Keterangan:

K : Keliling Persegi Panjang

L : Luas Persegi Panjang

p : Panjang Persegi Panjang

l : Lebar Persegi Panjang

Contoh :

Tentukanlah keliling dan luas kolam renang yang berbentuk persegi panjang dimana panjangnya sebesar 6m dan lebarnya 2/3 dari panjangnya.

Jawab:

Panjang = 6m

Lebar = 2/3 (6m) = 4m

$$Keliling(K) = 2(p + l) = 2(6m + 4m) = 20m$$

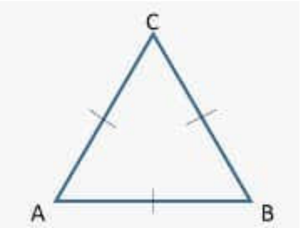
$$Luas\ (L) = p \times l = 6m \times 4m = 24m^2$$

2.3 Segitiga

Sebuah segitiga adalah poligon dengan tiga ujung dan tiga simpul. Ini adalah salah satu bentuk dasar dalam geometri. Segitiga dengan simpul A, B, dan C dilambangkan △ABC.

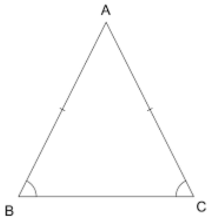
Berdasarkan panjang sisinya, bangun datar segitiga dibedakan menjadi tiga, yaitu segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sembarang.

1. Segitiga Sama Sisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama panjang dan ketiga sudutnya sama besar (60°).



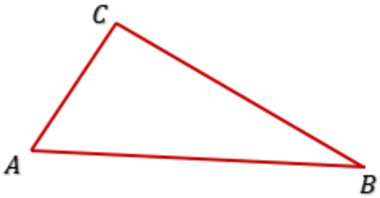
Gambar 6 Segitiga sama sisi

2. Segitiga Sama Kaki adalah segituga yang dua dari tiga sisinya sama panjang dan memiliki sepasang sudut yang sama besar.



Gambar 7 Segitiga sama kaki

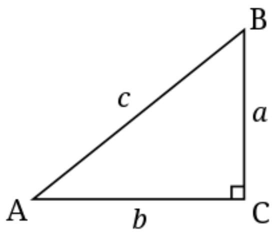
3. Segitiga Sembarang adalah ketiga sisinya tidak sama panjang dan ketiga sudutnya tidak sama besar.



Gambar 8 Segitiga sembarang

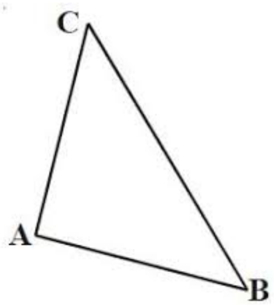
Berdasarkan besar sudutnya, bangun datar segitiga dibedakan menjadi tiga, yaitu segitiga sama siku-siku, segitiga lancip, dan segitiga tumpul.

1. Segitiga Siku-Siku adallah segitiga yang memiliki sudut terbesarnya adalah sudut siku-siku (90 derajat).



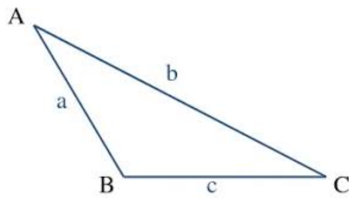
Gambar 9 Segitiga siku-siku

2. Segitiga Lancip merupakan segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip.



Gambar 10 Segitiga lancip

3. Segitiga Tumpul merupakan segitiga yang satu sudutnya merupakan sudut tumpul.

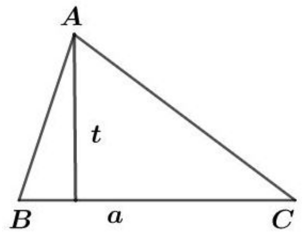


Gambar 11 Segitiga tumpul

Dari berbagai bentuk segitiga diatas, dapat dituliskan rumus untuk menghitung keliling yaitu dengan menjumlahkan ketiga sisi dari setiap segitiga, yang dituliskan dengan:

$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ AC$$

Selanjutnya, untuk menentukan Luas dari segitiga, dilakukan dengan menggunakan tinggi dari segitiga yang dimiliki seperti pada gambar berikut:



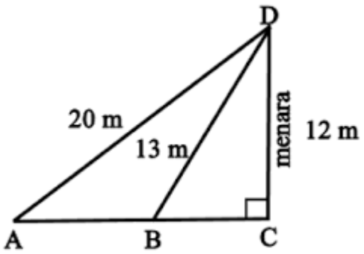
Gambar 12 Luas Segitiga

Sehingga luas segitiga dihitung dengan:

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} alas \times tinggi = \frac{1}{2} a \times t = \frac{1}{2} at$$

Contoh:

Tentukanlah keliling △ABD dan luas △ACD seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 13 Segitiga dari menara

Jawab:

Unutk menentukan keliling dan luas segitiga yang ditanyakan, maka terlebih dahulu kita menentukan panjang AB, BC dan AC dengan menggunakan rumus Phytagoras seperti berikut:

$$AC^2 = AD^2 - CD^2 = (20m)^2 - (12m)^2 = 400m^2 - 144m^2$$
$$= 256m^2$$

$$AC = \sqrt{256m^2} = 16m$$

$$BC^2 = BD^2 - CD^2 = (13m)^2 - (12m)^2 = 169m^2 - 144m^2 = 25m^2$$

$$BC = \sqrt{25m^2} = 5m$$

$$AB = AC - BC = 16m - 5m = 11m$$

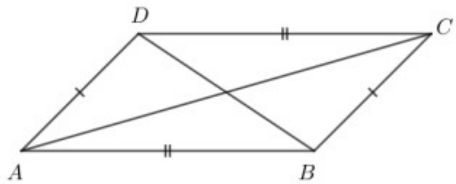
Jadi,

$$Keliling\ \triangle \text{ABD} = \text{sisi AB} + \text{sisi BD} + \text{sisi AD} = 11\text{m} + 13\text{m} + 20\text{m}$$
$$= 45\text{m}$$

$$Luas\ \triangle \text{ACD} = \frac{1}{2} AC \times CD = \frac{1}{2} 16m \times 12m = 96m^2$$

2.4 Jajar Genjang

Jajar genjang atau jajaran genjang (bahasa Inggris: *parallelogram*) adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh dua pasang rusuk yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki dua pasang sudut yang masing-masing sama besar dengan sudut di hadapannya.



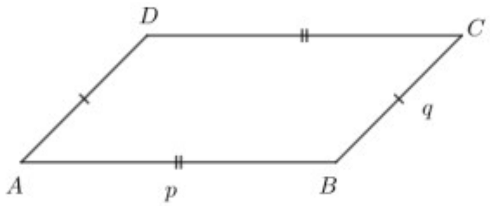
Gambar 14 Jajar genjang

Sifat-sifat jajar genjang yaitu sebagai berikut.

- Jajar genjang memiliki dua pasang sisi yang sejajar dan sama panjang. Sisi AB sejajar dengan sisi CD sehingga ukuran sisi AB = ukuran sisi CD. Sisi BC sejajar dengan sisi AD sehingga ukuran sisi BC = ukuran sisi AD.
- Jajar genjang memiliki dua pasang sudut yang saling berhadapan dan sama besar. Kedua pasang sudut yang berhadapan pada jajar genjang ABCD di atas yaitu sudut ABC dengan sudut ADC serta sudut BAD berhadapan dengan sudut BCD. Ukura sudut ABC sama dengan ukuran sudut ADC, serta ukuran sudut BAD sama dengan ukuran sudut BCD.

- Jajar genjang memiliki dua diagonal yang saling berpotongan. Kedua diagonal pada bangun jajar genjang tidak sama panjang.

Untuk memahami keliling jajar genjang, perhatikan gambar berikut.



Gambar 15 Jajar genjang dengan panjang p dan levar q

Pada gambar di atas terdapat bangun jajar genjang ABCD dengan ukuran sisi AB adalah p dan ukuran sisi BC adalah q. Keliling bangun jajar genjang tersebut dirumuskan sebagai berikut.

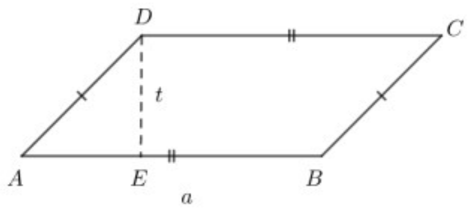
$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = p + q + p + q$$

$$Keliling\ (K) = 2p + 2q$$

$$Keliling\ (K) = 2(p + q)$$

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 16 Jajar genjang dengan lebar a dan tinggi t

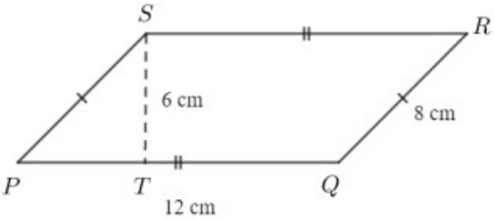
Pada gambar di atas terdapat bangun jajar genjang ABCD dengan sisi alas AB berukuran *a* dan tinggi jajar genjang yaitu DE berukuran *t*. Tinggi bangun jajar genjang tegak lurus dengan sisi alas jajar genjang. Luas bangun jajar genjang dirumuskan sebagai berikut.

$$Luas\ (L) = AB \times DE$$

$$Luas\ (L) = a \times t = at$$

Contoh :

Tentukanlah keliling dan luas jajar genjang berikut



Gambar 17 Contoh jajar genjang

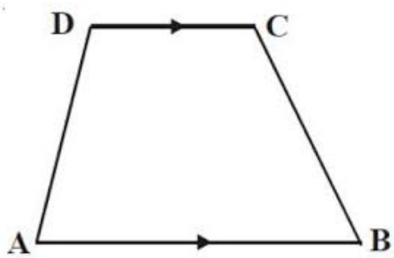
Jawab:

$$Keliling\ (K) = 2(PQ + QR) = 2(12cm + 8cm) = 2(20cm) = 40cm$$

$$Luas\ (L) = PQ \times ST = 12cm \times 6cm = 72cm^2$$

2.5 Trapezium

Trapesium adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang dua di antaranya saling sejajar namun tidak sama panjang.Trapesium termasuk jenis bangun datar segi empat yang mempunyai ciri khusus.



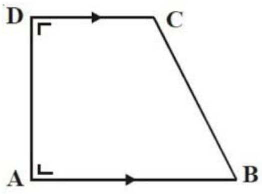
Gambar 18 Trapesium

Sifat-sifat trapesium yaitu sebagai berikut.

- Memiliki sepasang sisi sejajar
- Memiliki dua pasang sudut sama besar (trapesium sama kaki) atau memiliki dua sudut siku-siku (trapesium siku-siku).
- Jumlah besar sudut yang berdekatan di antara dua garis sejajar adalah 180 derajat.

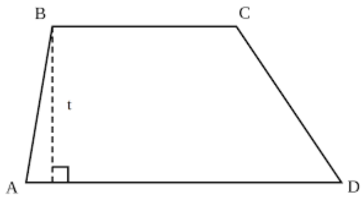
Trapesium dibagi menjadi dua jenis yaitu trapezium siku-siku dan trapezium sembarang.

1. Trapesium siku-siku adalah trapezium yang memiliki dua buah sudut siku-siku , sepasang sisi sejajar dan panjang diagonal pada trapezium tidak sama.



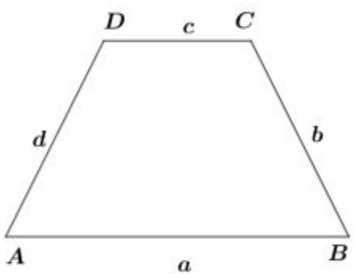
Gambar 19 Trapesium siku-siku

2. Trapesium sembarang adalah trapezium yang memiliki sepasang sisi yang sejajar. Selain itu, trapesium jens ini memlik empat sudut yang tidak sama besar serta dua diagonalnya tidak sama panjang.



Gambar 20 Trapesium sembarang

Secara umum, untuk menghitung keliling bangun datar dapat dilakukan dengan menghitung jumlah panjang setiap sisinya. Perhatikan gambar berikut



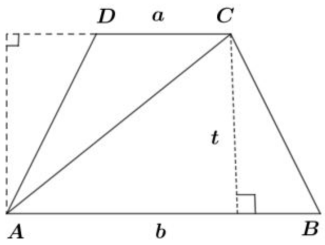
Gambar 21 Trapesium dengan panjang sisi a, b, c dan d

Keliling trapezium dapat dihitung dengan menjumahkan seluruh sisinya:

$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = a + b + c + d$$

Selanjutnya Perhatikan gambar berikut.



Gambar 22 Keliling dan Luas Trapesium

Luas trapezium dihitung dengan

$$Luas\ (L) = Luas\ \ \triangle \text{ ABC} + \text{Luas}\ \ \triangle \text{ ACD}$$

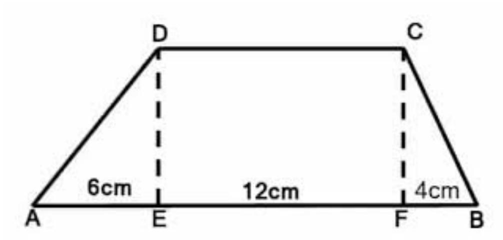
$$Luas\ (L) = \frac{1}{2}b \times t + \frac{1}{2}\text{a} \times \text{t}$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2}t(b + a)$$

$$Luas\ (L) = \frac{(a + b)t}{2}$$

Contoh :

Tentukanlah keliling dan luas trapezium ini jika diketahui tingginya adalah 8 cm.



Gambar 23 Contoh trapesium

Jawab:

Untuk menentukan keliling dan luas trapezium diatas,maka terlebih dahulu kita menentukan panjang sisi AD dan BC dengan menggunakan rumus phytagoras, yaitu:

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = (6cm)^2 + (8cm)^2 = 36cm^2 + 64cm^2$$
$$= 100cm^2$$
$$AD = \sqrt{100cm^2} = 10cm$$
$$BC^2 = BF^2 + BC^2 = (4cm)^2 + (8cm)^2 = 16cm^2 + 64cm^2 = 80cm^2$$
$$AD = \sqrt{80cm^2} = 4\sqrt{5}cm$$
$$AB = AE + EF + FB = 6cm + 12cm + 4cm = 22cm$$

Jadi, Keliling trapezium tersebut adalah

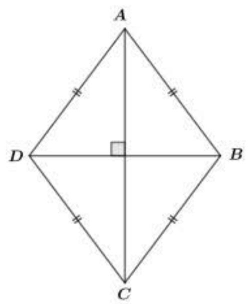
$$Keliling\ (K) = AB + BC + CD + DA$$
$$= 22cm + 4\sqrt{5}cm + 12cm + 10cm$$
$$Keliling\ (K) = 4\left(11 + \sqrt{5}\right)cm$$

Selanjutnya, Luas trapesium adalah

$$Luas\ (L) = \frac{(AB + CD)DE}{2} = \frac{(22cm + 12cm)8cm}{2} = 136\text{cm}^2$$

2.6 Belah Ketupat

Belah ketupat adalah jajargenjang yang memiliki diagonal sama panjang dan tegak lurus satu sama lain.



Gambar 24 Belah Ketupat

Sifat-sifat belah ketupat yaitu sebagai berikut.

- Memiliki empat buah sisi yang sama panjang, yaitu sisi AB, BC, CD, dan DA.
- Memiliki dua pasang sudut yang berhadapan dan sama besar, yaitu sudut ABC dengan sudut ADC dan sudut BAD dengan sudut BCD.

- Memiliki dua buah diagonal yang saling berpotongan tegak lurus, yaitu diagonal AC dan diagonal BD. Satu diagonal membagi dua diagonal yang lain sama panjang. Diagonal AC membagi diagonal BD menjadi dua sama panjang, begitu pula dengan diagonal BD membagi diagonal AC menjadi dua sama panjang.
- Memiliki dua simetri lipat dan simetri putar. Masing-masing sumbu simetri berimpit dengan diagonal AC dan diagonal BD.

Untuk menghitung keliling dan luas belah ketupat, dapat dilakukan dengan menggunakan rumus berikut.

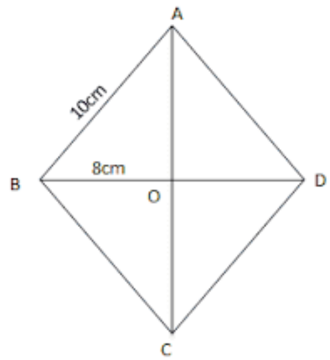
$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = s + s + s + s = 4s$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

Contoh:

Tentukanlah keliling dan luas dari belah ketupat berikut:



Gambar 25 Contoh Belah ketupat

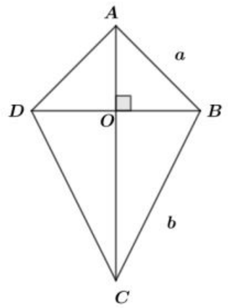
Jawab :

$$Keliling\ (K) = 4s = 4 \times 10cm = 40cm$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{16 \times 16}{2} = 128\ cm^2$$

2.7 Layang-Layang

Bangun datar layang-layang merupakan salah satu bangun dua dimensi dengan empat sisi. Layang-Layang memiliki dua pasang sisi yang sama panjang tetapi tidak sejajar.



Gambar 26 Layang-layang

Sifat-sifat layang-layang yaitu sebagai berikut.

- Memiliki dua pasang sisi yang sama panjang dan tidak sejajar. Sisi AB sama dengan sisi AD dan sisi BC sama dengan sisi CD.
- Memiliki dua sudut yang sama besar. Sudut ABC sama dengan sudut ADC.
- Memiliki dua diagonal yang saling tegak lurus. Diagonal AC tegak lurus dengan diagonal BD.
- Memiliki satu sumbu simetri yaitu garis yang berhimpit dengan garis AC.

Untuk menentukan keliling dan luas layang-layang dapat dilakukan dengan menggunakan rumus berikut:

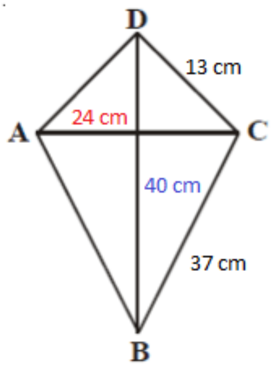
$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b)$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

Contoh:

Tentukanlah keliling dan luas dari layang –layang berikut:



Gambar 27 Contoh Layang-layang

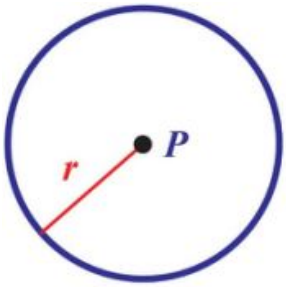
Jawab:

$$Keliling\ (K) = 2(37cm + 13cm) = 2(50cm)$$
$$= 100cm$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{24cm \times 40cm}{2}$$
$$= 480\ cm^2$$

2.8 Lingkaran

Lingkaran adalah bentuk yang terdiri dari semua titik dalam bidang yang berjarak tertentu dari titik tertentu, pusat; ekuivalennya adalah kurva yang dilacak oleh titik yang bergerak dalam bidang sehingga jaraknya dari titik tertentu adalah konstan.

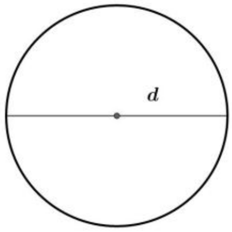


Gambar 28 Lingkaran

Sifat Lingkaran:

- Memiliki satu titik pusat.
- Jarak sembarang titik pada lingkaran terhadap pusat adalah sama.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 29 Lingkaran dengan diameter d

Keliling lingkaran dapat dirumuskan sebagai berikut.

Keliling Lingkaran = π x diameter lingkaran

$$K = \pi \times d$$

Karena ukuran diameter adalah dua kali ukuran jari-jari lingkaran, maka:

$$K = \pi \times (2 \times r) = 2 \times \pi \times r$$

Keterangan:

K : keliling lingkaran

π : phi, konstanta dengan nilai 3,1459… (22/7)

d : diameter lingkaran

r : jari-jari lingkaran

Luas lingkaran = π x jari-jari lingkaran x jari-jari lingkaran

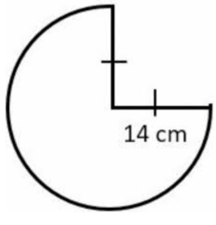
$$\mathrm{L} = \pi \times \mathrm{r} \times \mathrm{r} = \pi\, \mathrm{r}^2$$

Hubungannya dengan diameter dirumuskan sebagai

$$\mathrm{L} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times \mathrm{d}^2$$

Contoh:

Tentukanlah Keliling dan luas lingkaran berikut



Gambar 30 Contoh Lingkaran

Jawab:

$$\text{Keliling } = \frac{3}{4}(2\pi r) = \frac{3}{4}2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 14\text{cm} = 66\text{cm}$$

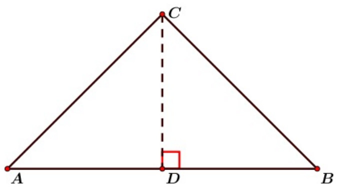
$$L = \pi \times r^2 = \frac{22}{7} \cdot (14\text{cm})^2 = 2156\text{cm}^2$$

4. Rangkuman

1) Persegi atau bujur sangkar adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang sama panjang dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.
2) Persegi panjang adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh dua pasang sisi yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.
3) Sebuah segitiga adalah poligon dengan tiga ujung dan tiga simpul. Ini adalah salah satu bentuk dasar dalam geometri.
4) Jajar genjang atau jajaran genjang (bahasa Inggris: *parallelogram*) adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh dua pasang rusuk yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki dua pasang sudut yang masing-masing sama besar dengan sudut di hadapannya.
5) Trapesium adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang dua di antaranya saling sejajar namun tidak sama panjang.
6) Belah ketupat adalah jajar genjang yang memiliki diagonal sama panjang dan tegak lurus satu sama lain.
7) Bangun datar layang-layang merupakan salah satu bangun dua dimensi dengan empat sisi.
8) Lingkaran adalah bentuk yang terdiri dari semua titik dalam bidang yang berjarak tertentu dari titik tertentu, pusat

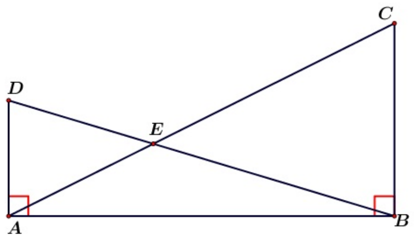
5. Latihan

1) Perhatikan gambar berikut:



jika diketahui AC=7, segitiga ABC siku-siku di C, dan CD merupakan garis tinggi. Berapakah panjang CD?

2) Perhatikan gambar berikut

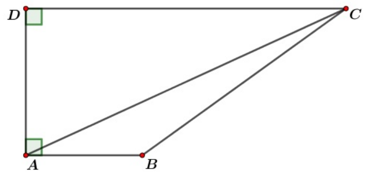


segilima ABCED terbentuk dari dua segitiga siku-siku ABC dan BAD dengan AD=3cm dan BC=5cm. Sisi AC dan BD berpotongan di titik E. Jika luas segitiga $AEB = 12cm^2$, berapakah jarak E dan AB? Apakah pernyataan (1) dan (2) berikut cukup untuk menjawab pertanyaan tersebut.

(1) AC=14 cm

(2) BD=12cm

3) Perhatikan gambar berikut ini

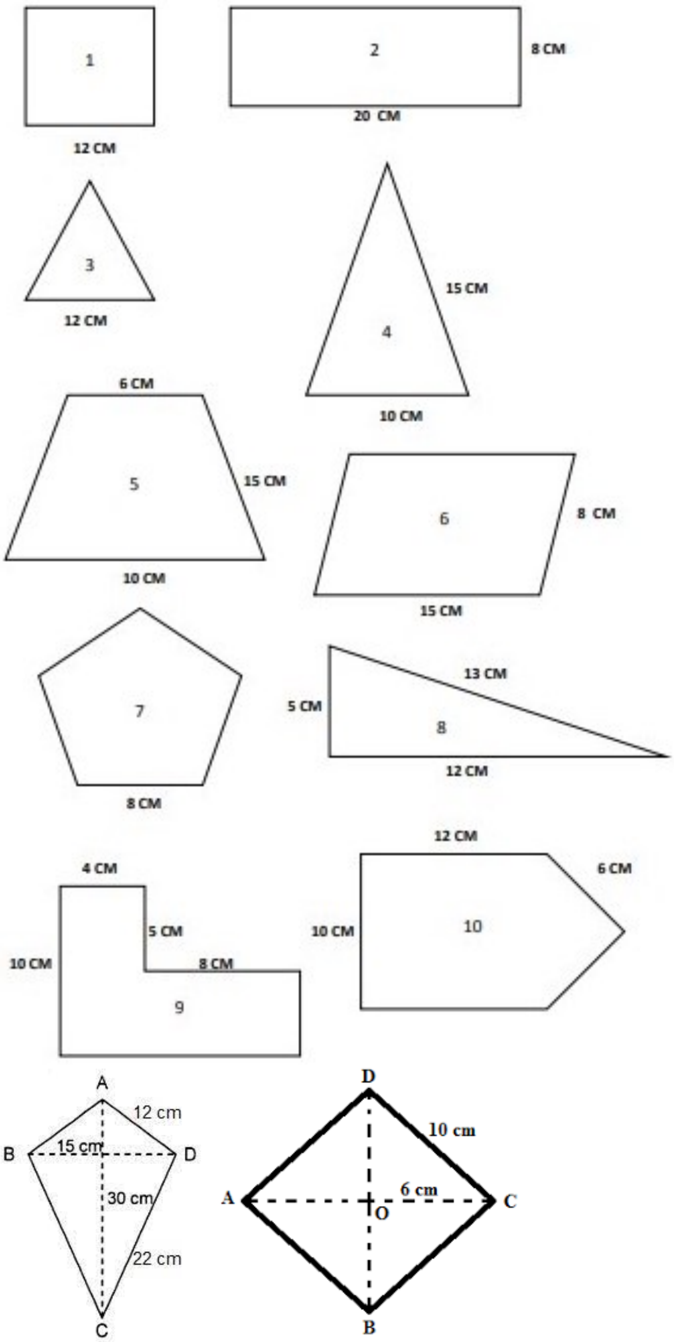


pada trapezium siku-siku ABCD, AC=9, jika luas segitiga ABC=10, berapakah panjang CD? Penyataan yang manakah berikut ini yang tepat untuk menentukan panjang CD tersebut?

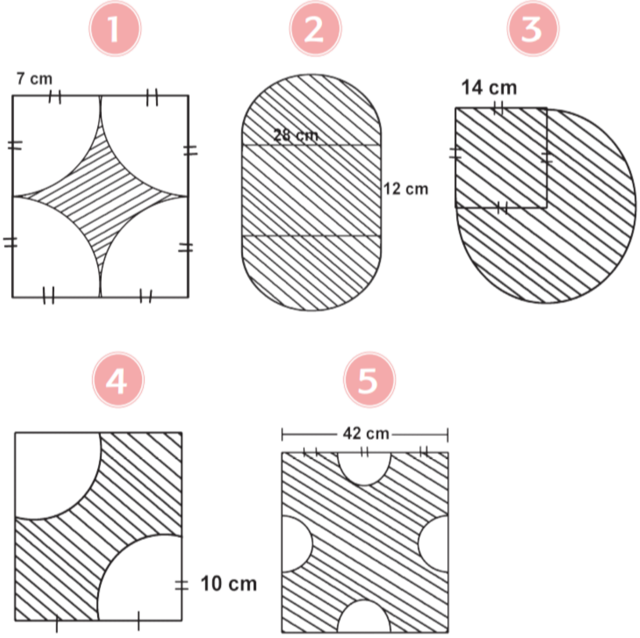
(1) AB=4

(2) BC=7

4) Tentukanlah Keliling dan luas setiap bidang pada gambar dibawah ini:

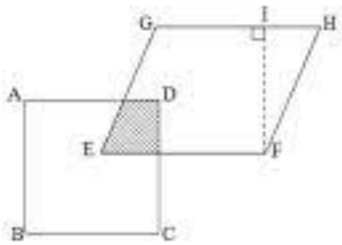


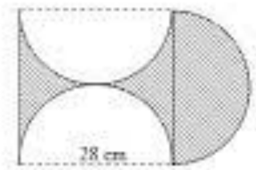
5) Tentukanlah luas daerah yang diarsir pada gambar dibawah ini

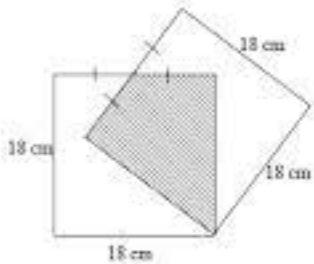


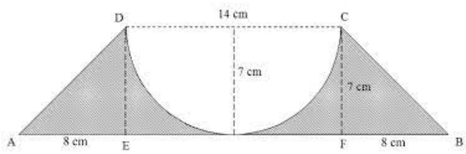
6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah luas daerah yang diarsir berikut

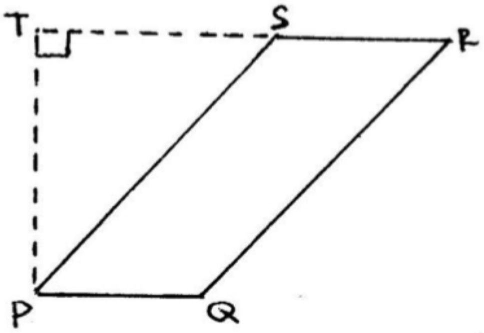








2) Perhatikan gambar dibawah!



PQRS adalah jajar genjang, dengan panjang TR=22cm, PQ=7cm, dan QR=25cm. Berapakah panjang PT?

3) Diketahui keliling belah ketupat 100cm dan panjang salah satu diagonalnya adalah 48 cm. Tentukanlah luas belah ketupat tersebut.
4) Bentuk kebun Pak Yusuf adalah trapesium siku-siku dengan panjang sisi sejajar adalah 20 m dan 25 m dengan panjang sisi siku-sikunya 12 m. Disekeliling kebun akan dibuat pagar dengan biaya Rp25.000 per meter. Berapak biaya yang diperlukan Pak Yusuf untuk pembuatan pagar seluruhnya?
5) Raka membuat kolam renang berbentuk persegi panjang berukuran 10m dan lebar 8m. Disekeliling kolam akan dibuat jalan dengan lebar 1m dan dipasang keramik. Tentukan luas keramik yang dibutuhkan untuk membuat jalan tersebut!

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-4 : Menguasai konsep bangun Ruang: Kubus, Balok, Prisma, kerucut, limas, tabung dan bola

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

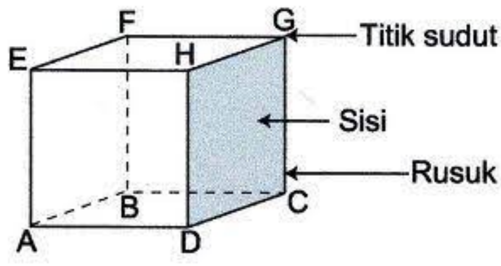
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Bangun Ruang: Kubus, Balok, Prisma, kerucut, limas, tabung dan bola. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Bangun Ruang: Kubus, Balok, Prisma, kerucut, limas, tabung dan bola. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

2.9 Kubus

Kubus merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh enam sisi serupa yang berwujud bujur sangkar. Kubus juga dikenal dengan nama lain yaitu bidang enam beraturan. Kubus sebetulnya adalah bentuk khusus dari prisma segiempat, sebab tingginya sama dengan sisi alas.



Gambar 31 Kubus

1. Sisi kongruen ada sebanyak 6 buah yang terdiri atas:
    a. bidang alas kubus: ABCD
    b. bidang atas kubus: EFGH
    c. sisi tegak kubus: ABEF, CDGH, ADEH, dan BCFG.
2. Rusuk sama panjang ada sebanyak 12 buah (AB = BC = CD = DA = EF = FG = GH = HE = AE = BF = CG = DH).
3. Titik sudut berjumlah 8 titik (A, B, C, D, E, F, G, H).
4. Diagonal bidang yang sama panjang sebanyak 6 buah (AC = BD = EG = FH = AF = BE = CH = DG = AH = DE = BG = CF).
5. Diagonal ruang yang sama panjang sebanyak 4 buah (AG = BH = CE = DF).
6. Bidang diagonal kongruen berjumlah 6 buah (ABGH, EFCD, BCHE, FGDA, BFHG, dan AEGC).

Sifat bangun Kubus:

- Seluruh sisi kubus berbentuk persegi dengan mempunyai luas yang sama.
- Seluruh rusuk kubus memiliki panjang yang sama.
- Masing-masing diagonal bidang pada kubus mempunyai panjang yang sama.
  Perhatikan ruas garis BG dan CF pada gambar di atas. Kedua garis tersebut adalah diagonal bidang kubus ABCD.EFGH yang mempunyai ukuran sama panjang.
- Masing-masing diagonal ruang pada kubus memiliki panjang yang sama.
  Dari kubus ABCD.EFGH pada gambar di atas , ada dua diagonal ruang, yakni HB dan DF di mana keduanya berukuran sama panjang.
- Masing-masing bidang diagonal pada kubus berbentuk persegi panjang.
  Perhatikan bidang diagonal ACGE pada gambar di atas.

$$Volume = s \times s \times s = s^3$$

$$Luas\ Permukaan = 6\ s \times s = 6s^2$$

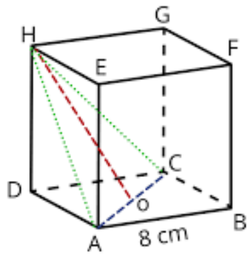
$$Panjang\ diagonal\ bidang = s\sqrt{2}$$

$$Panjang\ diagonal\ ruang = s\sqrt{3}$$

$$Luas\ bidang\ diagonal = s^2\sqrt{2}$$

Contoh :

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 32 Contoh kubus

Tentukanlah :

a. Volume
b. Luas Permukaan
c. Panjang diagonal bidang
d. Panjang diagonal ruang
e. Luas bidang diagonal
f. Luas ΔACH

Jawab :

a. Volume

$$Volume = s^3 = (8cm)^3 = 512cm^3$$

b. Luas Permukaan

$$Luas\ Permukaan = 6s^2 = 6(8cm)^2 = 384cm^2$$

c. Panjang diagonal bidang

$$Panjang\ diagonal\ bidang = s\sqrt{2} = 8\sqrt{2}cm$$

d. Panjang diagonal ruang

$$Panjang\ diagonal\ ruang = s\sqrt{3} = 8\sqrt{3}cm$$

e. Luas bidang diagonal

$$Luas\ bidang\ diagonal = s^2\sqrt{2} = 64\sqrt{2}cm$$

f. Luas ΔACH

$$Luas\ \Delta ACH = \frac{1}{2}AC \times OH$$

Untuk menentukan panjang OH, kita gunakan rumus phytagoras yaitu

$$OH^2 = AH^2 - AO^2 = \left(8\sqrt{2}cm\right)^2 - \left(4\sqrt{2}cm\right)^2$$

$$= 128cm^2 - 32cm^2 = 96cm^2$$

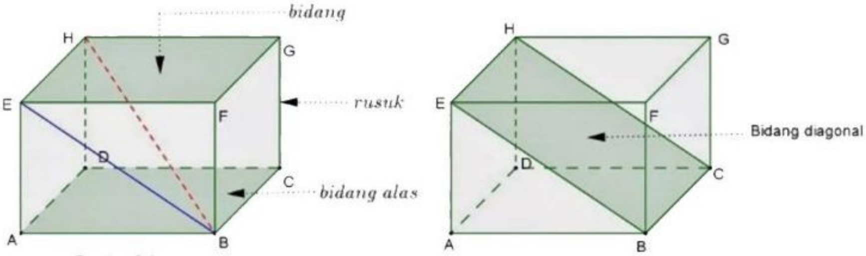
$$OH = \sqrt{96cm^2} = 4\sqrt{6}cm$$

$$Luas\ \Delta ACH = \frac{1}{2}AC \times OH = \frac{1}{2}8\sqrt{2}cm \times 4\sqrt{6}cm = 16\sqrt{12}cm^2$$

$$= 32\sqrt{3}cm^2$$

2.10 Balok

Balok adalah suatu bangun ruang yang mempunyai tiga pasang sisi segi empat. Di mana pada masing-masing sisinya yang berhadapan mempunyai bentuk serta ukuran yang sama. Berbeda halnya dengan kubus di mana seluruh sisinya kongruen berbentuk persegi, dan pada balok hanya sisi yang berhadapan yang sama besar. Serta tidak seluruhnya berbentuk persegi, kebanyakan berbentuk persegi panjang.



Gambar 33 Balok

Pada masing-masing dari bangun ruang sisi datar yang satu ini sama seperti yang ada pada kubus.

Suatu balok terdiri tas sisi, sudut, diagonal bidang, diagonal ruang, serta yang terakhir yaitu bidang diagonal.

Berikut akan kami berikan rincian jumlahnya untuk kalian semua:

1. Sisi berbentuk persegi dan juga persegi panjang sebanyak 6 buah, antara lain yaitu:
    - bidang alas kubus: ABCD
    - bidang atas kubus: EFGH
    - sisi tegak kubus: ABEF, CDGH, ADEH, dan BCFG.
2. Rusuk sebanyak 12 buah yang dapat dibagi menjadi 3 kelompok, antara lain:
    - panjang (p) yakni rusuk terpanjang dari alas balok serta rusuk lainnya yang sejajar: AB, DC, EF dan HG
    - lebar (l) adalah rusuk terpendek dari alas balok dan juga rusuk lainnya yang sejajar: BC, AD, FG, dan EH
    - tinggi (t) adalah rusuk yang tegak lurus terhadap panjang dan lebar balok: AE, BF, CG, dan DH.
3. Titik sudut berjumlah 8 titik (A, B, C, D, E, F, G, H).
4. Diagonal bidang sebanyak 6 buah (AC, BD, EG, FH, AF, BE, CH, DG, AH, DE, BG, dan CF).
5. Diagonal ruang yang berjumlah 4 buah (AG, BH, CE, dan DF).
6. Bidang diagonal yang berbentuk persegi panjang dengan jumlah 6 buah, antara lain: ABGH, EFCD, BCHE, FGDA, BFHG, dan AEGC.

Berikut ini beberapa sifat Balok:

1. Sedikitnya sebuah balok mempunyai dua pasang sisi yang berbentuk persegi panjang.
2. Rusuk-rusuk yang sejajar memiliki ukuran yang sama panjang: AB = CD = EF = GH, dan AE = BF = CG = DH.

3. Pada masing-masing diagonal bidang pada sisi yang berhadapan berukuran sama panjang, yakni:
   ABCD dengan EFGH, ABFE dengan DCGH, dan BCFG dengan ADHE yang mempunyai ukuran sama panjang.
4. Masing-masing diagonal ruang pada balok mempunyai ukuran sama panjang.
5. Masing-masing bidang diagonalnya berbentuk persegi panjang.

Berikut ini beberapa rumus yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam balok:

$$Volume = p.l.t$$

$$Luas\ Permukaan = 2\ (pl\ +\ pt\ +\ lt)$$

$$Panjang\ Diagonal\ Bidang = \sqrt{p2 + l2}$$

atau

$$Panjang\ Diagonal\ Bidang = \sqrt{p^2 + t^2}$$

atau

$$Panjang\ Diagonal\ Bidang = \sqrt{l^2 + t^2}$$

$$Panjang\ Diagonal\ Ruang \coloneqq \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Keterangan:

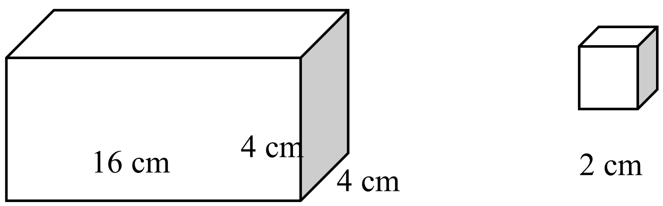
p : panjang

l : lebar

t : tinggi

Contoh :

Perhatikan gambar disamping!



Gambar 34 Contoh Balok

Budi sedang bermain pasir di halaman rumah. Ia mempunyai wadah seperti tampak pada gambar di atas. Wadah apakah yang digunakan Budi tersebut! Berapa kalikah Budi harus menuangkan Pasir dari wadah A supaya wadah B penuh? Jelaskan!

Jawab:

Diketahui :

Gambar A : p = 16 cm

l = 4 cm

t = 4 cm

Gambar B : s = 2 cm

Ditanya :

wadah apa?

Berapa kali Budi harus menuangkan pasir dari wadah B supaya wadah A penuh?

Jawab :

Gambar A : Balok Gambar B : Kubus

Volume balok = p.l.t = 16cm . 4cm . 4cm = 256 cm^3

Volume kubus = $s^3 = (2\ cm)^3 = 8\ cm^3$

Jadi,

Banyaknya pasir yang dituang dari B ke A

$256\ cm^3/8\ cm^3 = 32$ kali

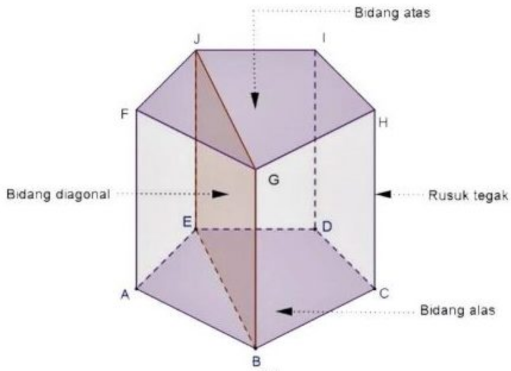
Jadi Budi harus menuangkan pasir sebanyak 32 kali dari wadah B ke wadah A sehingga wadah A penuh.

2.11 Prisma

Prisma merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi di mana alas dan juga tutupnya kongruen serta sejajar berbentuk segi-n. Sisi-sisi tegak dalam prisma memiliki beberapa bentuk, antara lain: persegi, persegi panjang, atau jajar genjang. Dilihat dari tegak rusuknya, prisma terbagi menjadi dua macam, yaitu: prisma tegak dan prisma miring.

Prisma tegak merupakan prima di mana rusuk-rusuknya tegak lurus dengan alas dan juga tutupnya. Sementara untuk prisma miring merupakan prisma di mana rusuk-rusuk tegaknya tidak tegak lurus pada alas dan juga tutupnya.

Apabila kita lihat dari bentuk alasnya, prisma terbagi lagi menjadi beberapa macam, yaitu: prisma segitiga, prisma segi empat, prisma segi lima, dan lain sebagainya. Prisma yang alas dan juga tutupnya berbentuk persegi disebut sebagai balok dan kubus. Sementara untuk prisma yang memiliki alas dan tutupnya berbentuk lingkaran disebut sebagai tabung.



Gambar 35 Prisma

Prisma terdiri atas bidang alas dan juga bidang atas yang sama serta kongruen, sisi tegak, titik sudut, dan tinggi. Tinggi prisma adalah jarak antara bidang alas serta bidang atas.

Sifat Prisma yaitu Memuat hubungan antara jumlah titik sudut (t), sisi (s), dan juga rusuk (r) pada prisma:$s + t = r + 2$. Selanjutnya berikut ini rumus yang biasa digunakan dalam prisma:

$Volume = Luas\ alas\ x\ Tinggi$

$Luas\ permukaan = (2\ x\ Luas\ Alas) + (Keliling\ alas\ x\ tinggi)$

Contoh :

Ani mempunyai sebuah tempat pensil yang unik berbentuk prisma segitiga. Jika luas alas dan volume tempat pensil tersebut berturut-turut adalah 25 cm^2 dan 275 cm^3, tentukanlah tinggi tempat pensil jika panjang alasnya 5 cm.

Jawab:

Diketahui :

Luas alas = 25 cm^2

Volume = 275 cm^2

Ditanya :

tinggi prisma = ... ?

gambar = ... ?

Jawab :

V = Luas alas . tinggi

275 cm^2 = 25 cm^2 . t

t =275 cm^2 /25 cm^2

Jadi t = 11 cm

Luas alas Δ = ½ alas .tinggi

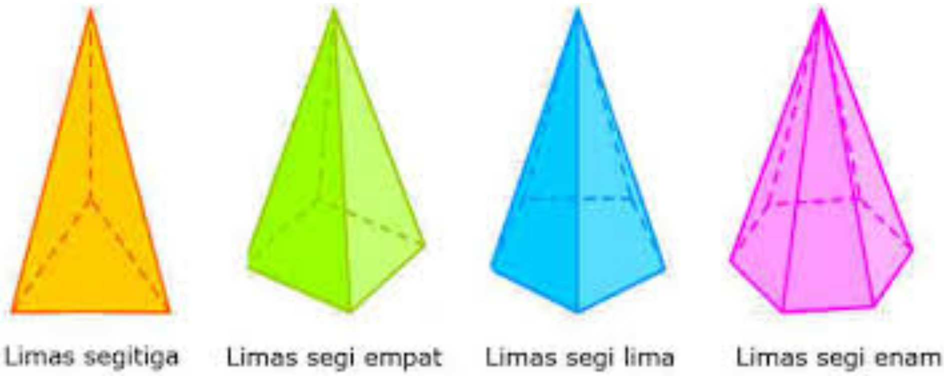
25 cm^2 = ½ 5 cm . t Δ

t Δ = 50 cm^2/5 cm

t Δ = 10 cm

2.12 Limas

Limas merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh alas berbentuk segi-n (dapat berupa segi tiga, segi empat, segi lima, dll) serta bidang sisi tegak berbentuk segitiga yang berpotongan di satu titik puncak. Terdapat banyak jenis limas yang dikategorikan dengan dilandasi bentuk alasnya. Antara lain: limas segitiga, limas segi empat, limas segi lima, dan yang lainnya. Limas dengan mempunyai alas berbentuk lingkaran disebut sebagai kerucut. Sementara untuk limas dengan alas yang berupa persegi disebut sebagai piramida.



Gambar 36 Limas

Bangun ruang limas terdiri atas bidang alas, sisi tegak, rusuk, titik puncak, dan juga tinggi.

1. Jumlah sisi tegaknya sama dengan jumlah sisi alas. Apabila alasnya segitiga maka jumlah sisi tegaknya juga ada sebanyak 3 sisi, apabila alasnya berbentuk segi lima maka jumlah sisi tegaknya terdapat 5 sisi.
2. Jumlah rusuknya adalah kelipatan dua dari bentuk alas. Apabila alasnya segitiga maka jumlah rusuknya sebanyak 6 rusuk, apabila alasnya berupa segiempat maka jumlah rusuknya sebanyak 8 rusuk.
3. Tinggi limas adalah jarak terpendek dari titik puncak limas ke bidang alas. Tinggi limas selalu tegak lurus dengan titik potong sumbu simetri pada bidang alas.

Berikut ini rumus Volume dan luas permukaan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan pada limas:

$$Volume\ Limas\ = \frac{1}{3} Luas\ Alas \times Tinggi$$

$$Luas\ Permukaan$$
$$= Jumlah\ Luas\ Alas\ +\ Jumlah\ Luas\ sisi\ tegak$$

Contoh:

Sebuah wadah berbentuk limas dengan luas alasnya 49 cm^2 dan tingginya 12 cm. Seorang anak bermain dan mengisi wadah tersebut dengan air, volume air yang dimasukkan oleh anak sebesar 200 cm^3. Apakah air yang dituangkan anak tersebut tumpah, tepat penuh atau tidak penuh? Jelaskan!

Jawab:

Diketahui :

Sisi = 6 cm

Akan dibentuk 6 buah limas

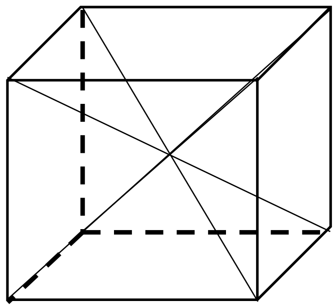
Ditanya :

Bukti : 1 kubus dibuat 6 limas = ...?

Volume 1 buah limas yang terbentuk = ...?

Jawab :

Jika dalam sebuah kubus dibentuk 6 limas maka tampak seperti gambar.



Gambar 37 Limas di dalam kubus

Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat diagonal ruang yang ada pada kubus membentuk 6buah limas yang sama besar dimana titik potong setiap diagonal ruang tersebut menjadi titik puncak dari limas yang dibentuk. Tinggi limas yang dibentuk setengah dari tinggi kubus.

Terbukti bahwa 1 buah kubus dapat dibentuk 6 buah imas yang sama besar.

Berdasarkan perhitungan dengan menggunakan volume kubus dapat dibuktikan

Volume kubus =s^3 = $(6 \text{ cm})^3$ = 216 cm^3

Akan dibuktikan bahwa volume 1 limas yang dibentuk dari kubus yaitu 1/6 Volume Kubus = 1/ 6 . 216 cm^3 = 36 cm^3

Jadi terbukti bahwa volume 6 buah limas sama dengan volume 1 buah kubus.

Volume 1buah limas = 1/3 . Luas alas . tinggi

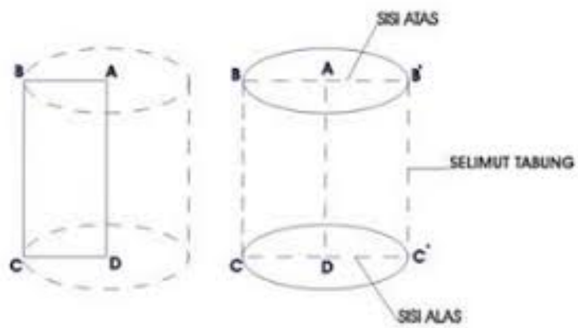
= 1/3. 6cm x 6cm . ½ 6cm

= 1/3 . 36 cm^2 . 3 cm

= 36 cm^3

2.13 Tabung

Bangun tabung merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang mempunyai tutup dan alas yang berbentuk sebuah lingkaran dengan memiliki ukuran yang sama dan diselimuti oleh persegi panjang.



Gambar 38 Tabung

Berikut ini unsur-unsur pada tabung:

a. *Sisi*. Tabung memiliki 3 sisi yang berbeda, antara lain yaitu sisi atas, sisi bawah dan sisi lengkung (yang kemudian disebut selimut tabung). Sisi lengkung tabung merupakan sisi yang dibatasi oleh dua bidang sejajar yakni alas serta atas (tutup) yang berbentuk lingkaran yang kongruen (sama bentuk dan ukurannya). Dan memiliki pusat di A dan D.

b. *Tinggi Tabung***.** Tinggi tabung merupakan jarak antara bidang alas dan juga bidang tutup pada tabung yang biasa dinotasikan dengan menggunakan huruf t. Berdasarkan dari gambar di atas tinggi tabung tersebut yaitu AD.
c. *Jari-jari Tabung.* Jari-jari lingkaran biasa dinotasikan dengan huruf (r), sisi alas tabung merupakan CD serta sisi tutup tabung merupakan AB.
d. *Diameter tabung***.** Diameter tabung biasa dinotasikan dengan menggunakan huruf (d). Diameter alas tabung yaitu CC' serta diameter tutup tabung yaitu BB'.

Beberapa sifat tabung yaitu:

1. Tabung memiliki 3 buah sisi, 1 persegi panjang, 2 lingkaran.
2. Tidak memiliki rusuk.
3. Tidak memiliki titik sudut.
4. Tidak memiliki bidang diagonal.
5. Tidak memiliki diagonal bidang.
6. tabung memiliki sisi alas serta sisi atas berhadapan yang kongruen.
7. Tinggi tabung merupakan jarak titik pusat bidang lingkaran alas dengan titik pusat lingkaran atas.
8. Bidang tegak tabung berwujud lengkungan yang disebut sebagai selimut tabung.
9. Jaring-jaring tabung berwujud 2 buah lingkaran serta 1 persegi panjang.

Berikut ini rumus yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan pada tabung:

1. Rumus untuk menghitung luas alas:

$$luas\ lingkaran = \pi \times r^2$$

2. Rumus untuk menghitung volume pada tabung:

$$Volume = \pi \times r^2 \times t$$

3. Rumus untuk menghitung keliling alas pada tabung:

$$Keliling = 2\times\pi\times r$$

4. Rumus untuk menghitung luas pada selimut tabung:

$$Luas\ Selimut = 2\times\pi\times r\times t$$

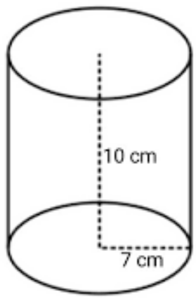
5. Rumus untuk menghitung luas pada permukaan tabung:

$$Luas\ Pemukaan\ tabung = 2\times luas\ alas + luas\ selimut\ tabung$$

$$Luas\ Permukaan\ tabung = 2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r(r+t)$$

Contoh :

Tentukanlah keliling, luas dan volume tabung berikut:



Gambar 39 Contoh Tabung

Jawab:

$$Keliling = 2\times\pi\times r = 2\times\frac{22}{7}\times 7cm = 44cm$$

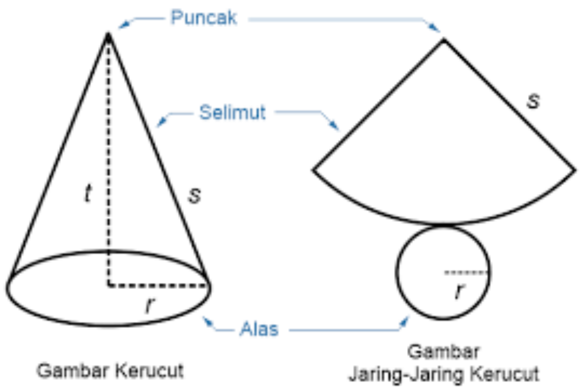
$$Volume = \pi\times r^2\times t = \frac{22}{7}\times(7cm)^2\times 10cm = 1540cm^3$$

$$Luas\ Permukaan\ tabung = 2\pi r(r+t)$$

$$= 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7cm(7cm+10cm) = 748cm^2$$

2.14 Kerucut

Kerucut merupakan salah satu bangun ruang yang memiliki sebuah alas yang berbentuk lingkaran dengan selimut yang mempunyai irisan dari lingkaran. Di dalam geometri, kerucut merupakan sebuah limas istimewa yang memiliki alas lingkaran. Kerucut mempunyai 2 sisi dan 1 rusuk. Sisi tegak kerucut tidak berwujud segitiga namun berwujud bidang miring yang disebut sebagai selimut kerucut. Yang membedakan antara limas dengan kerucut yaitu alas kerucut memiliki bentuk lingkaran, sementara pada limas berbentuk segi n beraturan. Kerucut bisa dibentuk dari sebuah segitiga siku-siku yang kalian putar 360^{o}, dengan sumbu putar pada sisi siku-sikunya.



Gambar 40 Kerucut

Terdapat beberapa sifat pada bangun ruang kerucut, antara lain ialah sebagai berikut:

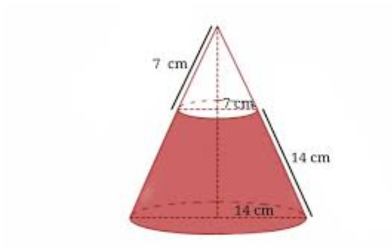
- Kerucut memiliki 2 sisi.
- Kerucut tidak memiliki rusuk.
- Kerucut memiliki 1 titik sudut.
- Jaring-jaring kerucut terdiri atas lingkaran serta segitiga.
- Tidak memiliki bidang diagonal
- Tidak memiliki diagonal bidang

Berikut ini rumus untuk menentukan volume dan luas pada kerucut:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \pi \times r \times r \times t = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

$$\text{Luas Permukaan} = \text{luas alas} + \text{luas selimut} = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r + s)$$

Contoh:
Tentukanlah volume yang diwarnai berikut:



Gambar 41 Contoh Kerucut

Jawab:

Volume yang diarsir

$$= \text{Volume kerucut besar} - \text{Volume kerucut kecil}$$

Sebelumnya kita perlu menentukan tinggi kerucut, yaitu tinggi kerucut kecil dan tingi kerucut besar dengan menggunakan phytagoras.

Tinggi kerucut kecil (t)

$$\mathrm{t} = \sqrt{(7\mathrm{cm})^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{147}{4}}\mathrm{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{147}\mathrm{cm}$$

Tinggi kerucut besar (T)

$$\mathrm{T} = \sqrt{(21\mathrm{cm})^2 - (7\mathrm{cm})^2} = \sqrt{392}\mathrm{cm} = 14\sqrt{2}\mathrm{cm}$$

$$\text{Volume kerucut kecil} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{r}^2\mathrm{t} = \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7\mathrm{cm})^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{147}\mathrm{cm}$$

$$= \frac{77}{3}\sqrt{147}\mathrm{cm}^3$$

$$\text{Volume kerucut besar} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{r}^2\mathrm{T} = \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7\mathrm{cm})^2\cdot 14\sqrt{2}\mathrm{cm}$$

$$= \frac{1078}{3}\sqrt{2}\mathrm{cm}^3$$

Jadi volume yang diwarnai adalah

Volume yang diarsir

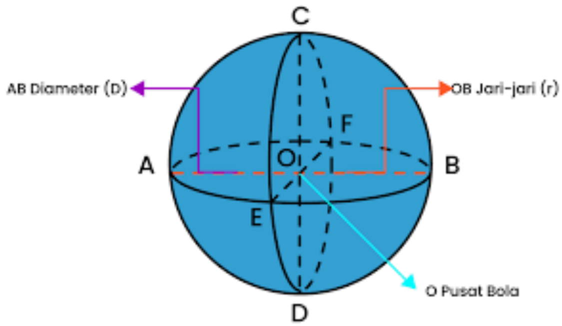
$$= \text{Volume kerucut besar} - \text{Volume kerucut kecil}$$

$$\text{Volume yang diarsir} = \frac{1078}{3}\sqrt{2}\mathrm{cm}^3 - \frac{77}{3}\sqrt{147}\mathrm{cm}^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(1078\sqrt{2} - 77\sqrt{147}\right)\mathrm{cm}^3$$

2.15 Bola

Bola merupakan salah satu bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh satu bidang lengkung. Atau juga bisa didefinisikan sebagai sebuah bangun ruang berbentuk setengah lingkaran yang diputar mengelilingi garis tengahnya.



Gambar 42 Bola

Berikut ini beberapa sifat Bola:

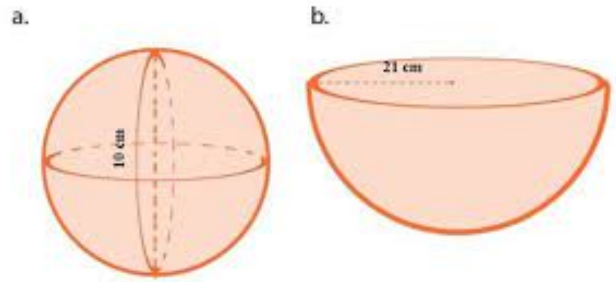
- Bola memiliki 1 sisi serta 1 titik pusat.
- Bola tidak memiliki rusuk.
- Bola tidak memiliki titik sudut
- Tidak memiliki bidang diagonal
- Tidak memiliki diagonal bidang
- Sisi bola disebut sebagai dinding bola.
- Jarak dinding ke titik pusat bola disebut sebagai jari-jari.
- Jarak dinding ke dinding serta melewati titik pusat disebut sebagai diameter.

Berikut ini rumus untuk menentukan volume dan luas permukaan bola:

$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

$$\text{Luas Permukaan} = 4 \times \pi \times r^2$$

Contoh :
Tentukanlah Luas dan Volume bola berikut:



Gambar 43 Contoh Bola

Jawab:

a. Luas satu buah bola

$$\text{Luas Permukaan} = 4\times\pi\times r^2 = 4\times3{,}14\times(5\text{cm})^2 = 314\text{cm}^2$$

Volume satu buah bola

$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\times\pi\times r^3 = \frac{4}{3}\times3{,}14\times(5\text{cm})^3 = 523{,}33\text{cm}^3$$

b. Luas setengah bola

$$\text{Luas Permukaan} = \frac{1}{2}(4\times\pi\times r^2) = 2\times\frac{22}{7}\times(21\text{cm})^2$$
$$= 2.772\text{cm}^2$$

Volume setengah bola

$$\text{Volume} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\times\pi\times r^3\right) = \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times(21\text{cm})^3 = 19.404\text{cm}^3$$

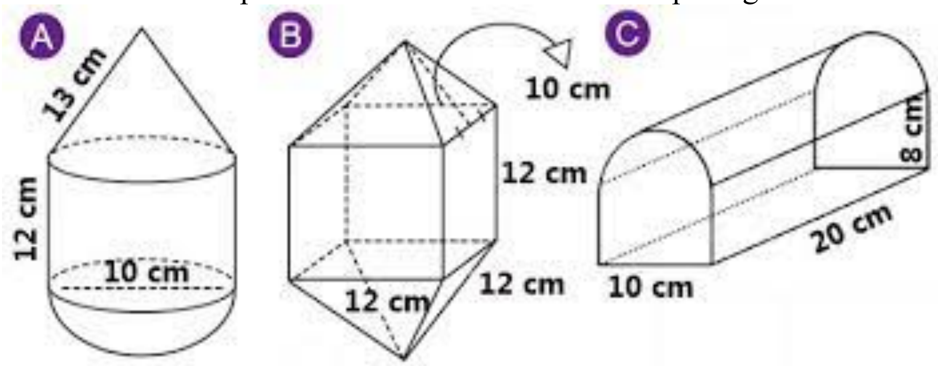
4. Rangkuman

1) Kubus merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh enam sisi serupa yang berwujud bujur sangkar.
2) Balok adalah suatu bangun ruang yang mempunyai tiga pasang sisi segi empat. Di mana pada masing-masing sisinya yang berhadapan mempunyai bentuk serta ukuran yang sama.
3) Prisma merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi di mana alas dan juga tutupnya kongruen serta sejajar berbentuk segi-n.
4) Limas merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh alas berbentuk segi-n (dapat berupa segi tiga, segi empat, segi lima, dll) serta bidang sisi tegak berbentuk segitiga yang berpotongan di satu titik puncak.

5) Bangun tabung merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang mempunyai tutup dan alas yang berbentuk sebuah lingkaran dengan memiliki ukuran yang sama dan diselimuti oleh persegi panjang.
6) Kerucut merupakan salah satu bangun ruang yang memiliki sebuah alas yang berbentuk lingkaran dengan selimut yang mempunyai irisan dari lingkaran.
7) Bola merupakan salah satu bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh satu bidang lengkung.

5. Latihan

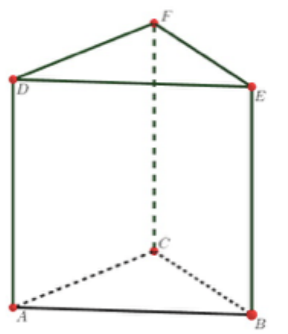
1) Tentukanlah Luas permukaan dan Volume dari setiap bangun berikut:



2) Kubus ABCD EFGH mempunyai panjang rusuk a. Titik K pada perpanjangan DA sehingga $KA = \frac{1}{3}KD$. Jarak titik K ke bidangn BDHF adalah

3) Diketahui limat beraturan T.ABCD. Panjang rusuk tegak dan panjang rusuk alas 4cm. Jarak titik A ke garis TB adalah

4) Perhatikan gambar berikut

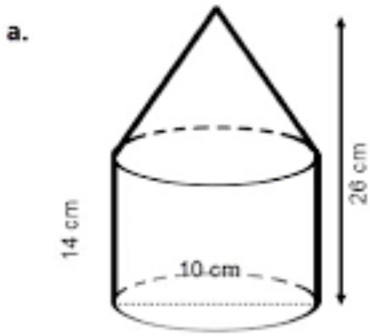


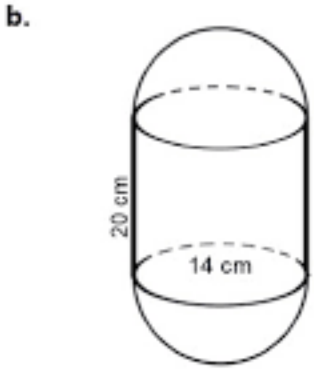
Jika AB=BE=1, maka volume limas E.ACF adalah

5) Tentukanlah satu Volume bola maksimum yang memungkin dimaukkan kedalam sebuah kubus dengan panjang rusuknya 10cm.

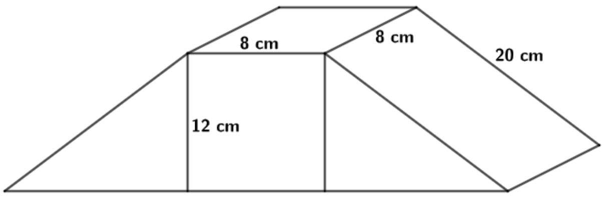
6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah luas permukaan dan volume setiap bangun dibawah ini:





c.



2) Diketahui kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 4cm. Titik P adalah titik potong AH dan ED dan titik Q adalah titik potong FH dan EG. Jarak titik B ke garis PQ adalah

3) Diketahui limas segiempat beraturan T.ABCD dengan $AB = BC = 5\sqrt{2}cm$ dan TA=13am. Jarak titik A ke garis TC adalah

4) Prisma tegak segitiga sama sisi ABC.DEF dengan panjang AB=s dan AD=t. Jika G terletak di tegah-tengah sisi EF, maka panjang AG adalah

5) Diketahui jari-jari bola adalah 5cm dan jari-jari alas tabung adalah 1m dan tinggi tabung 5m. Jika bola dimasukkan kedalam sebuah tabung tersebut, berapa banyakkah maksimum bola yang dapat dimasukkan kedalam tabung tertutup tersebut?

7. **Umpan Balik**

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul dua ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi bidang datar dan bangun ruang secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Himpunan	Identitas	Nullitas	Komplemen	
Idempoten	Involusi	Penyerapan	Komutatif	Distributif
Asosiatif	De Morgan	Setangkup	Inklusi	Eksklusi

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson
https://rumuspintar.com/bangun-datar/. Diunduh pada februari 2022.
https://www.yuksinau.id/bangun-ruang-sisi-datar/. Diunduh pada Februari 2022.

Modul 3

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

Equality of opportunity is an equal opportunity to prove unequal talents

-David Samuel

Pendidikan Kimia

FKIP UKI

MODUL 3 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Persamaan linear adalah suatu persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan satu variable tunggal. Persamaan digambarkan linear sebab hubungan matematisnya dapat direpresentasikan sebagai garis lurus dalam system koordinat kartesius. Dasar dari suatu persamaan adalah sebuah pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan ruas kiri yang dipisahkan oleh tanda “=” . Hal yang tidak diketahui disebut sebagai variabel. Dan sebuah penyelesaian dari suatu persamaan berupa nilai yang jika disubstitusikan pada variabel menghasilkan sebuah pernyataan yang benar.

   Selanjutnya dalam matematika ada istilah lebih dari, kurang dari, lebih kecil, lebih tinggi, lebih rendah dan tidak sama yang sudah menjadi Bahasa sehari-hari dalam masyarakat. Dalam modul ini akan dipelajari terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan dari satu variabel, dua variael dan tiga variabel.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Tiga

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
   - Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atautemuan orisinil orang lain.

- Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Diharapkan mahasiswa dapat menentukan penyelesaian dari persamaan linear satu variabel dan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep pada system bilangan riil dan Himpunan.

5. Kegunaan Modul Tiga

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada dengan berbagai latihan, contoh dan ilustrasi.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi didalam modul ini mencakup : Persamaan linear satu variabel, dua Variabel dan tiga variabel beserta penyelesaiannya.

Metode-metode penyelesaian dalam menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dan pertidaksamaan linear.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 5 : Mengusai Persamaan dan pertidaksamaan Linear Satu Variabel dan Dua variabel

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

3.1 Pendahuluan

Sebuah pernyataan dalam kehidupan sehari-hari dapat dinyatakan dalam pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan kiri yang dipisahkan tanda sama dengan disebut sebagai persamaan. Hal yang tidak diketahui dalam sebuah persamaan disebut variable. Contohnya Susi membeli 2 buah pensil seharga Rp. 20.000 maka dapat dinotasikan p sebagai pensil sehingga diperoleh persamaan $2p = Rp. 20000$. Dalam penyelesaian persamaan berupa nilai yang jika disubstitusikan pada variable menghasilkan sebuah pernyataan yang benar. Seperti contoh diatas jika ditanyakan harga satu pensil maka di dapat seharga $Rp. 10.000$.

Selanjutnya dalam matematika ada istilah lebih dari, kurang dari, lebih kecil, lebih tinggi, lebih rendah dan tidak sama yang sudah menjadi Bahasa sehari-hari dalam masyarakat. Istilah-istilah ini biasanya digunakan untuk menentukan nilai minimum atau nilai maksimum dari suatu persamasalahan atau pernyataan yang dapat dimodelkan secara matematis.

Persamaan linear adalah suatu persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan satu variable tunggal. Persamaan digambarkan linear sebab hubungan matematisnya dapat direpresentasikan sebagai garis lurus dalam system koordinat kartesius. Bentuk umum persamaan linear adalah $y = mx + c$.

3.2 Persamaan Linear Satu Variabel

Definisi :

Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Dinotasikan dengan $x = c$.

x : variabel berpangkat satu

c : nilai konstanta

Contoh :

$x = 6$

$3x + 5 = 20$

$x - 4 = 2x + 10$

sebuah penyelesaian dari suatu persamaan adalah sebarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan tersebut disubstitusikan pada variabel yang ada.

Contoh :

$3x - 7 = 29$

persamaan ini mempunyai penyelesaian bilangan 12, karena jika disubstitusikan bilangan 12 ke persamaan diperoleh $3(12) - 7 = 29$ adalah benar. Sedangkan bilangan 3 bukanlah sebuah penyelesaiannya karena $3(15) - 7 \neq 29$.

Berikut ini prinsip penjumlahan dan perkalian dalam menyelesaikan berbagai macam persamaan

1. Prinsip penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a + c = b + c$

   $a - c = b - c$

2. Prinsip perkalian

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a . c = b . c$

   $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, benar untuk $c \neq 0$.

Contoh :

1) Tentukanlah penyelesaian dari $4x - 2 = 50$.

   Jawab :

   $4x - 2 = 50$

   $4x - 2 + 2 = 50 + 2$ menggunakan prinsip penjumlahan

   $4x = 52$

   $\frac{1}{4}(4x) = \frac{1}{4}52$ menggunakan prinsip perkalian

   $x = 13$

2) Tentukanlah penyelesaian dari $3(x - 2) - 2 = 5 - 5(x + 5)$

   Jawab :

   $3(x - 2) - 2 = 3 - 5(x + 5)$

   $3x - 6 - 2 = 3 - 5x - 25$

   $3x - 8 = -5x - 22$

$3x - 8 + 8 = -5x - 22 + 8$ kedua ruas ditambah 8

$3x = -5x - 24$

$3x + 5x = -5x + 5x - 24$ kedua ruas ditambah $5x$

$8x = -24$

$\frac{1}{8}(8x) = \frac{1}{8}(-24)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{8}$

$x = -3$

3.3 Persamaan Ekuivalen

Definisi :

Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut sebagai persamaan ekuivalen.

Contoh :

1. $2x = 16$
2. $3x + 5 = 29$
3. $x - 5 = 2x - 13$

ketiga persamaan diatas merupakan persamaan yang ekuivalen karena mempunyai himpunan penyelesaian yang sama yaitu, $x = 8$.

3.4 Persamaan Linear Bentuk Pecahan satu Variabel

Persamaan yang memuat pecahan disebut sebagai persamaan linear bentuk pecahan. Untuk menyelesaikan persamaan pecahan ini digunakan perkalian dengan variabel.

Contoh :

Tentukanlah penyelesaian dari $\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$

Jawab :

$$\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$$

$35\left(\frac{x-3}{5}+\frac{2x}{7}\right)=35\left(\frac{3}{5}\right)$ kedua ruas dikali 35

$35\left(\frac{x-3}{5}\right)+35\left(\frac{2x}{7}\right)=21$ sifat distributif

$7x-21+10x=21$

$17x-21=21$

$17x-21+21=21+21$ kedua ruas di tambah 21

$17x=42$

$\frac{1}{17}(17x)=\frac{1}{17}(42)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{17}$

$x=\frac{42}{17}$

3.5 Pertidaksamaan Linear satu Variabel

Definisi :

Pertidaksamaan linear satu variabel adalah suatu pertidaksamaan yang hanya mempunyai satu variabel dengan pangkat tertinggi varibelnya satu.

Contoh :

$x<10$

$3x+4>7$

$2x-3(2x+1)<10$

Berikut ini prinsip penjumlahan dan perkalian pada pertidaksamaan linear:

1. Prinsip Penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a<b$ atau $a>b$ maka berlaku

   $a+c<b+c$ atau $a+c>b+c$

   $a-c<b-c$ atau $a-c>b-c$

2. Prinsip Perkalian

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real positif. Jika $a<b$ atau $a>b$ maka berlaku

$a.c < b.c$ atau $a.c > b.c$

Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real negatif.

Jika $a < b$ maka $a.c \geq b.c$

atau

Jika $a > b$ maka $a.c \leq b.c$

Contoh :

Tentukanlah penyelesaian dari

1) $3x - 5 < 8$
2) $4x - 7 > 3(x - 2) + 12$
3) $3x - 4 < 5x + 6$

Jawab :

1) $3x - 5 < 8$

$3x - 5 + 5 < 8 + 5$ kedua ruas ditambah 5

$3x < 13$

$\frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(13)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{3}$

$x < \dfrac{13}{3}$

2) $4x - 7 > 3(x - 2) + 12$

$4x - 7 > 3x - 6 + 12$ sifat distributif

$4x - 7 > 3x + 6$

$4x - 7 + 7 > 3x + 6 + 7$ kedua ruas ditambah 5

$4x > 3x + 13$

$4x - 3x > 3x - 3x + 13$ kedua ruas ditambah $(-3x)$

$x > 13$

3) $3x - 4 < 5(x + 1) + 6$

$3x - 4 < 5x + 5 + 6$ sifat distibutif

$3x - 4 < 5x + 11$

$3x - 4 + 4 < 5x + 11 + 4$ kedua ruas ditambah 4

$3x < 5x + 15$

$3x - 5x < 5x - 5x + 15$ kedua ruas dikurang $-5x$

$-2x < 15$

$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right)(15)$ kedua ruas dikali $-\frac{1}{2}$

$x \geq -\dfrac{15}{2}$

3.6 Pertidaksamaan Linear Bentuk Pecahan Satu Variabel

Pertidaksamaan linear pecahan satu variabel merupakan pertidaksamaan yang memuat pecahan. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan pecahan ini digunakan perkalian variabel.

Contoh :

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari

1) $\frac{2x}{3} > 5 - \frac{x}{2}$
2) $\frac{x}{5} < \frac{2x}{3} - 4$

Jawab :

1) $\frac{2x}{3} > 5 - \frac{x}{2}$

   $\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} > 5 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ kedua ruas ditambah $\frac{x}{2}$

   $6\left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\right) > 6(5)$ kedua ruas dikali 6

   $4x + 3x > 30$

   $7x > 30$

   $\frac{1}{7}(7x) > \frac{1}{7}(30)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{7}$

   $x > \dfrac{30}{7}$

2) $\frac{x}{5} < \frac{2x}{3} - 4$

   $\frac{x}{5} - \frac{2x}{3} < \frac{2x}{3} - \frac{2x}{3} - 4$ kedua ruas ditambah $\frac{2x}{3}$

   $15\left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{2x}{3}\right) < 15(-4)$

$3x - 10x < -60$

$-7x < -60$

$-\frac{1}{7}(-7x) < -\frac{1}{7}(-60)$ kedua ruas dikali $-\frac{1}{7}$

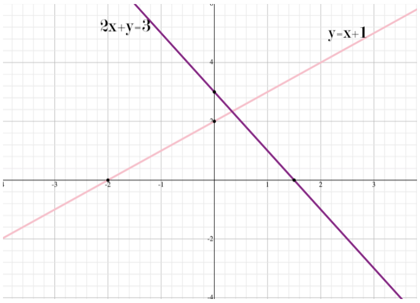
$x \geq \dfrac{60}{7}$

3.7 Persamaan linear dua variabel

Persamaan linear dua variabel merupakan persamaan garis dimana mengandung dua buah variabel yang berbeda yang biasa disebut sebagai variabel independen dan variavel dependen. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $y = mx + c$. Dalam hal ini m adalah gradien garis dan c merupakan titik potong garis dengan sumbu y. Persamaan lain seperti x^3, $\sqrt{y}$ dan xy bukanlah merupakan persamaan linear.

Persamaan linear dua variabel tidaklah harus berupa variabel x dan y, namun bisa juga variabel lainnya seperti s dan t, m dan n atau yang lainnya. Sebagai contoh, $y = 2x - 1$ dapat diubah menjadi $2x - y - 1 = 0$, 2 disebut sebagai koefisien x, -1 disebut sebagai koefisien y, dan -1 disebut sebagai konstanta. Selanjutnya persamaan $2s + 5t = 3$, 2 disebut sebagai koefisien s, 5 disebut sebagai koefisien t dan 3 disebut sebagai konstanta.

Persamaan linear dua variabel dapat digambarkan dalam grafik pada koordinat kartesius. Misalnya persamaan $y = x + 1$, maka dapat didekripsikan seperti gambar dibawah ini.



Gambar 44 Grafik Persamaan dua variabel

Sistem persamaan linear dua variabel, pada umumnya dibentuk oleh dua persamaan linear dua variabel yang memiliki variabel yang sama. Contoh, $2x + y = 5$ dan $x + y = 3$. Akar atau himpunan penyelesaian dari system persamaan linear dua variabel adalah pasangan terurut (x, y) yang memenuhi kedua persamaan yang membentuk system tersebut. Penyelesaian persamaan linear dua variable ini dapat diselesaikan dengan cara eliminasi, substitusi dan eliminasi-substitusi.

Contoh :

1. Tentukanlah penyelesaian dari persamaan berikut

   $x + y = 8$ dan $2x + 3y = 19$

   Jawab :

   Dengan menggunakan metode substitusi

   $x + y = 8$

   $x = 8 - y$ (1)

   $2x + 3y = 19$ (2)

   Substitusi (1) ke (2)

   $2(8 - y) + 3y = 19$

   $16 - 2y + 3y = 19$

   $16 + y = 19$

   $y = 19 - 16$

   $y = 3$ (3)

   Substitusi (3) ke (1) maka diperoleh

$x = 8 - y = 8 - 3 = 5$

Sehingga disimpulkan penyelesaian dari kedua persamaan diatas adalah (5,3).

2. Tentukanlah penyelesaian dari persamaan berikut

   $4x - 2y = 14$ dan $x + 3y = 1$

   Jawab :

   Dengan menggunakan metode eliminasi

   $4x - 2y = 14$ (1)

   $x + 3y = 1$ (2)

   Elimiasi persamaan (1) dan (2) dengan cara seperti berikut ini

   $4x - 2y = 14$

   $x + 3y = 1$ dikali 4

   maka persamaan (2) berikut berubah menjadi

   $4x + 12y = 4$ (3)

   Selanjutnya dilakukan eliminasi persamaan (1) dan (3)

   $4x - 2y = 14$

   $\underline{4x + 12y = 4\ -}$

   $-14y = 10$

   $y = \frac{10}{14}$

   $y = \frac{5}{7}$

   Selanjutnya untuk memperoleh penyelesaian variable x maka dilakukan eliminasi kedua

   $4x - 2y = 14$ dikali 3

   $x + 3y = 1$ dikali 2

   menjadi

   $12x - 6y = 42$ (4)

   $2x + 6y = 2$ (5)

Eliminasi persamaan (4) dan (5)

$12x - 6y = 42$

$\underline{\ 2x + 6y = 2 +}$

$14x = 44$

$x = \frac{44}{14}$

$x = \frac{22}{7}$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left(\frac{22}{7}, \frac{5}{7}\right)$

Persamaan linear dua variabel dapat digunakan sebagai suatu cara menyajikan persoalan sehari-hari secara matematika (model matematika).

Contoh :

Sebuah taman berbentuk segi empat mempunyai ukuran panjang 8 m lebih panjang dari lebarnya. Jika keliling taman tersebut adalah 44 m, tentukanlah luas taman tersebut!

Jawab :

Misalkan

p : panjang taman

l : lebar taman

k : Keliling taman

maka model matematika dari situasi yang ada diketahui

$p = 8 + l$ (1)

$k = 2p + 2l = 44$ (2)

maka dengan substitusi (1) ke (2) diperoleh

$$44 = 2(8 + l) + 2l$$

$$44 = 16 + 2l + 2l$$

$$44 = 16 + 4l$$

$$4l = 44 - 16$$

$$4l = 28$$

$$l = \frac{28}{4}$$

$$l = 7$$

maka dengan substitusi nilai $l = 7$ ke persamaan (1) diperoleh bahwa $p = 8 + l = 8 + 7 = 15$

3.8 Pertidaksamaan Linear dua variabel

Pertidaksamaan linear dua variable adalah kalimat terbuka matematika yang memuat dua variable, dengan masing-masing variable berderajat satu yang dihubungan dengan tanda ketaksamaan. Tanda ketaksamaan yang dimaksud diantaranya adalah $>, <, \geq,$ dan $\leq$.

Bentuk pertidaksamaan linear dua variable dapat dituliskan sebagai berikut :

$$ax + by > c$$

$$ax + by < c$$

$$ax + by \geq c$$

$$ax + by \leq c$$

Berbeda dengan penyelesaian pada persamaan linear dua variable yang berupa himpunan pasangan terurut dari titik atau jika digambar pada koordinat kartesius berupa garis lurus, penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variable berupa daerah penyelesaian.

Dalam aplikasinya penyelesian pertidaksamaan linear dua variable berupa daerah yang diarsir atau sebaliknya berupa daerah bersih.

Untuk menentukan daerah penyelesaiannya dapat dilakukan seperti langkah-langkah berikut:

1. Ubahlah tanda ketidaksamaan dari pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan, sehingga diperoleh persamaan linear dua variable.
2. Lukis grafik/garis dari persamaan linear dua variable tadi. Hal ini dapat dilakukan dengan menentukan titik potong sumbu x dan

sumbu y dari persamaan atau menggunakan dua titik sembarang yang dilalui oleh garis. Garis akan membagi dua bidang kartesius.

3. Lakukan uji titik yang tidak dilalui oleh garis (substitusi nilai x dan y ke pertidaksamaan). Jika menghasilkan penyataan yang benar, artinya daerah tersebut merupakan penyelesaiannya, namun apabila menghasilkan pernyataan yang salah maka bagian lainnyalah yang merupakan penyelesaiannya.

Selain langkah-langkah diatas, masih terdapat berbagai macam cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan linear yang disesuaikan dengan teknik pemikiran setiap individu yang menyelesaikannya. Tidak menutup keungkinan untuk setiap orang memiliki cara maupun langkah penyelsaian yang berbeda.

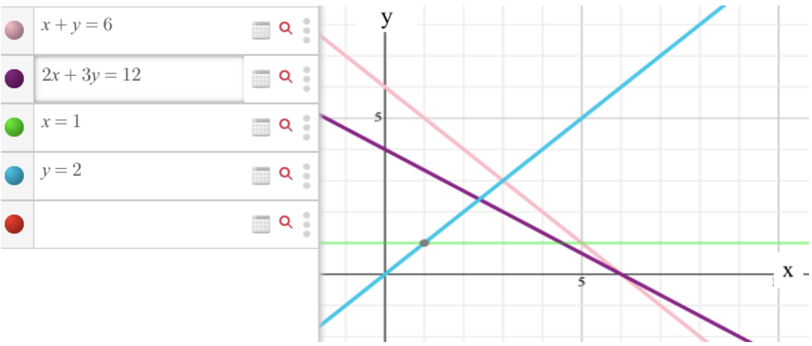
Contoh :

Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear berikut

$x + y \leq 6$, $2x + 3y \leq 12$, dan $x \geq 1$, $y \geq 2$

Jawab :

Langkah pertama adalah dengan menggambar garis $x + y = 6$, $2x + 3y = 12$, dan $x = 1$, $y = 2$.



Gambar 45 Contoh pertidaksamaan

Untuk $x + y \leq 6$, kita pilih (0,0), lalu substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$0 + 0 \leq 6$

$0 \leq 6$ (benar), yang berarti dipenuhi.

Sehingga daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat $(0,0)$.

Untuk $2x + 3y \leq 12$, pilih $(0,0)$, lalu kita substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh :

$2(0) + 3(0) \leq 12$

$0 \leq 12$ (benar), yang berarti dipenuhi.

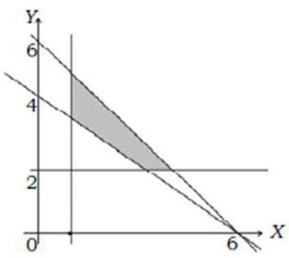
Sehingga dapat kita ketahui daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat $(0,0)$.

Untuk $x \geq 1$, pilih titik $(2,1)$ lalu kita substitusikan ke pertidaksamaan sehingga kita dapatkan $2 \geq 1$ (benar) yang berarti dipenuhi.

Sehinga, daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat titik $(2,1)$.

Untuk $y \geq 2$. Kita pilih titik $(1,3)$ lalu disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga akan kita peroleh $3 \geq 2$ (benar) yang berarti dipenuhi.

Sehingga dapat disimpulka bahwa penyelesaian berada di daerah yang memuat titik $(1,3)$. Daerah himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan tersebut adalah irisan dari ketiga daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan diatas. Seperti yang terlihat pada gambar berikut.



Gambar 46 Daerah Penyelesaian

4. Rangkuman

1. Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Dinotasikan dengan $x = c$.
2. Prinsip penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a + c = b + c$

   $a - c = b - c$
3. Prinsip perkalian

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a.c = b.c$

   $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, benar untuk $c \neq 0$.
4. Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut sebagai persamaan ekuivalen.
5. Prinsip Penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a + c < b + c$ atau $a + c > b + c$

   $a - c < b - c$ atau $a - c > b - c$
6. Prinsip Perkalian

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real positif. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a.c < b.c$ atau $a.c > b.c$

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real negatif. Jika $a < b$ maka $a.c \geq b.c$

   atau

   Jika $a > b$ maka $a.c \leq b.c$
7. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $y = mx + c$.

8. Bentuk pertidaksamaan linear dua variable dapat dituliskan sebagai berikut :

   $ax + by > c$

   $ax + by < c$

   $ax + by \geq c$

   $ax + by \leq c$

5. Latihan

1. Seorang tukang parkir mendapat uang sebesar Rp17.000,00 dari 3 buah mobil dan 5 buah motor, sedangkan dari 4 buah mobil dan 2 buah motor ia mendapat uang Rp18.000,00. Jika terdapat 20 mobil dan 30 motor, banyak uang parkir yang diperoleh adalah
2. Di dalam kandang terdapat kambing dan ayam sebanyak 13 ekor. Jika jumlah kaki hewan tersebut 32 2kor, maka jumlah kambing dan ayam masing-masing adalah
3. Tujuh tahun yang lalu umur Ani sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang 2 kali umur Ani sama dengan 5 kali umur Budi ditambah dengan 9 tahun. Umur Budi sekarang adalah....
4. Sebuah toko buku menjual 2 buku gambar dan 8 buku tulis seharga Rp.48.000,00, sedangkan untuk 3 buku gambar dan5 buku tulis seharga Rp.37.000,00. Jika Adi membeli 1 buku gambar dan 2 buku tulis di toko itu, ia harus membayar sebesar…
5. Kakak membeli 2 kg duku dan 1kg manggis dengan harga Rp.12.000,00. Adik membeli 3 kg duku dan 2 kg manggis dengan harga Rp.19.000,00. Jika ibu membeli 4 kg duku dan 5 kg manggis, maka ibu harus membayar ... rupiah

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Jika a dan b memenuhi

   $$\begin{cases} \frac{9}{a+2b} + \frac{1}{a-2b} = 2 \\ \frac{9}{a+2b} - \frac{2}{a-2b} = -1 \end{cases} \text{ maka } a - b^2 =$$

2. Diketahui sistem persamaan linear $x + 2y = a$ dan $2x - y = 3$. Jika a merupakan bilangan positif terkecil sehingga persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian bilangan bulat $x = x_0$ dan $y = y_0$, maka nilai $x_0 + y_0$ adalah...

3. Jika penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases}(a-2)x+y=0\\x+(a-2)y=0\end{cases}$ tidak hanya $x, y=(0,0)$ saja, maka nilai $a^2-4a+3=$
4. Pada tahun 2001 usia Bayu 7 tahun lebih tua dari usia Andi, sedangkan jumlah umur mereka pada tahun 2007 adalah 43 tahun. Pada tahun 2018 usia Bayu adalah...
5. Diketahui system persamaan $\begin{cases}4^x+5^y=6\\4^{\frac{x}{y}}=5\end{cases}$ maka nilai $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=$
6. Jika (x_1, y_1) merupakan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $2\square+5y=12$ dan $x+4y=15$, nilai dari $5x_1+3y_1$ adalah...
7. Seorang peternak memelihara dua jenis hewan ternak yaitu kambing dan sapi. Jumlah semua hewan ternaknya adalah 150 ekor. Untuk memberi makan hewan-hewan tersebut setiap harinya, peternak membutuhkan biaya Rp.10.000,00 untuk setiap ekor kambing dan Rp.15.000,00 untuk setiap ekor sapi. Biaya yang dikeluarkan setiap hari untuk memberi makan ternak mencapai Rp.1.850.00,00. Jika x menyatakan banyak kambing dan y menyatakan banyak sapi, model matematika yang tepat untuk permasalahan tersebut adalah...

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke- 6 : Mengusai Persamaan linear tiga variabel
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Persamaan linear tiga variabel. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Persamaan linear tiga variabel. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

3.9 Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) merupakan bentuk perluasan dari system persamaan liner dua variabel (SPLDV). Yang mana, pada system persamaan linear tiga variabel terdiri dari tiga persamaan yang masing-masing persamaan memiliki tiga variabel (misal x, y dan z).

Dengan begitu bentuk umum dari system persamaan linear tiga variabel dalam x, y dan z dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3 \neq 0$; $b_1, b_2, b_3 \neq 0$; $c_1, c_2, c_3 \neq 0$; $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.

Keterangan :

x, y, z : variabel

a_1, a_2, a_3 : koefisien variabel x

b_1, b_2, b_3 : koefisien variabel y

c_1, c_2, c_3 : koefisien variabel z

d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

Terdapat beberapa metode penyelesaian pada system persamaan linear tiga variabel, yaitu metode eliminasi, netode substitusi dan metode gabungan (eliminasi-substitusi).

1. Metode Eliminasi

   Metode eliminasi merupakan cara peyelesaian dengan mengeliminasi atau mengurangkan salah satu variabel. Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode eliminasi, yaitu sebagai berikut:

   1) Eliminasikan persamaan pertama dan kedua atau pertama dan ketiga atau kedua dan ketiga untuk menghilangkan salah satu variabelnya, yaitu x atau y atau z, sehingga menjadi persamaan linear dengan dua variabel.
   2) Ulangi sekali lagi tetapi variasi persamaannya tidak sama dengan langkah (1), sedangkan untuk menghilangkan salah satu variabelnya harus sama dengan langkah (1) sehingga menjadi persamaan linear dua variabel.
   3) Dari langkah (1) dan (2), eliminasikan salah satu variabel sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   4) Ulangi sekali lagi tetapi variasi variabel yang dieliminasi berbeda dengan langkah (3) sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   5) Ulangi langkah (1) sampai langkah (4) tetapi variasi persamaannya tidak sama sehingga diperoleh hasil variabel yang lainnya.
   6) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

   Contoh :

   Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode eliminasi!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Langkah pertama, pilih dua persamaan yang ingin dieliminasi dan hilangkan salah satu variabelnya. Untuk mengeliminasi atau menghilangkan variabelnya, terlebih dahulu membuat koefisien pada variabel yang ingin dieliminasi sama pada kedua persamaan tersebut. Misalkan kita memilih persamaan (1) dan (2) untuk dieliminasi dan variabel z yang ingin dihilangkan. Koefisien pada variabel z pada persamaan (1) adalah 1, sedangkan pada persamaan (2) adalah 2. Untuk menyamakan koefisien pada kedua persamaan tersebut, cukup kita kalikan masing-masing persamaan dengan koefisien yang dimiliki oleh persamaan yang lainnya. Jadi persamaan (1) dikalikan dengan 2 dan persamaan (2) dikalikan dengan 1. Kemudian kita dapat mengurangkan kedua persamaan tersebut untuk memperoleh persamaan (4).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1 \quad \times 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \;\; \times 1 \qquad -}$

menjadi

$2x - 4y + 2z = 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \;\; -}$

$-x - 5y = -1$ (4)

Langkah selanjanjutnya, perhatikan bahwa persamaan (4) terdiri atas variabel x dan y. Sekarang kita memerlukan persamaan lain yang mempunyai variabel yang sama dengan persamaan (4). Untuk memperoleh persamaan (5), kita ulangi dengan langkah pertama tetapi dengan variasi persamaan yang berbeda. Misalkan kita memilih persamaan (1) dan (3) untuk dieliminasi dan variabel z yang ingin dihilangkan. Koefisien pada variabel z pada persamaan (1) adalah 1, sedangkan pada persamaan (2) adalah -4. Untuk menyamakan koefisien pada kedua persamaan tersebut, cukup kita kalikan masing-masing persamaan dengan koefisien yang dimiliki oleh persamaan yang lainnya. Jadi persamaan (1) dikalikan dengan -4 dan persamaan (2) dikalikan dengan 1. Kemudian kita dapat mengurangkan kedua persamaan tersebut untuk memperoleh persamaan (5).

Eliminasi Persamaan (1) dan (3)

$x - 2y + z = 1 \qquad \times(-4)$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \qquad \times 1 \quad -}$

menjadi

$-4x + 8y - 4z = -4$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \quad -}$

$-7x + 2y = -2 \qquad (5)$

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel x.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1 \qquad \times(-7)$

$\underline{-7x + 2y = -2 \quad \times(-1) -}$

menjadi

$7x + 35y = 7$

$\underline{7x - 2y = 2 \quad -}$

$37y = 5$

$$y = \frac{5}{37}$$

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel y.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1 \qquad \times 2$

$\underline{-7x + 2y = -2 \quad \times(-5)}$ -

menjadi

$-2x - 10y = -2$

$\underline{35x - 10y = 10}$ -

$-37x = -12$

$$x = \frac{-12}{-37} = \frac{12}{37}$$

Ulangi langkah pertama tetapi variabel yang dihilangkan harus berbeda. Misalkan kita akan menghilangkan variabel x dengan menggunakan persamaan (1) dan (2), maka akan diperoleh persamaan (6).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1 \quad \times 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \quad \times 1}$ -

menjadi

$3x - 6y + 3z = 3$

$\underline{3x + y + 2z = 3}$ -

$7y + z = 0$ (6)

Perhatikan bahwa persamaan (6) terdiri atas variabel y dan z. Sekarang kita memerlukan persamaan lain yang mempunyai variabel yang sama dengan persamaan (6). Untuk memperoleh persamaan (7), kita ulangi dengan langkah sebelumnya tetapi dengan variasi persamaan yang berbeda. Misalkan kita akan menghilangkan variabel x dengan menggunakan persamaan (2) dan (3), maka akan diperoleh persamaan (7).

Eliminasi Persamaan (2) dan (3)

$3x + y + 2z = 3 \qquad \times 3$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \qquad \times 1 \quad -}$

menjadi

$3x + y + 2z = 3$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \qquad -}$

$-5y + 6z = 5$ (7)

Dari persamaan (6) dan (7), misalkan kita hilangkan variabel y

Eliminasi Persamaan (6) dan (7)

$-7y + z = 0 \qquad \times(-5)$

$\underline{-5y + 6z = 5 \qquad \times(-7) -}$

menjadi

$35y - 5z = 0$

$\underline{35x - 42z = -35 \qquad -}$

$37z = 35$

$z = \frac{35}{37}$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$

2. Metode Substitusi

   Metode substitusi merupakan cara penyelesaian dengan cara memasukkan salah satu persamaan ke persamaan yang lainnya. Langkah- langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode substitusi, yaitu sebagai berikut:

   1) Menyatakan salah satu persamaan dalam bentuk x sebagai fungsi y dan z atau y sebagai fungsi x dan z atau z sebagai fungsi x dan y (pilih yang paling sederhana).

2) Substitusikan langkah (1) ke dalam salah satu persamaan yang lainnya sehingga membentuk persamaan baru yang mengandung dua variabel.
3) Gunakan langkah (2) dengan menyatakan seperti pada langkah (1).
4) Substitusikan langkah ke (2) dan (3) ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai dari salah satu variabel.
5) Jika telah diperoleh nilai dari salah satu variabel maka substitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel yang kedua.
6) Ulangi lagi langkah (5) tetapi mensubstitusikan ke dalam persamaan yang berbeda untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.
7) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode substitusi!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Nyatakan salah satu persamaan ke dalam salah satu bentuk variabel. Misalkan kita ingin menyatakan ke dalam bentuk x sehingga yang memuat variabel y dan z pindahkan ruas ke sisi yang satunya.

$x - 2y + z = 1$ menjadi

$x = 1 + 2y - z$ (4)

Substitusi persamaan (4) ke salah satu persamaan lainnya. Misalkan kita substitusi ke dalam persamaan (2) untuk memperoleh persamaan (5).

$3x + y + 2z = 3$

$3(1 + 2y - z) + y + 2z = 3$

$3 + 6y - 3z + y + 2z = 3$

$3 + 7y - z = 3$

$-z = 3 - 3 - 7y$

$-z = -7y$

$z = 7y$ (5)

Substitusi persamaan (5) ke dalam persamaan (4) untuk memperoleh persamaan (6).

$x = 1 + 2y - z$

$x = 1 + 2y - 7y$

$x = 1 - 5y$ (6)

Substitusi persamaan (5) dan (6) ke salah satu persamaan pada soal. Misalkan kita menggunakan persamaan (3).

$3x + 6y - 4z = -2$

$3(1 - 5y) + 6y - 4(7y) = -2$

$3 - 15y + 6y - 28y = -2$

$3 - 37y = -2$

$-37y = -2 - 3$

$-37y = -5$

$y = -\frac{5}{-37} = \frac{5}{37}$

Substitusi nilai variabel y ke salah satu persamaan, misalkan ke dalam persamaan (6).

$x = 1 - 5y$

$$x = 1 - 5\left(\frac{5}{37}\right)$$

$$x = 1 - \frac{25}{37}$$

$$x = \frac{37 - 25}{37} = \frac{12}{37}$$

Substitusikan nilai variabel x dan y ke salah satu persamaan yang ada pada soal. Misalkan kita menggunakan persamaan (1).

$$x - 2y + z = 1$$

$$\frac{12}{37} - 2\left(\frac{5}{37}\right) + z = 1$$

$$\frac{12}{37} - \frac{10}{37} + z = 1$$

$$\frac{2}{37} + z = 1$$

$$z = 1 - \frac{2}{37}$$

$$z = \frac{37 - 2}{37} = \frac{35}{37}$$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$$

3. Metode Gabungan (Eliminasi Substitusi)

   Metode gabungan merupakan cara penyelesaian dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan substitusi dengan secara bersamaan. Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode gabungan, yaitu sebagai berikut:

   1) Dibuat dua kelompok persamaan yang memungkinkan elimiasi dua persamaan menjadi lebih mudah dan sederhana.
   2) Salah satu variabel dari masing-masing kelompok dieliminasikan.

3) Nilai variabel yang diperoleh, disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai-nilai variabel yang lain.

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode gabungan!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Misalkan eliminasi persamaan (1) dan (2) untuk memperoleh persamaan (4).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1$ $\times 2$

$3x + y + 2z = 3$ $\times 1$ -

menjadi

$2x - 4y + 2z = 2$

$3x + y + 2z = 3$ -

$-x - 5y = -1$ (4)

Misalkan eliminasi persamaan (1) dan (3) untuk memperoleh persamaan (5).

Eliminasi Persamaan (1) dan (3)

$x - 2y + z = 1$ $\times(-4)$

$3x + 6y - 4z = -2$ $\times 1$ -

menjadi

$-4x + 8y - 4z = -4$

$3x + 6y - 4z = -2$ -

$-7x + 2y = -2$ (5)

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel y.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1 \quad \times 2$

$\underline{-7x + 2y = -2 \quad \times(-5)\ -}$

menjadi

$-2x - 10y = -2$

$\underline{35x - 10y = 10 \quad -}$

$-37x = -12$

$x = -\frac{12}{-37} = \frac{12}{37}$

Misalkan substitusi nilai variabel x ke dalam persamaan (4)

$-x - 5y = -1$

$-\frac{12}{37} - 5y = -1$

$-5y = -1 + \frac{12}{37}$

$-5y = \frac{-37 + 12}{37}$

$-5y = -\frac{25}{37}$

$y = -\frac{25}{37(-5)}$

$y = \frac{5}{37}$

Misalkan substitusi nilai variabel x dan y ke dalam persamaan (1)

$x - 2y + z = 1$

$\frac{12}{37} - 2\left(\frac{5}{37}\right) + z = 1$

$\frac{12}{37} - \frac{10}{37} + z = 1$

$\frac{2}{37} + z = 1$

$$z = 1 - \frac{2}{37}$$

$$z = \frac{37 - 2}{37} = \frac{35}{37}$$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$$

4. Rangkuman

1) bentuk umum dari system persamaan linear tiga variabel dalam x, y dan z dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3 \neq 0$; $b_1, b_2, b_3 \neq 0$; $c_1, c_2, c_3 \neq 0$; $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.

2) Metode penyelesaian pada system persamaan linear tiga variabel, yaitu metode eliminasi, netode substitusi dan metode gabungan (eliminasi-substitusi).
   a. Metode eliminasi merupakan cara peyelesaian dengan mengeliminasi atau mengurangkan salah satu variabel.
   b. Metode Substitusi merupakan cara penyelesaian dengan cara memasukkan salah satu persamaan ke persamaan yang lainnya.
   c. Metode Gabungan (Eliminasi Substitusi) merupakan cara penyelesaian dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan substitusi dengan secara bersamaan.

5. Latihan

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$\begin{gathered} 2x + 5y - 3z = 3 \\ 6x + 8y - 5z = 7 \\ -3x + 3y + 4z = 15 \end{gathered}$$

2. Cari tahulah penyelesaian SPLTV dengan menggunakan Matriks! Tentukanlan Penyelesaian persamaan berikut dengan metode matriks.

$$5x - 3y + 2z = 3$$
$$8x - 5y + 6z = 7$$
$$3x + 4y - 3z = 15$$

3. Toko alat tulis Pak Rudi menjual alat tulis berisi buku, spidol, dan tinta dalam 3 jenis paket sebagai berikut.

   Paket A: 3 buku, 1 spidol, 2 tinta seharga Rp 17.200

   Paket B: 2 buku, 2 spidol, 3 tinta seharga Rp19.700

   Paket C: 1 buku, 2 spidol, 2 tinta seharga Rp14.000

   Hitunglah harga 1 buah masing-masing item !

4. 3 bersaudara Lia, Ria, dan, Via berbelanja di toko buah. Mereka membeli Apel, Jambu, dan Mangga dengan hasil masing-masing sebagai berikut:

   Lia membeli dua buah Apel, satu buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp47.000

   Ria membeli satu buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp43.000

   Via membelli tiga buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp71.000

   Berapa harga 1 buah Apel, 1 buah Jambu, dan 1 buah Mangga?

5. Pak budi memiliki toko kelontong yang menjual campuran beras A, beras B dan beras C yang dijual dengan klasifikasi berikut :

   i. Campuran 3 kg beras A, 2 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual seharga Rp19.700,00.

   ii. Campuran 2 kg beras A, 1 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual Rp14.000.

   iii. Campuran 2 kg beras A, 3 kg beras B, dan 1 kg beras C dijual seharga Rp17.200,00.

   Hitunglah harga tiap kg beras A, B, dan C ?

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Selesaikan persamaan di bawah ini dengan metode eliminasi dan substitusi ? Kemudian tentukanlah nilai dari $x + y + z$

$$x + y - z = -3$$
$$x + 2\square + z = 7$$
$$2x + y + z = 4$$

2. Diketahui sistem persamaan linear

$$3x - 2y - 3z = 5$$
$$x + y - 2z = 3$$
$$x - y + z = -4$$

jika $\{(x_0, y_0, z_0)\}$ memenuhi persamaan diatas, maka nilai $z_0 =$

3. Perhatikan system persamaan linear tiga variabel berikut

$$x + 5y + 2z = -a - b - c$$
$$3x - y + 4z = 5a + b$$
$$2x + y + 5z = 6a + 1$$

jika himpunan penyelesaian system persamaan tersebut adalah $\{(-2. -3.4)\}$ maka nilai $2a + b + 3c =$

4. Perhatikan system persamaan linear berikut

$$ax + y + 2z = 5$$
$$bx - y + 3z = 3$$
$$cx - y + z = -1$$

jika $a + b = 7$ dan $a + c = 5$ maka nilai $12x + 8z =$

5. Pada suatu hari, tiga sahabat yang bernama Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Mereka membeli buku tulis, pensil dan penghapus. Hasil belanja mereka di toko buku adalah sebagai berikut :
   i. Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.700
   ii. Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.300
   iii. Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp7.100

   Berapa harga untuk sebuah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus ?

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul
   Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul tiga ini menuntun mahasiswa memahami materi Persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari yang sesuai dengan soal-soal pada latihan dan evaluasi pembelajaran diatas.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah
   Persamaan linear variabel substitusi Eliminasi

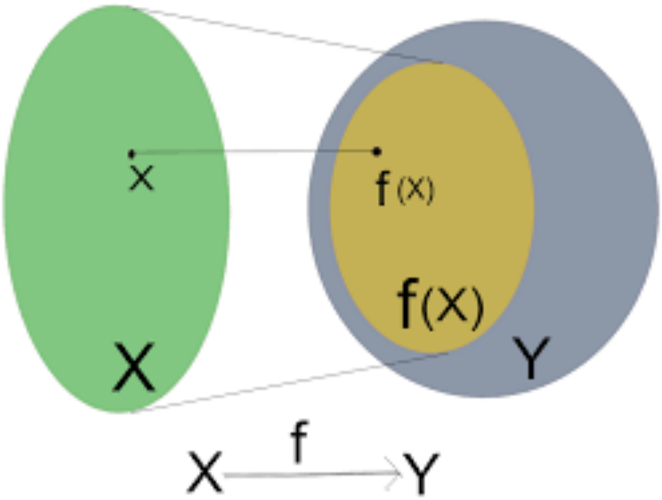
4. Referensi

   Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson
   Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 4

FUNGSI

Usaha tanpa doa sombong, dan Doa tanpa usaha itu bohong. Kesuksesan sejati perlu Usaha dan Doa.
_SCP



Pendidikan Kimia
FKIP UKI

MODUL 4 FUNGSI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Salah satu konsep dalam matematika yang paling penting adalah konsep fungsi. Dengan konsep fungsi, para matematikawan maupun para ahli di bidang yang lain dengan jelas dapat mengetahui apakah suatu struktur identik dengan struktur yang lain. Dan hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi dalam pengembangannya.

   Fungsi linear dan fungsi kuadrat merupakan salah satu fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan. Banyak masalah sehari-hari menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat.

   Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang diba- yarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari-jarinya dan se- bagainya.

   Pada modul ini akan dibahas terkait dengan fungsi, jenis-jenisnya dan berbagai macam bentuk penyelesaiannya.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Empat

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
   - Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinil orang lain.

- Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep dasar perkalian berulang dan penjumlahan berulang. Selain itu juga diperlukan pemahaman tentang persamaan dan pertidaksamaan linear yang telah dibahas di modul sebelumnya.

5. Kegunaan Modul empat

   Kegunaan modul empat ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi fungsi dan berbagai bentuk persamaan fungsi. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada fungsi untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian fungsi, sifat fungsi yaitu surjektif, injektif dan bijektif, Grafik fungsi, Jenis-jenis fungsi seperti fungsi konstan, fungsi linear, fungsi identitas, fungsi kuadrat, fungsi tangga, fungsi mutlak, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi naik dan fungsi turun, fungsi berpangkat, fungsi polynomial, fungsi rasional, fungsi aljabar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma. Selanjutnya juga memuat tentang operasi pada fungsi dan fungsi komposisi, dan pergeseran grafik fungsi.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 7 : Menguasai konsep Fungsi dan jenis-jenisnya.

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Fungsi dan jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

4.1 Pengertian

Fungsi adalah sebuah alat untuk menggambarkan fakta yang ada dalam ben- tuk matematika. sebuah fungsi dapat direpresentasikan dengan persamaan, grafik, tabel, atau penjelasan verbal; dimana keempat representasi tersebut kita gunakan pada bab ini.

Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang diba- yarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari-jarinya dan se- bagainya. Dalam hal ini, nilai dari satu variabel misalkan y bergantung pada nilai dari variabel lainnya yang bisa disebut sebagai x. Biasanya kita baca "y adalah sebuah fungsi dari x" yang dinotasikan dengan

$$y = f(x)$$

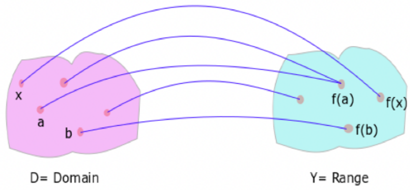
notasi diatas menunjukkan y sebagai sebuah fungsi dengan x sebagai vari- abel bebas ($Independent\ variable$) yang merepresentasikan nilai masukan ke f dan y adalah variabel terikat ($dependent\ variable$) yang merepresentasikan nilai keluaran dari f di x.

Definisi 1.

> Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\,(x) \in Y$.

Himpunan D disebut sebagai daerah asal atau domain dan setiap nilai $f(x)$ pada himpunan Y disebut sebagai daerah hasil atau range. Dalam hal ini daerah hasil mungkin tidka semua elemen pada himpunan Y . Sebuah fungsi dapat direpresentasikan seperti dua gambar berikut ini.

(a) Fungsi seperti sebuah mesin



(b) Fungsi sebagai Pemetaan dari D ke Y

Gambar 47 Representasi fungsi

Berikut ini contoh fungsi beserta dengan domain dan range nya

Fungsi	**Domain**	**Range**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \dfrac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1,1]$	$[0,1)$

Dari tabel diatas dapat kita ketahui bahwa

1. Fungsi $y = x^2$ menunjukkan bahwa pemetaan dari $x \in R$ adalah $y \in R$ sehingga domainnya adalah $(-\infty, \infty)$. Daerah hasil dari fungsi $y = x^2$ adalah $[0, \infty)$ karena pangkat dari bilangan riil adalah bilangan positif dan setiap bilangan positif adalah kuadrat dari akarnya sendiri ditulis dengan $y = (y)^2$ untuk $y \geq 0$.
2. Fungsi $y = \frac{1}{x}$ menggambarkan nilai $y \in R$ kecuali pada $x = 0$. Berdasarkan x konsistensi formula pada aritmatika, kita tidak bisa membagi bilangan dengan nol. Sehingga domain dari $y = \frac{1}{x}$ adalah

semua bilangan riil kecuali nol dituliskan dengan $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Selanjutnya daerah hasil dari $y = \frac{1}{x}$ adalah semua bilangan riil bukan nol juga karena $y = \frac{1}{x}$. Dengan demikian Rangenya adalah $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

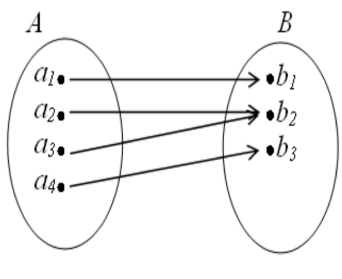
3. Fungsi $y = \sqrt{x}$ memberikan nilai $y \in R$ jika $x \geq 0$. Selanjutnya range dari $y = \sqrt{x}$ adalah $[0, \infty)$karena setiap bilangan positif merupakan beberapa akar dari bilangan (akar dari pangkat bilangan itu sendiri).
4. Pada fungsi $y = \sqrt{4 - x}$, nilai $4 - x$ tidak boleh bernilai negatif. Sehingga $4 - x \geq 0$ atau $x \leq 4$, dimana $y \in R$ untuk semua $x \leq 4$. Range dari $\sqrt{4 - x}$ adalah semua himpunan bilangan positif dituliskan dengan $[0, \infty)$.
5. Fungsi $y = \sqrt{1 - x^2}$ memberikan nilai $y \in R$ untuk x diantara -1 sampai 1. Selain itu maka nilai $1 - x^2$ akan bernilai imajiner. Sehingga daerah hasil atau range dari $\sqrt{1 - x^2}$ adalah $[0,1)$.

4.2 Sifat Fungsi

Secara umum fungsi mempunyai beberap a sifat yang berguna untuk menentukan syarat pada komposisi fungsi dan invers fungsi. Setidaknya ada tiga sifat fungsi dalam matematika antara lain yaitu fungsi pada atau surjektif (onto), fungsi satu-satu atau injektif dan fungsi satu-satu pada atau bijektif (koresponden).

1. Fungsi Surjektif (Pada)

   Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.



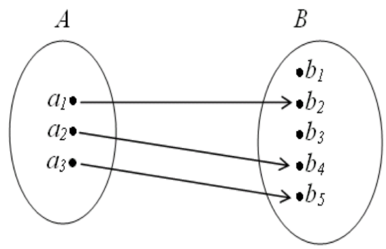
Gambar 48 Fungsi surjektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan hasil pemetaan $f(A) = \{(1, c), (2, b), (3, a), (4, a)\}$. Sehingga dapat diperoleh bahwa daerah hasil atau range dari fungsi f adalah $R_f = \{a, b, c\}$ dan $R_f = B$. Jadi fungsi ini termasuk fungsi surjektif atau fungsi onto atau disebut juga dengan fungsi pada.

2. Fugsi Injektif (satu-satu)

Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.



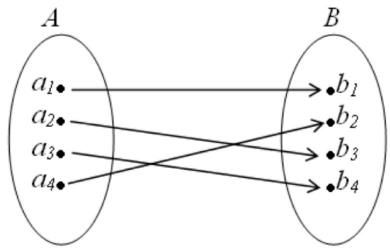
Gambar 49 Fungsi injektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, a), (2, d), (3, b)\}$. Dapat diketahui bahwa setiap anggota A yang berbeda memiliki peta yang berbeda, atau pasangan yang berbeda. Jadi fungsi f ini termasuk fungsi injektif atau fungsi satu-satu.

3. Fungsi Bijektif (Saru-satu Pada)

Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.



Gambar 50 Fungsi bijektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$. Dapat diketahui bahwa fungsi f termasuk fungsi surjektif dan fungsi injektif. Fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

4.3 Grafik Fungsi

Grafik sebuah fungsi adalah sebuah representasi visual dari sifat sebuah fungsi pada diagram x- y. Grafik bisa membantu kita memahami aspek-aspek berbeda dari sebuah fungsi, yang bisa jadi sulit dipahami dengan hanya melihat fungsi itu sendiri.

Berikut ini langkah-langkah menggambar grafik fungsi:

1. Langkah pertama

   Buatlah terlebih dahulu analisis pendahuluan yang meliputi:

   - Menentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu-sumbu koordinat (jika koordinat itu gampang ditentukan)
     i. Titik potong dengan sumbu x, dengan mengambil syarat $y = 0$.
     ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil syarat $x = 0$.
   - Tentukan interval-interval saat fungsi itu nait dan saat fungsi itu turun.
   - Tentukan titik-titik stationer serta jenisnya : titik balik maksimum, titik balik minimum, atatu titik belok horizontal.
   - Tentukan nilai-nilai fungsi pada ujung-ujung interval. Jika kurva itu akan digambarkan untuk semua bilangan real, maka perlu ditentukan nilai-nilai y untuk nilai x yang besar positif dan untuk nilai x yang besar negative.
   - Tentukanlah beberapa titik tertentu untuk memperhalus denah kurva.
2. Langkah kedua

   Dari langkah pertama, titik-titik yang didapat kita sajikan dalam bidang kartesius.

3. Langkah ketiga

   Titik-titik yang telah disajikan dalam bidang kartesius pada langkah kedua, lalu kita hubungkan dengan mempertimbangkan naik atau turunnya fungsi. Dengan demikian kita akan mendapat kurva $y = f(x)$.

Contoh :

Gambarlah denah kurva dari fungsi $f(x) = 4x - x^3$

Jawab :

Langkah pertama

1. Koordinat titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat.

   i. Titik potong dengan sumbu x, dengan engambil $y = 0$.

   $$4x - x^3 = 0$$
   $$x(4 - x^2) = 0$$
   $$x(2 + x)(2 - x) = 0$$

   $x_1 = 0$, atau $x_2 = -2$ atau $x_3 = 2$

   titik-titik potong dengan sumbu x adalah $(-2,0)$, $(0,0)$ dan $(2,0)$.

   ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil $x = 0$ diperoleh :

   $$y = 4(0) - (0)^3 = 0$$

   titik potong sumbu y adalah $(0,0)$

2. Dari $f(x) = 4x - x^3$ maka turunan pertamanya adalah $f'(x) = 4 - 3x^2$ (Materi turunan dapat dilihat pada modul turunan)

   $f(x)$ naik bila $f'(x) > 0$

   $4 - 3x^2 > 0$

   $3x^2 < 4$

   $-\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}\sqrt{3}$

   $f(x)$ turun bila $f'(x) < 0$

   $4 - 3x^2 < 0$

   $3x^2 > 4$

   $x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ atau $x > \frac{2}{3}\sqrt{3}$

3. Nilai-nilai stationernya :

   Untuk $x_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 =$

$-\frac{16}{9}\sqrt{3}$. Dalam hal ini $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik minimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif saat melewati $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Untuk $x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = \frac{16}{9}\sqrt{3}$. Dalam hal ini $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik maksimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif saat melewati $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Sehingga titik balik maksimumnya $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimumnya $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$.

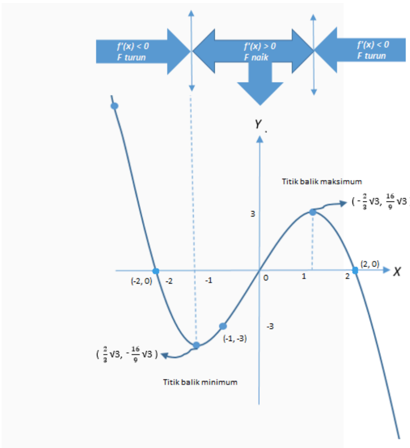
4. Untuk x besar maka $y = f(x) = 4x - x^3$ akrab dengan $-x^3$
   Jika x besar positif, maka y besar negatif
   Jika y besar negative, maka x besar positif
5. Ambil beberapa titik tertentu untuk memperbaiki denah kurva
   $x = -3$ maka $y = f(-3) = 4(-3) - (-3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-3,15)$.
   $x = -1$ maka $y = f(-1) = 4(-1) - (-1)^3 = -3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-1, -3)$.
   $x = 1$ maka $y = f(1) = 4(1) - (1)^3 = 3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(1,3)$.
   $x = 3$ maka $y = f(3) = 4(3) - (3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(3,15)$.

Langkah kedua

Beberapa titik yang diperoleh pada langkah pertama diletakkan pada bidang kartesius.

Langkah ketiga

Titik-titik yang telah disajikan pada bidang kartesius itu dihubungkan untuk memperoleh denah kurva yang mulus ibarat pada gambar dibawah ini.



Gambar 51 Grafik fungsi

untuk memudahkan kita dalam menggambar grafik dari berbagai bentuk fungsi, maka dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa aplikasi yaitu seperti MathLab, Maple, Symbolab dan lain sebagainya.

Beberapa bentuk fungsi yang digambar menggunakan symbolab dapat kita lihat pada jenis-jenis fungsi berikut.

4.4 Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi Konstan (Fungsi Tetap)

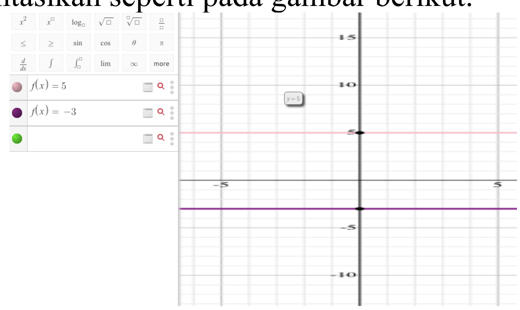
   Suatu fungsi $f: A \to B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.

   Contoh :

   $f(x) = 5$

   $f(x) = -3$

   yang direpresentasikan seperti pada gambar berikut.



Gambar 52 Fungsi Konstan

2. Fungsi Linear

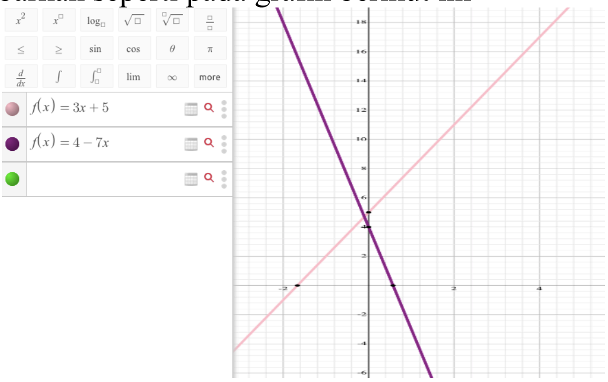
Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.

Contoh :

$f(x) = 3x + 5$

$f(x) = 4 - 7x$

yang digambarkan seperti pada grafik berikut ini



Gambar 53 Fungsi Linear

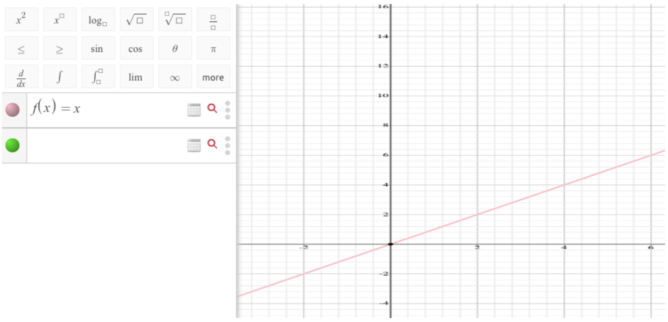
3. Fungsi Identitas

Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama.

Contoh :

$$f(x) = x$$

yang dapat digambarkan seperti grafik berikut ini.



Gambar 54 Fungsi Identitas

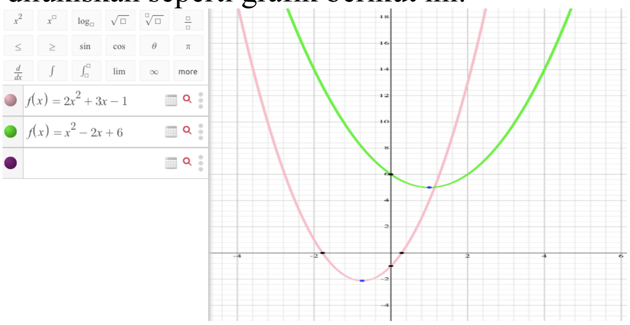
4. Fungsi Kuadrat

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.

   Contoh :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$
$$f(x) = x^2 - 2x + 6$$

   yang dapat dilukiskan seperti grafik berikut ini.



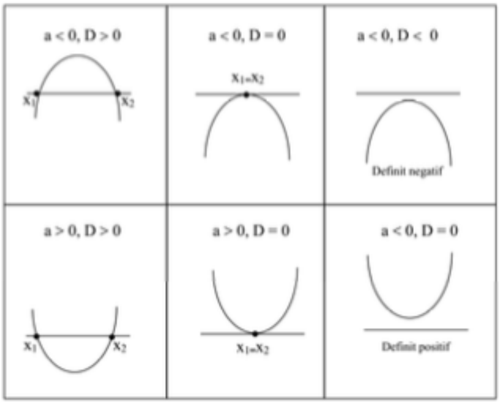
Gambar 55 Fungsi Kuadrat

Pada fungsi kuadrat biasanya disebut dengan persamaan kuadrat ini dapat dilakukan perhitungan pada beberapa titik penting yaitu pada sumbu simetri fungsi yaitu dirumuskan dengan $x = -\frac{b}{2a}$.

Selanjutnya untuk menentukan titik puncak nya dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut:

$x = -\frac{b}{2a}$ dan $y = -\frac{D}{4a}$ dimana $D = b^2 - 4ac$.

jika ditinjau dari nilai a dan D maka grafik parabola yang terbentuk seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 56 Grafik Parabola

5. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah)

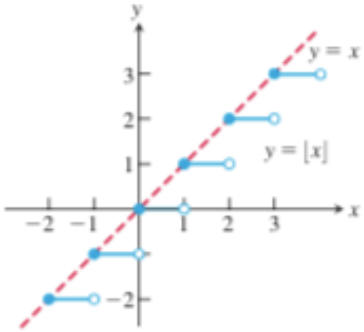
   Suatu fungsi disebut sebagai fungsi tangga apabila grafik fungsi $f(x)$ berbentuk interval-interval yang sejajar. Fungsi batas bawah adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan kebawah yang dinotasikan dengan $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

   Fungsi batas atas adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan atas yang dinotasikan dengan $f(x) = \lceil x \rceil$.

   Contoh :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$
$$f(x) = \lceil x \rceil$$

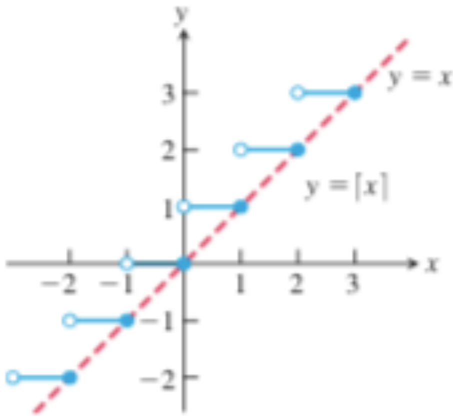
   seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 57 Fungsi batas bawah

$\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$ $\lfloor 0.2 \rfloor = 2$

$\lfloor -1.2 \rfloor = -2$ $\lfloor -0.3 \rfloor = -1$ $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ $\lceil -2 \rceil = -2$



Gambar 58 Fungsi batas atas

$\lceil 2.4 \rceil = 3$ $\lceil 1.9 \rceil = 2$ $\lceil 0.2 \rceil = 1$

$\lceil -1.2 \rceil = -1$ $\lceil -0.3 \rceil = 0$ $\lceil 3.6 \rceil = 4$ $\lceil -2 \rceil = -2$

6. Fungsi Mutlak (modulus)

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi modulus (mutlak) apabila fungsi ini memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur harga mutlaknya.

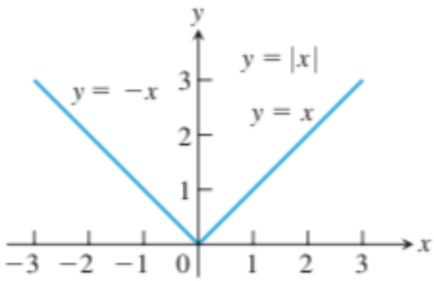
   $f: x \rightarrow |x|$ atau $f: x \rightarrow |ax + b|$

   $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.

Contoh :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

yang tampak seperti pada grafik berikut.



Gambar 59 Fungsi mutlak

7. Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.

Biasannya grafik fungsi genap adalah simetri pada sumbu y. Sedangkan grafik fungsi ganjil adalah simetri pada titik normal (0,0).

Contoh :

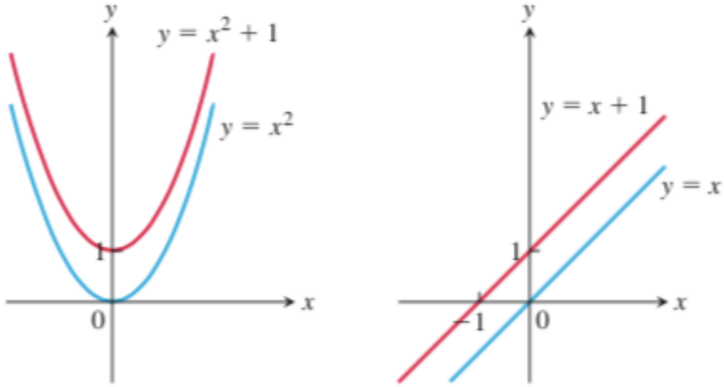
$f(x) = x^2$ adalah Fungsi genap karena $(-x)^2 = x^2$ untuk semua x, yaitu simetri disumbu y.

$f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi genap $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ untuk semua x, yaitu simetri di sumbu y.

$f(x) = x$ adalah fungsi ganjil $(-x) = -x$ untuk semua x, yaitu simetri di titik normal.

$f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Ganjil karena $f(-x) = -x + 1$ namun $-f(x) = -x - 1$. Sehingga $f(-x) \neq -f(x)$.

$f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Genap karena $(-x) + 1 \neq x + 1$ untuk semua x.



Gambar 60 Fungsi ganjil dan genap

8. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

   Jika sebuah grafik fungsi menanjak atau naik dari kiri kekanan, kita sebut sebagai fungsi naik (increasing). Jika sebuah grafik dari fungsi menurun dari kiri ke kanan disebut fungsi turun (decreasing).

   Misalnya f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval I dan diketahui x_1 dan x_2 berada pada interval I. Maka

   i. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.

   ii. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.

9. Fungsi Berpangkat

   Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat. Berikut beberapa kasus fungsi berpangkat.

   i. $a = n$, bilangan bulat positif

      Grafik fungsi $f(x) = x^n$, untuk $n = 1,2,3,4,5$, dapat dilihat seperti pada gambar dibawah. Untuk semua fungsi yang didefinisikan, dapat kita perhatikan pola grafik yang terbentuk yaitu kurva yang terbentuk melandai mendekati sumbu x.

   ii. $a = -1$ atau $a = -2$

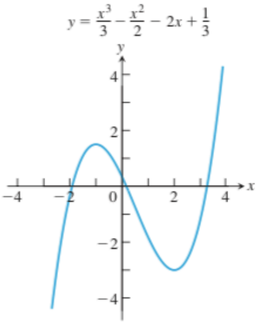
      Grafik fungsi $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ dapat direpresentasikan seperti gambar berikut. Fungsi ini didefinisikan untuk semua $x \neq 0$

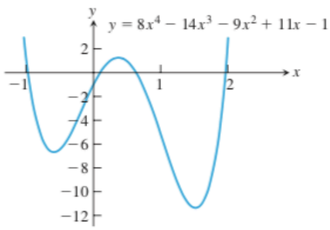
iii. $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$, dan $\frac{2}{3}$

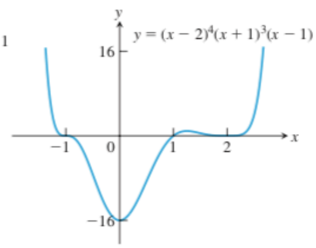
Fungsi $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ merupakan fungsi akar dan fungsi akar kubik.

10. Fungsi Polinomial (Suku Banyak)

Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta. Jika $a_n \neq 0$ dan $n > 0$, maka n disebut sebagai derajat polynomial. Fungsi linear dengan $m \neq 0$ disebut sebagai polynomial dengan derajat 1. Derajat dua disebut sebagai fungsi kuadrat dan derajat tiga disebut sabagai fungsi kubik.



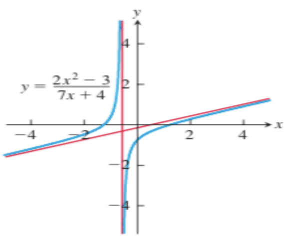


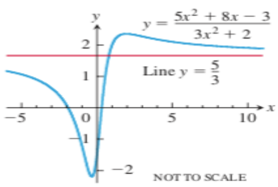


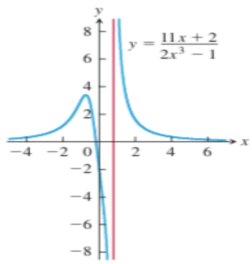
Gambar 61 Fungsi Polinomial

11. Fungsi Rasional

Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Domain dari fungsi rasional adalah himpunan bilangan riil x dimana $q(x) \neq 0$. Berikut beberapa grafik fungsi rasional.



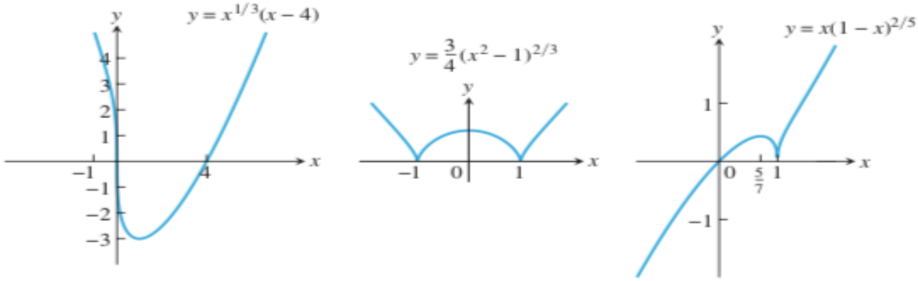




Gambar 62 Fungsi rasional

12. Fungsi Aljabar

Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, pengurangan dan akar. Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi aljabar.

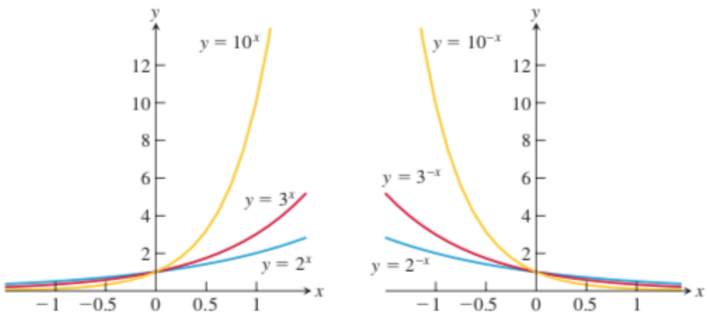


Gambar 63 Fungsi aljabar

13. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.

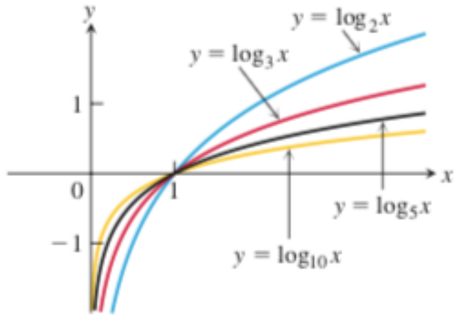
Fungsi eksponensial memiliki domain $(-\infty, \infty)$ dan range $(0, \infty)$ sehingga fungsi eksponensial tidak pernah diasumsikan bernilai 0. Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi eksponensial.



Gambar 64 Fungsi eksponensial

14. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif. Berikut ini beberapa grafik fungsi logaritma



Gambar 65 Fungsi logaritma

4. Rangkuman

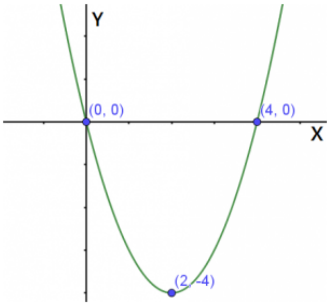
1. Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.
2. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.
3. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.
4. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.
5. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.
6. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.
7. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.
8. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan

c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.

9. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah), $f(x) = \lfloor x \rfloor$ dan $f(x) = \lceil x \rceil$.
10. Fungsi Mutlak (modulus), $f: x \to |x|$ atau $f: x \to |ax + b|$ dimana $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.
11. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.
12. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.
13. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.
14. Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat.
15. Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta.
16. Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
17. Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar.
18. Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.
19. Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif.

5. Latihan

1. Diantara diagram panah fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif dan bijektif? Jelaskan!
2. Suatu fungsi $f: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 2$
   a. Tentukan $f(-1)$, $f(a)$ dan $f(1)$
   b. Tentukan a jika $f(a) = 23$
   c. Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 34?
3. Tentukanlah persamaan garis yang melalui
   a. Titik $M(1,2)$ dan $N(-1,6)$
   b. Titik $(-2,3)$ dan membentuk sudut $45°$ terhadap sumbu x positif.
4. Tentukan persamaan garis I yang melalui $R(3,1)$ dan tegak lurus garis AB dimana titik $A(2,3)$ dan $B(6,5)$.
5. Koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 + 2kx + k + 5$ adalah (m, m). Nilai $k + m =$
6. Persamaan grafik parabola dibawah ini adalah

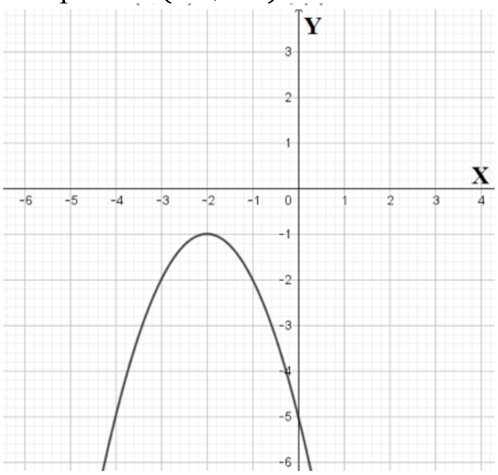


7. Jika f adalah fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(1,0)$, $(4,0)$, dan $(0,-4)$ maka nilai dari $f(7) =$
8. Diketahui fungsi $f(x) = (a+1)x^2 - 2ax + (a-2)$ definit negative. Nilai a yang memenuhi adalah
9. Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + 6x + a$ mempunyai sumbu simetri $x = 3$, maka nilai maksimum fungsi tersebut adalah
10. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 7x + 2 = 0$ adalah r dan s. Tentukan hasil dari $\frac{r}{(r^2+1)^2} + \frac{s}{(s^2+1)^2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah domain dan range dari fungsi berikut
   a. $f(x) = x^3$
   b. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$
   c. $f(x) = \tan x$
   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

2. Fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(-1,3)$ dan titik baliknya sama dengan titik balik dari grafik $f(x) = x^2 + 4x + 3$ adalah
3. Jika grafik $f(x) = ax^2 + (2a + 6)x + 2a - 2$ menyinggung sumbu x, maka koordinat titik balik maksimumnya adalah
4. Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + x + p$ menyinggung garis $3x + y = 1$ dengan $p > 0$, maka nilai p yang memenuhi adalah
5. Garfik fungsi $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + m + 3$ seluruhnya diatas sumbu x. interval nilai m yang memenuhi adalah
6. Jika p dan q merupakan akar-akar persamaan $x^2 - x + 1 = 0$, nilai dari $p^{2017} + q^{2017}$ adalah
7. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$, maka hasil dari $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 + x_2$ adalah
8. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$, carilah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{x_1^2-1}{2x_1}$ dan $\frac{2x_2}{x_2^2-1}$.
9. Bila m dan n merupakan akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 2x + 1 = 0$, carilah nilai dari $(1 + m^2 + m^3 + \cdots)(1 + n^2 + n^3 + \cdots)$
10. Jika gambar dibawah ini merupakan grafik fungsi kuadrat f dengan titik puncak $(-2, -1)$ dan melalui titik $(0, -5)$, maka nilai $f(2)$ adalah



7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke- 8 : Menguasai Konsep Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

4.5 Operasi Pada Fungsi

Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f+g$, $f-g$ dan fg seperti

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Contoh :

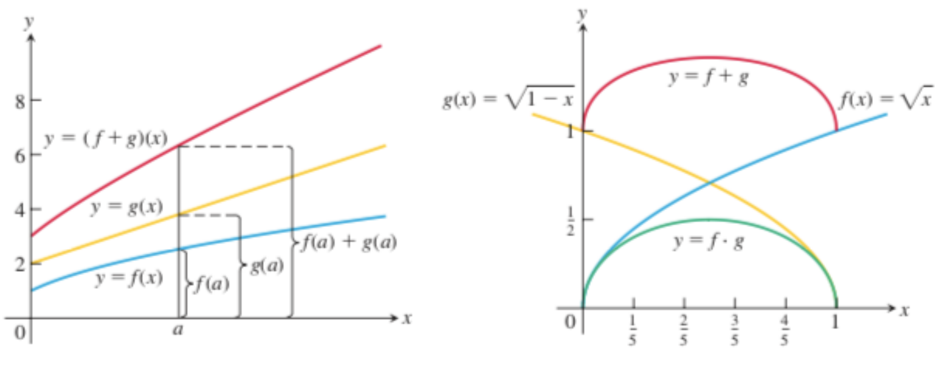
Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \sqrt{1-x}$ dengan $D(f) = [0,\infty)$ dan $D(g) = (-\infty, 1]$. Maka Domain dari fungsi tersebut dapat diperoleh secara umum $[0,\infty) \cap (-\infty, 1]$

Fungsi yang terbentuk dengan menggunakan operasi aljabar adalah sebagai berikut

Fungsi	**Rumus**	**Domain**
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	[0,1]

$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f.g$	$(f.g)(x)=f(x)g(x)$ $=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
f/g	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ kecuali $x=1$
g/f	$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ kecuali $x=0$

Grafik pada operasi fungsi tersebut dapat digambarkan seperti pada grafik berikut ini.



Gambar 66 Operasi pada fungsi

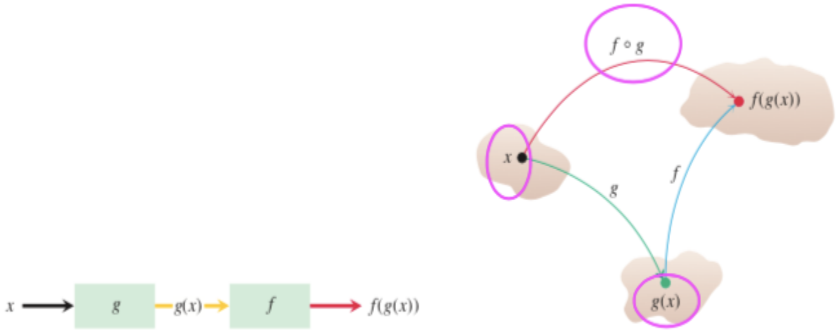
4.5 Fungsi Komposisi

Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.

Berdasarkan definisi diatas diperoleh bahwa $f \circ g$ dapat dibentuk ketika range dari g berada di domain f. Untuk menentukan $(f \circ g)(x)$, maka pertama ditentukan $g(x)$ dan kemudian menentukan $f\big(g(x)\big)$. Fungsi komposisi ini dapat di ilustrasikan seperti tampak pada diagram mesin berikut.



Gambar 67 Fungsi komposisi

Contoh :

Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x + 1$, maka

a. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$ dengan domain $[-1, \infty)$

b. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$ dengan domain $[0, \infty)$

c. $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$ dengan domain $[0, \infty)$

d. $(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$ dengan domain $[-\infty, \infty)$

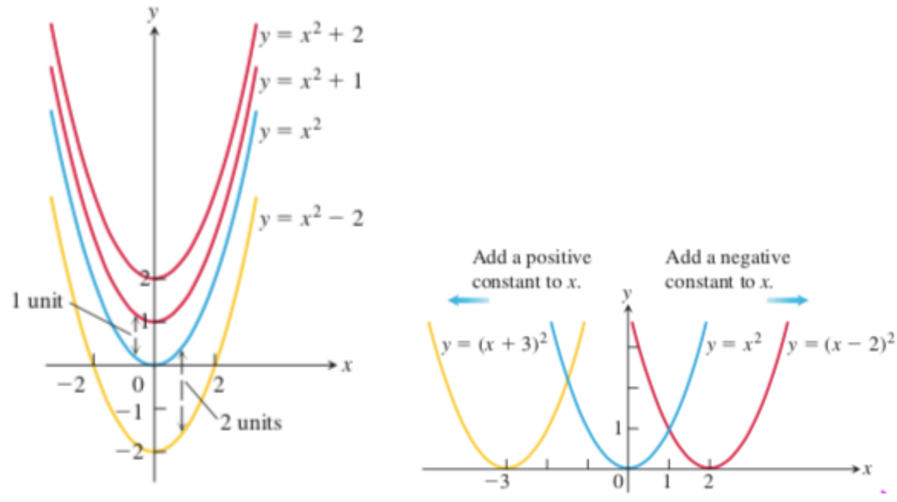
4.6 Pergeseran Grafik Fungsi

Pergeseran grafik sebuah fungsi dapat diperoleh dengan memasukkan beberapa variabel tertentu ke dalam fungsi yang ada. Pergeseran yang ada dibedakan menjadi dua yaitu pergeseran vertical dan pergeseran horizontal. Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.

Contoh :

Diketahui $f(x) = x^2$ maka diperoleh pergeseran grafik ini untuk $y = x^2 +$

1 bergeser keatas 1 unit, $y = x^2 - 2$ bergeser kebawah 2 unit, $y = (x+3)^2$ bergeser ke kiri 3 unit dan $y = (x-2)^2$ seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 68 Pergeseran vertikal dan horizontal

Selain pergeseran Vertikal dan Horizontal, ada juga penskalaan pada grafik yang disebut dnegan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.

ii. $y = \frac{1}{c}f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.

iii. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

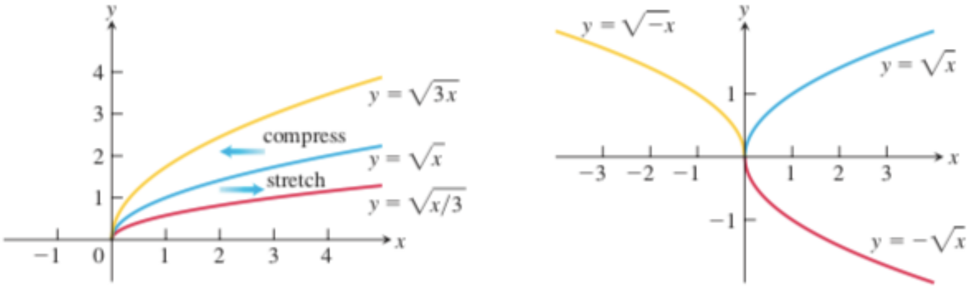
Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.

ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

Contoh :

Diketahui $y = \sqrt{x}$, maka diperoleh peregangan sebesar 3 secara vertikal jika dikalikan 3 yaitu $y = 3\sqrt{x}$ dan mengecil (terkompress) jika dikalikan dengan $\frac{1}{3}$ yaitu $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$. Selanjutnya akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebanyak 3 jika $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$. Kemudian disebut refleksi terhadap sumbu x jika grafik $y = -\sqrt{x}$ dan refleksi terhadap sumbu y jika $y = \sqrt{-x}$. Hal ini tampak pada gambar berikut ini.



Gambar 69 Kompress, stretch dan refleksi

4. **Rangkuman**

1. Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f+g$, $f-g$ dan fg seperti
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
2. Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.
3. Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser

kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.

4. Penskalaan pada grafik yang disebut dengan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

   Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.

   ii. $y = \frac{1}{c} f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.

   iii. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

   iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

   Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.

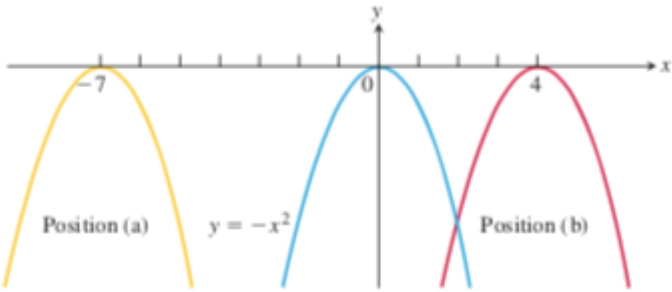
   ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

5. Latihan

1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $f + g$, dan $f.g$
   a. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
   b. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
2. Jika $f(x) = x + 5$ dan $g(x) = x^2 - 3$, tentukanlah
   a. $f\big(g(0)\big)$
   b. $g\big(f(0)\big)$
   c. $f\big(g(x)\big)$
   d. $g\big(f(x)\big)$
   e. $f\big(f(-5)\big)$
   f. $g\big(g(2)\big)$
   g. $f\big(f(x)\big)$
   h. $g\big(g(x)\big)$
3. Misalkan $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x$
4. Perhatikanlah tabel berikut

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

   Tentukanlah nilai dari
   a. $f\big(g(-1)\big)$
   b. $g\big(f(0)\big)$
   c. $f\big(f(-1)\big)$
   d. $g\big(g(2)\big)$
   e. $g\big(f(-2)\big)$
   f. $f\big(g(1)\big)$
5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = -x^2$ yang bergeser secara horizontal. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b)

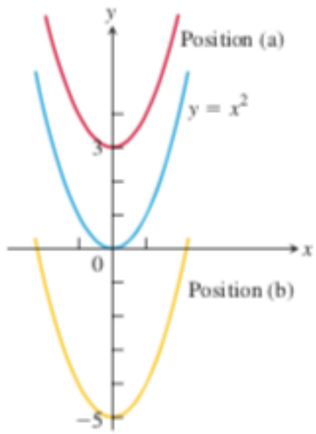


6. Evaluasi Pembelajaran

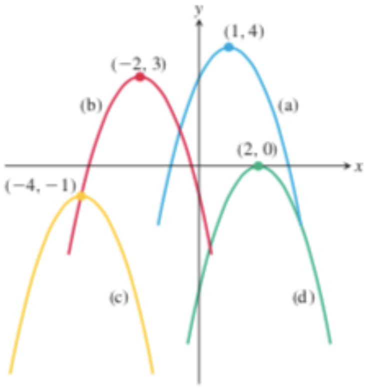
1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $\frac{f}{g}$, dan $\frac{g}{f}$
   a. $f(x) = 2, g(x) = x^2 + 1$
   b. $f(x) = 1, g(x) = 1 + \sqrt{x}$
2. Diketahui fungsi berikut

$$f(x) = x^2 + 2$$
$$g(x) = x - 2$$
$$h(x) = 2x - 5$$

   Tentukanlah
   a. $fogoh\ (x)$
   b. $gofoh\ (x)$
   c. $gohof\ (x)$
   d. $gogof\ (x)$
   e. $hohof\ (x)$
3. Misalkan $f(x) = 2x^3 - 4$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x + 2$
4. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b).



5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a), (b), (c) dan (d).



7. **Umpan Balik**

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul empat ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Fungsi. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari seperti pada soal latihan dan evaluasi pembelajaran.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Identitas	Kuadrat	Linear	Mutlak	Modulus
Polinomial	Eksponensial	Domain	Range	

4. Referensi

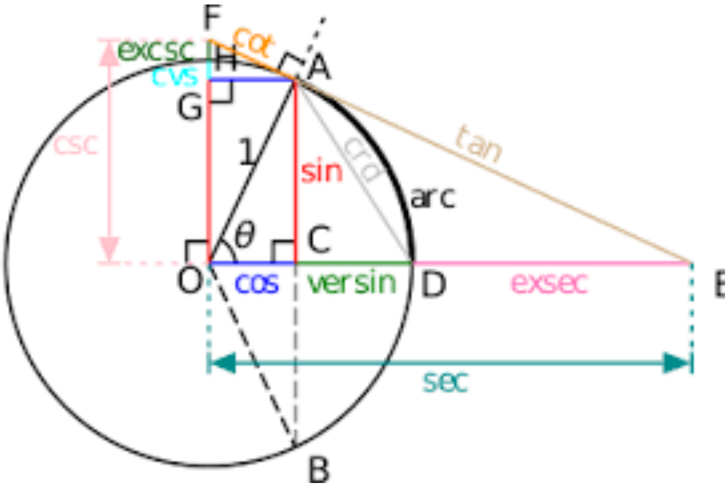
Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 5 TRIGONOMETRI

Perspektif yang luas merefleksikan kepribadian yang berkarakter dan dewasa

-SCP



Pendidikan Kimia

FKIP UKI

MODUL 5 TRIGONOMETRI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Trigonometri merupakan salah satu cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga, contohnya seperti sinus, kosinus, dan tangen. Trigonometri sangat banyak digunakan dibidang industri, teknik, astronomi, pelacakan signal, alat0alat medis dan lain sebagainya.

   Pada modul ini akan dibahas berbagai teori dan konsep trigonometri seperti rumus dasar trigonometri, identitas trigonometri, sudut-sudt berelasi dan berbagai pengembangan rumus-rumus trigonometri hingga aplikasi trigonometri.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul lima

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
   - Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinil orang lain.
   - Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
   - Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep

- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan
   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi
   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul Lima
   Kegunaan modul lima ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi trigonometri dan aplikasinya. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok
   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian Trigonometri, ukuran sudut, perbandingan trigonometri, koordinat kutub, identitas trigonometri, grafik fungsi trigonometri, aturan sinus, aturan kosinus, luas segitiga, rumus-rumus trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan trigonometri dan aplikasi trigonometri.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 9: Menguasai konsep trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga.

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga.

Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

5.1 Pengertian

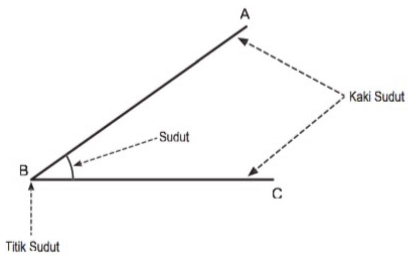
Kata trigonometri berasal dari bahasa yunani "trigonon" yang berarti tiga sudut dan "metron" yang berarti mengukur. Sehingga Trigonometri dapat disimpulkan sebagai cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga yang menggunakan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

Pada abad ketiga Masehi, astronom pertama ali mencatat panjang sisi-sisi dan sudut-sudut dari segitiga siku-siku antara masing-masing sisi yang memiliki hubungan. Perhitungan ini didefinisikan menjadi fungsi trigonometri yang saat ini menjadi bagian dari matematika murni dan terapan. Contohnya untuk menganalisis metode dasar seperti transformasi fourier atau gelombang persamaan, menggunakan fungsi trigonometri untuk memahami fenomena yang berhubungan dengan lingkaran melalui banyak penggunaan dibidang yang berbeda seperti fisika, teknik mesin dan listrik, music dan akustik, astronomi dan biologi.

Awalnya trigonometri dapat dilacak hingga zaman Mesir Kuno, Babilonia, dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun lalu. Matematikawan India menjadi perintis perhitungan variabel aljaar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.

5.2 Ukuran Sudut

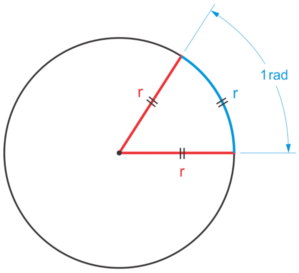
Sudut dapat dibentuk oleh dua garis yang memiliki titik pangkal yang sama (berimpit). Berikut ini gambar sudut dengan melakukan rotasi sinar garis yang membentuk sudut, biasanya disebut sebagai sudut :



Gambar 70 Ukuran sudut

Dalam trigonometri, ada dua macam ukuran sudut yang sering digunakan yaitu ukuran sudut dalam derajat dan ukuran sudut dalam radian, yang dilambangkan dengan ° dibaca derajat dan *rad* dibaca radian. Adapun hubungan antara keduanya adalah

$$1\ rad = 57{,}2958 \ldots°$$
$$1° = 0{,}0174 \ldots rad$$



Gambar 71 Hubungan radian dan derajat

Satu derajat (1°) didefinisikan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh $\frac{1}{360}$ putaran atau dapat ditulis dengan $1° = \frac{1}{360}$ putaran.

Sehingga untuk membuktikan hubungan radian dan derajat diatas dapat menggunakan konsep perbandingan sudut pusat dan panjang busur.

$$\frac{sudut\ pusat}{360°} = \frac{panjang\ busur}{keliling}$$

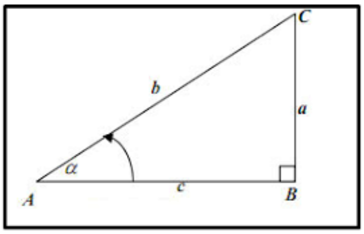
ingat bahwa sudut pusat sebesar 1 radian, panjang busur adalah jari-jari r dan keliling adalah $2\pi r$. Sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{1\ rad}{360°} = \frac{r}{2\pi r}$$

atau dapat disederhanakan mendekati $1° = \frac{\pi}{180}$

5.3 Perbandingan Trigonometri

Perbandingan pada trigonometri dapat diartikan sebagai perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Perhatikan segitia ABC dibawah ini.



Gambar 72 Perbandingan trigonometri

Sudut B merupakan sudut siku-siku yang besarnya 90°, sisi AC atau sisi yang berada didepan sudut siku-siku disebut sebagai sisi miring (hipotebusa).

Perbandingan sisi-sisi segitiga dapat mendefinisikan bentuk dasar trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

atau

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$

Lebih lanjut Perbandingan dari beberap bentuk trigonometri ini menghasilkan bentuk trigonometri yang lain yaitu

$$cesec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c}$$

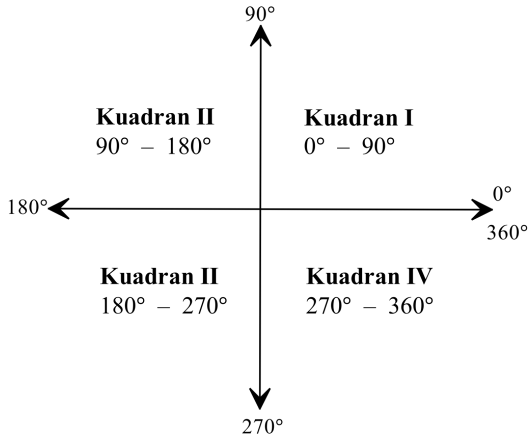
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

atau

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a}$$

Perbandingan trigonometri pada sudut-sudut yang berelasi dapat digunakan untuk menentukan nilai sinus, cosinus dan tangennya. Sudut-sudut berelasi ini dapat dibentuk pada sudut-sudut tertentu, yaitu pada sudut $90°, 180°, 270°$ dan $360°$.

Sudut-sudt berelasi pada trigonometri yaitu dengan memperhatikan kuadran sudut dan sudut istimewa yang ada.



Gambar 73 Kuadran

Pada kuadran I, semua bentuk trigonometri bernilai positif.
Pada kuadran II, hanya nilai sinus dan kosekan yang bernilai positif.
Pada kuadra III, hanya nilai Tangen dan Cotangen yang bernilai positif.
Pada kuadran IV, hanya nilai Kosinus dan Sekan yang bernilai positif.
Berdasarkan sifat ini, maka dapat diperoleh bahwa nilai-nilai trigonometri pada sudut-sudt yang berelasi sebagai berikut:

1. Kuadran I

$$\cos(90-\alpha)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\tan(90-\alpha)^\circ = \cot\alpha^\circ$$
$$\cot(90-\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$
$$\sec\,(90-\alpha)^\circ = \csc\alpha^\circ$$
$$\csc(90-\alpha)^\circ = \sec\alpha^\circ$$

2. Kuadran II

$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180-\alpha)^\circ = -\tan\alpha^\circ$$
$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cot\alpha^\circ$$
$$\sec(180-\alpha)^\circ = -\sec\alpha^\circ$$

3. Kuadran III

$$\sin(180+\alpha)^\circ = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(180+\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180+\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

4. Kuadran IV

$$\sin(360-\alpha)^\circ = \sin\,(-\theta^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(360-\alpha)^\circ = \cos\,(-\theta^\circ) = \cos\alpha^\circ$$

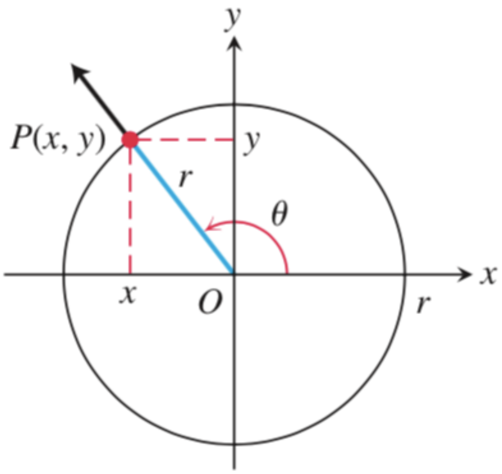
$$\tan(360-\alpha)° = \tan\,(-\theta°) = -\tan\alpha°$$

Selain itu untuk bilangan bulat n berlaku

$$\sin(\alpha+n.360)° = \sin\alpha°$$
$$\cos(\alpha+n.360)° = \cos\alpha°$$
$$\tan(\alpha+n.360)° = \tan\alpha°$$

5.4 Koordinat Kutub (Koordinat Polar)

Pada umumnya letak suatu titik pada suatu bidang $x-y$ dapat disajikan dengan menggunakan koordinat kartesius dan koordinat kutub. Perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 74 Koordinat kutub

Jika pada koordinat kartesius diketahui titik $P(x, y)$ maka dapat kita ubah dalam bentuk trigonometri dengan menggunakan perbandingan sisi segitiga siku-siku seperti berikut

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $cosec\ \theta = \frac{r}{y}$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$

$\cot\theta = \frac{x}{y}$

Berdasarkan persamaan ini, maka titik P pada koordinat kartesius diata dapat kita ubah menjadi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ sehingaa titik P menjadi $(r\cos\theta\,, r\ sin\ \theta)$. Pada koordinat polar atau kutub, titik P biasanya dituliskan dengan $P(r, \theta)$.

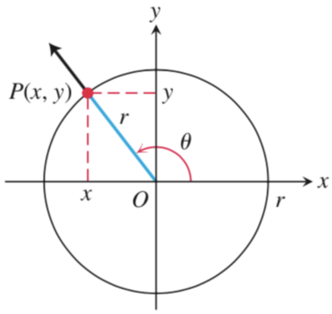
Berikut ini nilai sin, cos dan tan pada sudut-sudut istimewa

Derajat	**-135**	**-90**	**-45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**
Radian	$-\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
Sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tan	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$

5.5 Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri dapat diperoleh dari hubungan phytagoras yang ditinjau secara geometri. Perhatikan bahwa trigonometri dikembangkan dari segitiga siku-siku. Lebih lanjut, dapat kita gunakan untuk menemukan identitas trigonometri.



Gambar 75 Identitas Trigonometri

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ingat bahwa $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, maka

$$r^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2$$
$$r^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$
$$r^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

atau biasanya ditulis dengan

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

(1)

selanjutnya jika persamaan ini diubah dengan membagikannya dengan $\sin^2\theta$ diperoleh

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta$$

atau

$$\cot^2\theta - cosec^2\theta = 1$$

Jika persamaan (1) dibagikan dengan $\cos^2\theta$ diperoleh

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

atau

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

5.6 Grafik Fungsi Trigonometri

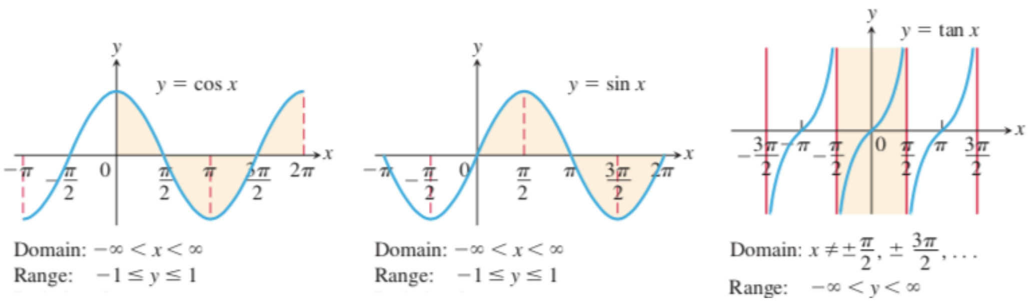
Fungsi yang memetakan himpunan sudut x° ke himpunan bilangan riil $\sin x°$, $\cos x°$, dan $\tan x°$ disebut sebagai fungsi sinus, fungsi kosinus dan fungsi tangen, yang dilambangkan dengan:

$f: x \to \sin x°$ atau $f(x) = \cos x°$

$f: x \to \cos x°$ atau $f(x) = \cos x°$

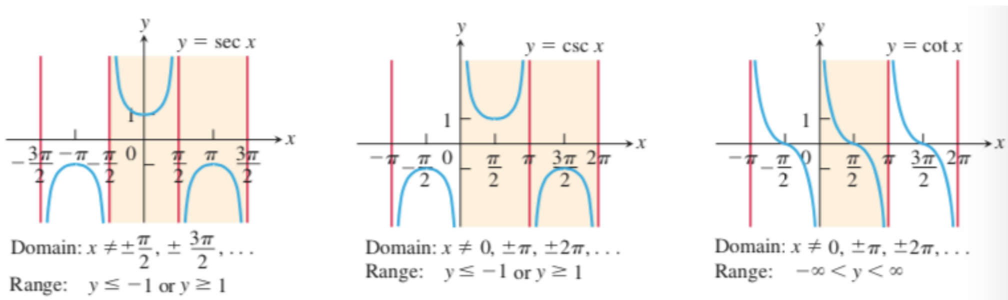
$f: x \to \tan x°$ atau $f(x) = \tan \square°$

fungsi-fungsi trigonometri tersebut dapat digambarkan seperti pada grafik berikut ini.



Gambar 76 Grafik fungsi sinus, kosinus dan tangen

Lebih lanjut digambarkan beberapa fungsi trigonometri yang lain yaitu untuk sekan, kosekan dan kotangen, seperti tampak pada gambar berikut ini.

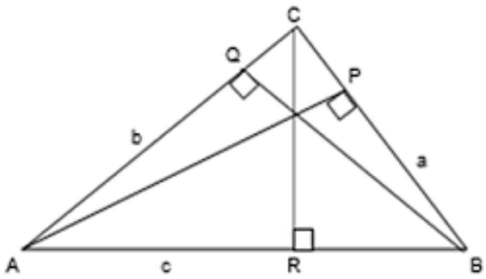


Gambar 77 Grafik sekan, kosekan dan kotangen

5.7 Dalil-Dalil dalam Segitiga

1. Aturan Sinus

Aturan sinus diperoleh dengan memperhatikan segitiga lancip. Perhatikanlah segitiga lancip berikut ini.



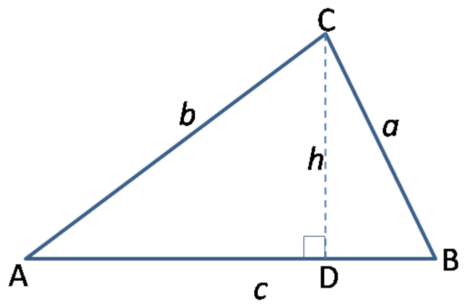
Gambar 78 Aturan sinus

Maka aturan sinus adalah

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. Aturan Kosinus

Aturan kosinus dapat diperoleh dengan memperhatikan berbagai bentuk segitiga. Sebagai contohnya perhatikan segitiga beriku ini.



Gambar 79 Aturan kosinus

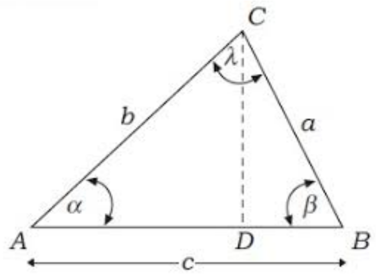
Maka aturan kosinus yang terbentuk adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

3. Luas Segitiga

Menentukan luas segitiga dapat dilakukan dengan menggunakan trigonometri.

Perhatikan segitiga berikut.



Gambar 80 Luas segitiga

Berdasarkan gambar diatas, maka luas segitiga dapat dirumuskan dengan

$$L = \frac{1}{2} ab \sin \lambda$$
$$L = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$
$$L = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

4. Rangkuman

1. Hubungan antara radian dan derajat

$$1\, rad = 57{,}2958 \ldots °$$
$$1° = 0{,}0174 \ldots rad$$
$$\frac{1\, rad}{360°} = \frac{r}{2\pi r}$$

2. Perbandingan sisi-sisi segitiga dapat mendefinisikan bentuk dasar trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$
$$\cos \alpha = \frac{AB}{A\square} = \frac{c}{b}$$
$$\tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

atau

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$
$$cesec\ \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

atau

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a}$$

3. Sudut-sudut berelasi pada trigonometri yaitu dengan memperhatikan kuadran sudut dan sudut istimewa yang ada.
   a. Kuadran I

$$\cos(90-\alpha)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\tan(90-\alpha)^\circ = \cot\alpha^\circ$$
$$\cot(90-\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$
$$\sec\,(90-\alpha)^\circ = \csc\alpha^\circ$$
$$\csc(90-\alpha)^\circ = \sec\alpha^\circ$$

   b. Kuadran II

$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180-\alpha)^\circ = -\tan\alpha^\circ$$
$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cot\alpha^\circ$$
$$\sec(180-\alpha)^\circ = -\sec\alpha^\circ$$

   c. Kuadran III

$$\sin(180+\alpha)^\circ = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(180+\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180+\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

   d. Kuadran IV

$$\sin(360-\alpha)^\circ = \sin\,(-\theta^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(360-\alpha)^\circ = \cos\,(-\theta^\circ) = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(360-\alpha)^\circ = \tan\,(-\theta^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$

   Selain itu untuk bilangan bulat n berlaku

$$\sin(\alpha + n.360)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\cos(\alpha + n.360)^\circ = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(\alpha + n.360)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

4. Berikut ini nilai sin, cos dan tan pada sudut-sudut istimewa

Derajat	**-135**	**-90**	**-45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**
Radian	$-\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
Sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tan	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$

5. Identitas trigonometri

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta$$

atau

$$\cot^2\theta - cosec^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

6. Aturan sinus adalah

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

7. Aturan kosinus yang terbentuk adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

8. Luas segitiga dapat dirumuskan dengan

$$L = \frac{1}{2}ab\sin\lambda$$
$$L = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$
$$L = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

5. Latihan

1. Uraikanlah bentuk berikut dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan kosinus, kemudian sederhanakan
   a. $\cos(x - 60)°$
   b. $\cos(x + 45)°$
   c. $\sin(x - 120)°$
   d. $\sin(x + 30)°$

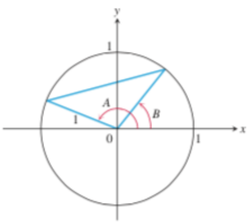
2. Buktikanlah bahwa
   a. $\sin(90 - x)° = \cos x$
   b. $\cos(270 + x)° = \sin x$
   c. $\sin(270 + x) = -\sin x$
   d. $\cos(180 - x) = -\cos x$
3. Jika $\tan A = 1$ dan $\tan B = \sqrt{3}$, tentukanlah :
   a. $\tan(A + B)$
   b. $\tan(A - B)$
4. buktikanlah bahwa

$$\tan(\alpha + 45) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

5. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi $c = 2$ dan sudut $A = \frac{\pi}{4}$ dan $B = \frac{\pi}{3}$. Tentukanlah panjang a, b dan besar sudut C.

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Untuk $0 \le x \le 2\pi$, tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut
   a. $\sin 2x = \sin 3x + \sin x$
   b. $6\cos 2x - 11\cos x + 8 = 0$
   c. $3\cos 2x - 10\cos x + 7 = 0$
   d. $\cos^2 2x - 5\sin 4x - 6\sin^2 2x = 0$
2. Gunakanlah rumus penjumlahan trigonometri untuk menyelesaiakan persamaan berikut
   a. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
   b. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
   c. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
   d. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
   3. Buktikanlah bahwa $\tan(A - B) = \frac{\tan \square - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
4. Perhatikanlah gambar dibawah ini. Gunakanlah aturan kosinus untuk membuktikan $\cos(A - B)$



5. Gunakanlah rumus $\cos(A - B)$ untuk mengidentifikasi $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ untuk memperoleh $\sin(A + B)$.

6. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi $a = 2$ dan $b = 3$ dan $C = 60°$. Tentukanlah panjang dari c. Kemudian tentukanlah besar sudut B dengan menggunakan aturan sinus.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

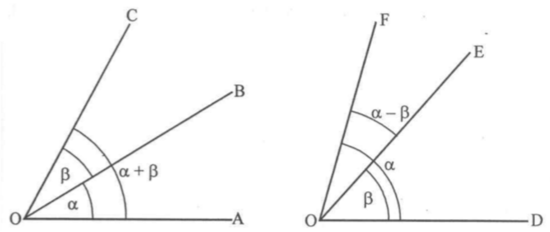
Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke- 10 : Menguasai Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

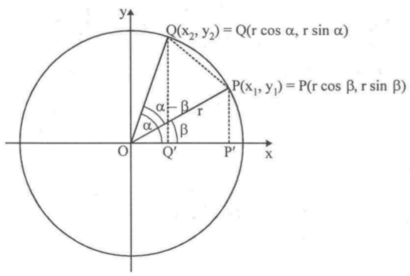
5.8 Rumus-Rumus Trigonometri

Misalnya α dan β adalah sudut-sudut sembarang. Maka jumlah α dan β atau $(\alpha + \beta)$ dan selisih α dan β atau $(\alpha - \beta)$ dapat diilustrasikan dengan gambar berikut.



Gambar 81 Jumlah dan selisih sudut

Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut diantaranya adalah



Gambar 82 Jumlah dan selisih sudut koordinat polar

1. Rumus untuk $cos\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$cos\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

2. Rumus untuk $sin\ (\alpha + \beta)$ dan $sin\ (\alpha - \beta)$

$$sin\ (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$
$$sin\ (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

3. Rumus untuk $tan\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$
$$tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Rumus trigonometri untuk sudut rangkap diantaranya adalah

1. Rumus untuk $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Bukti :

Untuk membuktikan rumus ini, dapat kita gunakan rumus jumlah dua sudut yaitu

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$

$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$

$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2. Rumus untuk $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Bukti :

Untuk membuktikan rumus ini, dapat kita gunakan rumus jumlah dua sudut yaitu

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$

$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

3. Rumus untuk $\tan 2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Bukti :

Dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \beta)$$
$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

atau pembuktian lainnya dapat dilakukan dengan

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha}}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Rumus trigonometri untuk sudut pertengahan diantaranya adalah

1. Rumus untuk $\sin\frac{1}{2}\alpha$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

2. Rumus untuk $\cos\frac{1}{2}\alpha$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}}$$

3. Rumus untuk $\tan\frac{1}{2}\alpha$

   $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ untuk $\cos\alpha \neq -1$
   $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ untuk $\sin\alpha \neq 0$
   atau

$$\tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

5.9 Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri dituliskan dengan $\sin x = \sin \alpha$ dimana $\alpha \in R$. Untuk meyelesaiakn persamaan trigonometri dapat dilakukan dengan menggunakan hubungan perbandingan trigonometri pada sudut berelasi seperti

$$\sin(180° - \alpha°) = \sin \alpha°$$
$$\sin(\alpha° + k.360°) = \sin \alpha°$$

dengan menggunakan hubungan-hubungan diatas, maka penyelesaian persamaan trigonometri $\sin x° = \sin \alpha°$ dapat ditetapkan sebagai berikut

1. Jika $\sin x° = \sin \alpha°$ dimana $x \in R$, maka $x = \alpha° + k.360°$ atau $x = (180° - \alpha°) + k.360°$ dengan $k \in R$. (x dalam derajat)
2. Jika $\sin x° = \sin A$ dimana $x \in R$, maka $x = A + k.2\pi$ atau $x = (x - A) + k.2\pi$ dengan $k \in R$. (x dalam radian)

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari tiap persamaan berikut ini

$\sin 2x° = \sin 40°$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360°$

$\sin 3x° = \sin 45°$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360°$

Jawab:

a. $\sin 2x° = \sin 40°$, maka diperoleh

$2x = 40° + k.360$ atau $2x = (180° - 40°) + k.360$

$x = 20° + k.180$ atau $2x = 140° + k.360$

$x = 70° + k.180°$

untuk $k = 0$ maka $x = 20°$ atau $x = 70°$

untuk $k = 1$ maka $x = 200°$ atau $x = 250°$

Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah $\{20°, 70°, 200°, 250°\}$

b. $\sin 3x° = \sin 45°$, maka diperoleh

$3x = 45° + k.360$ atau $3x = (180° - 45°) + k.360$

$x = 15° + k.120$ atau $3x = 135° + k.360$

$x = 45° + k.120°$

untuk $k = 0$ maka $x = 15°$ atau $x = 45°$

untuk $k = 1$ maka $x = 135°$ atau $x = 165°$

untuk $k = 2$ maka $x = 255°$ atau $x = 285°$

Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah $\{15°, 45°, 135°, 165°, 255°, 285°\}$

Selanjutnya persamaan trigonometri untuk kosinus dan tangen dapat juga diselesaikan seperti pada $\sin x = \sin \alpha$ dimana $\alpha \in R$. Untuk meyelesaiakn persamaan trigonometri $\cos x = \cos \alpha$ dan $\tan x = \tan \alpha$ dapat dilakukan dengan menggunakan hubungan perbandingan trigonometri pada sudut berelasi, yaitu

$$\cos x = \cos \alpha$$

Nilai cosinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 4 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° \\ -\alpha° + k.360° \end{cases}$$

Sedangkan untuk

$$\tan x = \tan \alpha$$

Nilai tangen suatu sudut positif di kuadran 1 dan 3 sehingga untuk persamaan $\tan x = \tan \alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \alpha° + k.180°$$

Persamaan trigonometri lainnya dapat berebtuk persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ maupun berbentuk polynomial. Jika persamaan trigonometri kita berbentuk persamaan kuadrat, maka bentuk penyelsaiannya dapat menggunakan aturan dalam persamaan kuadrat, yaitu dengan pemfaktoran maupun dengan melengkapkan kuadrat sempurna. Untuk menyelesaikan bentuk persamaan kuadrat diperlukan wawasan tentang identitas trigonometri seperti

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

perlu diperhatikan bahwa rentang untuk nilai sinus dan kosinus adalah

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$
$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Contoh:

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari

a. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ untuk interval $0° \leq x \leq 360°$
b. $2 - 2\cos^2 x = \sin x$ untuk interval $0° \leq x \leq 360°$

Jawab:

a. Misalnya $p = \cos x$ maka $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ dapat diubah menjadi

$$p^2 - p - 2 = 0$$
$$(p - 2)(p + 1) = 0$$

Jadi $p_1 = 2$ atau $p_1 = 1$

$\cos x = 2$ atau $\cos x = 1$, dengan $\cos x = 2$ tidak memenuhi penyelesaian. Sehingga $\cos x = -1$

$$x = 180° + k.360°$$

diperoleh nilai $x = 180°$ atau himpunan penyelesaiannya adalah $\{180°\}$

b. $2 - 2\cos^2 x = \sin x$ dapat diubah menjadi

$$2(1 - \cos^2 x) = \sin x$$
$$2(\sin^2 x) = \sin x$$
$$2\sin^2 x = \sin x$$
$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$
$$\sin x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = 0$ atau $\sin x = \frac{1}{2}$

i. $\sin x = 0$

$$x = 0° + k.360°$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 0°$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 360°$

$$x = 180° + k.360°$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_3 = 180°$

ii. $\sin x = \frac{1}{2}$

kuadran I

$x = 30° + k.360°$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_4 = 30°$

Kuadran II

$x = (180° - 30°) + k.360°$

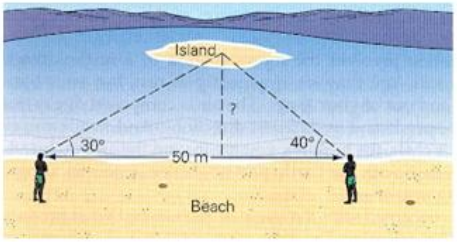
$x = 150° + k.360°$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_5 = 150°$

Himpunan penyelesaian dari persamaan diatas adalah $\{0°, 30°, 150°, 180°\}$

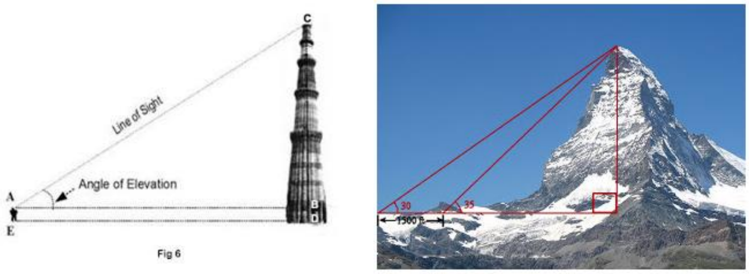
5.10 Aplikasi Trigonometri

Dalam kehidupan sehari – hari kita sering melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki ataupun gedung bertingkat yang sedang dibangun. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri. Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas. Itu baru sebagian kecil dari manfaat trigonometri, perlu alasan lain untuk menemukan rumus-rumus trgonometri membantu hidup kita. Berikut beberapa contoh penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, misalya dalam navigasi untuk menemukan jarak dari pantai ke suatu titik di laut.



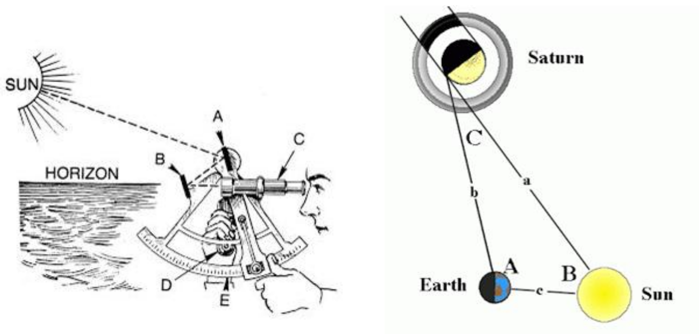
Gambar 83 Titik sudut laut

Trigonometri umumnya juga digunakan dalam mencari ketinggian menara dan pegunungan, pohon dan sebagainya.



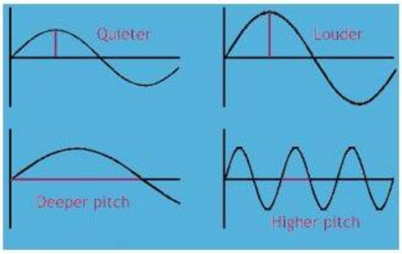
Gambar 84 Titik gunung dan menara

Trigonometri juga digunakan dalam oseanografi dalam menghitung ketinggian gelombang air laut dan digunakan astronomi dalam menentukan jarak antara benda-benda angkasa.



Gambar 85 Jarak Bumi dan Planet lain

Fungsi sinus dan cosinus merupakan dasar bagi teori fungsi periodik seperti pada gelombang suara dan cahaya.



Gambar 86 Gelombang suara dan cahaya

Arsitek menggunakan trigonometri untuk menghitung beban struktural, kemiringan atap, permukaan tanah dan banyak aspek lain, termasuk bayangan matahari dan sudut cahaya.

4. Rangkuman

1. Rumus untuk $cos\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$cos\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$cos\ (\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

2. Rumus untuk $sin\ (\alpha + \beta)$ dan $sin\ (\alpha - \beta)$

$$sin\ (\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$sin\ (\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

3. Rumus untuk $tan\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

4. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
5. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
6. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
7. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos \square}{2}}$
8. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$
9. $\tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

10. $\sin(180° - \alpha°) = \sin \alpha°$
11. $\sin(\alpha° + k.360°) = \sin \alpha°$
12. Jika $\sin x° = \sin \alpha°$ dimana $x \in R$, maka $x = \alpha° + k.360°$ atau $x = (180° - \alpha°) + k.360°$ dengan $k \in R$. (x dalam derajat)
13. Jika $\sin x° = \sin A$ dimana $x \in R$, maka $x = A + k.2\pi$ atau $x = (x - A) + k.2\pi$ dengan $k \in R$. (x dalam radian)
14. Untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha$ penyelesaiannya adalah:
$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° \\ -\alpha° + k.360° \end{cases}$$
15. Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas.

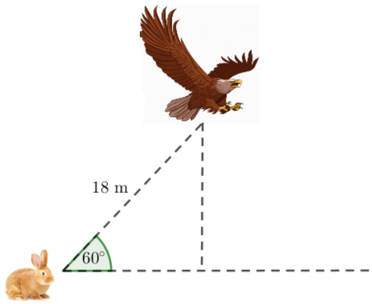
5. Latihan

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Jika titik P di tengah-tengah AB dan titik Q di tengah-tengah BC, maka jarak titik H dengan garis PQ adalah … .
2. Jika $sin\ \alpha, cos\ \alpha, \frac{3}{2}$ membentuk barisan geometri, maka jumlah 8 suku pertamanya adalah … .
3. Jika $\cos x = 2 \sin x$, maka nilai $\sin x \cos x$ adalah
4. Jika $3 \sin x + 4 \cos y = 5$, maka nilai maksimum $3 \cos x + 4 \sin y$ adalah
5. Diketahui $1 + \log_3(\tan x) + (\log_3(\tan x))^2 + (\log_3(\tan x))^3 + \cdots = \frac{2}{3}$, dengan $0 \le x \le \pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}$, nilai $\sin 2x$ adalah

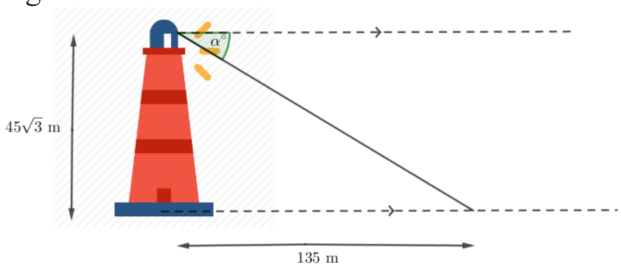
6. Evaluasi Pembelajaran

1. Jika $\sin x + \cos x = a$, maka $\sin^4 x + \cos^4 x = \cdots$
2. Jika sudut α memnuhi $\cos^2 \alpha + 2 \sin(\pi - \alpha) = \sin^2(\pi + \alpha) + 1\frac{1}{2}$ maka $\sin \alpha = \cdots$
3. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle A = \alpha$, $\angle B = 90°$ dan $\angle C = \gamma$. Jika $\cos \alpha = x$, maka $\cos(\alpha + 2\,\gamma) = \cdots$
4. Jika $\sin \alpha + \sin \beta = 2\sqrt{A}$ dan $\cos \alpha + \cos \beta = 2\sqrt{B}$, maka $\cos(\alpha - \beta) = \cdots$

5. Misalkan ABC adalah segitiga siku-siku pda titik C. Jika panjang sisi dihadapan A, B dan C berturut-turut adalah a, b, c maka $\cos 2A = \cdots$
6. Seekor kelinci yang berada di lubang tanah tempat persembunyiannya melihat seekor elang yang sedang terbang dengan sudut 60◦ (lihat gambar). Jika jarak antara kelinci dan elang adalah 18 meter, maka tinggi elang dari atas tanah adalah ⋯ meter.

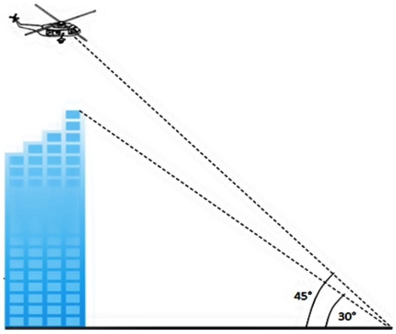


7. Perhatikan gambar di bawah ini.



Diketahui seseorang yang berada di atas mercusuar dengan tinggi 453 meter sedang mengamati sebuah objek di bawahnya dengan jarak antara objek dan mercusuar sejauh 135 meter. Sudut depresi yang terbentuk adalah

8. Dari suatu titik pada bukit, tampak ujung-ujung suatu landasan pacu Bandara Kuala Namu yang sedang dibangun horizontal dengan sudut depresi 53° dan 14°. Jarak ujung landasan yang lebih dekat sepanjang lereng bukit adalah 870 meter. Jika $\sin 53° = 0{,}8$ dan $\tan 14° = 0{,}25$, maka panjang landasan pacu tersebut adalah ⋯ meter.
9. Sebuah mobil melaju dari tempat A sejauh 16 km dengan arah 40°, kemudian berbelok sejauh 24 km ke tempat B dengan arah 160°. Jarak A dan B adalah…km.
10. Perhatikan gambar berikut.



Gambar di atas menunjukkan seorang anak yang berada pada jarak 32 meter dari kaki sebuah gedung. Ia mengamati puncak gedung dan helikopter di atasnya dengan sudut elevasi masing-masing $30°$ dan $45°$. Hitunglah tinggi helikopter tersebut dari atas gedung.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul lima ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Trigonometri dan Aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.
2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.
3. Daftar Istilah

Trigonometri	Identitas	Rangkap	Sinus
Kosinus	Tangen	Sekan	Kosekan
Kotangen	Radian	Derajat	

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

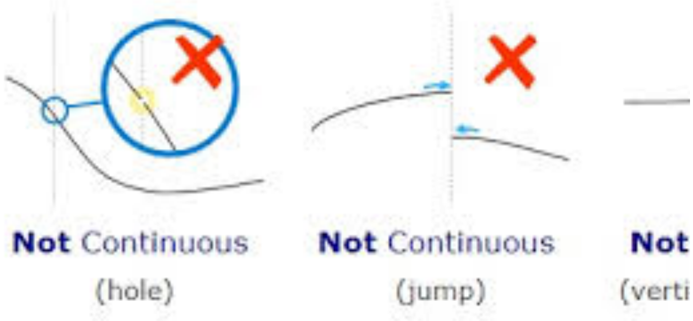
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

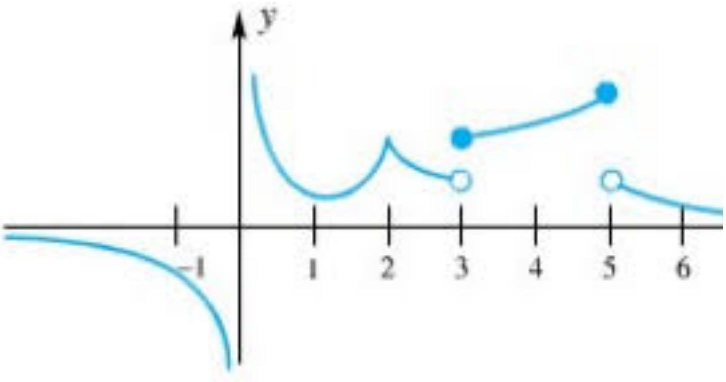
Modul 6

LIMIT DAN KEKONTINUAN

Berani menembus zona nyaman akan melatiha diri untuk siap sedia dalam segala situasi dan tantangan di masa depan.

-SCP





Pendidikan Kimia

FKIP UKI

MODUL 6 LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Limit merupakan suatu materi dasar yang digunakan dalam menentukan batas suatu fungsi tertentu. Limit banyak digunakan dalam menyelesaiakn berbagai permasalahan sehari-hari seperti dalam perusahaan memproduksi barang tertentu dan bagian kesehatan. Sering sekali limit menjadi materi yang sulit dimengerti oleh peserta didik, namun dengan adanya penjebaaran yang rinci melalui modul ini, diharapkan mahasiswa dapat menguasai materi yang ada hingga akhirnya dapat mengaplikasikannya dikemudian hari bahkan menyelesaikan berbagai permasalahan yang ada. Dalam modul ini akan membuat materi limit dari yang sangat dasar sekali dan modul ini dapat digunakan secara mandiri maupun berkelompok.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul enam

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
   - Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinil orang lain.
   - Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul Enam

   Kegunaan modul enam ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi limit dan kekontinuan beserta aplikasinya. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertianlimit, definisi limit dengan epsilon delta, operasi limit, limit tak hingga dan asimtot limit.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 11: Menguasai konsep dasar limit dan kekontinuan beserta operasinya

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

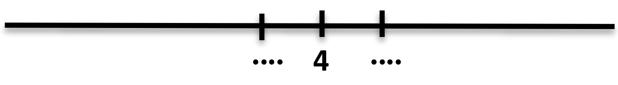
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan limit dan kekontinuan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

6.1 Apa itu Limit?

Secara etimologi, limit berarti batas. Didalam matematika, limit merupakan konsep dasar di dalam analisis dan kalkulus tentang kelakuan suatu fungsi mendekati titik masukan tertentu.

Misalkan kita memiliki garis bilangan berikut :



Gambar 87 Garis bilangan

Pastinya terdapat bilangan yang tak terhingga banyaknya yang mendekati nilai 4 baik dari arah kiri maupun kanan.

Matematikawan abad ketujuh belas sangat tertarik mempelajari gerak benda-benda di dekat bumi, gerak planet dan bintang. Studi ini melibatkan kecepatan benda dana rah geraknya setiap saat, dan mereka mengetahui arah pada saat tertentu sepanjang garis yang bersinggungan dengan jalur gerak. Konsep batas adalah dasar untuk menemukan kecepatan benda yang bergerak dan garis singgung kurva. Dalam modul ini kita akan mengembangkan limit secara intuitif dan formal. Hal ini dilakukan dengan menggunakan batas untuk menggambarkan cara suatu fungsi bervariasi. Beberapa fungsi bervariasi. Fungsi dapat digambarkan yaitu dengan fungsi yang kontinu maupun fungsi yang tidak kontinu atau biasa disebut dengan fungsi yang melompat. Fungsi-fungsi yang akan dibahas bervariasi dan tidak menentu, atau cenderung meningkat atau cenderung menurun.

Limit muncul ketika menemukan laju perubahan sesaat dari suatu fungsi atau garis singgung kurva. Ini merupakan definisi informal limit yang menunjukkan bagaimana kita menghitung nilai limit.

6.2 Limit Fungsi

Suatu fungsi $f(x)$ dapat kita tentukan nilainya dengan mensubstitusikan nilai domainnya kepada fungsi yang ada. Namun pada beberapa fungsi tertentu, ada kondisi dimana kita tertarik untuk mengetahui nilai dari fungsi didekat titik tertentu c, namun tidak di c. Misalnya kita memiliki fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Maka kita dapat melihat bagaimana kondisi fungsi $f(x)$ tersebut disekitar $x = 1$, karena penyelesaian dari fungsi tersebut adalah $x \neq 1$ (karena penyebut tidak boleh bernilai 0). Maka untuk menyelesaikannya dapat kita sederhanakan terlebih dahulu menjadi

$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ untuk $x \neq 1$.

Dalam hal ini maka kita simpulkan bahwa fungsi $f(x)$ dapat terdefinisi kecuali di titik $x = 1$, sehingga biasa disebut dengan terdefinisi pada interval terbuka. Sehingga fungsi tersebut tidak kontinu di titik $x = 1$. Namun jika sembarang nilai $f(x)$ berada didekat L untuk semua nilai

x yang mendekati nilai c, kita katakan bahwa nilai $f(x)$ pada batas L ketika x mendekati c, dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Sehingga pada fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dapat kita simpulkan bahwa

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ atau $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

6.3 Aturan Limit

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$
2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$
3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$
4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, *c* dan *k* adalah bilangan riil dan
$\lim_{x \to c} f(x) = L, \lim_{x \to c} g(x) = M$, maka
   a. Aturan penjumlahan
   $$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$
   b. Aturan selisih
   $$\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$
   c. Aturan perkalian dengan konstanta
   $$\lim_{x \to c} \big(k.f(x)\big) = k.L$$

d. Aturan pembagian

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = L.M$$

e. Aturan pangkat

$\lim_{x \to c} \big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

f. Aturan akar

$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

g. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

h. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

i. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

j. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

Contoh :

1. $\lim_{x \to c} (x^3 + 4x - 3) = \lim_{x \to c} x^3 + \lim_{x \to c} 4x - \lim_{x \to c} 3 = c^3 + 4c - 3$

2. $\lim_{x \to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \to c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \to c} (x^2 + 5)}$

$$= \frac{\lim_{x \to c} x^4 + \lim_{x \to c} x^2 - \lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2 + \lim_{x \to c} 5}$$

$$= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

3. $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -2} (4x^2 - 3)}$

$$= \sqrt{\lim_{x \to -2} 4x^2 - \lim_{x \to -2} 3}$$

$$= \sqrt{4(-2)^2} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{16 - 3}$$

$$= \sqrt{13}$$

6.4 Definisi Limit

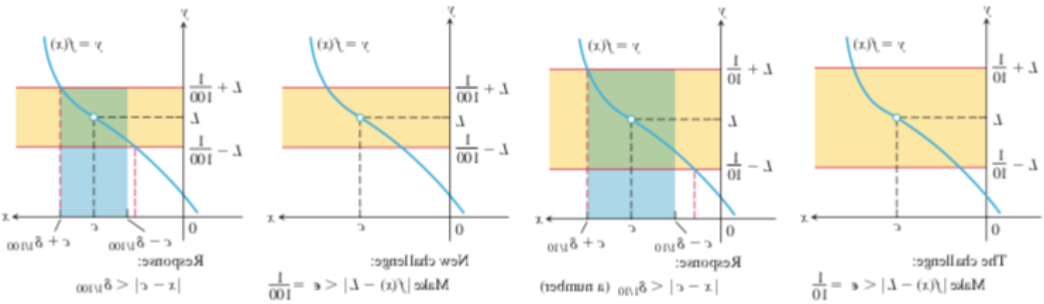
Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval terbuka c, kecuali di titik c. Maka nilai limit dari $f(x)$ dimana x mendekati c adalah L, yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat sembarang bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku,

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Definisi ini dapat kita lihat representasinya pada grafik berikut ini



Gambar 88 Definisi limit epsilon dan delta

Contoh :

Buktikanlah bahwa

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$$

Jawab :

Dari bentuk limit yang ada diketahui bahwa $c = 1$, $f(x) = 5x - 3$ dan $L = 2$. Misalkan $\epsilon > 0$, maka kita harus menemukan $\delta > 0$ sehingga jika $x \neq 1$ dan x berada disekitar δ dari $c = 1$, yaitu ketika

$$0 < |x - 1| < \delta$$

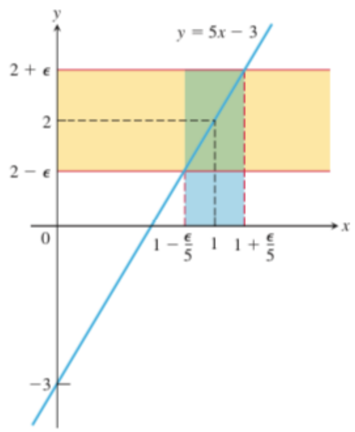
adalah benar bahwa $f(x)$ sekitar ϵ dari $L = 2$, seingga

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

Sebaliknya kita akan menemukan nilai δ melalui pertidaksamaan ϵ:

$$\begin{aligned}|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| \\ < \epsilon \\ 5|x - 1| < \epsilon \\ |x - 1| < \frac{\epsilon}{5}\end{aligned}$$

Selanjutnya kita ambil $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, (seperti tampak pada gambar dibawah ini).



Gambar 89 Contoh limit terdefinisi

Jika $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$, maka

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

sehingga terbukti bahwa $\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2$.

Untuk menemukan δ dimana diketahui f, L, c dan $\epsilon > 0$, dapat ditentukan dengan dua langkah berikut:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a, b) yang memuat c dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq c$.
2. Menentukan nilai $\delta > 0$ padainterval $(c - \delta, c + \delta)$ yang berpusat pada c di dalam interval (a, b). Pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq c$ pada interval δ.

Contoh:

Buktikanlah bahwa $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ jika

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

Jawab:

Untuk menyelesaikannya, dapat kita ikuti langkah-langkah diatas seperti:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x) - 4| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a, b) yang memuat $x = 2$ dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq 2$.

   Untuk $x \neq c = 2$, kita mempunyai $f(x) = x^2$, dan pertidaksamaan untuk menemukan penyelesaiannya adalah $|x^2 - 4| < \epsilon$.

   $$|x^2 - 4| < \epsilon$$
   $$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$
   $$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$
   $$\sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon}$$

   jadi pertidaksamaan $|f(x) - 4| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq 2$ di interval terbuka $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$

2. Menentukan nilai $\delta > 0$ yang berpusat pada interval $(2 - \delta, 2 + \delta)$ di dalam interval $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$.

   Kita ambil δ sebagai jarak dari $x = 2$ yang mendekati titik akhir $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$. Dengan kata lain, ambil $\delta = \min\left\{\left(2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\right)\right\}$. Jika δ memiliki bilangan tersebut atau yang lebih kecil dan bernilai positif, pertidaksamaan $0 < |x - 2| < \delta$ akan otomatis berada pada x diantara $\sqrt{4-\epsilon}$ dan $\sqrt{4+\epsilon}$ untuk membuat $|f(x) - 4| < \epsilon$. Untuk semua x,

   $$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

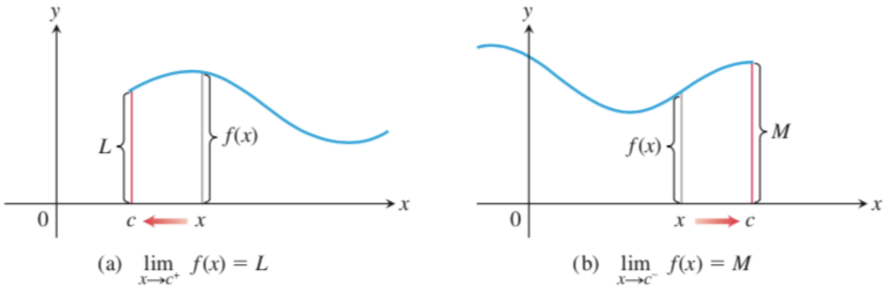
   sehingga pembuktian kita sudah lengkap untuk $\epsilon < 4$.

6.5 Limit Satu Sisi

Untuk memiliki sebuah limit L diman x mendekati c, sebuah fungsi f haruslah terdefinisi dari dua arah c dan nilai dari $f(x)$ dari keuda arah tersebut haruslah L, f haruslah terdefinisi di beberapa interval terbuka disekitar c, tapi tidak tepat di c. Hal ini menyatakan bahwa limit adalah dua arah.

Jika f tidak memenuhi pada duarah di c, maka dapat dimungkinkan limit satu arah. Jika limit dari arah kanan maka disebut dengan limit kanan dan jika dari arah kiri disebut sebagai limit kiri.

Limit kanan biasanya dituliskan dengan $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (c, b), x mendekati c dan $c < b$. Sedangkan limit kiri dituliskan dengan $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (a, c), x mendekati c dan $a < c$. Ilustrasi dari definisi limit satu arah diatas dapat digambarkan seperti berikut:



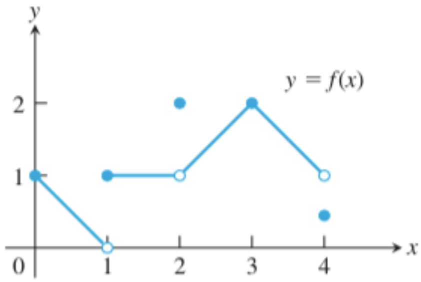
Gambar 90 Limit satu arah

Teorema 1

Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Perhatikan grafik berikut



Gambar 91 Ketidakkontinuan

Dari gambar diatas dapat kita peroleh bahwa :

1. Di titik $x = 0$

   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$dan $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada. Fungsi ini tidak terdefinisi dari arah kiri $x = 0$.

2. Di titik $x = 1$

   $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ walaupun $f(1) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada karena limit kanan dan limit kiri tidak sama.

3. Di titik $x = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ walaupuan $f(2) = 2$.

4. Di titik $x = 3$

   $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 2$.

5. Di titik $x = 4$

   $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, walaupun $f(4) \neq 1$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ dan $\lim_{x \to 4} f(x)$ tidak ada. Fungsinya tidak terdefinisi dari arah kanan $x = 4$.

Berdasarkan hal diatas maka limit satu arah dapat didefinisikan dengan:

Fungsi $f(x)$ memiliki limit kanan di c dan dituliskan dengan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Selanjutnya fungsi $f(x)$ memiliki limit kiri di c dan dituliskan dengan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Jawab:

Misalkan $\epsilon > 0$ dimana diketahui $c = 0$ dan $L = 0$, maka kita akan menentukan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku

$0 < x < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 0\right| < \epsilon$ atau $0 < x < \delta \Rightarrow \sqrt{x} < \epsilon$. Dengan menguadratkan kedua sisi dari pertidaksamaan diatas maka $x^2 < \epsilon$ jika $0 < x < \delta$.

Jika kita memilih $\delta = \epsilon^2$ maka diperoleh,

$0 < x < \delta = \epsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} < \epsilon$ atau $0 < x < \epsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$

sehingga berdasarkan definisi, makan di simpulkan terbukti untuk $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

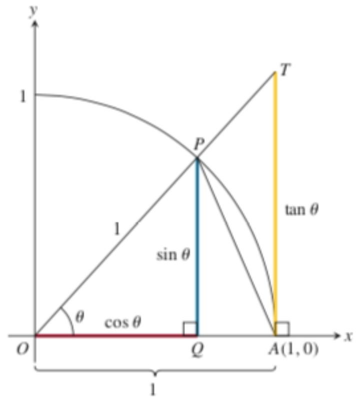
Teorema 2

Limit dari $\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini, maka kita perlu membuktikan bahwa nilai limit kiri dan kanannya bernilai 1.

1. Untuk membuktikan limit kanannya bernilai 1, kita mulai dengan nilai positif dari $\theta < \frac{\pi}{2}$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 92 Limit bernilai satu

Dari gambar diatas diperoleh

$$\text{Luas } \Delta OAP < Luas\ Juring\ OAP < Luas\ \Delta OAT$$

Hal ini dapat dinyatakan dengan

$$\text{Luas } \Delta OAP = \frac{1}{2}\ alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{Luas juring } \Delta OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Luas } \Delta OAT = \frac{1}{2}alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Sehingga,

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

Jika pertidaksamaan ini kita bagi dengan $\frac{1}{2}\sin\theta$ akan bernilai positif karena $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, yaitu:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

dengan mengambil kebaikan dari pertidaksamaan ini diperoleh bahwa

$$1 > \frac{\theta}{\sin\theta} > \frac{1}{\cos\theta}$$

Karena $\lim_{x\to 0^+}\cos\theta = 1$ maka dengan menggunakan Teorema Sandwhich diperoleh

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

2. Untuk membuktikan limit kirinya kita akan menggunakan fungsi ganjil yaitu $\sin\theta$ dan θ. Sehingga, $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ adalah fungsi genap yaitu grafik yang simetrik pada sumbu y. Kesimetrian ini mengakibatkan limit kiri di 0 ada dan nilainya sama dengan limit kanan.

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Jadi berdasarkan pembuktian limit kiri dan limit kanan diatas, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Contoh :

1. Tentukanlah nilai limit dari :
   a. $\lim_{p\to 0}\frac{coh\ p-1}{p} = 0$
   b. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

Jawab :

a. $\lim\limits_{p\to 0}\frac{coh\ p-1}{p} = \lim\limits_{p\to 0} -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p}$

misalkan $\theta = \frac{p}{2}$, maka

$$\lim_{p\to 0} -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p} = -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\square\ = -(1)(0) = 0$$

b. untuk menyelesaiakn persamaan ini, maka kita kalikan dengan $\frac{2}{5}$ yaitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{5}\right).\ \sin 2x}{\left(\frac{2}{5}\right).\ 5x} = \frac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$

misalkan $\theta = 2x$ maka dengan menggunakan teorema 2 diatas diperoleh hasilnya adalah $\frac{2}{5}$.

2. Tentukanlah nilai limit dari :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t\sec 2t}{3t}$$

Jawab:

Dengan menggunakan definisi dari $\tan t$ dan $\sec 2t$, kita memiliki

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t\sec 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t} = \frac{1}{3}(1)(1)(1) = \frac{1}{3}$$

6.6 Kekontinuan

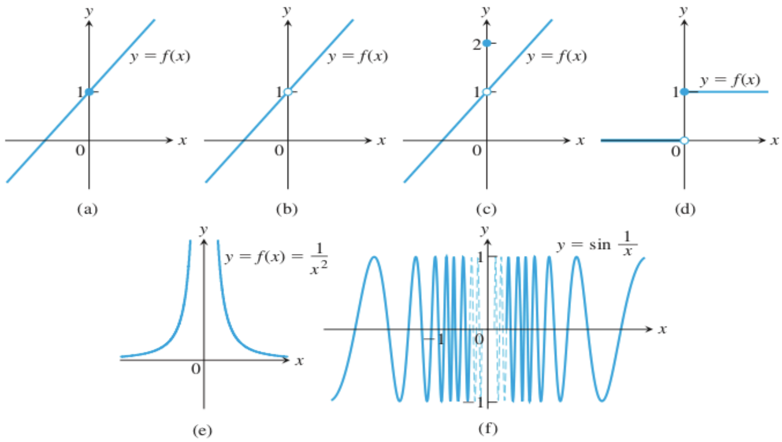
Misalkan c adalah bilangan riil di sumbu x. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kanan di titik c jika $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kiri di c jika $\lim\limits_{c\to c^-} f(x) = f(c)$.

Dengan menggunakan teorema 7.1 secara langsung didapat bahwa fungsi f adalah kontinu di titik c dari domainnya jika dan hanya jika kontinu di kiri dan dikanan. Kita sebut sebuah fungsi adalah kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ jika kontinu kanan di a, kontinu kiri di b

dan kontinu di seluruh titik interior dari intervalnya. Jika sebuah fungsi tidak kontinu di titik interior c dari domainnya, maka kita sebut f tidak kontinu di c, dan c adalah sebuah titik yang tidak kontinu dari fungsi f. Ingatlah bahwa fungsi f dapat dikatakan kontinu, kontinu kanan, kontinu kiri hanya di titik c dengan syarat $f(c)$ terdefinisi. Dapat kita simpulkan kekontinuan di titik interior dengan menggunakan bentuk tes kontinu. Sebuah fungsi $f(x)$ adalah kontinu di titik $x = c$ jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi berikut:

1. $f(c)$ ada (c berada di domain f)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada (f memiliki sebuah limit ketika $x \to c$)
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya)

Perhatikan grafik berikut ini:



Gambar 93 Kekontinuan

Dari gambar diatas terdapat beberapa tipe dari ketidakkontinuan. Pada gambar (a) merupakan kontinu di $x = 0$, gambar (b) seharusnya kontinu jika $f(0) = 1$. Selanjutnya gambar (c) harusnya kontinu jika $f(0)$ bernilai 1 bukan 2. Ketidakkontinuan pada gambar (c) ini ditolak atau *removable*. Fungsi seperti ini memiliki nilai limit ketika $x \to 0$ dan kita dapat menghilangkan ketidakkontinuan dengan mengatur $f(0)$ sama dengan nilai limitnya.

Lebih jauh lagi pada gambar (d) melalui f sangat kompleks, yaitu $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada dan tidak ada kemungkinan mengubah nilai f menjadi 0. Sehingga pada kondisi ini disebut sebagai ketidakkontinuan yang lompat (*jump discontinuity*), yaitu limit satu sisinya ada tapi memiliki nilai yang berbeda. Fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pada gambar (e) memiliki ketidakkontinuan yang tak terbatas (*infinite discontinuity*). Fungsi di gambar (f) memiliki ketidakkontinuan yang berisolasi (*oscillating discontinuity*), yaitu pergerakan yang kesana kemari sangat banyak untuk memiliki nilai limit ketika $x \to 0$.

Sebuah fungsi dikatakan fungsi yang kontinu jika kontinu di setiap tidak dari domainnya. Hal ini kita sebut sebagai sifat dari fungsi. Sebuah fungsi selalu memiliki domain yang spesifik. Jika kita mengubah domain, maka kita mengubah fungsinya yang berarti juga memungkinkan untuk mengubah sifatnya.

Misalkan fungsi $y = \frac{1}{x}$ adalah fungsi yang kontinu karena kondisinya adalah kontinu disetiap titik dari domainnya. Fungsi ini tidak kontinu pada titik $x = 0$, karena tidak terdefinisi pada titik tersebut. Sehingga fungsi ini tidak kontinu di setiap titik yang mengandung $x = 0$.

Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

1. Operasi Penjumlahan

$$f + g$$

2. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f - g$$

3. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \qquad \text{untuk setiap nilai } k$$

4. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

5. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

6. Perpangkatan

f^n untuk n adalah bilangan bulat positif

7. Bentuk Akar

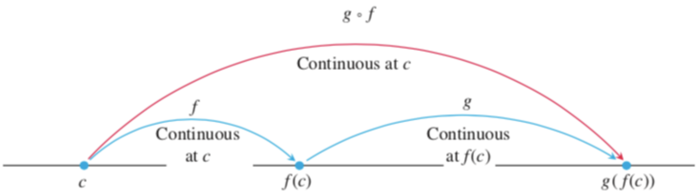
$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

Sifat-sifat ini dapat kita gunakan untuk membuktikan rumus limit. Salah satunya asalah sifat penjumlahan pada limit yaitu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c)+g(c)\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan ini, dapat kita simpulkan bahwa $f+g$ adalah kontinu.

Semua komposisi dari fungsi-fungsi yang kontinu adalah kontinu. Jika $f(x)$ adalah kontinu di $x=c$ dan $g(x)$ adalah kontinu di $x=f(c)$, maka $g \circ f$ adalah kontinu di $x=c$. Kondisi ini menyatakan nilai limitnya ketika $c \to c$ adalah $g\big(f(c)\big)$. Hal ini dapat digambarkan seperti pada gambar berikut ini



Gambar 94 Limit fungsi komposisi

Secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk teorema berikut:

Teorema 3

Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x\to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$$

Bukti :

Misalkan $\epsilon > 0$. Karena g adalah kontinu di b, maka terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga

$|g(y) - g(b)| < \epsilon$ dimana $0 < |y - b| < \delta_1$.

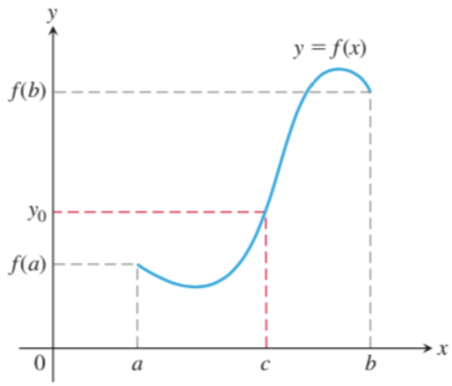
Karena $\lim_{x\to c} f(x) = b$, terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$.

Jika kita misalkan $y = f(x)$, maka kita memperoleh

$|y - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$

dimana hal ini mengakibatkan $|g(y) - g(b)| = |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$ ketika $0 < |x - c| < \delta$. Sehingga berdasarkan definisi limit terbuktilah $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b)$.

Jika f adalah sebuah fungsi yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, dan jika $y_0$adalah nilai diantara $f(a)$ dan $f(b)$, maka $y_0 = f(c)$ untuk c di $[a, b]$. Seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 95 Kontinu pada interval tertutup

4. Rangkuman

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, c dan k adalah bilangan riil dan $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

   a. Aturan penjumlahan

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

   b. Aturan selisih

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

   c. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\lim_{x \to c} \big(k . f(x)\big) = k . L$$

   d. Aturan pembagian

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L . M$$

   e. Aturan pangkat

   $\lim_{x \to c} \big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

   f. Aturan akar

   $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

   g. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

h. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

i. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

j. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

5. Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

6. Limit dari $\frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

7. Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

i. Operasi Penjumlahan

$$f + g$$

ii. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f - g$$

iii. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \text{ untuk setiap nilai } k$$

iv. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

v. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

vi. Perpangkatan

f^n untuk n adalah bilangan bulat positif

vii. Bentuk Akar

$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

8. Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x \to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

5. Latihan

1. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada

a. $lim \frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to 2$

b. $lim \frac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to -1$

c. $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2. Tentukanlah limit dari $g(x)$ saat x mendekati nilai yang diketahui

a. $\lim_{x \to 0^+} \big(4g(x)\big)^{\frac{1}{3}} = 2$

b. $\lim_{x \to \sqrt{5}} \left(\frac{1}{x+g(x)}\right) = 2$

3. Tentukanlah limit dari

a. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3}$

c. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$

4. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.
   a. $f(x) = x + 1, L = 5, c = 4, \epsilon = 0.01$
   b. $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, c = 0, \epsilon = 0.1$
   c. $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, c = 4, \epsilon = 0.05$
5. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.
   a. $\lim_{x \to 3}(3x - 7) = 2$
   b. $\lim_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$
6. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini
   a. $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$
   b. $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$
   c. $\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$
7. Gunakanlah $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini
   a. $\lim_{x \to 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$
   b. $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$
   c. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$
8. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu
   a. $y = \frac{1}{x-2} - 3x$
   b. $y = \frac{x+3}{\boldsymbol{x^2-3x-10}}$
   c. $y = \frac{\cos x}{\boldsymbol{x}}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada

    a. $\lim\limits_{x\to 64} \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

    b. $\lim\limits_{x\to \pi} \sin\left(\frac{x}{2}+\sin x\right)$

    c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x-1}{\sin x}$

2. Tentukanlah limit dari $g(x)$ ketika x mendekati nilai yang diketahui

    a. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{3x^2+1}{g(x)}\right) = \infty$

    b. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{5-x^2}{\sqrt{g(x)}}\right) = 0$

3. Tentukanlah limit dari

    a. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

    b. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

4. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

    a. $f(x) = x^2 - 5, L = 11, c = 4, \epsilon = 1$

    b. $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, c = 1, \epsilon = 0.05$

5. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.

    a. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1, jika\ f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

    b. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

6. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

a. $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

b. $\lim\limits_{h \to -2^+} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

c. $\lim\limits_{h \to -2^-} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

7. Gunakanlah $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-x+\sin x}{2x}$

b. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

c. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

8. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu

a. $y = \frac{x \tan x}{\boldsymbol{x^2+1}}$

b. $y = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x^4+1}}}{\boldsymbol{1+sin^2x}}$

c. $y = (2-x)^{\boldsymbol{1/5}}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetulnya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa yang menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-12 : Menguasai Limit Tak Hingga
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan himpunan beserta jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi limit tak hingga. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skills.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

6.7 Limit Tak Hingga

1. **Limit berhingga dimana $x \to \pm\infty$**

Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Contoh :

1. Buktikanlah bahwa

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Jawab :

a. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = \frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan bulat positif yang lebih besar. Jadi terbukti $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

b. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = -\frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan yang lebih kecil dari $-\frac{1}{\epsilon}$. Jadi terbukti $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. Tentukanlah nilai dari

a. $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$

Jawab:

a. $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$

b. $$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \\ &= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

2. Limit Tak Hingga Fungsi Rasional

Untuk menentukan limit dari fungsi rasional ketika $x \to \pm\infty$, terlebih dahulu kita membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi x. Hasil yang ada tergantung kepada derajat pada persamaan yang ada.

Contoh :

Tentukanlah limit dari

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1}$

Jawab :

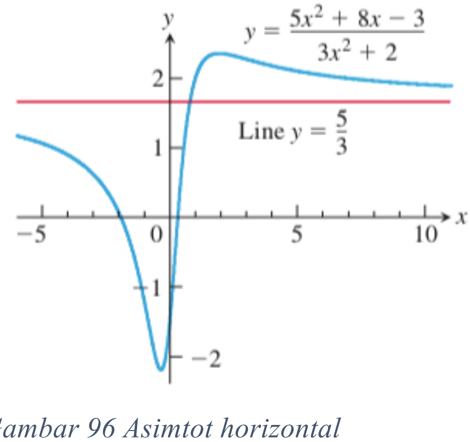
a. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$

3. Asimtot Horizontal

Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Misalkan $f(x) = \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ memiliki garis $y = \frac{5}{3}$ sebagai asimtot horizontal di kiri dan dikanan, karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3}$ dan $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}$. Hal ini terihat seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 96 Asimtot horizontal

Contoh :

1. Tentukanlah asimtot horizontal dari

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$$

Jawab :

Kita menentukan limit ketika $x \to \pm\infty$.

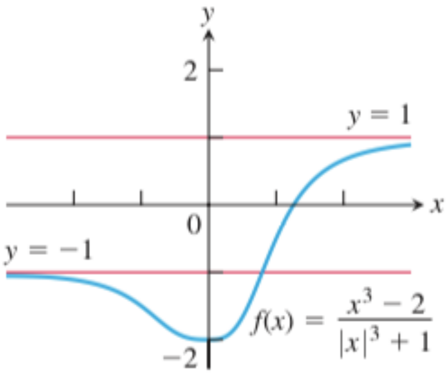
Untuk $x \geq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 1$$

Untuk $x < 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{(-x)^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{-1 + \frac{1}{x^3}} = -1$$

jadi asimtot horizontalnya adalah $y = -1$ dan $y = 1$, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 97 Contoh asimtot horizontal

2. Dengan menggunakan Teorema Sandwhich, tentukanlah asimtot horizontal dari

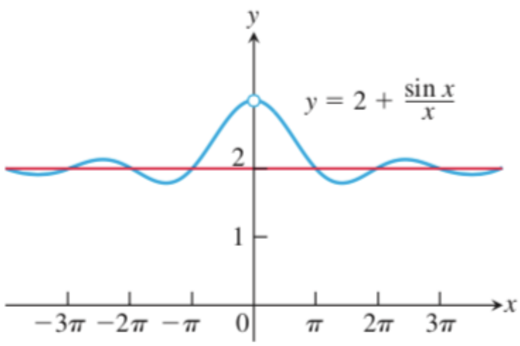
$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

Jawab:

Kita akan menentukannya dengan $x \to \pm\infty$. Karena $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ dan $\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$, kita mempunyai $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ dengan menggunakan teorema sandwhich. Sehingga,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 + 0 = 2$$

dengan garis $y = 2$ adalah asimtot horizontal dari kurva kanan dan kiri. Contoh ini mengilustrasikan bahwa kurva yang ada mungkin berpotongan dengan salah satu asimtot horizontalnya beberapa kali.



Gambar 98 Asimtot horizontal berpotongan di beberapa titik

4. Asimtot Miring

Jika derajat pangkat pembilang fungsi rasional adalah lebih besar 1 dari derat pangkat penyebutnya, maka grafiknya memiliki asimtot miring. Untuk menemukan persamaannya kita membagikan pembilang dengan penyebutnya untuk mengekspresikan fungsi f seperti fungsi linear ditambah sisa pembagian dimana mendekati 0 ketika $x \to \pm\infty$.

Contoh :

Tentukanlah asimtot miring dari :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

Jawab :

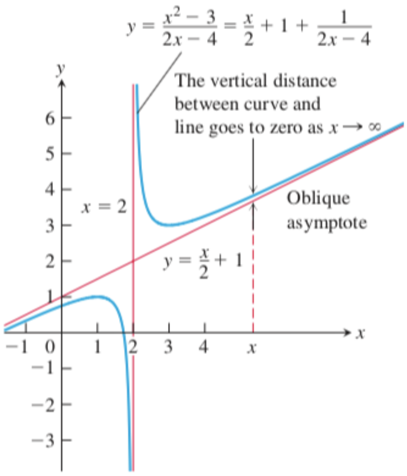
Kita akan menyelesaikannya dengan $x \to \pm\infty$. Kita melakukan pembagian biasa yaitu $x^2 - 3$ membagi $2x - 4$ diperoleh:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2x - 4}\right)$$

$\frac{x}{2} + 1$ adalah sebagai linear $g(x)$ dan $\frac{1}{2x-4}$ sebagai sisa pembagian. Ketika $x \to \pm\infty$, sisa pembagian membuat jarak vertikal antara f dan g, menuju nol, yang membuat garis miring

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

sebagai asimtot dari grafik f. Garis $y = g(x)$ adalah asimtot kiri dan kanan.



Gambar 99 Asimtot miring

5. Limit Tak Hingga

Ingat kembali tentang fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$. Ketika $x \to 0^+$, nilai f meningkat tanpa batas di setiap bilangan riil positif. Misalkan diberikan bilangan riil positif B, bagaimanapun besarnya, nilai dari

f menjadi semakin besar. Jadi, f tidak memiliki limit ketika $x \to 0^+$. Berdasarkan hal ini dapat kita deskripsikan kebiasaan dari f dengan menyatakan $f(x)$ mendekati ∞ ketika $x \to 0^+$. Dituliskan dengan

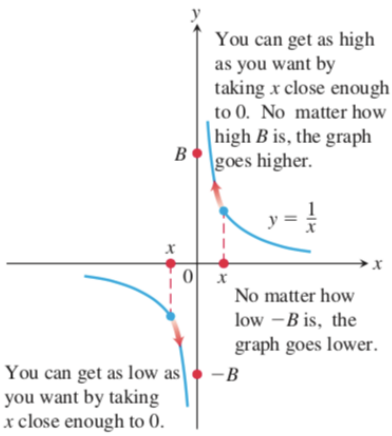
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil ∞, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan positif ketika $x \to 0^+$.

Selanjutnya, ketika $x \to 0^-$, nilai dari $f(x) = \frac{1}{x}$ menjadi besar dan negatif. Misalkan diberikan bilangan riil negatif $-B$, nilai dari f akan berada dibawah $-B$. Kita tuliskan dengan

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil $-\infty$, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan negatif ketika $x \to 0^-$.



Gambar 100 Limit tak hingga

Contoh:

Tentukanlah nilai dari limit fungsi berikut:

a. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$

b. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$

c. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7}$

Jawab:

a. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

b. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$

c. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-6x^2+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2(x-3)+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} =$

$-\infty$

6.8 Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \implies f(x) > B$.

Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \implies f(x) < -B$

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Jawab:

Misalkan $B > 0$, kita akan mencari $\delta > 0$ sehingga diperoleh

$$0 < |x - 0| < \delta$$

yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > B$.

Sekarang dimiliki

$$\frac{1}{x^2} > B \text{ jika dan hanya jika } x^2 < \frac{1}{B}$$

persamaan ini ekuivalen dengan

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$$

kita memilih $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ atau sebarang bilangan bulat negatif yang lebih kecil, sehingga kita peroleh bahwa

$|x| < \delta$ yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B$

Sehingga melalui definisi terbukti bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

6.9 Asimtot Vertikal

Sebuah garis $x = a$ adalah vertikal asimtot dari grafik fungsi jika

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ atau $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

Contoh :

Tentukanlah asimtot horizontal dan asimtot vertikal dari

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

Jawab:

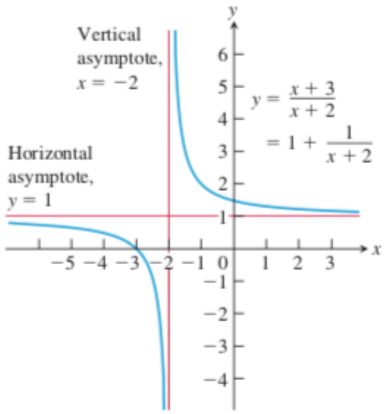
Dalam menyelesaikan ini kita akan menggunakan $x \to \pm\infty$ dan $x \to -2$ dimana penyebut akan menjadi nol.

Persamaan dari fungsi yang ada dapat kita ubah dengan membagikan pembilang dan penyebut sehingga menghasilkan siswa pembagian yaitu

$x + 3$ membagi $x + 2$ yaitu sama dengan

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

ketika $x \to \pm\infty$, kurva mendekati asimtot horizontal $y = 1$; ketika $x \to -2$ kurva mendekati asimtot vertikal $x = -2$. Kita dapat melihat bahwa persamaan ini adalah berasal dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ yaitu naik 1 unit secara vertikal dan bergeser ke kiri sebesar 2 unit, seperti tampak pada gambar dibawah ini. Sehingga asimtotnya seperti garis koordinat yaitu $y = 1$ dan $x = -2$.



Gambar 101 Asimtot horizontal dan vertikal

4. Rangkuman

1) Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

2) Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3) Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

   a. Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

   $$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

   jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > B$.

   b. Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

   $$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

   jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < -B$

5. Latihan

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

   b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3}$

   c. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$

   d. $\lim_{x \to \infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   e. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$

   b. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$

   c. $y = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

   b. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

   c. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$

   d. $y = \sqrt{\frac{x^2+9}{9x^2+1}}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5x-3}{2x+5}$

   b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-7x}{x+1}$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos\theta-1}{\theta}$

   d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

   e. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{12x^3+128}$

   f. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   g. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

a. $y = \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

b. $f(x) = \frac{\cos 2x-1}{\sin x}$

c. $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$

   b. $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$

   c. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

4. Tentukanlah asimtot miring dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = x + x \sin \frac{1}{x}$

   b. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

   c. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

   d. $y = \frac{2x^{5/2}+2x-3}{\sqrt{x}+1}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul
   Modul enam ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.
2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.
3. Daftar Istilah

Kontinu	Limit	Asimtot	Epsilon	Delta
Diskontinu	Komposisi			

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 7 TURUNAN

Make a dream when you're wake up. Take a risk and realize your dream.
_SCP

Pendidikan Kimia
FKIP UKI

MODUL 7 TURUNAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Turunan merupakan sebuah materi yang digunakan dalam menentukan berbagai perubahan suatu fungsi. Konsep ini banyak dimanfaatkan didalam produksi maupun dalam menentukan nilai maksimum maupun minimum sebauh grafik fungsi yangtersedia. Turunan ini dipelajar untuk meningkatkan kemampuan matematis mahasiswa dalam menyelesaikan berbagai persoalan nyata yang membutuhkan penyelesaian dengan turunan. Turunan ini juga banyak dibutuhkan oleh fisikawan dan berbagai lini kehidupan baik diperbankan maupun di perusahaan bagian produksi barag.

   Dalam modul ini mahasiswa akan mempelajari berbagai terori dan permasalahan yang ada pada turunan yaitu turunan dasar, turunan komposisi, turunan sebagai suatu perubahan, turunan fungsi trigonometri, turunan dengan menggunakan rumus chain dan turunan implisit baik turuan tingkat satu maupun hingga turunan tingkat tinggi yaitu turunan hingga penurunan ke-n.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul tujuh

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.

- Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinil orang lain.
- Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola

pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami materi tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul tujuh

   Kegunaan modul tujuh ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan turunan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian Turunan, Rumus Dasar turunan, turunan sebagai suatu perubahan, Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke-13 : Menguasai konsep dasar turunan, turunan fungsi sebagai sebuah tingkat perubahan

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan turunan dan rumus dasar penurunannya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan turunan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

7.1 Pengertian

Pada modul sebelumnya kita sudah membahas tentang limit. Pada modul ini kita akan mempelajari tentang turunan dari sebuah fungsi $y = f(x)$ di titik $x = x_0$ yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hal ini terpenuhi jika nilai limitnya ada.

Jika kita tuliskan $z = x + h$ maka $h = z - x$ dan h mendekati 0 jika dan hanya jika z mendekati x. Maka definisi turunan diatas ekuivalen dengan rumus alternative berikut ini:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

proses dari perhitungan turunan ini disebut sebagai differensiasi. Notasi dari differensiasi ini biasanya dituliskan dengan

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

ini juga merupakan salah satu bentuk lain dalam menuliskan turunan $f'(x)$.

Contoh :

1. Turunan dari $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Jawab :

Kita menggunakan definisi dari turunan, yaitu mewajibkan kita untuk menghitung $f(x+h)$ dan substrak $f(x)$ untuk memperoleh persamaan turunannya, yiatu diperoleh :

$f(x) = \frac{x}{x-1}$ dan $f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}$. Sehingga

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)}{(x+h)-1} - \frac{x}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2. Tentukanlah turunan dari $f(x) = \sqrt{x}$ untuk $x > 0$ dan tentukanlah garis tangennya di titik $x = 4$.

   Jawab:

   Pertama kita menggunakan rumus alternatif untuk menghitung f':

   $$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Selanjutnya untuk menentukan gradien kurva di titik $x = 4$ adalah

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Tangen adalah sebuah garis yang melalui (4,2) dengan gradien $\frac{1}{4}$, diperoleh:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

Penulisan turunan dapat dinotasikan dalam berbagai bentuk turunan dari fungsi $y = f(x)$, dimana variabel independen adalah x dan variabel dependen adalah y. Berikut ini beberapa notasi umum yang biasa digunakan dalam penulisan turunan:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

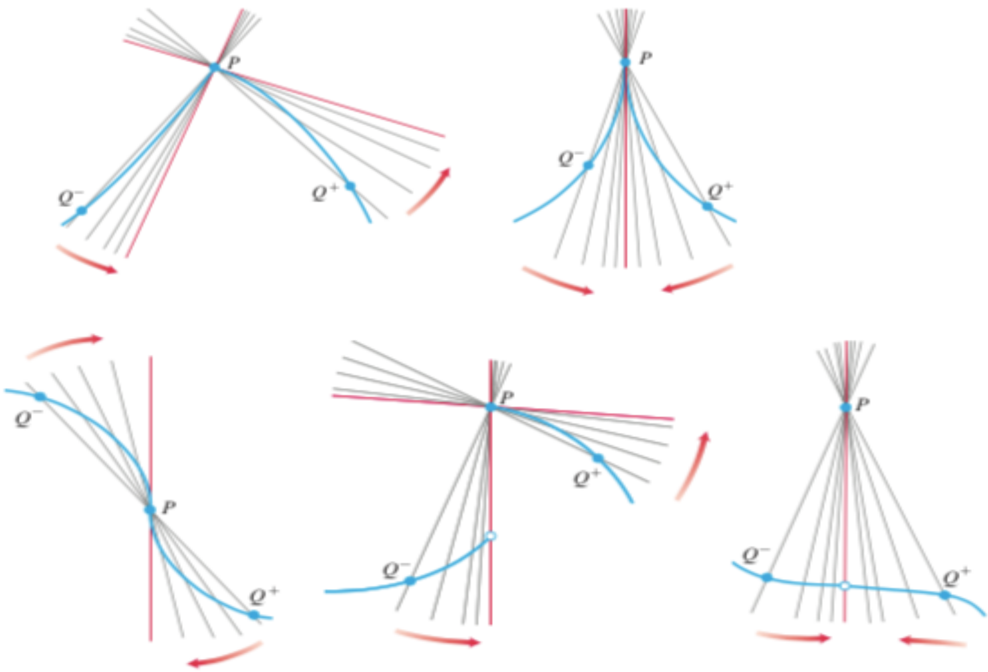
Sebuah fungsi $y = f(x)$ adalah terdifferensiasi pada interval terbuka (hingga atau tak hingga) jika memiliki turunan di setiap titik pada interval. Selanjutnya fungsi tersebut terdifferensiasi pada interval tertutup $[a, b]$ jika dapat diturunkan pada titik interior (a, b) dan jika memiliki limit kiri dan kanan seperti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(b)}{h}$$

adalah ada di setiap titik akhirnya.

Suatu fungsi memiliki turunan di titik x_0 jika gradien garis potong yang melalui $P(x_0, (x_0))$ dan titik terdekat Q pada grafik mendekati batas hingga saat Q mendekati P. Setiap kali garis potong gagal mengambil posisi pembatas atau menjadi vertikal saat Q mendekati P, turunannya tidak ada. Dengan demikian diferensiasi adalah kondisi "kelancaran" pada grafik . Suatu fungsi dapat gagal memiliki turunan di suatu titik karena berbagai alasan, termasuk keberadaan titik-titik di mana grafik memiliki :



Gambar 102 Arah turunan

Sebuah fungsi yang terdifferensiasi adalah fungsi yang kontinu. Hal ini disimpulkan dalam teorema berikut:

Teorema 1
Jika f memiliki turunan di titik $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.

Bukti :
Diberikan $f'(c)$ ada, kita harus menunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, atau ekuivalen dengan $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Jika $h \neq 0$, maka

$$f(c+h) = f(c) + \big(f(c+h) - f(c)\big)$$
$$= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h$$

Sekarang ambil limit untuk $h \to 0$. Dengan teorema pada limit dan kekontinuan, maka

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$
$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$
$$= f(c) + 0$$
$$= f(c)$$

7.2 Rumus Turunan

Rumus-rumus pada turunan dapat kita temukan dan peroleh yaitu dengan menggunakan operasi aljabar pada setiap fungsi yang terdifferensiasi yaitu

1. Turunan dari fungsi konstanta adalah nol

   Jika f memiliki nilai konstanta $f(x) = c$, maka

   $$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

   Bukti :

   Kita gunakan definisi dari turunan untuk $f(x) = c$, dimana output dari fungsi tersebut adalah nilai konstanta c. Di setiap titik dari x, kita temukan bahwa:

   $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

   Contoh :

   Tentukanlah turunan dari $f(x) = 4$, dan $f(x) = 1$

   Jawab :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

2. Turunan pada fungsi berpangkat positif

   Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

   Bukti:

   Rumus $z^n - x^n = (z-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$

   Dapat diverifikasi dengan mengalikasn sisi kanannya. Maka dari rumus alternative untuk definisi dari turunan, diperoleh :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z \to x}(z-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

   Contoh :

   Tentukanlah turunan dari

   a. x^5

   b. $x^{\frac{2}{3}}$

   Jawab :

   a. $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$

   b. $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

3. Turunan pada fungsi berpangkat bilangan riil

   Jika n adalah bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

   untuk semua x dimana pangkat x^n dan x^{n-1} terdefinisi.

   Contoh :

Tentukanlah turunan dari:

a. $x^{\sqrt{2}}$

b. $\frac{1}{x^4}$

c. $x^{-\frac{4}{3}}$

d. $\sqrt{x^{2+\pi}}$

Jawab:

a. $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

c. $\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{4}{3}}\right) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$

d. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{2+\pi}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1+\frac{\pi}{2}}\right) = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)x^{1+\frac{\pi}{2}-1} = \frac{1}{2}(2+\pi)\sqrt{x^{\pi}}$

4. Turunan fungsi dengan perkalian konstanta

Jika dengan u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, dan c adalah sebuah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = c\frac{du}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari :

a. $3x^4$

b. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$

c. $5\sqrt{x}+2x$

Jawab:

a. $\frac{d}{dx}(3x^4) = 4\cdot 3x^{4-1} = 12x^3$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}}$

c. $\frac{d}{dx}\left(5\sqrt{x}+2x\right)=\frac{d}{dx}5\sqrt{x}+\frac{d}{dx}2x$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5x^{\frac{1}{2}-1}+1\cdot 2x^{1-1}=\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2$$

5. Penjumlahan pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi terhadap x, maka penjumlahan $u+v$ adalah terdifferensiasi di setiap titik dimana u dan v keduanya terdifferensiasi. Untuk titik-titik tersebut berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

Bukti:

Kita dapat menggunakan definisi dari turunan untuk $f(x)=u(x)+v(x)$:

$$\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari :

a. $y=x^3-3x+5$

b. $y=x^5+4x^2-\frac{3}{2}x+1$

Jawab:

a. $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3-3x+5)$

$$=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(-3x)+\frac{d}{dx}(5)$$

$$= 3x^2 - 3$$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 + 4x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$

$$= \frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}x\right) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$= 5x^4 + 8x - \frac{3}{2}$$

6. Perkalian pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka perkalian u dan v adalah

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Bukti :

$$\frac{d}{dx}(uv)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\ \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)$$

$$\cdot \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

ketika h mendekati nol, $u(x+h)$ mendekati $u(x)$ karena u terdifferensiasi di x dan kontinu di x. Sehinga,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan berikut ini:

a. $(x^2 - 3)(x^3 + 2x)$

b. $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)(2x + 3x^2)$

c. $\left(\sqrt{x}-2x^2\right)\left(2x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}}-\sqrt{x}\right)$

Jawab :

a. Misalkan $u=x^2-3$ dan $v=x^3+2x$, maka $\frac{dv}{dx}=3x+2$ dan $\frac{du}{dx}=2x$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left((x^2-3)(x^3+2x)\right)=(x^2-3)(3x+2)+(x^3+2x)(2x)$$

$$=(3x^3+2x^2-9x-6)+(2x^4+4x^2)$$

$$=2x^4+3x^3+6x^2-9x-6$$

b. Misalkan $u=\frac{1}{2}x-5$ dan $v=2x+3x^2$, maka $\frac{dv}{dx}=2+6x$ dan $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{2}x-5\right)(2x+3x^2)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-5\right)(2+6x)+(2x+3x^2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=x+3x-10-30x+x+\frac{3}{2}x^2$$

$$=\frac{3}{2}x^2-27x-10$$

c. Misalkan $u=\sqrt{x}-2x^2$ dan $v=2x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}}-\sqrt{x}$, maka $\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x$ dan $\frac{du}{dx}=2+\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{2}x-5\right)(2x+3x^2)\right)$$

$$=\left(\sqrt{x}-2x^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x\right)$$

$$+\left(2x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}}-\sqrt{x}\right)\left(2+\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 4x\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}} + 8x^3 + 4x + \frac{6}{5}x^{\frac{2}{5}} - \sqrt{x} + 3x^{\frac{2}{5}} + \frac{9}{10}x^{-\frac{1}{5}}$$

$$- \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{10}} - 2\sqrt{x} - \frac{9}{10}x^{-\frac{1}{10}} + \frac{1}{2}$$

7. Pembagian pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x dan jika $v(x) \neq 0$, maka pembagian u dan v adalah terdifferensiasi di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

atau dapat juga dinotasikan dengan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

ketika h mendekati nol, $u(x+h)$ mendekati $u(x)$ karena u terdifferensiasi di x dan kontinu di x. Sehinga,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari $y = \frac{x^2-1}{x^3+1}$

Jawab:

Misalkan $u = x^2 - 1$ dan $v = x^3 + 1$ maka $\frac{du}{dx} = 2x$ dan $\frac{dv}{dx} = 3x^2$, sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3+1)(2x) - (x^2-1)(3x^2)}{(x^3+1\,)^2}$$

$$= \frac{2t^4 + 2t - 3t^4 + 3t^2}{(x^3+1\,)^2}$$

$$= \frac{-t^4 + 3t^2 + 2t}{(x^3+1\,)^2}$$

8. Turunan kedua atau turunan tingkat tinggi

   Jika $y = f(x)$ adalah fungsi terdifferensiasi, maka turunan $f'(x)$ adalah juga sebuah fungsi. Jika f' juga terdifferensiasi,maka f' dapat kita turunkan lagi menjadi f''. Jadi $f'' = (f')'$. f'' kita sebut sebagai turunan kedua dari f karena ini adalah bentuk turunan dari turunan pertama. Turunan kedua ini dapat dituliskan dengan menggunakan beberapa bentuk yaitu:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)$$

   demikian juga untuk turunan ketika, keempat dan seterusnya dapat dituliskan dengan

   $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, y'''' = y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^n y$

   Contoh :

   Tentukanlah turunan pertama hingga turunan kelima dari:

   a. $y = x^6 - 2x^3 + 5x - 1$
   b. $y = x^5 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$

   Jawab :

   a. Turunan tingkat dari $y = x^6 - 2x^3 + 5x - 1$ adalah

      Turunan pertama

$$y' = 6x^5 - 6x^2 + 5$$

Turunan kedua

$$y'' = 30x^4 - 12x$$

Turunan ketiga

$$y''' = 120x^3 - 12$$

Turunan keempat

$$y^{(4)} = 360x^2$$

Turunan kelima

$$y^{(5)} = 720x$$

b. Turunan tingkat dari $y = x^5 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ adalah

Turunan pertama

$$y' = 5x^4 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

Turunan kedua

$$y'' = 20x^3 - \frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}} = 20x^3 - \frac{3}{8x^{\frac{3}{2}}}$$

Turunan ketiga

$$y''' = 60x^2 + \frac{9}{16}x^{-\frac{5}{2}}$$

Turunan keempat

$$y^{(4)} = 120x - \frac{45}{32}x^{-\frac{7}{2}}$$

Turunan kelima

$$y^{(5)} = 120 + \frac{315}{64}x^{-\frac{9}{2}}$$

7.3 Turunan Sebagai Tingkat Perubahan

Jika kita menginterpretasikan hasil bagi selisih $\frac{f(x+h)-(x)}{h}$ sebagai laju rata-rata perubahan dalam f selama interval dari x ke $x + h$, kita dapat menginterpretasikan limit ketika $h \to 0$ sebagai perubahan yang mana f berubah pada titik x.

Tingkat erubahan sesaat dari f terhadap x pada x_0 adalah turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

dimana limitnya haruslah ada.

Kecepatan (kecepatan sesaat) adalah turunan dari posisi terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka kecepatan di waktu t adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{h}$$

Kecepatan ini dapat juga dituliskan dengan kelajuan yaitu

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Percepatan adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka percepatan di waktu t adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Loncatan adalah turunan dari percepatan terhadap waktu

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Contoh :

Ledakan sebuah dinamit menghempaskan batu berat tegak lurus dengan kecepatan $160\ kaki/detik$ (sekitar 109 mph), Mencapai ketinggian $s = 160t - 16t^2 kaki$ setelah t detik.

a. Berapa tinggi batu tersebut?
b. Berapakah kecepatan dan kelajuan batu ketika 256 kaki berada di atas permukaan tanah saat naik? Dalam perjalanan turun?
c. Berapa percepatan batu pada setiap waktu t selama penerbangannya (setelah ledakan)?
d. Kapan batu itu menyentuh tanah lagi?

Jawab:

a. Untuk setia t waktu selama pergerakan batu, kecepatannya adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(160t - 16t^2)$$

$$= 160 - 32t \text{ kaki/detik}$$

kecepatan bernilai 0 ketika

$160 - 32t = 0$ atau $t = 5$ detik

tinggi batu ketika $t = 5$ detik adalah

$$s_{max} = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ kaki}$$

b. Untuk menentukan kecepatan batu di 256 kaki keatas dan turun kembali, maka kita pertama menentukan dua nilai dari t untuk

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$

$$16(t^2 - 10t + 16) = 0$$

$$(t - 2)(t - 8) = 0$$

$$t = 2 \text{ detik}, t = 8 \text{ detik}$$

batu berada 256 kaki diatas tanah ketika 2 detik setelah ledakan dan lagi 8 detik setelah ledakan. Kecepatan batu pada waktu yang sama adalah

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ kaki/detik}$$

$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ kaki/detik}$$

Jadi kelajuan baju adalah 96 kaki/detik. Karena $v(2) > 0$, batu bergerak keatas di $t = 2$ detik, lalu bergerak kebawah di $t = 8$ detik karena $v(8) < 0$.

c. Pada waktu selama ledakan, percepatan batu adalah konstan, yaitu

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ kaki/detik}^2$$

d. Batu akan menyentuh tanah di eaktu t positif yaitu untuk $s = 0$. Faktor persamaan $160t - 16t^2 = 0$ memberikan bahwa $16t(10 - t) = 0$, sehingga memiliki solusi $t = 0$ dan $t = 10$. Di titik $t = 0$, ledakan terjadi dan batu terlempar keatas. Batu kembali ke tanah setelah 10 detik kemudian.

4. Rangkuman

1) Turunan dari sebuah fungsi $y = f(x)$ di titik $x = x_0$ yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hal ini terpenuhi jika nilai limitnya ada.

2) Fungsi yang terdifferensiasi pada interval tertutup $[a, b]$ jika dapat diturunkan pada titik interior (a, b) dan jika memiliki limit kiri dan kanan seperti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(b)}{h}$$

adalah ada di setiap titik akhirnya.

3) Jika f memiliki turunan di titik $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.

4) Jika f memiliki nilai konstanta $f(x) = c$, maka

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

5) Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

6) Jika n adalah bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

untuk semua x dimana pangkat x^n dan x^{n-1} terdefinisi

7) Jika dengan u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, dan c adalah sebuah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

8) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi terhadap x, maka penjumlahan $u + v$ adalah terdifferensiasi di setiap titik dimana u dan v keduanya terdifferensiasi. Untuk titik-titik tersebut berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

9) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka perkalian u dan v adalah

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

10) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x dan jika $v(x) \neq 0$, maka pembagian u dan v adalah terdifferensiasi di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

11) Jika $y = f(x)$ adalah fungsi terdifferensiasi, maka turunan $f'(x)$ adalah juga sebuah fungsi. Jika f' juga terdifferensiasi,maka f' dapat kita turunkan lagi menjadi f''. Jadi $f'' = (f')'$. f'' kita sebut sebagai turunan kedua dari f karena ini adalah bentuk turunan dari turunan pertama.

12) Tingkat perubahan sesaat dari f terhadap x pada x_0 adalah turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dimana limitnya haruslah ada.

Kecepatan (kecepatan sesaat) adalah turunan dari posisi terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka kecepatan di waktu t adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{h}$$

Kecepatan ini dapat juga dituliskan dengan kelajuan yaitu

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Percepatan adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka percepatan di waktu t adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Loncatan adalah turunan dari percepatan terhadap waktu

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

5. Latihan

1. Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari

   a. $f(x) = x^2 - 5x + 1$

   b. $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x$

   c. $y = \sqrt{x} - 3x + 6$

   d. $y = \sqrt{x} + x^2 - x^5$

2 Tentukanlah turunan kedua dari fungsi berikut ini

   a. $f(x) = (\sqrt{x} - 5)\left(\frac{1}{2}x - 3x^2\right)$

   b. $g(x) = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^5\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)$

   c. $y = \frac{3}{x+7}$

   e. $y = \frac{(2x+3x^2)}{(x^2-5x)}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari

   a. $y = 5\sqrt{x} - 3x^2 + 9$

   b. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 6x^{\frac{2}{5}}$

   c. $y = x^2 - x + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

   d. $f(t) = t^2 - \frac{1}{5}t + \sqrt{t}$

   e. $g(t) = \left(x^2 - 5x + \sqrt{x}\right)^5$

2) Tentukanlah turunan kedua dari fungsi berikut ini

   a. $y = (2x^2 - 3x)\left(\frac{1}{2}x + 6\right)$

b. $y = \frac{\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$

c. $f(x) = \left(\sqrt{x} + 3x\right)^3\left(\sqrt{x} - 5x^2\right)$

d. $y = \left(\frac{1}{x+2}\right)^{2x} (2x^3 - 5x)^3$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-14 : Menguasai konsep Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit.
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan turunan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

7.4 Turunan Fungsi Trigonometri

1. Turunan dari fungsi sinus

   Untuk menentukan turunan dari $f(x) = \sin x$, untuk x adalah radian, maka dapat digunakan limit dengan penjumlahan isudut rangkap seperti:

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

   jika $f(x) = \sin x$, maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

2. Turunan dari fungsi Kosinus

   Untuk menentukan turunan dari $f(x) = \cos x$, untuk x adalah radian, maka dapat digunakan limit dengan penjumlahan isudut rangkap seperti:

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

   jika $f(x) = \cos x$, maka

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\,(x + h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x\,(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h}\right) - \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

3. Turunan dari Fungsi dasar Trigonometri

   Ingat bahwa $\sin x$ dan $\cos x$ adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, maka fungsi ini juga dapat dituliskan dengan rumus dasar trigonometri yaitu:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Dari rumus dasar trigonometri ini dituliskan setiap turunannya sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Contoh:

1. $y = x^2 - \sin x$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - \sin x)$$
   $$= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x)$$
   $$= 2x - \cos x$$

2. $y = \sin x \cos x$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$

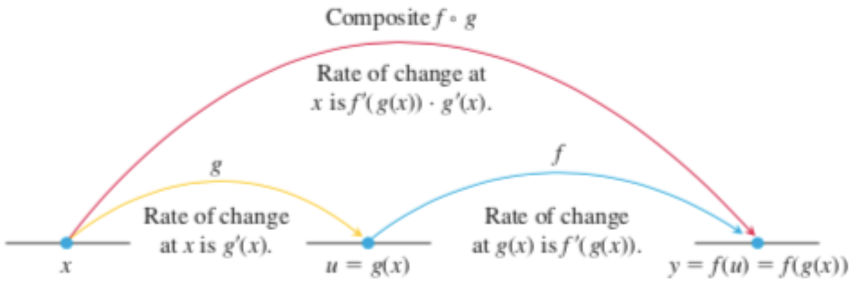
   dengan menggunakan rumus perkalian pada turunan, maka diperoleh:

   $$\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)$$
   $$= \sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(\cos x)$$
   $$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

7.5 Rumus Chain

1. Turunan Fungsi Komposisi

   Turunan dari fungsi komposisi $f(g(x))$ di x adalah turunan dari f terhadap $g(x)$ dikalikan dengan turunan dari g terhadap x. Hal ini disebut dengan rumus Chain, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 103 Turunan fungsi komposisi

   Rumus Chain dapat dituliskan dengan:

   Jika $f(u)$ adalah terdifferensiasi di titik $u = g(x)$ dan $g(x)$ adalah terdifferensiasi di x, maka fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ adalah terdifferensiasi di x, dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

   Pada notasi Leibniz dengan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka Rumus Chain dituliskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

   diman $\frac{dy}{du}$ di evaluasi di $u = g(x)$.

   Contoh :

   Tentukanlah turunan dari

   a. $y = (3x^2 + 1)^2$

   b. $x(t) = \cos(t^2 + 1)$

   Jawab:

a. Misalkan $y = f(u) = u^2$ dan $u = g(x) = 3x^2 + 1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = 2u$$
$$\frac{du}{dx} = 6x$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

b. Misalkan $x = \cos u$, dan $u = t^2 + 1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dx}{du} = -sin\, u$$
$$\frac{du}{dt} = 2t$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\sin u \cdot 2t \\ &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1)\end{aligned}$$

2. Rumus Chain untuk Fungsi Berpangkat

Jika f terdifferensiasi dari u dan jika u adalah terdifferensiasi dari x, maka dengan mensubstitusi $y = f(u)$ ke rumus Chain, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

menjadi

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \frac{du}{dx}$$

jika n adalah bilanga riil dan f adalah fungsi berpangkat, $f(u) = u^n$, maka turunan berpagkat menunjukkan bahwa $f'(u) = nu^{n-1}$. Jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, maka dengan menggunakan rumus Chain yang disebut dengan Rumus Chain berpangkat berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Contoh:

1) Tentukanlah turunan dari:
   a. $y = (5x^3 - x^4)^7$
   b. $y = \frac{1}{3x-2}$

Jawab:

a. Misalkan $u = 5x^3 - x^4$ dan $n = 7$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^7 = 7u^6 = 7(5x^3 - x^4)^6$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(15x^2 - 4x^4)$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)\\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^2)\\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^2)\end{aligned}$$

b. Misalkan $u = 3x - 2$ dan $n = -1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^{-1} = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(3x-2)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x - 2) = 3$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{d}{dx}(3x-2)^{-1}$$

$$= -1(3x-2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x-2)$$
$$= -1(3x-2)^{-2}(3)$$
$$= -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

2) Tentukanlah turunan dari fungsi trigonometri berikut:

a. $f(x) = sinx\ tanx$

b. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

c. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

d. $y = \frac{4}{x} + 6\sin x$

Jawab:

a. $f(x) = sinx\ tanx$

Misalkan, u $= \sin x$, $u' = \cos x$, $v = \tan x$, $v' = sec^2x$

$f'(x) = u'v + v'u$

$f'(x) = \cos x \tan x + sec^2xsin\ x$

$f'(x) = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{cos^2x}\sin x$

$f'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x}$

$f'(x) = \sin x + \tan x \sec x$

b. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

$y = \frac{\cot x}{1+\cot x} = \frac{u}{v}$

$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Misalkan, $u = \cot x$ maka $u' = -\csc^2 x$, $v = 1 + \cot x$ maka $v' = -\csc^2 x$

$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$y' = \frac{-\csc^2 x(1+\cot x) - (-\csc^2 x)\cot x}{(1+\cot x)^2}$$

$$y' = \frac{-\csc^2 x - \cot x.\csc^2 x + \csc^2 x \cot x}{(1+\cot x)^2}$$

$$y' = \frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

c. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

Misalkan $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $v = \sec x$, $v' = \sec x \tan x$

$$y' = u'v + v'u$$

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\sec x) + (\sec x \tan x)\left(\sqrt{x}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}(\sec x) + \sqrt{x}\sec x \tan x$$

$$y' = \frac{\sqrt{x}}{2x}\sec x + \sqrt{x}\sec x \tan x$$

$$y' = \sqrt{x}\sec x\left(\frac{1}{2x} + \tan x\right)$$

d. $y = \frac{4}{x} + 6\sin x$

$$y = 4\,x^{-1} + 6\sin x$$

$$y' = -4x^{-1-1} + 6\cos x$$

$$y' = -4\,x^{-2} + 6\cos x$$

$$y' = -\frac{4}{x^2} + 6\cos x$$

7.6 Turunan Implisit

1. Definisi Fungsi Implisit dan Turunannya

   Fungsi yang biasa kita sering gunakan adalah fungsi implisit yang biasa dituliskan dengan $y = f(x)$ yaitu bahwa variabel y di ekspresikan oleh x.

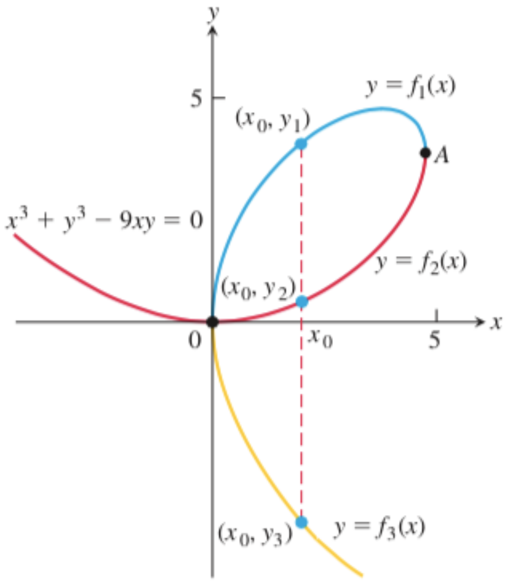
   Bentuk lain dari fungsi diekspresikan dengan fungsi implisit.

   Beberapa bentuk fungsi implisit yaitu:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^3 + xy + y^3 - 10 = 0$$

Berikut ini bentuk grafik dari fungsi implisit:



Gambar 104 Fungsi implisit

Turunan dari fungsi-fungsi berikut ini dapat dilakukan dengan menentukan $\frac{dy}{dx}$ yaitu dengan turunan implisit. Turunan dari fungsi implisit ini dapat digunakan untuk menentukan gradien dan garis tangennya.

Contoh :

1) Tentukanlah turunan dari
   a. $x^2y + xy^2 = 6$
   b. $2xy + y^2 = x + y$
   c. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

   Jawab :

   a. $x^2y + xy^2 = 6$

   $$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}(6)$$

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0$$

$$y' = \frac{-2xy - y^2}{2xy + x^2} = \frac{-xy - y^2}{xy + x^2}$$

b. $2xy + y^2 = x + y$

$$\frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y)$$

$$2(y + xy') + 2yy' = 1 + y'$$

$$2y + 2xy' + 2yy' = 1 + y'$$

$$2xy' + 2yy' - y' = 1 - 2y$$

$$y'(2x + 2y - 1) = 1 - 2y$$

$$y' = \frac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$$

c. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$2yy' = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2}$$

$$2yy' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

2. Turunan Bertingkat Fungsi Implisit

Turunan bertingkat hingga turunan ke-n dapat ditentukan dengan menurunkan fungsi yang sudah diturunkan ke $n - 1$ kali penurunan. Konsep penurunan dapat dilakukan dengan menggunakan rumus pada turunan pertama secara umum baik dalam operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

Contoh:

Tentukanlah turunan kedua dari:

a. $x^2 + y^2 = 1$

b. $y^2 = x^2 + 2x$

Jawab:

a. $x^2 + y^2 = 1$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{d}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = \frac{-y - xy'}{(y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{(y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + \frac{x^2}{y}}{(y)^2} = \frac{-\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

b. $y^2 = x^2 + 2x$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2x)$$

$$2yy' = 2x + 2$$

$$y' = \frac{2x + 2}{2y} = \frac{2(x + 1)}{2y} = \frac{x + 1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x + 1}{y}\right) = \frac{y - y'(x + 1)}{(y)^2} = \frac{y - xy' - y'}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - x\left(\frac{x + 1}{y}\right) - \left(\frac{x + 1}{y}\right)}{y^2} = \frac{y - \frac{x + x}{y} - \frac{x + 1}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\frac{y - x^2 - x - x - 1}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - x^2 - 2x - 1}{y} \times \frac{1}{y^2} = \frac{y - x^2 - 2x - 1}{y^3}$$

3. Garis Tangen dan Garis Normal

Garis tangen merupakan persamaan garis linear sisi miring dari fungsi implisit yang kita miliki. Sedangkan garis normal adalah garis linear yang tegak lurus dengan garis tangen. Untuk menentukan garis tangen dan garis normal pada fungsi implisit, dapat kita tentukan dengan menggunakan turunan pertamanya. Setiap fungsi implisit yang diturunkan sekali, yaitu $\frac{dy}{dx}$ menjadi kunci untuk menentukan persamaan garis tangen maupun garis normal pada titik tertentu dari fungsi implisit yang kita miliki.

Contoh:

1) Tentukan garis kemiringan dan garis normal pada kurva $x^2 + xy - y^2 = 1$, pada titik (2,3) !

   Jawab:

   $$x^2 + xy - y^2 = 1$$

   $$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy - \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1$$

   $$2x + y + \frac{dy}{dx}x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

   $$\frac{dy}{dx}x - 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y}$$

   Masukkan titik (2,3) pada $\frac{dy}{dx}$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y} = \frac{-2.2 - 3}{2 - 2.3} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4} = m = gradien$$

   Persamaan garis kemiringan dicari menggunakan persamaan:

   $$y - y_1 = m(x - x_1)$$

   $$y - 3 = \frac{7}{4}(x - 2)$$

$y - 3 = \left(\frac{7}{4}x - \frac{7}{2}\right)$

$y - 3 = \frac{7}{4}x - \frac{7}{2} + 3$

$y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$

Persamaan garis normal dicari menggunakan persamaan:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Dimana $m\ x\ m_1 = -1$, jadi $\frac{7}{4}\ x\ m_1 = -1 \rightarrow m_1 = -\frac{4}{7}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = -\frac{4}{7}(x - 2)$

$y - 3 = \left(-\frac{4}{7}x + \frac{8}{7}\right)$

$y - 3 = -\frac{4}{7}x + \frac{8}{7} + 3$

$y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

2) Tentukan Pararel tangents 2 point dari curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ memotong sumbu X

Jawab:

Memotong sumbu x, maka y = 0

$x^2 + xy + y^2 = 7$

$x^2 + x(0) + 0^2 = 7$

$x^2 = 7$

$x = \pm\sqrt{7}$

Point 1 = $\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$

Point 2 = $\left(\sqrt{7},\ 0\right)$

$x^2 + xy + y^2 = 7$

$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}7$

$$2x + y + \frac{dy}{dx}x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) + 2x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

Point 1 = $\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = \frac{-2x\left(-\sqrt{7}\right) - 0}{\sqrt{7} + 0} = -2$$

Point 2 = $\left(\sqrt{7},\ 0\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = \frac{-2x\left(\sqrt{7}\right) - 0}{\sqrt{7} + 0} = -2$$

Terbukti bahwa titik-titik tersebut sejajar, dimana nilai kemiringannya sama.

3) Tentukan nilai kemiringan, jika diketahui kurva $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ pada 4 titik yaitu (-3,2), (3,2), (-3,-2), (3,-2) !

Jawab:

$$y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$$

$$\frac{d}{dx}y^4 - \frac{d}{dx}4y^2 = \frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}9x^2$$

$$\frac{dy}{dx}4y^3 - \frac{dy}{dx}8y = 4x^3 - 18x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 18x}{4y^3 - 8y} = \frac{2(2x^3 - 9x)}{2(2y^3 - 4y)} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)}$$

Titik (-3,2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(-3)^3 - 9(-3))}{(2.2^3 - 4.2)} = \frac{-27}{8}$$

Titik (3,2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(3)^3 - 9(3))}{(2.2^3 - 4.2)} = \frac{27}{8}$$

Titik (-3,-2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(-3)^3 - 9(-3))}{(2.(-2)^3 - 4.(-2))} = \frac{-27}{-8} = \frac{27}{8}$$

Titik (3,-2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(3)^3 - 9(3))}{(2.(-2)^3 - 4.(-2))} = \frac{27}{-8}$$

Jadi, Titik (-3,2) & (3,-2) memiliki kemiringan yang sama sehingga garisnya sejajarTitik (3,2) & (-3,-2) memiliki kemiringan yang sama sehingga garisnya sejajar

4. Rangkuman

1. Turunan dari $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$
2. Turunan dari $f(x) = \cos x$ adalah $f'^{(x)} = -\sin x$
3. Rumus dasar trigonometri ini dituliskan setiap turunannya sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

4. Rumus Chain dapat dituliskan dengan: Jika $f(u)$ adalah terdifferensiasi di titik $u = g(x)$ dan $g(x)$ adalah terdifferensiasi di x, maka fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ adalah terdifferensiasi di x, dan

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

2) Pada notasi Leibniz dengan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka Rumus Chain dituliskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

dimana $\frac{dy}{du}$ di evaluasi di $u = g(x)$.

5. Latihan

1) Tentukanlah Turunan dari fungsi berikut ini:
   a) $y = x^5 - 0{,}5x^2 + 0{,}25x$
   b) $y = \sqrt{x} + x^5 - \frac{1}{x+1}$
   c) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
   d) $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$
   e) $f(x) = 3\tan^3 x - \sec^3 x$
   f) $s = \cot^3\left(\frac{2}{t}\right)$
2) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari fungsi implisit berikut
   a) $\frac{1}{3}x^2 + 5x^2y - 6y + 3 = 0$
   b) $x^3 - 5xy + 6y^2 - 6 = 0$
   c) $\frac{x^3}{2} + xy^{\frac{2}{3}} + 6x + 5y = 0$
   d) $x^2 - \sqrt{xy} + 5y = 30$
   e) $\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 5x^2y^3 + 5\sqrt{xy} = 0$
3) Tentukanlah Garis tangen dan garis normal dari fungsi berikut
   a) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-5} + 6$ pada titik $\left(1, \frac{41}{6}\right)$
   b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$ pada titik $(0{,}30)$
4) Tentukanlah titik yang memenuhi dari fungsi $2x^3 - 3x^2 - 12x - y + 20 = 0$, garis tangennya adalah parallel dengan sumbu x.

5) Tentukanlah titik pada kurva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ dimana tangennya memenuhi:

   a) Tegak lurus dengan $y = 1 - \left(\frac{x}{24}\right)$

   b) Parallel dengan garis $y = \sqrt{2} - 12x$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah Turunan dari fungsi berikut ini:

   a) $s = \left(\frac{4t^3}{t+1}\right)^{-2}$

   b) $r = \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$

   c) $r = \left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^2$

   d) $y = \frac{5}{(5x^2+\sin 2x^2)^{3/2}}$

   e) $y = \left(\sqrt{x} + 5x\right)\left(x^{2/3} + 5x^2\right)^3$

   f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{x^3}{5}\right)^2 \left(x + \sqrt{x}\right)^3$

   g) $g(x) = (1 + 2x^2)^{\frac{3}{2}}\left(x - 5\sqrt{x}\right)^3$

2) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari fungsi implisit berikut

   a) $x + y^2 + xy = 5$

   b) $x^2 + y^2 = 49$

   c) $\sqrt{x} + xy - y^2 = 20$

   d) $x^2 - 5xy + \sqrt{y} - 10 = 0$

   e) $x - y + 10x^2 + xy = 0$

3) Tentukanlah persamaan garis tangen dan garis normal dari kurva $y = 1 + \cos x$ di titik $\left(\frac{\pi}{2,1}\right)$.

4) Tentukanlah persamaan garis tangen dan garis normal pada kurva $x^2 + y^2 = 9$ pada titik $(1,2)$.

5) Buktikanlah bahwa setiap garis normal di setiap garis lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ melewati titik (0,0).

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C . PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran ini. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Kontinu	Limit	Asimtot	Epsilon	Delta
Diskontinu	Komposisi			

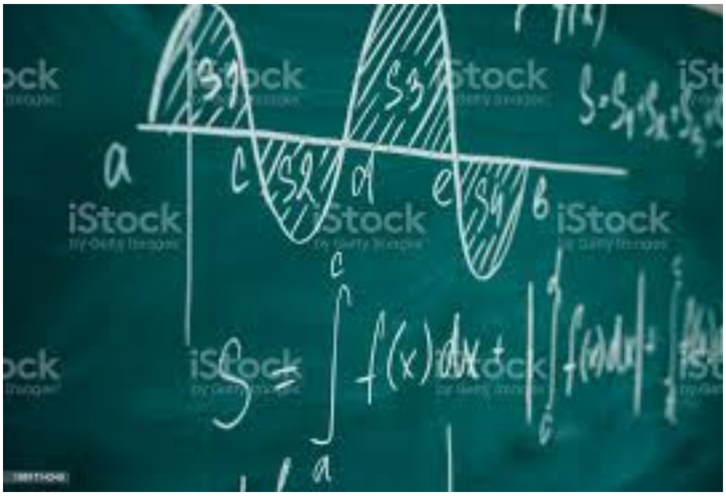
4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 8 INTEGRAL

Push yourself to achieve the best thing you've dream of.
_SCP



Pendidikan Kimia
FKIP UKI

MODUL 8 INTEGRAL

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Integral merupakan bagian dari anti turunan yang sudah dipelajari pada modul empat sebelumnya. Integral biasa disebut dengan anti turunan. Integral adalah sebuah konsep penjumlahan secara berkesinambungan dalam matematika. Integral ini dikembangkan menyusul dikembangkannya berbagai masalah yang muncul pada differensiasi, yaitu matematikawan ditantang untuk menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi differensiasi. Integral ini dibedakan menjadi dua, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Dalam modul ini mahasiswa akan mempelajari dasar integral hingga berbagai bentuk kompleksnya. Materi yang akan dipelajari dalam modul ini adalah Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu, Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul delapan

   Sikap :

   - Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
   - Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   - Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila dan UUD Negara RI Tahun 1945 dalam semboyan Bhinneka Tunggal Ika dan semangat Sumpah Pemuda.
   - Menghargai keanekaragaman budaya, nilai-nilai universal,

pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinil orang lain.

- Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
- Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

Keterampilan Umum :

- Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu dan terukur.
- Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan danmenerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni, menyusun deskripsi saintifik hasil kajiannya dalam bentuk skripsi atau laporan tugas akhir, dan mengunggahnya dalam laman perguruan tinggi.
- Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Mampu bertanggungjawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja y
- Mampu melakukan proses evaluasi diri terhadap kelompok kerja yang berada dibawah tanggungjawabnya, dan mampu mengelola pembelajaran secara mandirg beradadibawah tanggungjawabnya.

Keterampilan Khusus :

- Mampu mengidentifikasi permasalahan pembelajaran kimia dan memilih alternative solusi berdasarkan teori dan temuanpenelitian yang ada; serta mengimplementasikan dalam penelitian secara terbimbing.

Pengetahuan :

- Menguasai prinsip dan konsep
- Menguasi konsep dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul delapan

   Kegunaan modul delapan ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan integral. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu, Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-15 : Menguasai konsep Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

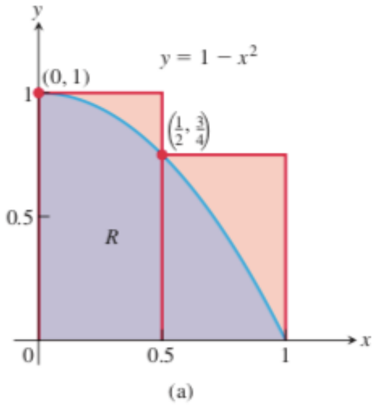
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

8.1 Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga

Luas daerah suatu bidang datar maupun bangun ruang biasanya dihitung dengan memperhatikan bentuknya hingga dapat menentukan rumus yang tepat untuk menghitung luasnya. Namun pada sebarang bentuk, kita memerlukan pendekatan lain untuk menentukannya.

Misalkan kita ingin menghitung luas daerah R yang berada diatas sumbu x dan dibawah grafik $y = 1 - x^2$, dan diantara garis vertikal $x = 0$ dan $x = 1$. Maka untuk ini tidak ada rumus sederhana secara geometri untuk menghitung luasnya, sehingga kita dapat lakukan pembagian grafiknya dalam bentuk beberapa bagian persegi panjang seperti gambar berikut:



Gambar 105 Partisi grafik

Pada gambar diatas bagian (a) dapat kita perhatikan bahwa grafiknya dibagi menjadi 2 buah persegi panjang dengan lebar sebesar $\frac{1}{2}$. Maka luas yang terbentuk dengan melakukan pendekatan membagi dua grafik tersebut seperti pada gambar (a) adalah

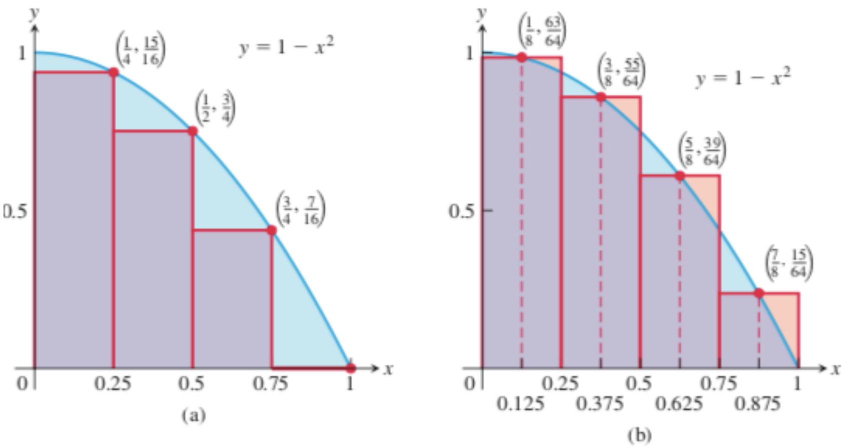
$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Sedangkan pada gambar bagian (b) kita membagi lebarnya menjadi empat bagian sehingga lebar setiap persegi panjangnya sebesar $\frac{1}{4}$. Maka luas daerah yang mendekati luas grafik sebenarnya pastilah lebih baik menggunakan bagian (b), yaitu dengan luas sebesar:

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$

Luas daerah yang kita hitung diatas adalah luas daerah grafik dengan menggunakan aproksimasi dimana luas yang sebenarnya tetaplah lebih kecil.

Misalkan kita menggunakan prinsip yang sama namun menggunakan tinggi persegi panjang sebagai titik tengah setiap persegi panjang, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 106 Partisi grafik di tengah dan diatas grafik

Luas daerah yang memungkinkan dibentuk seperti gambar ini adalah dengan menempatkan persegi di dalam grafik (gambar (a)) dan menempatkan persegi ditengah (Gambar (b)).

Perhitungan luas yang memungkinkan pada gambar (a) adalah

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0{,}53125$$

Dimana luas daerah ini pastilah lebih kecil dari luas daerah yang sebenarnya, karena persegi panjang yang terbentuk adalah di dalam grafik. Jadi Luas daerah yang sebenarnya pastilah diantara 0,53125 dan 0,78125, yang dapat dituliskan dengan:

$$0{,}53125 < A < 0{,}78125$$

Jadi berdasarkan nilai yang sudah ada ini, kita sebuk sebagai aproksimasi bawah dan aproksimasi tinggi, dimana error yang ada yaitu $0{,}78125 - 0{,}53125 = 0{,}25$.

Selanjutnya pada gambar (b) diatas dengan menggunakan tinggi sebagai titik tengah maka luasnya adalah

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}671875$$

Dalam hal ini kita dapat mengeneralisir bahwa pada interval $[a, b]$ pada fungsi f dapat kita bagi kedalam n subinterval yang sama yaitu dengan

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Fungsi f dapat kita evaluasi di setiap titik subinterval : c_1 di subinterval pertama, c_2 di subinterval kedua dan seterusnya.

Sehingga didapatkan penjumlahan berhingga dengan bentuk berikut

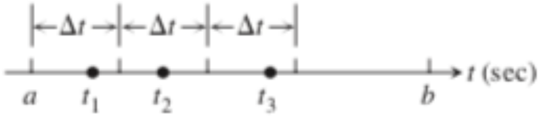
$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$$

Dengan menambahkan persegi panjang yang semakin banyak dan kecil, maka nilai aproksimasi yang didapat akan semakin baik dan luas daerah akan mendekati luas yang sebenarnya.

Hal semacam ini dapat juga kita temukan dalam menentukan jarak perjalanan kendaraan. Misalkan kita memiliki fungsi kecepatan yaitu $v(t)$ dari sebuah mobil, tanpa mengubah arah, maka kita ingin mengetahui seberapa jauh perjalanan mobil tersebut pada selang waktu $t = a$ dan $t = b$. Posisi fungsi $s(t)$ dari mobil memiliki turunan yaitu $v(t)$. Jika kita menemukan anti turunan $F(t)$ dari $v(t)$ maka kita dapat menentukan fungsi posisi dari mobil yaitu $s(t)$ dengan merumuskan $s(t) = F(t) + C$. Jarak perjalanan yang ditempuh dapat dihitung dengan melihat perubahan posisi $s(b) - s(a) = F(b) - F(a)$. Jika diketahui fungsi kecepatan dengan melihatnya dari beberapa waktu pada speedometer mobil, maka kita dapat memformulasikannya untuk menentukan anti turunan untuk kecepatan. Jadi,pada kondisi ini kita dapat membagi interval waktu $[a, b]$ kedalam waktu yang lebih singkat. Kemudian kita dapat menemukan aproksimasi jarak di setiap subintervalnya dengan menggunakan rumus :

$$Jarak = Kecepatan \times waktu$$

Bentuk yang mungkin terbentuk adalah sebagai berikut:



t_i merupakan subinterval yang mungkin terjadi dari setiap pembagian interval waktu yang ada. Jadi penjumlaha dari setiap bagian jarak di setiap subinterval waktu merupakan jarak seluruh perjalanan mobil, dengan n adala jumlah total subinterval yaitu:

$$D \approx v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \cdots + v(t_n)\Delta t$$

Ingat bahwa jarak tidak bernah bernilai negatif, maka total jarak yang mungkin terjadi dapat juga dituliskan dengan :

$$|v(t_1)|\Delta t + |v(t_2)|\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\Delta t$$

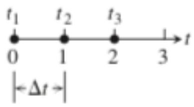
Contoh :

Diketahui bahwa fungsi kecepatan sebuah proyektil ditembakkan lurus $f(t) = 160 - 9.8t$ m/detik. Gunakanlah penjumlahan untuk mendeskripsikan seberapa jauh kenaikan proyektil selama 3 detik pertama. Seberapa dekatkah nilai yang diperoleh dengan nilai sebenarnya $435{,}9$m?

Jawab:

Ingat bahwa $f(t)$ adalah menurun, maka pilihlah titik akhir kiri untuk menentukan estimasi jumlah batas atas; pilihlah titik akhir kanan untuk menentukan estimasi jumlah batas bawah.

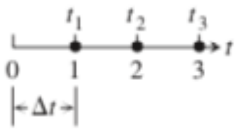
1. 3 buah subinterval dengan panjang 1, dimana f dihitung pada titik akhir kiri untuk mendapatkan jumlah batas atas:

   untuk f di $t = 0, 1,$ dan 2, diperoleh

   $$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t \\ &= [160 - 9{,}8(0)](1) + [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) \\ &= 450{,}6 \end{aligned}$$

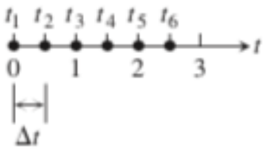
2. Tiga subinterval dengan panjang 1, f dihitung di titik akhir kanan untuk menentukan jumlah batas bawah:

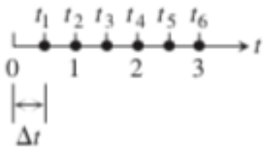


untuk f di $t = 0, 1$, dan 2, diperoleh

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$
$$= [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) + [160 - 9{,}8(3)](1)$$
$$= 421{,}2$$

3. Dengan menggunakan enam subinterval dengan panjang $\frac{1}{2}$, didapat





Jadi berdasarkan perhitungan diatas, maka nilai titik akhir kiri memiliki nilai yang lebih dekat dengan nilai sebenarnya yaitu 435,9 dari atas dan titik akhir kanan dengan batas bawah dari bawah. Jadi eror yang paling kecil adalah:

$$Eror \ = |nilai\ sebenarnya - nilai\ hitung|$$
$$= |435{,}9 - 435{,}67| = 0{,}23$$

dengan persentasi eror sebesar

$$Persentasi\ Eror = \frac{0{,}23}{435{,}9} \approx 0{,}05\%$$

Sehingga disimpulkan bahwa proyektil naik sebesar 436m selama 3 detik penerbangan.

8.2 Notasi Sigma dan Limit Sigma

Notasi sigma Σ berasal dari huruf Yunani yaitu untuk huruf S. Notasi sigma dituliskan untuk menyederhanakan perkalian berulang dengan pola tertentu seperti bentuk berikut:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\mathrm{k}} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Contoh :

i. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} \mathrm{k}^2$

dan

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i)$$

ii. Ubahlah bentuk penjumlahan $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ kedalam bentuk notasi sigma

Jawab :

Untuk $\mathrm{k} = 0$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4}(2k + 1)$

Untuk $\mathrm{k} = 1$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5}(2k - 1)$

Untuk $\mathrm{k} = 2$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6}(2k - 3)$

Untuk $\mathrm{k} = -3$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1}(2k + 7)$

Ketika kita memiliki bentuk

$$\sum_{k=1}^{3}(k + k^2)$$

maka dapat kita ubah menjadi seperti :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2)\\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2)\\ &= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2\end{aligned}$$

bentuk ini mengilustrasikan aturan umum pada penjumlahan berhingga

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Berikut ini beberapa Operasi aljabar pada penjumlahan berhingga

1. Aturan penjumlahan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2. Aturan pengurangan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

3. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

4. Aturan nilai Konstan

$$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$

Rumus penjumlahan dari bilangan kuadrat dan bilangan kubik dalam notasi sigma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Bentuk sigma ini dapat kita hitung nilai limitnya untuk menentukan aproksimasi luas daerah pada kurva tertentu. Hal ini dapat kita perhatikan pada contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai limit dari penjumlahan aproksimasi batas bawah untuk luas daerah dibawah grafik $y = 1 - x^2$ dan diatas interval [0,1] di sumbu x

dengan menggunakan lebar persegi panjang yang mendekati nol dan bilangan yang mendekati tak hingga.

Jawab:

Kita dapat menghitung batas bawah penjumlahannya dengan menggunakan n persegi panjang dengan lebar yang sama yaitu $\Delta x = \frac{1-0}{n}$ dan kemudian dilanjutkan dengan $n \to \infty$. Kita dapat memulai membagi $[0,1]$ menjadi subinterval lebar sebanyak n:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]$$

setiap subinterval memiliki lebar $1/n$. Fungsi $1 - x^2$ menurun di $[0,1]$ dan nilai terkecil dalam subinterval ada di titik akhir subinterval. Jadi batas bawah penjumlahan dikonstruksikan dengan persegi panjang yang tingginya pada subinterval $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ adalah $f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2$, diperoleh:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \left[f\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

Persamaan ini dapat disederhanakan dalam notasi sigma seperti:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} \\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}
\end{aligned}$$

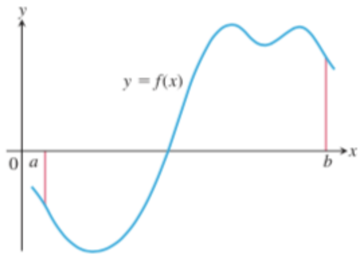
Selanjutnya untuk menentukan aproksimasi yang mendekati nilai sebenarnya, maka kita hitung nilai limit dari fungsi yang kita miliki ketika $n \to \infty$. Batas bawah yang kita temukan konvergen ketika bilangan dari subinterval naik dan lebar subinterval mendekati nol:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa batas bawah penjumlahan aproksimasinya adalah konvergen ke $\frac{2}{3}$.

Teori limit dari aproksimasi berhingga dikemukakan oleh Matematikawan Jerman bernama Bernhard Riemann. Notasi penjumlahan Riemann yang digunakan untuk definisi integral tentu.

Misalkan kita memiliki fungsi f terdefinisi pada interval tertutup seperti tampak pada gambar berikut ini



Gambar 107 Fungsi pada interval tertutup

misalkan kita membagi interval $[a, b]$ menjadi sebanyak $n-1$ titik yaitu $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\}$ diantara a dan b memenuhi

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

untuk membuat notasinya konsisten, kita misalkan $a = x_0$ dan $b = x_n$, sehingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Misalkan

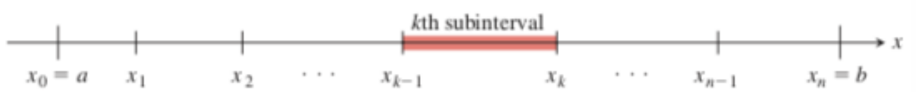
$$P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

adalah partisi dari $[a, b]$.

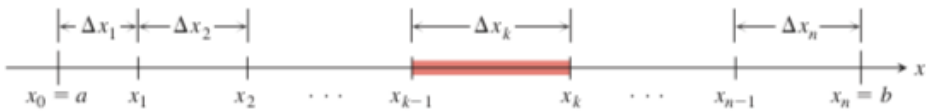
Partisi P membagi $[a, b]$ menjadi n subinterval tertutup

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

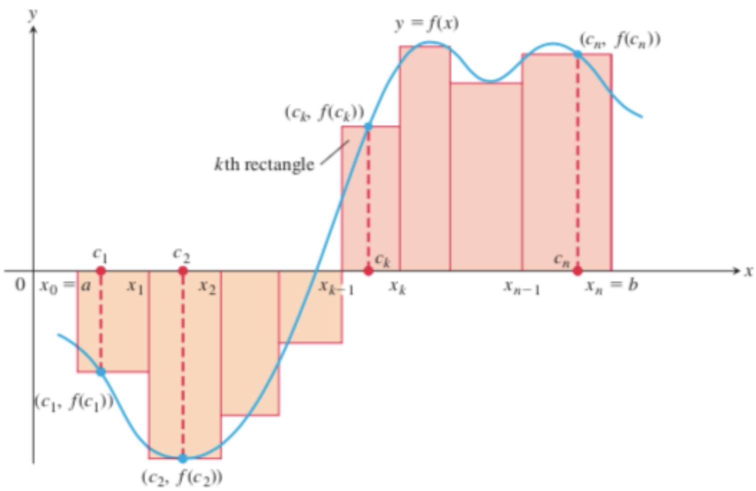
subinterval ini dilukiskan seperti berikut



lebar dari subinterval pertama $[x_0, x_1]$ dinotasikan dengan Δx_1, dan subinterval yang ke-k dinotasikan dengan $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Jika untuk semua n subinterval memiliki lebar yang sama, maka secara umum lebar $\Delta x = (b - a)/n$.



dengan menggunakan fungsi tertentu, maka persegi panjang yang terbentuk dari sebuah grafik dapat berada dibawah atau diatas sumbu x tergantung pada $f(c_k)$ adalah positif atau negatif atau di sumbu x jika $f(c_k) = 0$



Gambar 108 Fungsi dengan subinterval

setiap subinterval adalah hasil perkalian dari $f(c_k) \cdot \Delta x_k$, nilainya bisa positi, negatif atau nol tergantung pada tanda dari $f(c_k)$. Ketika $f(c_k) > 0$, perkalian $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ adalah luas dari persegi panjang dengan tinggi $f(c_k)$ dan lebar Δx_k. Ketika $f(c_k) < 0$, perkalian $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ adalah bilangan negatif. Jadi jumlah semua perkaliannya adalah merupakan Penjumlahan Riemann yaitu

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

perlu diingat bahwa norm dari partisi P ditulis dengan $\|P\|$ yang adalah lebar subinterval terbesar. Jika $\|P\|$ bilangan yang kecil, maka semua subinterval di partisi P adalah kecil.

8.3 Integral Tentu

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang terdifinisii di interval tertutup $[a, b]$. Sebarang bilang J disebut sebagai integral tentu dari f pada $[a, b]$ dan J adalah limit dari penjumlahan Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ jika kondisi berikut terpenuhi:

Misalkan diberikan $\epsilon > 0$ dan terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ dari $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ dan setia pilihan c_k di $[x_k, x_{k-1}]$, diperoleh:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J\right| < \epsilon$$

Jika nilai limitnya ada, integral tentu dapat dituliskan dengan

$$J = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Dari sini diperoleh definisi integral tentu yaitu

$$\int_a^b f(x)dx$$

ketika definisi integral tentu ini terpenuhi, kita dapat menyebut penjumlahan Riemann di $[a,]$ adalah konvergen ke integral tentu $J = \int_a^b f(x)dx$ dan bahwa f teintegralkan di $[a,b]$.

Untuk kondisi subinterval yang sama besar dengan $\Delta x = (b-a)/n$, maka berlaku bentuk penjumlahan Riemann berikut:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

dimana c_k adalah subinterval ke-k. Limit dari penjumlahan Riemann ketika $n \to \infty$ ada dan sama dengan J, maka rumus untuk integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval $[a,b]$ atau jika f memiliki loncatan ketidakkontinuan yang berhingga, maka integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ ada dan f dapat diintegralkan di $[a,b]$.

Berikut ini beberapa sifat integral tentu untuk f dan g dapat diintegralkan pada interval $[a,b]$

i. Urutan integral

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

ii. Integral bernilai 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

iii. Perkalian dengan konstanta

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

iv. Penjumlahan dan pengurangan

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

v. Sifat penjumlahan interval terurut

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

vi. Pertidaksamaan maksimum dan minimum

Jika f memiliki nilai maksimum $\max f$ dan nilai minimum $\min f$ di $[a, b]$, maka

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f \cdot (b - a)$$

vii. Dominasi

$$f(x) \geq g(x) \text{ di } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \geq 0 \text{ di } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Jika $y = f(x)$ adalah bukan negatif dan terintegralkan di interval tertutup $[a, b]$, maka luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada $[a, b]$ adalah integral dari f dengan batas a ke b.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

selanjutnya untuk integral $f(x) = x$ pada interval tertutup $[a, b]$, $0 < a < b$, berlaku:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Jadi integral dari $f(x) = x$ adalah

$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, a < b$$

Kemudian untuk integral fungsi sederhana lainnya dengan menggunakan penjumlahan Riemann adalah

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a), \qquad c \text{ adalah konstanta}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, a < b$$

Pada luas daerah fungsi dengan menggunakan pendekatan persegi panjang, maka dapat ditentukan dengan menghitung rata-rata luas daerah dibawah grafik $y = f(x)$ dibagi $b - a$. Jika f terintegralkan di $[a, b]$, maka nilai rata-rata di $[a, b]$ dapat dinotasikan dengan integral yang dituliskan dengan

$$Rata - rata = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx$$

4. Rangkuman

1) Bentuk ini mengilustrasikan aturan umum pada penjumlahan berhingga

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2) Berikut ini beberapa Operasi aljabar pada penjumlahan berhingga
   a. Aturan penjumlahan

   $$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   b. Aturan pengurangan

   $$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   c. Aturan perkalian dengan konstanta

   $$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   d. Aturan nilai Konstan

   $$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$

3) Rumus penjumlahan dari bilangan kuadrat dan bilangan kubik dalam notasi sigma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4) Penjumlahan Riemann yaitu

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

5) Limit dari penjumlahan Riemann ketika $n \to \infty$ ada dan sama dengan J, maka rumus untuk integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

6) Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval $[a, b]$ atau jika f memiliki loncatan ketidakkontinuan yang berhingga, maka integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ ada dan f dapat diintegralkan di $[a, b]$.

7) Berikut ini beberapa sifat integral tentu untuk f dan g dapat diintegralkan pada interval $[a, b]$:

   a. Urutan integral

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

   b. Integral bernilai 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

   c. Perkalian dengan konstanta

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

   d. Penjumlahan dan pengurangan

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

   e. Sifat penjumlahan interval terurut

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

   f. Pertidaksamaan maksimum dan minimum

Jika f memiliki nilai maksimum $\max f$ dan nilai minimum $\min f$ di $[a,b]$, maka

$$\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f \cdot (b-a)$$

g. Dominasi

$$f(x) \geq g(x) \text{ di } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \geq 0 \text{ di } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

5. Latihan

1. Express the following limit as a definite integral

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$$

2. Evaluate
   a. $\int x^2\sqrt{x-1}\, dx$
   b. $\int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x \; dx$
   c. $\int_{-1}^{1} 2x \sin(1-x^2)\; dx$
   d. $\int \sqrt{t}\sin(2t^{3/2})\; dt$
3. Find the number b such that the line $y = b$ divides the region bounded by the curve $y = x^2$ and $y = 4$ into two regions with equal area.
4. Find the exact arc length of $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 1$ from $x = 0$ to $x = 1$.
5. Find the area of the surface that is generated by revolving the portion of the curve $y = x^2$ between $x = 1$ and $x = 2$ about the y-axis.

6. Evaluasi Pembelajaran

Selesaikanlah integral berikut

1. $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1} dx =$
2. $\int \frac{1}{6+x-x^2} dx =$
3. $\int \frac{4x+5}{x^2+4x+5} dx =$
4. $\int \frac{x^3-4x^2+6}{x^2-4x+4} dx =$
5. $\int \frac{12\,(x-1)}{(x+1)(x^2-4)} dx =$
6. $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16+5)} dx =$
7. $\int \frac{\mathbf{x^3-7x^2+8x+3}}{\mathbf{x^2-7x+12}}\ \mathbf{dx}$
8. $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$
9. $\int_{(x+1)^2}^{x+2x\sqrt{x}} \frac{8}{2x^2-12x+10} dx =$
10. $\int_{\sin\frac{1}{2}\pi}^{\sin\pi} \frac{3}{7x^2-5x-18} dx =$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-16 : Menguasai konsep Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

8.4 Teorema Fundamental Kalkulus

Teorema fundamental kalkulus dimulai dengan menggunakan teorema nilai rata-rata pada integral; tentu seperti yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya. Teorema nilai rata-rata untuk integral tentu yaitu: Jika f adalah fungsi kontinu di $[a, b]$, maka di titik c dalam $[a, b]$ berlaku

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Dengan menggunakan prinsip ini, maka ada beberapa bagian teorema fundamental pada kalkulus seperti berikut:

1) Teorema fundamental bagian pertama

   Jika $f(t)$ adalah fungsi integral pada integral tentu di interval I, maka integral dari setiap bilangan $a \in I$ ke bilangan lain $x \in I$

didefinisikan sebagai sebuah fungsi baru F yang memiliki nilai di x yaitu

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$$

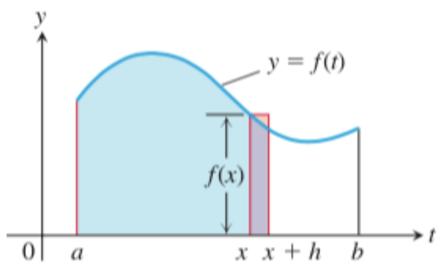
jika f adalah fungsi kontinu, maka teorema fundamental bahwa F adalah terdifferensiasi di x dimana turunannya adalah f sendiri. Pada setiap nilai x, berlaku:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

jika $f \geq 0$ di $[a, b]$, maka perhitungan $F'(x)$ dari definisi turunannya menyatakan bahwa limit ketika $h \to 0$ dengan persamaan

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

untuk $h > 0$, penyebut diperoleh dengan substrasi dua daerah, sehingga luas dibawah grafik f dari x ke $x + h$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 109 Luas grafik

jika h kecil, luas daerahnya akan mendekati luas daerah dengan tinggi $f(x)$ dan lebar h, seperti pada gambar diatas. Sehingga di dapat

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$$

Dengan membagi kedua sisinya dengan h dan $h \to 0$, maka diperoleh

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa Teorema fundamental kalkulus yang pertama yaitu:

Jika f adalah kontinu di $[a, b]$, maka $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ adalah kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b) dan turunannya adalah $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Bukti:

Untukmembuktikan teorema ini, kita gunakan definisi turunan secara umum pada fungsi $F(x)$, ketika x dan $x + h$ ada di (a, b). Yaitu dengan persamaan

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

dan menunjukkan bahwa limit untuk $h \to 0$ adalah bilangan $f(x)$ untuk x di (a, b). Sehingga diperoleh :

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x f(t)dt$$

Berdasarkan teorema rata-rata untuk integral tentu, maka untuk titik c pada interval berlaku

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

untuk $h \to 0$, $x + h$ mendekati x, yang membuat c mendekati x juga. Karena f adalah kontinu di x, $f(c)$ mendekati $f(x)$:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

sehingga disimpulkan

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c)$$

$$= f(x)$$

2) Teorema fundamental bagian kedua

Jika f kontinu di $[a, b]$ dan F adalah anti turunan dari f di $[a, b]$, maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Jika F adalah anti turunan dari f, maka $F' = f$. Persamaannya dapat dituliskan dalam bentuk teorema yang disebut dengan teorema perubahan yaitu:

Perubahan pada fungsi differensial $F(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$ integral dari tingkat perubahan:

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} F'(x)dx$$

Selanjutnya berikut ini hubungan integral dan turunan

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{b} f(t)dt = f(x)$$

dengan mengubah variabel b ke x, dan x ke t maka:

$$\int_{a}^{x} F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

8.5 Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi

Integral tak tentu dinotasikan sebagai anti turunan F dari f, yaitu:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

dimana C adalah sebarang konstanta.

Salah satu metode menentukan integral tentu adalah dengan menggunakan metode substitusi. Metode substitusi dilakukan dengan langkah balikan dari aturan Chain. Aturan Chain yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}$$

dari sisi yang berbeda maka dapat diubah menjadi

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Jadi aturan substitusi untuk integral tak tentu dapat dituliskan dengan:

Jika $u = g(x)$ adalah fungsi yang terdifferensiasi pada interval I, dan f kontinu I, maka

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du$$

Contoh :

1) Tentukanlah integral dari

$$\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)\,dx$$

Jawab:

Misalkan $u = x^3 + x$, maka

$$du = \frac{du}{dx}dx = (3x^2 + 1)dx$$

dengan substitusi diperoleh:

$$\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)\,dx = \int u^5 du$$

$$= \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{(x^3 + x)^6}{6} + C$$

2) Tentukanlah integral dari

$$\int \cos(7\theta + 3)\, d\theta$$

Jawab:

Misalkan $u = 7\theta + 3$ maka $du = 7d\theta$. Diperoleh:

$$\int \cos(7\theta + 3)\, d\theta = \frac{1}{7}\int \cos(7\theta + 3) \cdot 7\, d\theta$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos u \; du$$

$$= \frac{1}{7}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7\theta + 3) + C$$

3) Tentukanlah integral dari

$$\int x\sqrt{2x + 1}\; dx$$

Jawab:

Misalkan $u = 2x + 1$ maka $du = 2dx$, sehingga

$$\sqrt{2x + 1}dx = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, du$$

jika $u = 2x + 1$ maka $x = \frac{u-1}{2}$, diperoleh

$$x\sqrt{2x + 1}\, dx = \frac{1}{2}(u - 1) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{u}\, du$$

sehingga bentuk integral menjadi:

$$\int x\sqrt{2x + 1}\; dx = \frac{1}{4}\int (u - 1)\sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u - 1)u^{1/2}\; du$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)\; du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

8.6 Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva

Jika g' adalah fungsi kontinu si interval $[a, b]$ dan f kontinu di $g(x) = u$, maka

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

jika f dan g adalah kontinu dengan $f(x) \geq g(x)$ melalui $[a, b]$, maka luas dari daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dari a ke b adalah integral dari $f - g$ dengan batas a ke b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Contoh:

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 2 - x^2$ dan $y = -x$.

Jawab:

Untuk menentukan luas daerahnya, maka pertama sekali perlu kita tentukan batas interval untuk x yaitu

$$2 - x^2 = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$x = -1$ atau $x = 2$. Jadi batas daerahnya adalah $a = -1$ dan $b = 2$. Sehingga luas yang terbentuk adalah

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\ dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\ dx$$

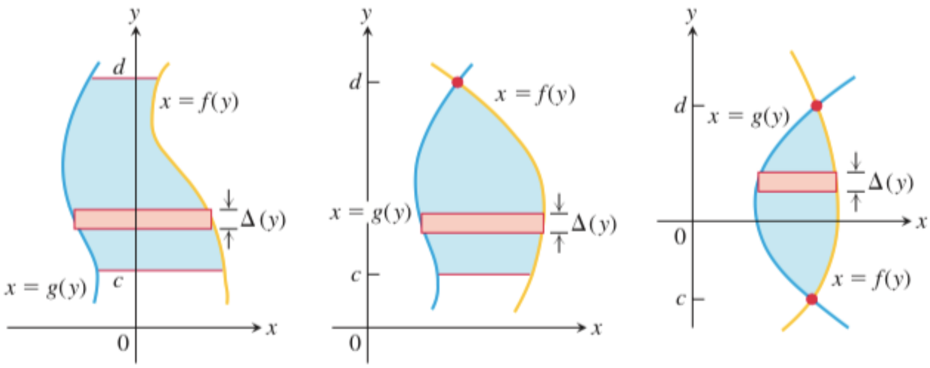
$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

Bentuk integral tidak selamanya diintegralkan pada sumbu x, namun dapat juga diintegralkan pada sumbu y. Pada tahap dan proses pengerjaannya sama dengan sumbu x. Sehingga untuk rumus menentukan luas daerah dengan pengintegralan terhadap sumbu y diformulasikan seperti berikut ini.

$$A = \int_{c}^{d} [f(y) - g(y)]\, dy$$

dengan bentuk grafik dan luas daerah seperti berikut:



Gambar 110 Grafik luas daerah diantara grafik

4. Rangkuman

1. Jika f adalah kontinu di $[a, b]$, maka $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ adalah kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b) dan turunannya adalah $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2. Perubahan pada fungsi differensial $F(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$ integral dari tingkat perubahan:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

3. Integral tak tentu dinotasikan sebagai anti turunan F dari f, yaitu:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

4. Jika f dan g adalah kontinu dengan $f(x) \geq g(x)$ melalui $[a, b]$, maka luas dari daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dari a ke b adalah integral dari $f - g$ dengan batas a ke b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

5. Rumus menentukan luas daerah dengan pengintegralan terhadap sumbu y diformulasikan seperti berikut ini.

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

5. Latihan

Tentukanlah integral dari:

(a) $\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx$

(b) $\int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sec x + \tan x)^2 dx$

(d) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t + 1)(t^2 + 4) dt$

(e) $\int_1^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}} ds$

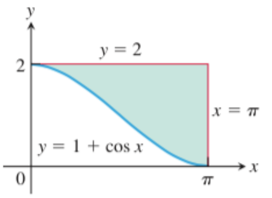
(g) $\int \sec^2(3x + 2)\, dx$

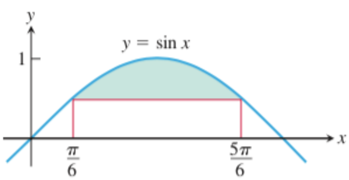
(h) $\int 3y\sqrt{7 - 3y^2} dy$

(i) $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}} dr$

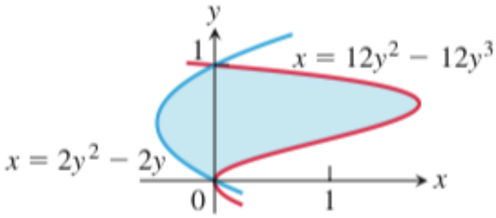
Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva berikut

1. $y = -x^2 - 2x, -3 \le x \le 2$
2. $x = y^2$ dan $x = y + 2$
3. $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ dan $y = x$
4. $x^3 - y = 0$ dan $3x^2 - y = 4$
5. gambar berikut





6. gambar berikut



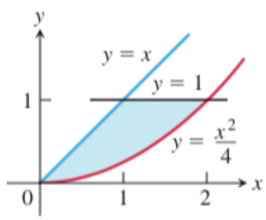
6. Evaluasi Pembelajaran

Tentukanlah integral dari:

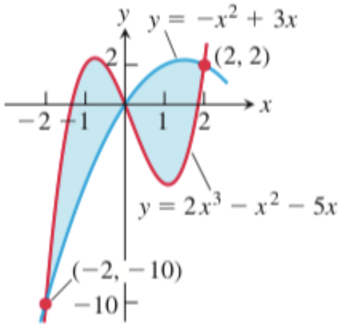
1) $\int_1^4 \left(3x^2 - \frac{x^3}{4}\right) dx$
2) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{s^2+\sqrt{s}}{x^2} ds$
3) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x + \sec x)^2 dx$
4) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cos x^2 \, dx$
5) $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}} dz$

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva berikut

1) $y = x^{\frac{1}{3}} - x, -1 \leq x \leq 8$
2) $x - y^2 = 0$ dan $x + 2y^2 = 3$
3) $x + y^2 = 3$ dan $4x + y^2 = 0$
4) $y = \sec^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ dan $y = x^{\frac{1}{3}}, -1 \leq x \leq 1$
5) gambar berikut



6) gambar berikut



7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul delapan ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran ini. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi integral secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Kontinu Integral sigma Fungsi Sinus Substitusi

4. Referensi

   Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

   Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

BIOGRAFI PENULIS

Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc. adalah seorang dosen di Universitas Kristen Indonesia pada program studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Ia menyelesaikan pendidikan sarjananya di Universitas tempat ia bekerja sekarang dan menuntaskan studi magisternya di National Chung Cheng University.

Penulis lahir di tanjung saribu pada tanggal 30 Maret 1994. Buku ini merupakan buku keempat yang ditulisnya dengan bentuk Buku Materi Pembelajaran (BMP) pada mata kuliah Matematika Kimia pada Prodi Pendidikan Kimia.

Penulis juga sudah menerbitkan dan menulis beberapa artikel yang terbit di jurnal internasional maupun nasional. Semangat menulis dilakoni sejak duduk di bangku kuliah dengan menulis di blog pribadi.

Dengan adanya karya tulisan seperti ini, diharpkan para pembaca dan memahaminya dan juga dapat mendukung perkembangan ilmu pengetahuan. Setiap karya yang dituliskan dapat diakses di blog penulis maupun di web jurnal yang tersedia. Kegigihan penulis juga dapat dilihat dengan keaktifannya dapat berbagai komunitas untuk meningkatkan kemampuan dan karakter yang berdampak.