BMP.UKI:SCP-01-MD-PMAT-I-2021

BUKU MATERI PEMBELAJARAN
MATEMATIKA DASAR

Penulis :
Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc.

PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
JAKARTA
2020

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan pertolonganNya penulisan Buku Materi Pembelajaran (BMP) Matematika Dasar ini dapat diselesaikan. Terima kasih untuk seluruh dosen dan segenap rekan kerja di Prodi pendidikan Matematika FKIP UKI yang turut membantu dan mendukung proses penulisan buku ini.

Buku ini ditulis untuk membantu proses pembelajaran pada mata kuliah Matematika dasar yang dapat digunakan oleh seluruh mahasiswa untuk belajar secara mandiri. Selain itu, buku ini dapat juga digunakan di dalam kelas dalam proses tatap muka dengan dosen pegampu dengan menggunakan model pembelajaran berpusat pada mahasiswa atau yang biasa disebut dengan *Student Centered Learning (SCL)*. Kiranya buku ini dapat digunakan dan membantu memaksimalkan proses pembelajaran untuk memcapai kompetensi lulusan yang kreatif, inovatif unggul dan kompeten.

Setiap kritik dan saran yang membangun dapat disampaikan kepada penulis untuk meningkatkan kualitas BMP ini. Kiranya Tuhan memberkati kita semua.

Jakarta, Agustus 2020
Penulis
<u>Santri Chintia Purba</u>

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PETUNJUK PENGGUNAAN BMP

Bagian ini memuat cara penggunaaan modul supaya peserta didik dapat mencapai tujuan yang diinginkan. Bagian ini juga memuat tentang peran dosen mengenai tata belajar dengan menggunakan modul. Berikut ini dijabarkan petunjuk penggunaan BMP Matematik Dasar yaitu:

a. Petunjuk bagi mahasiswa

   Mahasiswa mengikuti langkah-langkah kegiatan pembelajaran yang sudah ada di dalam modul yaitu dengan memahami materi yang dijabarkan didalam modul baik secara mandiri maupun kelompok. Mahasiswa harus mempersiapkan alat tulis dan alat hitung yang dibutuhkan.

   Waktu pembelajaran yang dibutuhkan disetiap modul adalah sebanyak 2 minggu, yaitu 4 sks dikali dengan 2. Sehingga total waktu yang dibutuhkan adalah 400 menit per modul.

   Mahasiswa dapat memahami materi dan menyelesaikan soal-soal latihan maupun tugas yang diberikan sesuai dengan waktu yang ditentukan.

   Evaluasi akan dilakukan disetiap akhir satu modul dengan melakukan quis yang diberikan oleh dosen.

   Soal latihan yang dimuat didalam modul ini dapat digunakan untuk evaluasi *self assessment* mahasiswa, untuk melihat sejauh mana pemahaman mahasiswa akan materi yang ada.

   Soal-soal yang tersedia beragam yang terdiri dari soal latihan yang mudah, sedang dan sukar. Sehingga mahasiswa dapat meningkatkn pemahamannya dan kemampuan berpikirnya akan materi dan permasalahan yang ada.

b. Peran dosen

   Dosen sebagai fasilitator pembelajaran mengarahkan peserta didik melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan strategi pembelajaran yang digunakan yaitu *Teacher Centered Learning* (SCL). Dosen menjelaskan tata cara menggunakan modul dan menjelaskan kegiatan pembelajran yang akan dilakukan. Pembelajaran dilakukan dengan kooperatif learning, yaitu mahasiswa membentuk kelompok-kelompok kecil yang terdiri dari 3-4 orang. Anggota kelompok dipilih secara acak dan disesuaikan dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

   Dosen menjelaskan beberapa materi dan mendiskusikannya bersama mahasiswa, selanjutnya mahasiswa akan melakukan diskusi kelompok sesuai dengan topik dan bahan diskusi yang diberikan.

   Dosen akan memperhatikan kondisi diskusi peserta didik dan peserta didik dapat bertanya kepada dosen jika ada materi yang sulit untuk dipahami.

   Selanjutnya dosen uga berperan mengevaluasi proses pembelajaran yang dilakukan dengan menggunakan isntrumen yang disusun yaitu dengan melakukan quiss di setiap akhir topik yang diselesaikan.

CAPAIAN PEMBELAJARAN LULUSAN

No	Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL)
Sikap	
S1	Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius
S2	Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
S3	Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan pancasila.
S4	Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.
S5	Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.
S6	Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
S7	Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.
S8	Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
S9	Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;
S10	Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.
S12	Menunjukkan etos kerja yang baik
S13	Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.
S14	Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah,
Keterampilan Umum	
KU1	Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
KU2	Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
KU3	Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU5	Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data
KU9	Mampu mendokumentasikan, menyimpan, mengamankan, dan menemukan kembali data untuk menjamin kesahihan dan mencegah plagiasi.
KU10	Mampu berkomunikasi dengan baik menggunakan bahasa Indonesia

	maupun Bahasa Inggris.
KU11	Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.
Keterampilan Khusus	
KK1	Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3	Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4	Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9	Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari
Pengetahuan	
P2	Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3	Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari
P5	Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA</td></tr>
<tr><td colspan="7">RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER</td></tr>
<tr><td>MATA KULIAH</td><td colspan="2">KODE</td><td>Rumpun MK</td><td>BOBOT (sks)</td><td>SEMESTER</td><td>Tgl Penyusunan</td></tr>
<tr><td>MATEMATIKA DASAR</td><td colspan="2">131141015</td><td>MATEMATIKA.</td><td>4</td><td>II</td><td>25 Agustus 2020</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OTORISASI</td><td colspan="3">Pengembang RPS</td><td colspan="2">Koordinator RMK</td><td>Ka. PRODI</td></tr>
<tr><td colspan="3">Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.</td><td colspan="2">Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.</td><td>Stevi Natalia, M.Pd.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capaian Pembelajaran (CP)</td><td colspan="6">CPL</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Sikap
1 S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius
2 S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
3 S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
4 S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
5 S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;
6 S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.
7 S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah</td></tr>
</table>

		Keterampilan Umum 1. KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya 2. KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur 3. KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni 4. KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya. Keterampilan Khusus 1. KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup. 2. KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan. 3. KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika 4. KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari Pengetahuan 1. P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

	2. P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari 3. P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.
	CPMK
	1. Mahasiswa mampu memahami kompetensi yang akan dicapai pada mata kuliah Matematika Dasar, menganalisis bahan/materi, jadwal perkuliahan, mentaati kontrak kuliah dan menyelesaikan tugas tepat waktu serta membuat rencana program belajar mandiri maupun kelompok berdasarkan hasil analisis, serta mampu menunjukkan penghayatan dan pengamalan nilai-nilai kristiani. 2. Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Sistem Bilangan Riil, Himpunan, Persamaan dan pertidaksamaan Linear, Fungsi, Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan, Turunan dan Pemanfaatan Teknologi dalam menggambarkannya.
Deskripsi Singkat MK	Mata kuliah ini dimaksudkan untuk memberi kemampuan pada mahasiswa tentang konsep-konsep matematika mengenai Sistem Bilangan Riil, Himpunan, Persamaan dan pertidaksamaan Linear, Fungsi, Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan, dan Turunan yang memuat definisi, sifat-sifat, teknik, dan teorema terkait beserta aplikasinya yang mampu menerapkannya dalam menyelesaikan masalah yang ada berupa berbagai bentuk soal maupun project.
Bahan Kajian	Sistem Bilangan Riil, Himpunan, Persamaan dan pertidaksamaan Linear, Fungsi, Matriks, Trigonometri, Limit danKekontinuan, dan Turunan
Pustaka	Utama:
	a. Buku Materi Pembelajaran (BMP) Matematika Dasar
	Pendukung: 1. Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

	2. Varberg, Rurcell, Rigdon. *Kalkulus.* Jakarta: Erlangga.	
Media Pembelajaran	Perangkat lunak:	Perangkat keras:
	Microsoft Teams	Laptop Spidol board marker Whiteboard Poster LCD
Team Teaching		
Matakuliah syarat	-	

Mg Ke-	Sub-CP-MK (Kemampuan Akhir yang Direncanakan)	Bahan Kajian (Materi Pembelajaran)	Bentuk dan Metode Pembelajaran (Media & Sumber Belajar)	Estimasi Waktu	Pengalaman Belajar Mahasiswa	Penilaian		
						Kriteria	Indikator	Bobot
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	Mahasiswa mampu memahami kompetensi yang akan dicapai pada matakuliah Kalkulus Dasar,	1. Perkenalan 2. Kontrak kuliah/aturan kesepakatan	Lecture (ceramah) Ekspositori Brainstorming Tanya-jawab Diskusi	200’	Interaksi akrab dosen dengan mahasiswa dan sesama mahasiswa. Mahasiswa termotivasi untuk belajar mandiri. Mahasiswa siap bekomitmen.	Kognitif Afektif	Partisipatif Motivasi belajar Kesediaan berkomitmen Tanggungjawab	%

	menganalisis bahan/materi, jadwal perkuliahan, mentaati kontrak kuliah dan menyelesaikan tugas tepat waktu serta membuat rencana program belajar mandiri maupun kelompok berdasarkan hasil analisis, serta mampu menunjukkan penghayatan dan pengamalan nilai-nilai kristiani.	3. Hak dan Kewajiban Mahasiswa 4. Motivasi dan Rencana Belajar 5. Penjelasan RPS 6. Pendahuluan Sistem Bilangan Riil 7. Himpunan Bilangan	Pemberian contoh		Mahasiswa dapat memper siapkan materi materi selanjutnya Mahasiswa memahami pengertian dasar bilangan riil			

2	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Sistem Bilangan Riil	1. Bentuk Pangkat 2. Bentuk akar 3. Bentuk Logaritma	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami sistem bilangan riil Mahasiswa mampu menguasai materi bentuk pangkat, akar dan logaritma	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	%

3-4	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Himpunan	1. Pendahuluan Himpunan 2. Pengertian Himpunan 3. Keanggotaan Himpunan 4. Jenis-jenis himpunan 5. Operasi pada himpunan 6. Hukum-hukum Himpunan	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa menguasai konsep himpunan Mahasiswa dapat menganalisis keberadaan sebuah himpunan dan pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	%
5-6	Mahasiswa mampu menguasai konsep,	1. Pendahuluan Persamaan dan pertidak samaan linear	Ekspositori Problem Based	200’	Mahasiswa menguasai persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel	Kognitif Afektif Psikomotor	Partisipatif Penguasaan konsep Analisis	%

	prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Persamaan dan pertidaksamaan Linear	2. Persamaan Ekuivalen 3. Persamaan Linear bentuk Pecahan 4. Pertidaksamaan linear satu variabel 5. Persamaan linear dua variabel 6. Pertidaksamaan linear dua variabel	Learning Diskusi Project		Mahasiswa mampu menentukan dan menganlisis persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel	(Unjuk kerja)	Penugasan Quiz	
7-8	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola	1. Pendahuluan Fungsi 2. Pengertian Fungsi 3. Sifat Fungsi	Ekspositori Problem Based Learning	200’	Mahasiswa dapat menentukan nilai fungsi Mahasiswa mampu menganalisis jenis-	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quis	%

	pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Fungsi	4. Jenis Fungsi 5. Doman, Kodomain dan Range Fungsi 6. Fungsi Komposisi 7. Fungsi Invers	Diskusi Project		jenis fungsi Mahasiswa menguasai operasi fungsi seperti komposisi dan invers suatu fungsi		**Pengumpulan Project 1**	
9-10	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran	1. Pendahuluan matriks 2. Pengertian matriks 3. Jenis-jenis matriks 4. Operasi dan sifat-sifat matriks	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa menguasai konsep matriks Mahasiswa mampu melakukan analisis perhitungan pada matriks Mahasiswa mampu	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penugasan Diskusi Quis	%

	dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi , Matriks	5. Determinan 6. Invers matriks			memahami aplikasi matriks			
11-12	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena	1. Pendahuluan Trigonometri 2. Pengertian Trigonometri 3. Identitas Trigonometri 4. Aplikasi Trigonometri	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami manfaat trigonometri Mahasiswa menguasai konsep trigonometri dan aplikasinya	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penugasan Diskusi Quis	%

	spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Trigonometri							
13-14	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsik	1. Pendahuluan Limit dan Kekontinuan 2. Pengertian limit 3. Sifat-sifat limit 4. Limit bentuk tak tentu 5. Limit bentuk trigonometri 6. Kekontinuan 7. Aplikasi Limit	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami definisi dan konsepLimit Mahasiswa memahami bentuk-bentuk limit Mahasiswa memahami aplikasi limit dan kekontinuan	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quis	%

	an, menganalisis konsep-konsep pada materi Limit danKekontinuan							
15-16	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis	1. Pendahuluan turunan 2. Pengertian turunan 3. Aturan turunan 4. Turunan trigonometri 5. De L'Hospital 6. Aturan rantai 7. Turunan tingkat tinggi	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200'	Mahasiswa memahami konsep turunan Mahasiswa menguasai turunan berbagai fungsi dan aturan-aturannya	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quiz **Pengumpulan Project 2**	%

	konsep-konsep pada Turunan dan Aplikasinya							

PENILAIAN :
Tugas : 20%, Quis : 15%, UTS/Project 1: 25%, UAS/Project 2 : 30%, Afektif : 10%

CONTOH RANCANGAN TUGAS MAHASISWA

MATA KULIAH	: ....
SEMESTER	: .... **sks** : ....
MINGGU KE	: .... **Tugas ke :**

1. **TUJUAN TUGAS :** ……………………………………………………………………

2. **URAIAN TUGAS**
   a. Obyek garapan : ……………………………………………………
   b. Yang harus dikerjakan dan batasan-batasan : ……………………………………………………
   : ……………………………………………………
   c. Metode/cara pengerjaan, acuan yang digunakan : ……………………………………………………
   : ……………………………………………………
   d. Deskripsi luaran tugas yang dikerjakan : ……………………………………………………

3. **KRITERIA PENILAIAN**
   a. …………………………………………………… : ……… %
   b. …………………………………………………… : ……… %
   c. …………………………………………………… : ……… %

PENILAIAN

Penilaian capaian pembelajaran dilakukan pada ranah sikap, pengetahuan dan keterampilan secara rinci dijelaskan sebagai berikut:

1. Penilaian ranah sikap dilakukan melalui observasi, penilaian diri, penilaian antar mahasiswa (mahasiswa menilai kinerja rekannya dalam satu bidang atau kelompok), dan penilaian aspek pribadi yang menekankan pada aspek beriman, berakhlak mulia, percaya diri, disiplin dan bertanggung jawab dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial, alam sekitar, serta dunia dan peradabannya.

2. Penilaian ranah pengetahuan melalui berbagai bentuk tes tulis dan tes lisan yang secara teknis dapat dilaksanakan secara langsung maupun tidak langsung. Secara langsung maksudnya adalah dosen dan mahasiswa bertemu secara tatap muka saat penilaian, misalnya saat seminar, ujian skripsi, tesis dan disertasi. Sedangkan secara tidak langsung, misalnya menggunakan lembar-lembar soal ujian tulis.
3. Penilaian ranah keterampilan melalui penilaian kinerja yang dapat diselenggarakan melalui praktikum, praktik, simulasi, praktik lapangan, dll. yang memungkinkan mahasiswa untuk dapat meningkatkan kemampuan keterampilannya.

Contoh penilaian project mahasiswa yang berdasarkan artikel jurnal ilmiah.

Capaian belajar yang diukur:

✓ Kemampuan memilih artikel jurnal bereputasi dan mutakhir sesuai dengan tema dampak polusi industri;

✓ Kemampuan meringkas artikel jurnal dengan tepat dan benar.

Tabel 1. Penilaian Project

No	Aspek Penilaian Skor	Artikel-1		Artikel-2		Artikel-3	
		Tinggi (6-10)	**Rendah (1-5)**	**Tinggi (6-10)**	**Rendah (1-5)**	**Tinggi (6-10)**	**Rendah (1-5)**
1	Artikel berasal dari journal terindek dalam kurun waktu 3 tahun tarakhir.						
2	Artikel berkaitan dengan materi mata kuliah						
3	Ketepatan meringkas isi bagian-bagian penting dari abstrak artikel						
5	Ketepatan meringkas konsep pemikiran penting dalam artikel						
6	Ketepatan meringkas pembahasan hasil penelitian dalam artikel						
7	Ketepatan menggunakan simpulan hasil penelitian dalam artikel						
10	Ketepatan menuliskan project berupa tulisan baru berdasarkan artikel yang ada.						
Jumlah skortiap ringkasan artikel							
Rata-rata skor yang diperoleh							

PELAPORAN PENILAIAN
Pelaporan penilaian berupa kualifikasi keberhasilan mahasiswa dalam menempuh suatu mata kuliah yang dinyatakan dalam kisaran seperti pada table berikut.

Tabel 2.Kategori Penilaian

Rentang Skor	Nilai Huruf	Nilai Angka
80,0 – 100	A	4,0
75,0 – 79,9	A-	3,7
70,0 – 74,9	B+	3,3
65,0 – 69,9	B	3,0
60,0 – 64,9	B-	2,7
55,0 – 59,9	C+	2,3
50,0-54,9	C	2,0
45,0-49,9	D	`1,0
<44,9	E	0

Jakarta, 25 Agustus 2021

Mengetahui,	Disusun oleh,
Ketua Program Studi	Dosen Pengampu
Stevi Natalia, M.Pd.	Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

KONTRAK PERKULIAHAN

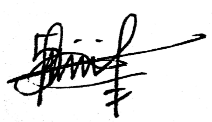
Kontrak perkuliahan merupakan kesepakatan antara dosen pengampu mata kuliah dengan mahasiswa yang ditanda tangani oleh ketua kelas. Adapun kontrak perkuliahan di dalam mata kuliah Matematika Dasar Prodi pendidikan Matematika Semester Gasal TA 2021/2022 yaitu :

1. Setiap Mahasiswa memiliki BMP
2. Keterlambatan paling lama 10 menit.
3. Setiap tugas dikumpulkan ontime sesuai dengan deadline yang disepakati, konsekuensi telat pengurangan nilai -5 dihari yang sama, -10 lebih dari sehari.
4. Perkuliahan diawali dengan Doa yang dipimpin secara bergantian.
5. Setiap mahasiswa bersedia ditempatkan dikelompok yang disusun oleh dosen.
6. Evaluasi Pembelajaran dilakukan dengan Quis, Penugasan dan Project.
7. Perkuliahan online dilakukan dengan 2 sks dosen menjelaskan, 2 sks mahasiswa mandiri atau diskusi melalui BMP yang sudah disediakan.

Demikianlah kontak perkuliahan ini disusun untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya. Untuk hal-hal kesepakatan lainnya dapat diatur kemudian sesuai dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Disepakati oleh,

Dosen Pengampu Mata Kuliah



Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc.
NIP/NIDN : 191660/0330039402

Ketua Kelas

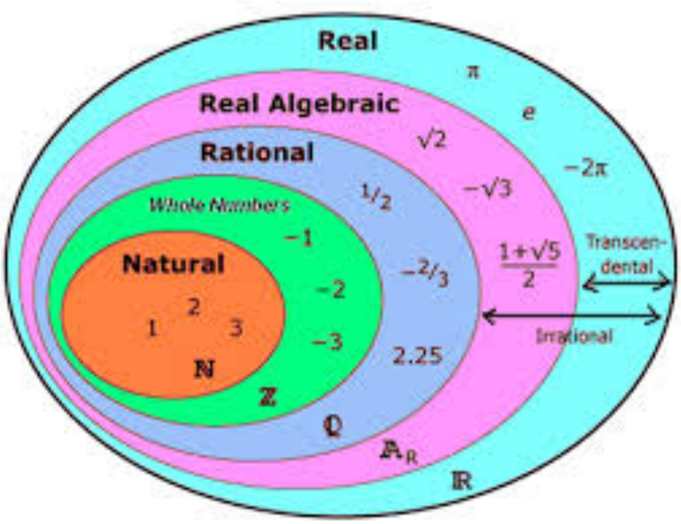
Louisa Ayu
NIM : 2113150001

MODUL 1

SISTEM BILANGAN RIIL

Starting point is the best choices to realize our big dream

-SCP



Pendidikan Matematika

FKIP UKI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Sistem bilagan riil merupakan salah satu materi dasar matematika yang sangat penting untuk dipahami dan dikuasai oleh peserta didik sistem bilangan adalah seperangkat susunan satuan yang teratur secara teori dan asas yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan secara matematis. Sistem bilangan riil berarti bilangan yang teratur dan dioperasikan secara matematis adalah bilangan riil. Bilangan riil biasanya disebut sebagai bilangan nyata.

   Modul satu ini akan mepelajari tentang system bilangan riil yaitu mulai dari jenis-jenis himpunan pada bilangan, sifat-sifat bilangan, operasi pada bilangan. Selain itu, pada modul ini juga akan dibahas tentang perkalian berulang atau perpangkatan atau biasa disebut dengan eksponensial, juga sifat-suifatnya beserta operasi pada perpangkatan. Selain itu juga memuat Bentuk akar dan bentuk logaritma. Dalm hal ini dijabarkan secara terinci dan jelas berbagai bentuk persamaan logaritma dan fungsi-fungsi pada logaritma dan eksponen.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Satu

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

   Keterampilan Umum

   KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

   KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus
KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan
P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan
   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
4. Prasyarat Kompetensi
   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep dasar perkalian berulang dan penjumlahan berulang. Memahami konsep dasar bilangan dan mampu mengoperasikannya.
5. Kegunaan Modul Satu
   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi system bilangan riil, bentuk akar,

eksponensial dan logaritma. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok
   Materi pada Modul satu ini, diantaranya Sistem Bilangan, sifat-sifat bilangan, sifat-sifat urutan system bilangan riil, Sistem Bilangan riil, Bentuk Pangkat : Pangkat Positif dan Pangkat negatif, bentuk akar, pangkat pecahan, Grafik eksponen dan persamaannya, dan Logaritma.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-1 : Menguasai Sistem Bilangan dan Bentuk Eksponen
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan system bilangan, Perpangkatan dan Logaritma. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Sistem Bilangan, Bentuk Pangkat dan Logaritma. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*
3. **Materi Sistem Bilangan Riil**
   1.1 Sistem Bilangan

Menurut KBBI bilangan merupakan satuan dalam sistem matematis yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan. Sedangkan sistem merupakan susunan yang teratur dari pandangan, teori, asas, dan sebagainya. Sehingga disimpulkan bahwa sistem bilangan adalah seperangkat susunan satuan yang teratur secara teori dan asas yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan secara matematis. Sistem bilangan riil berarti bilangan yang teratur dan dioperasikan secara matematis adalah bilangan riil. Bilangan riil biasanya disebut sebagai bilangan nyata.

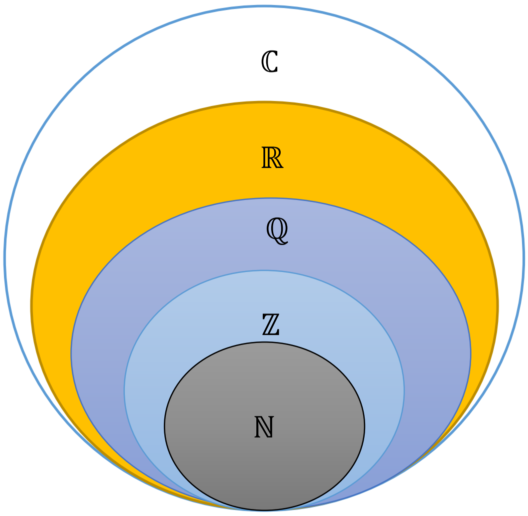
Dalam Matematika Dasar terdapat konsep dari himpunan obyek-obyek, khususnya tentang konsep himpunan dari bilangan-bilangan yang banyak sekali diterapkan untuk matematika maupun penerapan di bidang-bidang yang lain. Himpunan bilangan yang penting untuk diketahui adalah himpunan bilangan Asli, himpunan bilangan Cacah, himpunan bilangan Bulat, himpunan bilangan Rasional, himpunan bilangan Irrasional (tak terukur), dan himpunan bilangan Real. Diharapkan mahasiswa dapat memahami konsep himpunan bilangan yang penting untuk diketahui dan mampu menggunakan sifat-sifat dari himpunan bilangan.

Berikut ini jenis-jenis himpunan bilangan yang merupakan bagian dari himpunan bilangan riil.

1. Himpunan bilangan asli atau sering juga disebut dengan himpunan bilangan bulat positif yang dituliskan dengan
$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots\}$$
2. Himpunan bilangn cacah biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{W}$ yang berasal dari Bahasa inggris yaitu *whole numbers*, dinotasikan dengan
$$\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$$
3. Himpunan bilangan bulat ditulis dengan $\mathbb{Z}$ yang berasal dari Bahasa Jerman yaitu Zahlen yang artinya bilangan. Himpunan bilangan bulat terdiri dari bilangan nol, bilangan negartif dan bilangan positif, yang dituliskan dengan
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$$
4. Himpunan bilangan rasional/terukur merupakan bilangan ang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dimana a dan b merupakan bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0. Bilangan rasional memuat bilangan bulat, bilangan asli, bilangan cacah, bilangan prima, bilangan decimal yang terukur. Selanjutnya bilangan decimal ataupun pecahan yang tidak terukur disebut sebagai bilangan Irrasional. Contoh bilangan Irrasional yang terkenal adalah $\sqrt{2}$, π , e dan sebagainya. Bilangan rasional biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$ dan bilangan Irrasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}^*$.

5. Himpunan bilangan riil adalah sekelompok bilangan nyata yang memuat bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional dan Irrasional. Bilangan ini biasanya dinotasikan dengan $\mathbb{R}$.
6. Himpunan Bilangan Kompleks merupakan bilangan himpunan bilangan terbesar di matematika yang memuat seluruh bilangan riil dan bilangan imajiner yang biasnya dilambangkan dengan $\mathbb{C}$.

Sistem bilangan diatas dapat disimpulkan seperti gambar berikut:



Gambar 1 Sistem Bilangan

Di dalam bahan ajar ini, bilangan yang akan dibahas hanyalah sampai bilangan riil.

1.2 Sifat-sifat Bilangan Riil

1. Komutatif (pertukaran)

   Sifat komutatif pada bilangan riil yaitu terhadap penjumlahan dan perkalian

   $a + b = b + a$ dan $ab = ba$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Asosiatif

   Sifat asosiatif pada bilangan riil berlaku pada operasi penjumlahan dan perkalian yaitu

   $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. Distributif

   Sifat distributive perkalian pada bilangan riil dinyatakan dengan

   $(a + b)c = ac + bc$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. Identitas

   Unsur identitas pada bilangan riil dibagi menjadi dua yaitu

   - Terhadap operasi penjumlaha unsur identitasnya adalah 0 sehingga $a + 0 = a$
   - Terhadap operasi perkalian unsur identitasnya adalah 1 sehingga $a. 1 = a$.

5. Invers

   Invers pada bilangan riil dibagi menjadi dua yaitu

   - Terhadap operasi penjumlaha inversnya adalah lawan dari bilangan itu sendiri yaitu $-a$, sehingga $a + (-a) = 0$.
   - Terhadap operasi perkalian inversnya adalah kebalikan dari bilangan itu sendiri yaitu $\frac{1}{a}$, sehingga $a. \frac{1}{\square} = 1$.

6. Jika a dan b dua bilangan Real, maka terdapat suatu bilangan Real c sehingga $a + c = b$. Bilangan c ini kita nyatakan dengan $b - a$ yang disebut selisih dari b dan a. Selisih $a - a$ kita nyatakan dengan simbol 0. Simbol 0 ini selanjutnya disebut nol.

1.3 Sifat-sifat Urutan Bilangan Riil

1. Trikotomi

   Jika a dan b adalah bilangan riil, maka berlaku $a < b$ atau $a > b$ atau $a = b$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Transitif

   Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. Penambahan

   $a < b$ jika dan hanya jika $a + c < b + c$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. Perkalian

7. $a < b$ jika dan hanya jika $ac < bc$ untuk c positif dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

8. $a < b$ jika dan hanya jika $ac > bc$ untuk c negatif dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1.4 Sistem Bilangan Riil

Himpunan bilangan riil dengan semua operasi dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya dinamakan system bilangan riil. Penulisan himpunan dalam bentuk interval/selang yaitu :

1. Interval tertutup

$$\{x | a \leq x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\} = [a, b]$$

2. Interval terbuka

$$\{x | a < x < b,\ x \in \mathbb{R}\} = (a, b)$$

3. Interval setengah terbuka atau setengah tertutup

$$\{x | a \leq x < b,\ x \in \mathbb{R}\} = [a, b)$$

   atau

$$\{x | a < x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\} = (a, b]$$

4. Interval tak terbatas

$$\{x | x \geq b,\ x \in \mathbb{R}\} = [b, \infty)$$

   atau

$$\{x | x < a,\ x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, a]$$

1.5 Bentuk Pangkat

Salah satu kegunaan notasi pangkat adalah untuk menyederhanakan atau meringkas penulisan bilangan. Contohnya 100.000.000 dapat dtuliskan dengan notasi pangkat yaitu 10^8. Notasi pangkat ini dapat menghemat tempat sehingga banyak digunakan dalam perumusan maupun penyederhanaan perhitungan yang bernilai besar maupun kecil. Penggunaan pangkat ini banyak ditemukan pada perhitungan di Kimia, Biologi, Fisika, Ekonomi dan sebagainya.

a. Pangkat bulat positf

Perkalian berulang suatu bilangan dapat dinatakan dalam bentuk bilangan berpangkat yang biasa disebut dengan pengkat bilangan positif. Sebagai contoh

$$5 = 5^1$$

$$5.5 = 5^2$$

$$5.5.5 = 5^3$$

$$5.5.5.5.5.5.5 = 5^7$$

bentuk 5^7 dibaca dengan "lima pangkat tujuh". Bilangan 5 disebut sebagai bilangan pokok atau bilangan dasar sedangkan 7 disebut sebagai pangkat atau eksponen.

Secara umum, bilangan berpangkat didefinisikan dengan

> Jika $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka
> $$a^n = a.a.a.a \ldots a.a.a$$
> disebut sebagai perkalian a sebanyak n kali.
> a disebut bilangan pokok dan n disebut sebagai pangkat.

Contoh :

1. $4^3 = 4.4.4 = 64$
2. $128 = 2.2.2.2.2.2.2 = 2^7$
3. $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

4. $-5.-5.-5.-5.-5 = (-5)^5$

5. $-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

b. Sifat-sifat Pangkat bulat positif

Pada bilangan berpangkat positif dapat dilakukan beberapa operasi aljabar yaitu operasi perkalian, pembagian dan pemangkatan. Berikut ini beberapa sifat dan ketentuan pada bilangan bulat berpangkat positif diantaranya adalah

1) Jika $a \in R$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $a^p . a^q = a^{p+q}$

Contoh :

$3^7.3^4.3 = 3^{7+4+1} = 3^{12}$

$25.5^7.5^6 = 5^2.5^7.5^6 = 5^{2+7+6} = 5^{15}$

2) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Contoh :

$2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$

$3^5 : 3^8 = 3^{5-8} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

$125 : 5 = 5^3 : 5^1 = 5^{3-1} = 5^2$

3) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $(a^p)^q = a^{p.q} = a^{pq}$

Contoh :

$$(7^2)^4 = 7^8$$

$$(x^3)^5 = x^{15}$$

4) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p adalah bilangan bulat maka $(ab)^p = a^p b^p$.

Contoh :

$$(2x^3y^2)^4 = 2^4x^{3.4}y^{2.4} = 2^4x^{12}y^8$$

$$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^2 = \frac{2^2x^6}{3^2y^4}$$

c. Pangkat buat negatif dan nol

Jika bentuk perpangkatan dari bilangan dasar kurang dari satu dan nol maka akan diperoleh pangkat bilangan bulat negarif dan nol. Prinsip pangkat bilangan bulat negatif sama dengan prinsip pada pangkat bilangan bulat positif.

Contoh :

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = 3^{-1}.3^{-1}.3^{-1}.3^{-1} = 3^{-4}$$

$$a^{-1}: a^{-3} = a^{-1-(-3)} = a^2$$

Untuk mendefinisikan a^ndengan a bilangan riil dan n bilangan bulat negative dan nol, maka dapat digunakan teorema-teorema perpangkatan pada bilangan bulat positif, seperti :

$\frac{a^n}{a^n} = 1$, Jika teorema $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ digunakan maka akan diperoleh $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ dan untuk $q = p + n$ maka diperoleh $\frac{a^p}{a^q} = \frac{\square^p}{a^{p+n}} = a^{p-(p+n)} = a^n$.

Dengan demikian dapat disimpulkan teorema berikut ini

> Jika $a \neq 0$, $a \in R$ dan n bilagan bulat positif maka $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dan $a^0 = 1$.

Contoh :

Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut ini

1) $\frac{a^2b^2}{ab}.\frac{c^2}{a}$

2) $\frac{3^25x}{15y^2}$

3) $(2xyz^2)^3\left(\frac{x^2y}{y^2z}\right)$

4) $\frac{wuv^2}{w^2z}+\frac{w}{u^2v}$

5) $\frac{x^2z^3}{x^{-3}yz^{-2}}$

Jawab :

1) $\frac{a^2b^2}{ab}.\frac{c^2}{a} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b}$

$= a^{2-2}b^{2-1}c^2$

$= a^0bc^2$

$= bc^2$

2) $\frac{3^25x}{15y^2}=\frac{3^2.5.x}{3.5.y^2}$

$= 3^{2-1}5^{1-1}xy^{-2}$

$= 3.5^0.xy^{-2}$

$= 3xy^{-2}$

3) $(2xyz^2)^3\left(\frac{x^2y}{y^2z}\right) = (2^3x^3y^3z^6)\left(\frac{x^2y}{y^2z}\right)$

$= 2^3x^{3+2}\,y^{3+1-2}z^{6-1}$

$= 2^3x^5y^2z^4$

4) $\frac{wuv^2}{w^2z}+\frac{w}{u^2v}=\frac{wu^{1+2}v^{2+1}+w^{1+2}z}{w^2u^2vz}$

$=\frac{wu^3v^3+w^3z}{w^2u^2vz}$

$=\frac{u^3v^3+w^2z}{wu^2vz}$

5) $\frac{x^2z^3}{x^{-3}yz^{-2}} = \frac{x^{2-(-3)}z^{3-(-2)}}{y}$

$=\frac{x^5z^5}{y}$

$=\frac{(xz)^5}{y}$

4.Rangkuman

1. Jenis-jenis himpunan bilangan yang merupakan bagian dari himpunan bilangan riil:
   Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$

   Himpunan bilangn cacah $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$

   Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

   Himpunan bilangan rasional/terukur $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$. Bilangan Irrasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}^*$. Contoh bilangan Irrasional yang terkenal adalah $\sqrt{2}$, π , e dan sebagainya.

   Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

   Himpunan Bilangan Kompleks $\mathbb{C}$.
2. Sifat-sifat Bilangan Riil : Komutatif, Asosiatif, Distributif, Identitas Invers.
3. Sifat-sifat Urutan Bilangan Riil : Trikotomi, Transitif, Penambahan, Perkalian.
4. Bentuk Pangkat yaitu bentuk pangkat positif dan Negatif.
5. Jika $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka
   $$a^n = a.a.a.a \ldots a.a.a$$
   disebut sebagai perkalian a sebanyak n kali. a disebut bilangan pokok dan n disebut sebagai pangkat.
6. Jika $a \in R$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $a^p.a^q = a^{p+q}$
7. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka
   $$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
8. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $(a^p)^q = a^{p\cdot q} = a^{pq}$
9. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p adalah bilangan bulat maka $(ab)^p = a^p b^p$.
10. Jika $a \neq 0$, $a \in R$ dan n bilagan bulat positif maka
    $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dan $a^0 = 1$.

5. Latihan

Sederhanakanlah bentuk pangkat berikut ini

1. $(3x^2.y^{-5})(-3x^{-8}.y^9)$
2. $\frac{5x^5y^2}{7x^3y^{-5}}$
3. $\frac{6\sqrt{10x}}{3\sqrt{2x^2}}$
4. $\frac{5^{2-n}-(0,2)^n}{5^{1-n}+(0,2)^n}$
5. $(8x^3.y^{12})^{\frac{1}{6}}$
6. $\frac{(ab^2c)^3(ac^3)^5}{(a^4bc^5)^2}$
7. $\frac{(ac^2)(a^3b)^2+(a^2b)^5(bc^3)^3}{(a^3bc^2)^2}$
8. $\frac{2x^2yz^3}{(xyz^2)^3+(x^2yz)^2}$
9. $\frac{3mn^2}{(2km^2n)-(3mn^5)^2}$
10. $\frac{(p^2qr)^2(r^4s)^6+(ps^2)^3}{(p^2r)^3(qs^2)+(p^4rs)^2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Gambarkanlah dalam suatu skema tentang pembagian system bilangan riil!
2. Tentukanlah nilai $y \in R$ sehingga $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2y+3}{3}+8\right)+16\right)+8\right)=1$
3. Jika $1{,}54^2 = 2{,}3716$, maka 154^2 adalah
4. Nilai dari $(4^{-1}+3^{-2}+7^{-1})^{-1}$ adalah
5. Jika $2a^3+3a^3+a^3+4a^3 = 1250$ maka nilai a^2+a adalah

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-2: Menguasai Bentuk Akar dan Logaritma
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan system bilangan, Perpangkatan dan Logaritma. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Sistem Bilangan, Bentuk Pangkat dan Logaritma. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*
3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

1.6 Bentuk Akar

Akar pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman yang bernama Christoff Rudolf didalam bukunya yang berjudul Die Cross dengan simbol $\sqrt{}$. Simbol tersebut dipilih karena memiliki kemiripan dengan huruf "r" yang diambil dari kata "radix" yang merupakan bahasa latih dari akar pangkat dua yang merupakan kebalikan dari kuadrat. Pernyataan yang ditulis dengan tanda akar disebut bentuk akar.

Bentuk akar merupakan bagian dari bilangan rasional dan irrasional. Bentuk akar biasanya digunakan sebagai bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangakt pecahan. Contohnya seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ dan sebagainya.

a. Sifat bentuk akar

Adapun beberapa sifat bentuk akar yaitu

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
2) $p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p+q)\sqrt[n]{a}$
3) $p\sqrt[n]{a} - q\sqrt[n]{a} = (p-q)\sqrt[n]{a}$
4) $\sqrt[n]{a\square} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
5) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dimana $b \neq 0$

6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

b. Operasi hitung bentuk akar

1) Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Jika a, b dan c adalah bilangan rasional positif, maka berlaku persamaan berikut

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

dan

$$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

Contoh :

1. $8\sqrt{8} + 3\sqrt{8} + \sqrt{8} = (8 + 3 + 1)\sqrt{8}$
   $= 12\sqrt{8}$
   $= 24\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 - 5 + 4)\sqrt{2}$
   $= 2\sqrt{2}$
3. $5\sqrt{7} + 6\sqrt{28} - 3\sqrt{63} = 5\sqrt{7} + 12\sqrt{7} - 27\sqrt{7}$
   $= (5 + 12 - 27)\sqrt{7}$
   $= -10\sqrt{7}$

2) Operasi Perkalian dan Pembagian

Jika a, b dan c adalah bilangan rasional positif, maka berlaku persamaan berikut

$$\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

dan

$$\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Contoh :

1. $\sqrt{4}.\sqrt{8} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}\left(3\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}.3\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{3}.\sqrt{2}\right)$

$= 9 - \sqrt{6}$

3. $\sqrt{300}:\sqrt{6} = \sqrt{\frac{300}{6}}$

$= \sqrt{50}$

$= \sqrt{25}.\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}$

4. $5\sqrt{2} - 2\sqrt{8} + 4\sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{4}.\sqrt{2} + 4.\sqrt{9}.\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$

$= (5 - 4 + 12)\sqrt{2}$

$= 13\sqrt{2}$

c. Merasionalkan Bentuk Akar

Suatu bentuk pecahan dimana penyebutnya mengandung bentuk akar, maka dapat disederhanakan degan merasionalkan bentuk akar yang ada. Merasionalkan bentuk pecahan dari penyebut tersebut maka pembilang dan penyebut harus dikalikan dnegan bentuk rasional dari bentuk akar yang ada pada penyebutya. Berikut ini beberapa bentuk penyederhanaan bentuk akar dengan cara merasionalkan penyebutnya adalah

1) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$
2) $\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}}.\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$
3) $\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}}.\frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$
4) $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}.\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$

5) $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} . \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$

Contoh :

Rasionalkanlah penyebut dari pecahan berikut ini:

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
2. $\frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Jawab :

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2}$$

$$= -(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

2. $\frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}} . \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$= \frac{(2-\sqrt{7})(4\sqrt{2}+\sqrt{3})}{32-3}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt{14}-\sqrt{21}}{29}$$

1.7 Pangkat Pecahan

Bilangan riil yang memenuhi persamaan $a^n = b$, disebut sebagai akar pangkat n dari b yang dinotasika dengan $a = \sqrt[n]{b}$. Akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$ dapat juga ditulis sebagai bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$.

Jika $m, n \in N$ dengan $n \neq 1$, dan a adalah bilangan riil yang tidak negatif maka:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dan } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Demikian juga sebaliknya, bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$ dapat ditulis sebagai akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$. Jadi $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

Berikut ini beberapa sifat pangkat pecahan

a. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$a^p . a^q = a^{p+q}$$

b. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$a^p := a^{p-q}$$

c. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

d. Jika $a \in R$, $a \neq 0$ dan $p, q \in Q$ maka

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

e. Jika $a \in R$, dan $p, q, r \in Q$ maka

$$(a^p . b^q)^r = (a^p)^r (b^q)^r = a^{pr} . b^{qr}$$

f. Jika $a, b \in R$, $b \neq 0$, dan $p, q, r \in Q$ maka

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^r = \frac{a^{pr}}{b^{qr}}$$

Contoh :

1. $3^{\frac{1}{3}} . 3^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}} = 3^{\frac{17}{6}}$

2. $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{7}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}y\right)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{x^{\frac{14}{15}}}{x^{\frac{2}{15}}y^{\frac{2}{5}}}$

3. $\dfrac{a^{-3}b^2c}{abc} = a^{-3-1}b^{2-1}c^{1-1} = a^{-4}b$

4. Jika n memenuhi perkalian $25^{0,25}$ sebanyak n kali dituliskan dengan $25^{0,25} \times 25^{0,25} \times 25^{0,25} \times \ldots \times 25^{0,25} = 125$, maka nilai $(n-3)(n+2)$ adalah

Jawab :

$25^{0,25} \times 25^{0,25} \times 25^{0,25} \times \ldots \times 25^{0,25} = 125$

$(25^{0,25})^n = 125$

$(5^{0,5})^n = 5^3$

$5^{0,5n} = 5^3$

$0,5n = 3$

$n = 6$

maka $(n-3)(n+2) = (6-3)(6+2) = 3.8 = 24$

5. Jika $4^x - 4^{x-1} = 6$ maka $(2x)^x = \cdots$

   Jawab :

   $4^x - 4^{x-1} = 6$

   $2^{2x} - 2^{2(x-1)} = 6$

   $2^{2x}(1 - 2^{-2}) = 6$

   $2^{2x}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 6$

   $2^{2x}\left(\frac{3}{4}\right) = 6$

   $2^{2x} = 8$

   $2^{2x} = 2^3$

   $2x = 3$

   $x = \frac{3}{2}$

   Sehingga diperoleh

   $(2x)^x = \left(2.\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = (3)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$

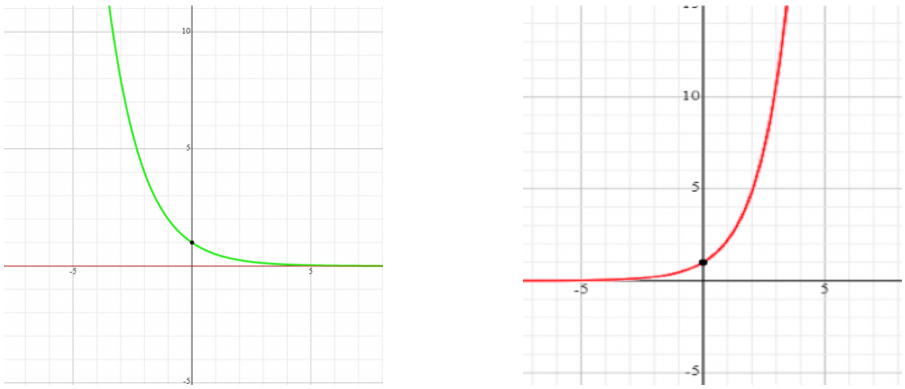
1.8 Fungsi Eksponen dan Grafiknya

Fungsi eksponen adalah pemetaan bilangan real x ke a^x yang bentuk umum- nya dituliskan dengan $f(x) = a^x$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ untuk $a \in R$ mempunyai beberapa sifat sebagai berikut:

1. Kurva dari fungsi eksponen terletak diatas sumbu x disebut juga den- gan definit positif.
2. Memotong sumbu y di titik $(0, 1)$
3. Mempunyai garis yang sejajar dengan sumbu x(asimtot datar) $y = 0$
4. Grafik akan berbentuk monoton naik untuk $f(x) = a^x$
5. Grafik monoton turun untuk $f(x) = a^{-x}$

Untuk lebih jelasnya, berikut ini contoh gambar grafik fungsi eksponen



(a) $f(x) = a^x$ (b) $f(x) = a^{-x}$

Gambar 2 Grafik Fungsi Eksponen

1.9 Bentuk Persamaan Eksponen

Bentuk persamaan eksponen adalah persamaan yang di dalamnya terdapat pangkat-pangkat yang terbentuk sebagai fungsi x dimana x adalah bilangan peubah. Berikut ini beberapa persamaan Eksponen:

1. Jika $a^{f(x)} = 1$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = 0$.

2. Jika $a^{f(x)} = a^p$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = p$.

3. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x)$=$g(x)$.

4. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, $b > 0$ dan $b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$.

Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dimana $a^{f(x)} = p$ maka bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $Ap^2 + Bp + C = 0$.

1.10 Logaritma

Logaritma merupakan suatu operasi invers atau kebalikan dari perpangkatan (eksponen). Di dalam eksponen kita mencari hasil pangkat sedangkan logaritma digunakan untuk menentukan besar pangkatnya. Logaritma dapat didefinisikan seperti berikut ini

> Jika diketahui suatu perpangkatan dengan $a^c = b$ maka bentuk tersebut dapat diubah ke dalam bentuk logaritma menjadi
> $$\log_a b = c \text{ atau } {}^{a}log\ b = c$$
> untuk $a \neq 1$, dan $a > 0$.

Dalam hal ini a disebut sebagai basis logaritma, b sebagai bilangan yang dicari nilai logaritmanya atau biasa disebut dengan numerus dan c adalah besar pangkat atau nilai logaritma. Jika ditemukan penulisan logaritma tanpa basis, maka secara umum basis dari logaritma tersebut adalah 10. Misalnya ${}^{10}log\ a = \log a$. Namun jika basis dari bentuk logaritma adalah $e = 2{,}718$ maka bentuk logaritma tersebut disebut sebagai logaritma natural, biasanya dinotasikan dengan ln.

Sebagai contoh, misalkan diberikan bentuk logaritma seperti ${}^{2}log\ 8 = c$, maka dapat kita temukan bahwa $c = 3$, karena $2^3 = 8$. Berdasarkan contoh tersebut dapat disimpulkan bahwa logaritma merupakan suatu operasi kebalikan nilai yang menjadi pagkat dari suatu bilangan tertenttu. Berikut ini beberapa contoh lain dari hubungan antara bentuk perpangkatan dan Logaritma.

Tabel 1. Hubungan Bentuk pangkat dan Logaritma

Bentuk Pangkat	**Bentuk Logaritma**
$3^5 = 243$	${}^{3}log\ 243 = 5$
$3^{-5} = \frac{1}{243}$	${}^{3}log\ \frac{1}{243} = -5$
$9^{\frac{3}{2}} = 27$	${}^{9}log\ 27 = \frac{3}{2}$

Penyelesaian soal-soal logaritma tidak dapat lepas dari penggunaan sifat-sifat logaritma itu sendiri. Adapun beberapa sifat logaritma diantarnya adalah

1. ${}^{a}log\ a = 1$
2. ${}^{a}log\ 1 = 0$
3. ${}^{a^n}log\ b^m = \frac{m}{n}\ {}^{a}log\ b,\ dengan\ n \neq 0.$
4. ${}^{a}log\ b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$
5. ${}^{a}log\ b = \frac{{}^{p}log\ b}{{}^{p}log\ b}$, dengan $p > 0$, dan $p \neq 1$.
6. $a^{{}^{a}log\ b} = b$
7. ${}^{a}log\ b \times {}^{b}log\ c = {}^{a}log\ bc$
8. ${}^{a}log\ bc = {}^{a}log\ b + {}^{a}log\ c$
9. ${}^{a}log\ \frac{b}{c} = {}^{a}log\ b - {}^{a}log\ c$

Contoh :

1. ${}^{5}\log 125 = {}^{5}\log 5^3$

$= 3.\ {}^{5}\log 5$

$= 3.1$

$= 3$

2. ${}^{9}\log 64 + {}^{9}\log 125 = {}^{9}\log 64 \times 125$

$= {}^{9}\log 8000$

$= {}^{9}\log 8000$

$$= {}^{3^2}\log 20^3$$

$$= \frac{3}{2}\ {}^{3}\log 20$$

atau dapat juga diselesaikan dengan

$${}^{9}\log 64 + {}^{9}\log 125 = {}^{3^2}\log 4^3 + {}^{3^2}\log 5^3$$

$$= \frac{3}{2}\ {}^{3}\log 4 + \frac{3}{2}\ {}^{3}\log 5$$

$$= \frac{3}{2}({}^{3}log\ 4 \times 5)$$

$$= \frac{3}{2}\ {}^{3}log\ 20$$

3. Jika diketahui ${}^{3}log\ 2 = A$, ${}^{3}log\ 5 = B$ dan ${}^{6}log\ 3 = C$, maka tentukanlah nilai dari ${}^{12}log\ 50$ dan ${}^{5}log\ 24$.

Jawab :

$${}^{18}\log 50 = \frac{{}^{3}log\ 50}{{}^{3}log\ 18}$$

$$= \frac{{}^{3}log\ 25 \times 2}{{}^{3}log\ 3 \times 6}$$

$$= \frac{{}^{3}log\ 5^2 + {}^{3}log\ 2}{{}^{3}log\ 3 + {}^{3}log\ 6}$$

$$= \frac{2.\ {}^{3}log\ 5 + {}^{3}log\ 2}{1 + \frac{1}{C}}$$

$$= \frac{2B + A}{\frac{C+1}{C}}$$

$$= \frac{2BC + AC}{C + 1}$$

$${}^{5}\log 24 = {}^{5}\log 3 \times 8$$

$$= {}^{5}\log 3 + {}^{5}\log 8$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{{}^{3}log\ 8}{{}^{3}log\ 5}$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{{}^{3}log\ 2^3}{B}$$

$$= \frac{1 + 3.\ {}^{3}log\ 2}{B}$$

$$= \frac{1 + 3A}{\square}$$

4. $\sqrt{2}^{\,{}^{2}\log 81} = 2^{\frac{1}{2}\,{}^{2}\log 81}$

$$= 2^{\frac{1}{2}\,{}^{2}\log 9^2}$$

$$= 2^{\,{}^{2}\log (9^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2^{\,{}^{2}\log 9}$$

$$= 9$$

5. Diketahui ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, tentukanlah nilai dari ${}^{60}\log 36$.

   Jawab :

$${}^{60}\log 36 = \frac{{}^{2}\log 36}{{}^{2}\log 60}$$

$$= \frac{{}^{2}\log(4\times 9)}{{}^{2}\log(4\times 3\times 5)}$$

$$= \frac{{}^{2}\log 2^2 + {}^{2}\log 3^2}{{}^{2}\log 2^2 + {}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 5}$$

$$= \frac{2 + 2\ {}^{2}\log 3}{2 + {}^{2}\log 3 + ({}^{2}\log 3\ .\ {}^{3}\log 5)}$$

$$= \frac{2 + 2a}{2 + a + ab}$$

6. Jika solusi dari persamaan $5^{x+5} = 7^x$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = {}^{a}\log 5^5$, maka nilai $a = \cdots$

Jawab :

$5^{x+5} = 7^x$

$\log 5^{x+5} = \log 7^x$

$(x+5)\log 5 = x \log 7$

$x \log 5 + 5 \log 5 = x \log 7$

$5 \log 5 = x \log 7 - x \log 5$

$5 \log 5 = x \log \dfrac{7}{5}$

$x = \dfrac{\log 5^5}{\log \dfrac{7}{5}} = {}^{\frac{7}{5}}\log 5^5$

Karena $x = {}^{a}\log 5^5 = {}^{\frac{7}{5}}\log 5^5$ maka $a = \frac{7}{5}$

2 Rangkuman

1. Beberapa sifat bentuk akar yaitu
   i. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
   ii. $p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p+q)\sqrt[n]{a}$
   iii. $p\sqrt[n]{a} - q\sqrt[n]{a} = (p-q)\sqrt[n]{a}$
   iv. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
   v. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dimana $b \neq 0$
   vi. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
2. Jika $m, n \in N$ dengan $n \neq 1$, dan a adalah bilangan riil yang tidak negatif maka:
$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dan } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
3. Berikut ini beberapa persamaan Eksponen:

   i. Jika $a^{f(x)} = 1$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = 0$.

   ii. Jika $a^{f(x)} = a^p$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = p$.

iii. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x)$=$g(x)$.

iv. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, $b > 0$ dan $b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$.

v. Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dimana $a^{f(x)} = p$ maka bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $Ap^2 + Bp + C = 0$.

4. Jika diketahui suatu perpangkatan dengan $a^c = b$ maka bentuk tersebut dapat diubah ke dalam bentuk logaritma menjadi

$$\log_a b = c \text{ atau } {}^a log\ b = c$$

untuk $a \neq 1$, dan $a > 0$.

5. Beberapa sifat logaritma diantarnya adalah

   i. ${}^a log\ a = 1$

   ii. ${}^a log\ 1 = 0$

   iii. ${}^{a^n} log\ b^m = \frac{m}{n}\ {}^a log\ b$, *dengan* $n \neq 0$.

   iv. ${}^a log\ b = \frac{1}{{}^b \log a}$

   v. ${}^a log\ b = \frac{{}^p log\ b}{{}^p log\ b}$, dengan $p > 0$, dan $p \neq 1$.

   vi. $a^{{}^a log\ b} = b$

   vii. ${}^a log\ b \times {}^b log\ c = {}^a log\ c$

   viii. ${}^a log\ bc = {}^a log\ b + {}^a log\ c$

   ix. ${}^a log \frac{b}{c} = {}^a log\ b - {}^a log\ c$

3 Latihan

Sederhanakanlah bentuk akar berikut ini

11. $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

12. $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}$

13. $\frac{2-\sqrt{xy}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}$

14. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^3}}}}$

15. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[10]{\sqrt{x^5y^3}}}}$

16. $\sqrt{\sqrt[7]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a^7bc^3}}}}}}$

Jika $a^{f(x)} = a^p$, $a > 0$, $a \neq 0$, maka $f(x) = p$. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan berikut ini.

17. $2^{4x-1} = 128$

18. $5^{3x-6} = 1$

19. $2^{2x-7} = \frac{1}{32}$

20. $9^{x^2+x} = 27^{x^2-1}$

21. $25^{x+2} = (0,2)^{\mathbf{1-x}}$

22. $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$

23. $25^{x+3} = 5^{x-1}$

24. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{2x+1}} = \sqrt{\frac{2^{4x-1}}{128}}$

25. $\sqrt{8^{3x+2} = (16)^{\frac{3}{4}}}$

26. $3^{2x+2} + 8.3^x - 1 = 0$

Tentukanlah nilai logaritma berikut ini

27. $\frac{({}^4\log 3)({}^4\log 6)}{({}^4\log 9)({}^8\log 2)+({}^4\log 9)({}^8\log 3)}$

28. ${}^{\frac{1}{2}}\log 5 \times {}^{5}\log 4 \times {}^{2}\log\frac{1}{8} \times ({}^{5}\log 25)^2$

29. $\frac{{}^{3}\log\sqrt{6}}{({}^{3}\log 18)^2 - ({}^{3}\log 2)^2}$

30. $2\ {}^{6}\log 16 - 3\ {}^{6}\log 4 + {}^{6}\log 9$

31. ${}^{2}\log\left({}^{2}\log\sqrt{\sqrt{2}}\right)$

32. Jika diketahui ${}^{2}\log 3 = a,\ {}^{3}\log 5 = b$ dan ${}^{5}\log 7 = c$ maka tentukanlah
    a. ${}^{7}\log 2$
    b. ${}^{125}\log 72$
    c. ${}^{128}\log 49 + {}^{9}\log 343 + {}^{6}\log 7$

33. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen $9^{2x-4} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4}$ adalah …

34. Jika $2^x = m$ dan $2^y = n$ dengan $x > 0$ dan $y > 0$ maka $\frac{2x+3y}{x+2y} = \cdots$

4 Evaluasi Pembelajaran

Jika nilai $x = 2^{10}$, maka tentukanlah nilai bentuk akar berikut ini

1. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5}}}$
2. $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}}}$
3. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}}}$
4. $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^{15}}}}}}}$

Tentukanlah nilai logaritma berikut ini

5. ${}^{2}\log\frac{4}{3} + 2.\ {}^{2}\log\sqrt{12}$

6. $2^{5}\log 15 + {}^{5}\log 4 - 2\ {}^{5}\log 6$

7. ${}^{3}\log 4 + {}^{9}\log\frac{1}{2} - {}^{27}\log 5^{-2}$

8. $5^{\,{}^{125}\log 27} + 3^{\,{}^{9}\log 64}$

9. ${}^{6}\log 4\,.\ {}^{64}\log 5\,.\ {}^{\frac{1}{27}}\log 8\,.\ {}^{2}\log 81\,.\ {}^{625}\log 36$

10. Jika diketahui ${}^{2}\log 5 = p,\ {}^{5}\log 7 = q$ dan ${}^{7}\log 9 = c$ maka tentukanlah
    a. ${}^{3}\log 2 + {}^{7}\log 2 - {}^{9}\log 5 + {}^{2}\log 36$
    b. ${}^{81}\log 70$
    c. $7^{\,{}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 21}$

11. Jika ${}^{2}\log x + {}^{2}\log y = 12$ dan $3\ {}^{2}\log x - {}^{2}\log y = 4$ maka $x + y = \cdots$

12. Nilai x yang memenuhi $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x} - \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{-x} = \frac{3}{2}$ adalah …

13. Jika diketahui $a^{b} = 2^{2020} - 2^{2019}$, tentukanlah nilai $a + b$

14. Jika $x > 0$ dan $x \neq 0$ pada $x^{k} = \frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{x}$, maka nilai k adalah…

15. Diketahui ${}^{64}\log\sqrt{16^{x-4}} = \frac{1}{2}$. Nilai x yang memebuhi persamaan persebut adalah …

16. Akar-akar persamaan $2.9^{x} - 5.3^{x} + 10 = 7$ adalah a dan b. Nilai ab dan $a^{2} + b^{2}$ adalah …

5 Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul
   Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul satu ini menuntun mahasiswa memahami materi Sistem Bilangan Riil secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.
2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaikan dengan jawaban yang terbuka.
3. Daftar Istilah

Sistem	Bilangan	Akar	Komutatif
Asosiatif	Transitif	Identitas	Invers
Logaritma	Eksponen	*Zahlen*	*Whole*

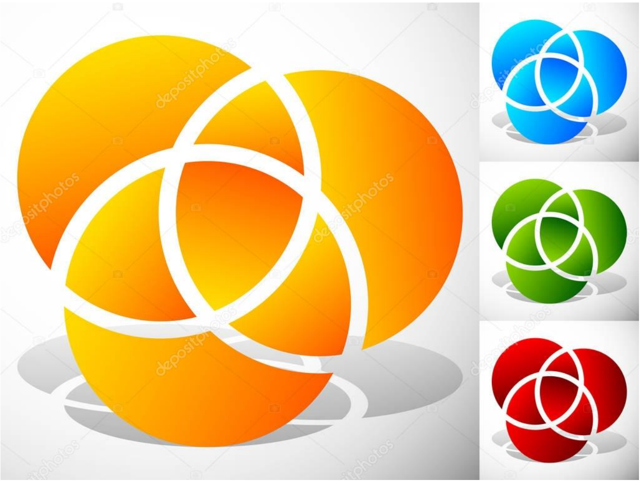
4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson

Eie, M, Chang, Shou-Te. 2010. *A course on Abstract Algebra.* Singapore: World Scientific.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 2 HIMPUNAN



A small acts, when multiplied by millions of people, can transform the world
-Howard Zinn

Pendidikan Matematika FKIP UKI

MODUL 2 HIMPUNAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Konsep himpunan merupakan suatu konsep yang telah banyak mendasari perkembangan ilmu pengetahuan, baik pada bidang matematika itu sendiri maupun pada disiplin ilmu lainnya. Perkembangan pada disiplin ilmu lainnya terutama dalam hal pembentukan model diharuskan menggunakan himpunan/kelompok data observasi dari lapangan. Dengan demikian terlihat jelas begitu penting peran dari konsep himpunan, dan sebagai awal dari bahasan buku ajar ini akan dibahas pengertian himpunan, cara penyajian himpunan, macam-macam himpunan, relasi pada himpunan dan operasi-operasi himpunan.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Dua

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

   Keterampilan Umum

   KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

   KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

   KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan

etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus
KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan
P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan
   Diharapkan mahasiswa dapat mendeskripsikan pengertian himpunan, menuliskan himpunan dalam berbagai cara penulisan himpunan, menyebutkan macam-macam himpunan, menentukan relasi pada himpunan dan menggunakan operasi-operasi himpunan.

4. Prasyarat Kompetensi
   Untuk memahami materi pada modul ini, adapun kompetensi prasyarat yang dimiliki yaitu kemampuan didalam mengoperasikan berbagai macam bentuk himpunan Bilangan, Operasi Bilangan dan Secara khusus seluruh sifat-sifat pada Sistem Bilangan Riil yaitu yang terdapat pada modul satu.

5. Kegunaan Modul Dua
   Modul dua ini berguna untuk menjadi sumber belajar mahasiswa untuk memahami materi Himpunan baik dengan pembelajaran individu maupun berkelompok. Materi yang disajikan lengkap sehinggga memudahkan mahasiswa memahami setiap materi dengan baik.
6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok
   Materi pada modul ini adalah Pengertian Himpunan, Keanggotaan himpunan dan bilangan, penulisan himpunan, macam-macam himpunan, operasi pada himpunan, sifat-sifat operasi himpunan, hokum-hukum pada himpunan dan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke-3: Menguasai Himpunan dan Jenis-Jenisnya

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan himpunan beserta jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Himpun. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

2.1 Pendahuluan

Konsep himpunan telah banyak mendasari perkembanga ilmu pengetahuan baik pada bidang matematika itu sendiri maupun pada ilmu lain. Dalam bidang ilmu lain dapat kita lihat pada pembentukan model yang dengan menggunakan himpunan maupun pengelompokkan data observasi dari lapangan. Sehingga jelas begitu penting peranan dari konsep himpunan dalam berbagai rumpun ilmu dan kehidupan sehar-hari.

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering membicarakan objek-objek diskrit, misalnya buku, computer, mahasiswa, nilai jian, dan sebagainya. Di dalam computer yang merupakan bidang ilmu yang erat kaitannya dengan objek-objek diskrit yang digunakan untuk data masukan program.

Terminologi dasar dari sekumpulanobjek diskrit yang digunakan untuk mengelompokkan objek secara bersama-sama disebut sebagai himpunan. Lebih lanjut kita akan membahas himpunan.

2.2 Pengertian Himpunan

Himpunan di dalam matematika berasal dar Bahasa Inggris yaitu "set" yang berarti kumpulan, kelas, kelompok dan gugus. Himpunan secara sederhana diartikan sebagai sekelompok benda atau objek yang yang dikelompokkan secara terukur dan jelas atau tidak ambigu. Contohnya kelompok mahasiswa Pogram Studi Pendidikan Matematika Angakatan 2020, Kelompok mahasiswa anggota HMPS, Kelompok Mahasiswa pecinta alam. Sedangkan contoh kelompok yang bukan termasuk himpunan yaitu sekelompok perempuan berambut panjang, sekelompok makanan pedas dan sebagainya. Dinyatakan bukan himpunan karena perempuan berambut panjang tidak jelas ukuran berapa centimeter rambut perempuan dinyatakan panjang dan ini tergantung pada perspektif tiap-tiap orang. Sehingga sifat tertentu dari sekelompok objek yang dimaksudkan haruslah mempunyai sifat-sifat tertentu yang jelas dan terukur yang dapat di definisikan secara jelas. Sehingga didefiiskan himpunan adalah kumpulan dari objek-objek yang mempunyai sifat tertentu yang dapat didefinisikan secara jelas *(well defined)*.

Pengertian himpunan dalam kehidupan sehari-hari sedikit berbeda di dalam matematika. Didalam kehidupan sehari-hari seperti himpunan kosong.

Didalam matematika, sekumpulan objek atau himpunan bisa bersifat abstrak dan kongkrit. Abstrak maksudnya disini adalah hanya dapat dipikirkan dan dibayangkan sedangkan kongkrit adalah dapat dilihat, dirasa, diraba atau dipegang dan seterusnya.

Berikutnya kita akah membahas contoh kumpulan yang merupakan himpunan dalam pengertian matematika diamana semua objek pada himpunan tersebut dapat ditentukan (jelas dan terukur). Hal-hal yang harus diingat bahwa objek-objek dalam suatu himpunan haruslah berbeda, artinya tidak terjadi pengulangan penuliasan objek yang sama dalam satu himpunan.

Sebagai contoh, misalkan $A = \{1,2,3,2,4,5\}$. Himpunan A tersebut tidak dipandang memiliki jumlah anggota sebanyak 6 namun himpunan tersebut dipandang sebagai $A = \{1,2,3,4,5\}$ dengan jumlah anggota sebanyak 5. Urutan dalam penulisan anggota himpunan tidaklah dipentingkan karena dinyatakan sebagai himpunan yang sama walaupun berbeda urutannya seperti $\{4, 1,3,2,5\}$ sama dengan $\{1,2,3,4,5\}$. Untuk menuliskan suatu objek adalah anggota atau bukan anggota dari suatu himpunan tersebut, dapat dinyatakan dengan notasi berikut:

$x \in A$ untuk menyatakan bahwa x merupakan anggota dari himpunan A.

$x \notin A$ untuk menyatakan bahwa x BUKANmerupakan anggota dari himpunan A.

2.3 Penyajian Himpunan

1. Enumerasi

Suatu himpunan yang disajikan dengan enumerasi yaitu menyajikan himpunan dengan menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan diantara dua buah tanda kurawal yaitu { dan }. Dimana nama suatu himpunan dituliskan dengan menggunakan huruf capital maupun menggunakan symbol-simbol lainnya. Untuk menuliskan jumlah anggota himpunan yang besar dan telah memiliki pola tertentu dapat dituliskan dengan mengunakan "…" (ellipsis).

Contoh :

1) Himpunan bilangan bulat positif dapat disajikan dengan $\{1,2,3, \ldots\}$
2) Himpunan alphabet dapat dituliskan dengan $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$
3) Jika $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{\{a, b\}\}$, dan $A_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$$a \in A_1$$

$$a \notin A_2$$

$$A_1 \in A_2$$

$$A_! \notin A_3$$

$$A_2 \in A_3$$

2. Simbol-simbol Baku

Beberapa simbol himpunan dituliskan merupakan notasi baku yang biasanya terbentuk dari huruf kapital yang digunakan untuk menedefiniskan himpunan. Simbol-simbol baku tersebut diantaranya adalah

P : Himpunan bilangan bulat positif

N : Himpunan bilangan asli

Z : himpunan bilangan bulat

Q : Himpunan bilangan rasional

R : Himpunan bilangan riil

C : Himpunan bilangan kompleks

Selanjutnya juga biasanya dituliskan U atau S sebagai himpunan universal atau semesta. Contohnya adalah $U = \{2,4,6,8,10, \ldots\}$ dan $A = \{4,8,12,16\}$. Berdasarkan contoh ini A merupakan himpunan bagian dari U, dimana U adalah himpunan bilangaan bulat genap. Lebih lanjut himpunan bagian akan dibahas di subbab berikutnya.

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi pembentuk himpunan dituliskan dengan menyatakan syarat dari keanggotaannya, seperti

$$\{x|syarat\ yang\ ha\square us\ dipernuhi\ oleh\ x\}$$

Notasi pembentukan himpunan sangat berguna untuk meyajikan himpunan yang anggota-anggotanya tidak mungkin dienumerasikan.

Contoh:

1) $A = \{x|x\ himpunan\ bilangan\ bulat\ positif\ kurang\ dari\ 10\}$

atau

$A = \{x | 1 \leq x < 10, x \in P\}$

2) $Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in Z,\ b \neq 0\right\}$

4. Diagram Venn

Diagram venn pertama kali diperkenalkan oleh John Venn pada tahun 1881. Dalam diagram venn, himpunan semesta S atau U digambarkan dengan persegi panjang, sedangkan himpunan lainnya digambarkan dengan lengkungan tertutup sederhana dimana anggotanya digambarkan dengan noktah yang terletak didalam daerah lengkungan tersebut maupun di dalam persegi panjang. Anggota himpunan yang berada di dalam persegi panjang namun diluar lengkungan berarti anggota tersebut tidak termasuk di dalam himpunan pada lengkungan yang ada.

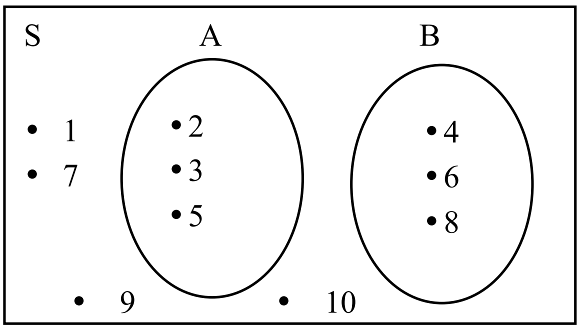
Contoh :

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A = \{2,3,5\}$

$B = \{4,6,8\}$

dapat disajikan dalam bentuk diagram venn seperti berikut ini



Gambar 3 Diagram venn

2.4 Keanggotaan Himpunan dan Bilangan Kardinal

Suatu himpunan dinyatakan dengan huruf kapital seperti A, B, C dan seterusnya. Keanggotaan dari suatu himpunan dinyatakan dengan notasi tanda kurung kurawal (*aqulade*). Objek yang berada di dalam kurung kurawal tersebut dinamakan sebagai anggota himpunan atau elemen yang biasanya dituliskan dengan huruf kecil atau angka-angka.

Jika x adalah anggota dari A maka dapat dituliskan dengan $x \in A$ dan jika y bukan anggota himpunan A maka dituliskan dengan $y \notin A$. Himpunan berhingga (*finite set*) adalah sebuah himpunan yang memuat n elemen berbeda (*distinct*), dimana n adalah bilangan bulat tak negatif. Sebaliknya himpunan tersebut dinamakan himpunan tak berhingga (*infinite set*). Banyaknya anggota suatu himpunan A disebut sebagai kardinalitas A yang dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh :

$A = \{1,2,3,4,5\}$ maka $(A) = 5$ atau $|A| = 5$

$R = \{1,2,3,4, \dots\}$ maka $(R) = \infty$ atau $|A| = \infty$

Himpunan yang tidak memiliki anggota, kardinalnya sama dengan 0, yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { }.

Perhatikan bahwa himpunan { { } } dapat juga dituliskan dengan $\{\emptyset\}$. Dari bentuk himpunan demikian perlu diingat bahwa $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu $\emptyset$.

Istilah seperti kosong, hampa, dan nihil ketiganya mengacu pada himpunan yang tidak mengandung elemen. Namun untukistilah nol tidak sama dengan ketiga istilah diatas sebab nol menyatakan sebuah bilangan tertentu. Himpunan yang tidak berhingga mempunyai nilai kardinal yang tak berhingga pula.

2.5 Jenis-Jenis Himpunan

1. Himpunan Kosong (*empty set*)

   Definisi

Himpunan A disebut sebagai himpunan kosong jika dan hanya jika himpunan tersbeut tidak memiliki satupun anggota atau elemen, dengan kata lain nilai cardinal dari himpunan tersebut sama dengan nol, $n(A) = 0$. Himpunan kosong biasanya dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { }.

Contoh :

1) $P = \{x|x < x\}$, maka $n(P) = 0$
2) $Q = \{mahasiswa\ UKI\ yang\ pernah\ ke\ planet\ lain\}$, maka $n(Q) = 0$.
3) $R = \{Bilangan\ Prima\ antara\ 32\ dan\ 35\}$, maka $n(R) = 0$.
4) $S = \{x|x\ adalah\ akar\ persamaan\ kuadrat\ x^2 + 1 = 0\ , x \in R\}$, maka $n(S) = 0$.
5) $T = \{KPK\ dari\ 3\ dan\ 7\}$, maka $n(T) = 0$.

2. Himpunan Semesta (*universal set*)

Definisi:

Himpunan Semesta S merupukan himpunan yang memuat seluruuh anggota atau elemen himpunan yang dibahas.

Secara tidak langsung dapat dinyatakan bahwa suatu himpunan tertentu merupakan himpunan semesta bagi dirinya sendiri. Himpunan semesta dari suatu himpunan tertentu tidaklah tunggal, namun mungkin lebih dari satu.

Contoh :

Misalkan $A = \{1,2,3\}$, maka himpunan semesta dari A antara lain adalah

$$S_1 = \{1,2,3\}$$

$$S_2 = \{1,2,3,4\}$$

$$S_3 = \{1,2,3,4,5\}$$

$$S_4 = \{1,2,3,4,5,6, \dots\}$$

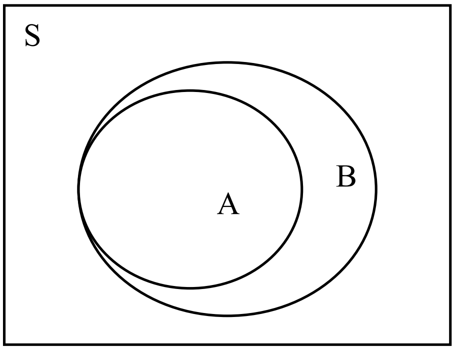
Dari contoh diatas jelas bahwa himpunan semesta dari suatu himpunan tidak tunggal.

Suatu himpunan dapat dinyatakan sebagai himpunan semesta dari himpunan tertentu asalkan semua anggota dari himpunan tertentu itu menjadi anggota himpunan semesta.

3. Himpunan Bagian (*subset*)

Definisi:

Himpunan A dinyatakan himpunan bagian dari himpunan B, dinotasikan dengan $A \subseteq B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B. Dengan kata lain, himpunan B disebut sebagai *superset* dari himpunan A.



Gambar 4 A Himpunan bagian B

Contoh :

1) $\{a, b, d\} \subseteq \{a, b, c, d, e\}$
2) $N \subseteq Z \subseteq R \subseteq C$
3) $\{1,2,3,4\} \subseteq \{1,2,3,4\}$
4) Jika $P = \{(x, y) | x + y < 4,\ x \geq y \geq 0\}$, $Q = \{(x, y)\} 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0\}$, maka $Q \subseteq P$.

Teorema 2.5.1

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal berikut

i. A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri, dinotasikan dengan $A \subseteq A$.

ii. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A, dinotasikan dengan $\emptyset \subseteq A$.

iii. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq \square$, maka $A \subseteq C$.

Bukti

(i) Trivial.

(ii) Berdasarkan definisi himpunan kosong tidak mempunyai anggota. Jika digunakan definisi himpunan bagian dinyatakan bahwa jika $x \in \emptyset$ dan $x \in A$ maka $\emptyset \subseteq A$. Namun perlu diingat bahwa $\emptyset$ tidak mempunyai anggota maka himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari seluruh himpunan yang memiliki anggota. Dalam hal ini $\emptyset \subseteq A$.

(iii) Misalkan $A \subseteq B$, berdasarkan definisi himpunan bagian dapat dituliskan bahwa jika $x \in A$, maka $x \in B$. Selanjutnya $B \subseteq C$, berdasarkan definisi himpunan bagian dapat dituliskan bahwa jika $x \in B$ maka $x \in C$. Kita perlu membuktikan bahwa $A \subseteq C$.

Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq B \subseteq C$ dengan kata lain $x \in A$, $x \in B$ dan $x \in C$. Sehingga $A \subseteq C$.

Catatan :

$\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$. Maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

Contoh :

$A = \{a, b, c\}$ maka $\{a, b, c\}$ dan $\emptyset$ adalah improper subset dari A sedangkan himpunan bagian sebenarnya dari A disebut sebagai proper subset A yaitu $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, dan $\{b, c\}$.

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$. $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A merupakan himpunan bagian dari B dimana dimungkinkan $A = B$. Sedangkan $A \subset B$ digunakan untuk menyatakan A merupakan himpunan bagian dari B namun $A \neq B$, dimana A disebut sebagai himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

4. Himpunan yang sama

Definisi :

Dua buah himpunan A dan B dinyatakan sama, dinotasikan dengan $A = B$, jika dan hanya jika setiap anggota di A merupakan anggota di B dan juga setiap anggota di B merupakan anggota di A. Dapat juga dinyatakan dengan $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Dengan kata lain, dua himpunan dinyatakan sama yaitu jika semua anggota di dalam kedua himpunan tersebt sama meskipun urutan di dalam himpunan tersebut tidak sama.

Contoh :

1) Jika $A = \{1,3,4,2\}$ dan $B = \{4,3,2,1\}$ maka $A = B$
2) Jika $P = \{a, b, d, c, d\}$ dan $Q = \{a, b, c, d\}$ maka $A = B$
3) Jika $S = \{2,4,6,4,5\}$ dan $T = \{2,4,6\}$ maka $A \neq B$

Berikut ini beberapa hal yang perlu di catat dalam memeriksa kesamaan dua buah himpunan :

i. Urutan elemen dalam himpunan tidak mempengaruhi perbedaan himpunan. Jadi $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{3,1,2\}$
ii. Pengulangan elemen tidak mempengaruhi kesamaan maupun perbedaan dua buah himpunan.
iii. Jika diketahui tiga buah himpunan P, Q, dan R maka berlaku
    a. $A = A$, $B = B$ dan $C = C$
    b. Jika $A = B$ maka $B = A$
    c. Jika $A = B$ dan $B = C$ maka $A = C$.

5. Himpunan yang ekuivalen

   Definisi :

   Dua buah himpunan A dan B dikatakan ekuivalen ($A \cong B$) jika dan hanya jika jumlah banyaknya anggota kedua himpuan tersebut sama, dinotasikan dengan $n(A) = n(B)$. Dapat juga dituliskan dengan $A \cong B \Leftrightarrow |A| = |B|$. Dua buah himpunan yang ekuivalen dapat mempunyai kardinalitas yang sama meskipun anggota kedua himpunan tersebut tidak sama.

   Contoh :

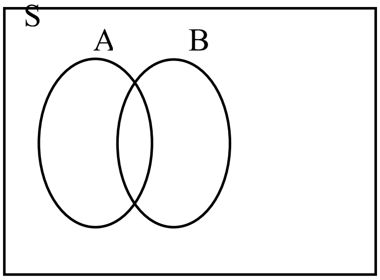
   1) Misalkan $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$, sehingga $n(A) = 5$ dan $n(B) = 5$. Disimpulkan bahwa A dan B ekuivalen atau dinotasikan dengan $A \cong B$.
   2) Jika $P = \{k, l, m, n, o, n\}$, $Q = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $R = \{a, b, c, d, e, a\}$ maka $P \cong R$ karena $|P| = |R| = 5$ namun $P \ncong Q$ dan $Q \ncong R$ karena $|P| \neq |Q|$ dan $|Q| \neq |R|$.

6. Himpunan Bersilangan

   Definisi :

   Dua buah himpunan A dan B dinyatakan bersilangan jika dan hanya jika $A \cap B \neq \emptyset$ atau dengan kata lain ada anggota yang sama dari kedua himpunan tersebut.

   Dua buah himpunan bersilangan dapat direpresentasikan dalam biagram venn berikut ini:



Gambar 5 Himpunan bersilang

Contoh :

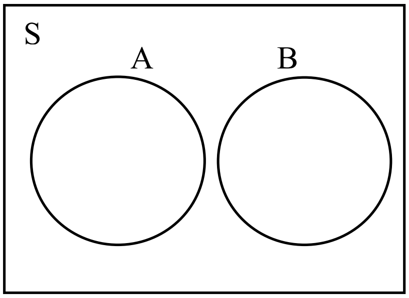
Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, i, u, e, o\}$, maka didapatkan bahwa $A \cap B = \{a\}$. Karena $A \cap B \neq \emptyset$ maka A dan B merupakan himpunan yang bersilangan.

7. Himpunan yang saling lepas

   Definisi :

   Dua buah himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika dan hanya jika tidak terdapat anggota yang sama dari kedua himpunan tersebut, dinotasikan dengan $A \cap B = \emptyset$.

   Dua buah himpunan atau lebih mungkin saja tidak memiliki anggota yang sama satu unsurpun, sehingga disebut saling lepas. Kondisi ini dapat digambarkan seperti pada diagram berikut :



Gambar 6 Saling lepas

   Contoh :

   Misalkan $P = \{bilangan\ prima\ kurang\ dari\ 10\}$ dan $Q = \{bilangan\ prima\ antara\ 15\ dan\ 20\}$ maka diperoleh bahwa $A \cap B = \emptyset$. Karena $A \cap B = \emptyset$ maka A dan B merupakan himpunan saling lepas.

8. Himpunan kuasa (*power set*)

   Definisi :

Himpunan kuasa dari himpunan A yang dinotasikan dengan $P(A)$ adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri (*improper subset*). Jika kardinalitas A adalah n maka banyaknya himpunan kuasanya adalah 2^n.

Contoh :

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ maka kardinalitas himpunan kuasa A adalah $2^3 = 8$. Himpunan kuasa dari A yaitu $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

4. Rangkuman

1. Banyaknya anggota suatu himpunan A disebut sebagai kardinalitas A yang dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.
2. Himpunan yang tidak memiliki anggota, kardinalnya sama dengan 0, yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { }.
3. Jenis-jenis himpunan :
   i. Himpunan Kosong (*empty set*), $n(A) = 0$. Himpunan kosong biasanya dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { }.
   ii. Himpunan Semesta (*universal set*), S
   iii. Himpunan Bagian (*subset*), $A \subseteq B$. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal berikut
      1) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri, dinotasikan dengan $A \subseteq A$.
      2) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A, dinotasikan dengan $\emptyset \subseteq A$.
      3) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$.
   iv. Himpunan yang sama, dinyatakan dengan $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.
   v. Himpunan yang ekuivalen, dinotasikan dengan $n(A) = n(B)$. Dapat juga dituliskan dengan $A \cong B \Leftrightarrow |A| = |B|$.
   vi. Himpunan Bersilangan, $A \cap B \neq \emptyset$
   vii. Himpunan yang saling lepas, $A \cap B = \emptyset$
   viii. Himpunan kuasa (*power set*), $P(A)$. Jika kardinalitas A adalah n maka banyaknya himpunan kuasanya adalah 2^n.

5. Latihan

1. Buktikanlah jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka $A = B$
2. Manakah dari himpunan berikut ini, yang merupakan himpunan kosong? Jelaskan!
   a. $\{x|x \text{ nama huruf vokal selain } a, i, u, e, o \text{ didalam alfabet}\}$
   b. $\{x|x^2 = 9 \text{ dan } 2x = 4\}$
   c. $\{x|x \neq x\}$
   d. $\{x|x + 6, x \text{ bilangan asli}\}$
3. Misalkan $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1,2\}$,$C = \{3,1,2\}$,$D = \{a, b, c\}$,$E = \{1,2\}$,$F = \{0,1,2, 3\}$, dan $G = \{bilangan\ cacah\ antara\ 0\ dan\ 4\}$

   a. Himpunan manakah yang sama dengan A?
   b. Himpunan manakah yang ekivalen dengan A?
   c. Jika H dan I adalah himpunan, sedemikian sehingga berlaku H=I, apakah H~ I ? Jelaskan!
   d. Jika J dan K adalah himpunan, sedemikian sehingga berlaku J~K, apakah J=K ? Jelaskan!

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Misalkan $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$. Manakah pernyataan yang salah? Jelaskan!
   a. $\{4,5\} \subset A$
   b. $\{4,5\} \in A$
   c. $\{\{4,5\}\} \subset A$
2. Dari sekelompok anak terdapat 20 anak gemar voli, 28 anak gemar basket, dan 27 anak gemar pingpong, 13 anak gemar voli dan basket, 11 anak gemar basket dan pingpong, 9 anak gemar voli dan pingpong, serta 5 anak gemar ketiga-tiganya. Jika dalam kelompok tersebut ada 55 anak, banyak anak yang tidak gemar satu pun dari ketiga jenis permainan tersebut adalah
3. Dari satu kelas terdata 52 dari jumlah siswa yang menyukai matematika sekaligus fisika akan mengikuti olimpiade fisika. Empat kali dari jumlah siswa yang menyukai keduanya akan mengikuti olimpiade matematika. Jika jumlah seluruh siswa ada 44 orang dan siswa yang mengikuti olimpiade secara otomatis menyukai pelajaran yang dilombakan, maka banyak siswa yang hanya mengikuti olimpiade matematika (hanya menyukai matematika) adalah ⋯ orang.
4. Terdapat 60 orang pelamar yang harus mengikuti tes tertulis dan tes wawancara agar dapat diterima sebagai karyawan sebuah perusahaan.

Ternyata 32 orang karyawan lulus tes wawancara, 48 orang lulus tes tertulis, dan 6 orang tidak mengikuti tes tersebut. Banyak pelamar yang diterima sebagai karyawan perusahaan adalah

5. Sebanyak 115 mahasiswa mengambil mata kuliah Matematika Diskrit, 71 mahasiswa mengambil mata kuliah Kalkulus, dan 56 mahasiswa mengambil mata kuliah Geometri. Di antaranya 25 mahasiswa mengambil mata kuliah Matematika Diskrit dan Kalkulus, 14 mahasiswa mengambil mata kuliah Matematika Diskrit dan Geometri, dan 9 mahasiswa mengambil mata kuliah Kalkulus dan Geometri. Jika terdapat 196 mahasiswa yang mengambil paling sedikit satu dari tiga mata kuliah tersebut, berapa orang yang mengambil tiga mata kuliah itu sekaligus?

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-4 : Menguasai Operasi pada Himpunan, Hukum-hukum dan Prinsip Inklusi-Eksklusinya
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan himpunan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Himpun khususnya Operasi pada Himpunan, Hukum-hukum dan Prinsip Inklusi-Eksklusinya. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*
3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

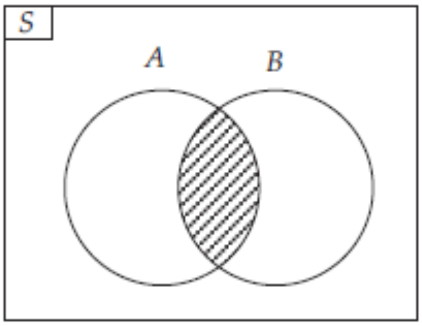
2.6 Operasi Pada Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

Definisi :

Dua buah himpunan A dan B dinyatakan berisisan $A \cap B$ jika dan hanya jika terdapat anggota himpunan yang sama dari himpunan tersebut. Biasanya didefinisikan dengan $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

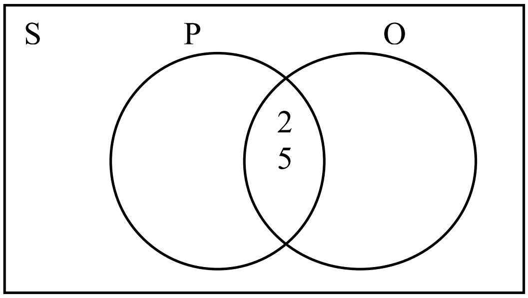
Himpunan yang beririsan ini sama halnya dengan himpunan yang berislangan pada pembahasan sebelumnya. Dua buah himpunan yang beririsan digambarkan seperti diagram venn berikut



Gambar 7 Irisan

Contoh :

Misalkan $P = \{bilangan\ prima\ kur\square ng\ dari\ 10\}$ dan $Q = \{Faktor\ dari\ 20\}$ maka dapat dituliskan dengan $P = \{2,3,5,7\}$ dan $Q = \{1,2,4,5,10\}$. Sehingga diperoleh bahwa $P \cap Q = \{2,5\}$. Berikut ini diagram venn yang terbentuk:



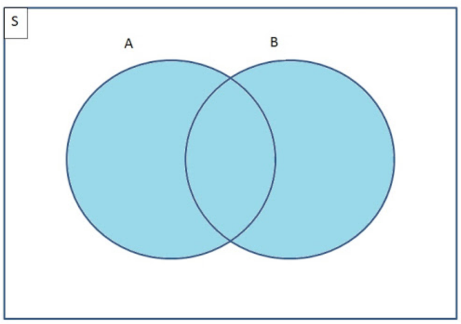
Gambar 8 Contoh Irisan

2. Gabungn (*union*)

   Definisi :

   Gabungan antara dua buah himpunan A dan B, dilambangkan dengan $A \cup B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B. Biasanya didefinisikan dengan $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

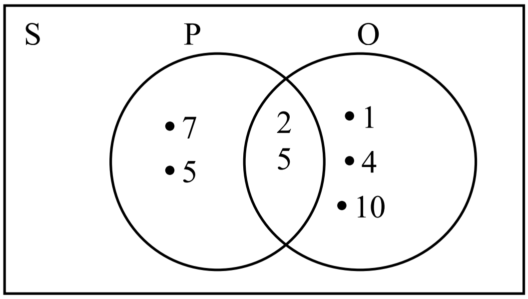
   Gabungan dari dua buah himpunan A dan B dapat digambarkan seperti diagram venn berikut



Gambar 9 Gabungan

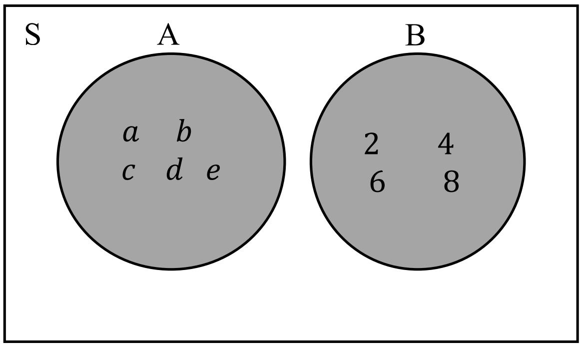
Contoh :

1) Misalkan $P = \{bilangan\ prima\ kurang\ dari\ 10\}$ dan $Q = \{Faktor\ dari\ 20\}$ maka dapat dituliskan dengan $P = \{2,3,5,7\}$ dan $Q = \{1,2,4,5,10\}$. Sehingga diperoleh bahwa $P \cup Q = \{1,2,3,4,5,7,10\}$. Berikut ini diagram venn yang terbentuk:



Gambar 10 Contoh Gabungan

2) Misalkan Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{2,4,6,8\}$ maka dapat diperoleh bahwa $A \cup B = \{a, b, c, d, e, 2,4,6,8\}$. Berikut ini diagram venn yang terbentuk:



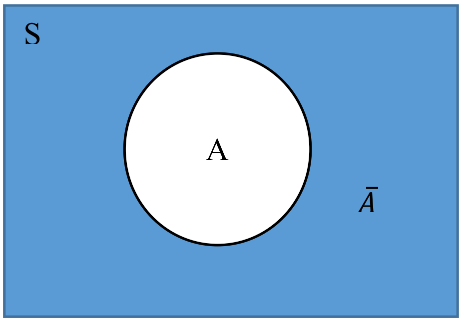
Gambar 11 Contoh Gabungan

3. Komplemen (*complement*)

Definisi ;

Komplemen dari suatu himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya himpunan semesta namun bukan anggota dari A. Biasanya dinotasikan dengan $\bar{A} = A^c = \{x|x \in S\ dan\ x \notin A\}$.

Komplemen dari sebuah himpunan dapat digambarkan seperti diagram venn berikut



Gambar 12 Komplemen

Contoh :

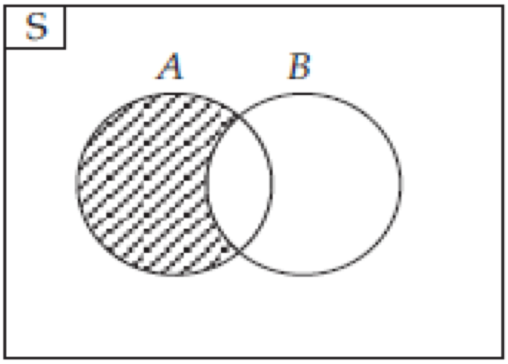
Misalkan $S = \{bilangan\ bulat\ kurang\ dari\ 20\}$ dan $A = \{Bilangan\ ganjil\ kurang\ dari\ 20\}$ maka komplemen dari A adalah bilangan genap kurang dari 20 dituliskan dengan $\bar{A} = A^c = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$

4. Selisih (*difference*)

Definisi :

Selisih dari dua himpunan A terhadap B dilambangkan dengan A-B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota dari himpunan A namun bukan anggota dari himpunan B. Biasanya didefinisikan dengan $A - B = \{x|x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

Selisih antara A dan B dapat juga dikatakan sebagai komplemen himpunan B yang relatif terhadap himpunan A. Selisih dari A dan B ini dapat digambarkan sepert diagram venn berikut



Gambar 13 Selisih

Contoh :

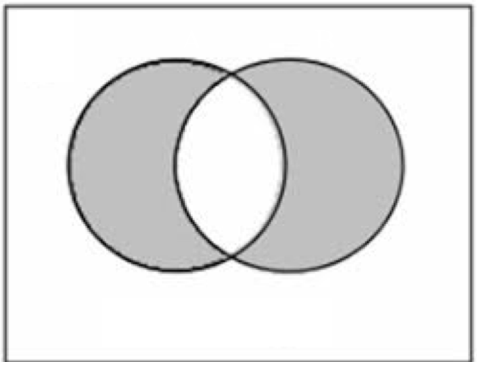
Misalkan $A = \{1,2,3,4, \dots ,10\}$ dan $B = \{2,3,5,7,11,13\}$ maka $A - B = \{1,4,6,8,9,10\}$ dan $B - A = \{11,13\}$

5. Beda setangkup (*symmetric difference*)

   Definisi :

   Beda setangkup dari dua buah himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B namun tidak pada keduanya. Biasanya didefinisikan dengan $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

   Beda setangkup dari dua buah himpunan dapat digambarkan seperti diagram venn berikut ini



Gambar 14 Beda Setangkup

Teorema 2.6.1

Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut ini

i. $A \oplus B = B \oplus A$

ii. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

Contoh :

Misalkan :

S : Himpunan mahasisa FKIP

P : Himpunan mahasiswa yang nilai ujian tulis diatan 80

Q : Himpunan mahasiswa yang nilai ujian lisan diatas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai ujian tulis dan ujian lisan keduanya diatas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian diatas 80 dan mendapat nilai C jika kedua ujian tulis dan lisan dibawah 80. Maka berdasarkan kondisi tersebut dapat disimpulkan bahwa

i. semua mahasiswa yag mendapat nilai A adalah $P \cap Q$

ii. semua mahasiswa yag mendapat nilai B adalah $P \oplus Q$

iii. semua mahasiswa yag mendapat nilai C adalah $S - (P \cup Q)$

6. Perkalian Kartesian (*Cartesian product*)

   Definisi :

   Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan yang terbentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B. Biasanya didefinisikan dengan $A \times B = \{(a, b) | a \in A$ dan $b \in B\}$.

   Jika A dan B adalah himpunan berhingga, maka banyaknya anggota dari perkalian kartesiannya adalah $|A \times B| = |A||B|$. Perlu diingat bahwa pasangan berurut (a, b) berbeda dengan (b, a) dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$. Selanjutnya perkalian kartesian tidak bersifat komutatif, $A \times B \neq B \times A$, kecuali jika A dan B salah satunya adalah himpunan kosong.

   Contoh :

   Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1,2\}$ maka perkalian kartesian A dan B adalah $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$. $|A \times B| = |A||B| = 3.2 = 6$.

7. Perambatan operasi himpunan

   Dalam melakukan perambatan (generalization) operasi himpunan dengan menggunakan dasar perambatan yang ada pada operasi aritmatika biasa. Misalnya $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ merupakan himpunann maka dapat disimpulkan bahwa

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times \square_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

2.7 Hukum-hukum Aljabar pada Himpunan

1. Hukum Identitas

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap S = A$$

2. Hukum Nulitas

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup S = S$$

3. Hukum Komplemen

$$A \cup \bar{A} = S$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

4. Hukum Idempoten

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

5. Hukum Involusi

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

6. Hukum Penyerapan

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

7. Hukum Komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

8. Hukum Distributif

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

9. Hukum Asosiatif

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

10. Hukum De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

11. Hukum 0/1

$$\bar{S} = \emptyset$$
$$\bar{\emptyset} = S$$

2.8 Prinsip Inklusi-Ekslusi

Berikut ini prinsip operasi pada dua himpunan yaitu

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

sedangkan untuk tiga buah himpunan berlaku:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Selanjutnya untuk himpunan berhingga $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ berlaku

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Contoh :

Berapa banyakkah jumlah bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis di bagi 5 atau 7?

Jawab :

Misalkan

A : Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5

B : Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 7

$A \cap B$: Himpunan bilangan bulat yang habis di bagi 5 dan 7 (himpunan bilangan bulat yang habis di bagi oleh KPK 5 dan 7 yaitu 35)

Diperoleh bahwa

$$|A| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 14$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor = 2$$

maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 20 + 14 - 2 = 32$$

Jadi terdapat 32 bilangan bulat yang habis di bagi 5 atau 7.

4. Rangkuman

1. Operasi pada himpunan
   a. Irisan (*intersection*), $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$.
   b. Gabungan (*union*), $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.
   c. Komplemen (*complement*), $\bar{A} = A^c = \{x | x \in S\ dan\ x \notin A\}$.
   d. Selisih (*difference*), $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.
   e. Beda setangkup (*symmetric difference*), $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

f. Perkalian Kartesian (*Cartesian product*), $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

g. Perambatan operasi himpunan :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

2. Hukum-hukum Aljabar pada Himpunan

a. Hukum Identitas

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap S = A$$

b. Hukum Nulitas

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup S = S$$

c. Hukum Komplemen

$$A \cup \bar{A} = S$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

d. Hukum Idempoten

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

e. Hukum Involusi

$$\overline{(\bar{A}\ )} = A$$

f. Hukum Penyerapan

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

g. Hukum Komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

h. Hukum Distributif

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

i. Hukum Asosiatif

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

j. Hukum De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

k. Hukum 0/1

$$\bar{S} = \emptyset$$

$$\bar{\emptyset} = S$$

3. Prinsip Inklusi-Ekslusi

Berikut ini prinsip operasi pada dua himpunan yaitu

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

sedangkan untuk tiga buah himpunan berlaku:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Selanjutnya untuk himpunan berhingga $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ berlaku

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

5. Latihan

1. Misalkan $S = \{1,2,3,4, \ldots ,10\}$, $A = \{2,3,5,7\}$, dan $B = \{2,6,9\}$. Tentukanlah :
   a. $A \cap B$
   b. $A \cup B$
   c. $\overline{A \cup B}$
   d. $\overline{A \cap B}$
   e. $\bar{A}$
   f. $\bar{B}$
   g. $\bar{A} \cap \bar{B}$
   h. $\bar{A} \cup \bar{B}$
   i. $A - B$
   j. $\bar{A} - B$
   k. $\bar{A} - \bar{B}$
   l. $\bar{A} \times B$
   m. $A \oplus \bar{B}$
2. Diketahui $S = \{1,2,3,4, \ldots ,10\}$, $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{2,6,9\}$, dan $C = \{2,5,10\}$. Tentukanlah diagram venn yang menunjukkan setiap himpunan berikut ini.

a. $A \cap (B \cap C)$

b. $A \cup \bar{B}$

c. $\bar{A} \cap B$

d. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

e. $\overline{A \cup B}$

f. $A - B - C$

g. $A \oplus C \oplus B$

h. $\bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \bar{C}$

3. Buktikanlah secara aljabar hukum-hukum himpunan berikut
   a. Hukum penyerapan
   b. Hukum distributif
   c. Hukum Asosiatif
4. Buktikan bahwa $P \cap (\bar{P} \cup Q) = P \cap Q$ dan $(P \cap Q) \cup (P \cap \bar{Q}) = P$!
5. Berikan pendapat anda baik melalui pembuktian maupun contoh untuk kondisi berikut ini
   a. Jika $P = Q$, apakah $P \times Q = Q \times P$?
   b. Jika $P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset$, dan $P \times Q = Q \times P$, apakah $A = B$?

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Buktikanlah secara aljabar bahwa $(A - B) - C = (A - C) - B$!
2. Tentukanlah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 200 yang habis dibagi oleh:
   a. 3 atau 5 atau 7
   b. 4 atau 9
3. Diketahui jumlah mahasiswa Pendidikan Matematika adalah 90 mahasiswa. Pada Tahun Ajaran 2020/2021 terdapat 28 mahasiswa yang mengambil mata kuliah Kalkulus Lanjut, 30 mahasiswa mengambil mata kuliah Matematika Dasar, 16 mahasiswa mengambil mata kuliah Kalkulus Vektor. Jika terdapat 6 mahasiswa mengambil mata kuliah Kalkulus

Lanjut dan Kalkulus Vektor, 10 mahasiswa mengambil mata kuliah kalkulus Lanjut dan Matematika Dasar dan tak satupun mengambil ketiga mata kuliah tersebut bersamaan. Maka tentukanlah :

a. Jumlah mahasiswa yang hanya mengambil mata kuliah Matematika Dasar
b. Jumlah mahasiswa yang hanya mengambil mata kuliah Kalkulus Lajut
c. Jumlah mahasiswa yang hanya mengambil mata kuliah Kalkulus Vektor
d. Jumlah mahasiswa yang tidak mengambil ketiga mata kuliah Matematika Dasar, Kalkulus Lanjut maupun Kalkulus Vektor.

4. Misalkan anggota himpunan mahasiswa mengikuti tiga kegiatan non akademik yang ada sebanyak 61 orang. Kegiatan yang tersedia untuk diikuti adalah Program Kreativitas Mahasiswa (PKM), Kegiatan Minat Bakat dan Kegiatan Keilmuan. Jika diketahui jumlah mahasiswa yang mengikuti ketiga kegiatan yang ada adalah 5 mahasiswa, kemudian 16 Mahasiswa mengikuti kegiatan PKM dan Minat Bakat, dan 10 mahasiswa mengikuti PKM dan Keilmuan. Selanjutnya Jumlah mahasiswa yang mengikuti PKM, Minat Bakat dan Keilmuan berturut-turut adalah 30, 40 dan 35. Tentukanlah :

   a. Jumlah mahasiswa yang hanya mengikuti satu kegiatan yaitu PKM
   b. Jumlah mahasiswa yang hanya mengikuti satu kegiatan yaitu Minat Bakat
   c. Jumlah mahasiswa yang hanya mengikuti satu kegiatan yaitu Keilmuan
   d. Jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan Minat Bakat dan Keilmuan

e. Jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan Keilmuan atau Minat Bakat
f. Jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan PKM atau Minat Bakat
g. Jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan PKM atau Minat Bakat atau keilmuan.

5. Misalkan :

   S : Himpunan mahasiswa FKIP

   A : Himpunan mahasiswa yang nilai project 1 diatas 80

   B : Himpunan mahasiswa yang nilai project 2 diatas 80

   Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai project 1 dan ujian project 2 keduanya diatas 80, mendapat nilai B jika salah satu nilai projek diatas 80 dan mendapat nilai C jika kedua nilai project 1 dan 2 dibawah 80. Jika diketahui bahwa jumlah mahasiswa FKIP 200 mahasiswa dimana yang mendapatkan nilai project 1 diatas 80 adalah sebanyak 95 orang dan jumlah mahasiswa dengan nilai project 2 diatas 80 adalah 115 mahasiswa. Tentukanlah

   a. Semua mahasiswa yag mendapat nilai A
   b. semua mahasiswa yag mendapat nilai B
   c. semua mahasiswa yag mendapat nilai C

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul
   Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul satu ini menuntun mahasiswa memahami materi Sistem Bilangan Riil secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Himpunan	Identitas	Nullitas	Komplemen	Idempoten
Involusi	Penyerapan	Komutatif	Distributif	Asosiatif
De Morgan	Setangkup	Inklusi	Eksklusi	

4. Referensi

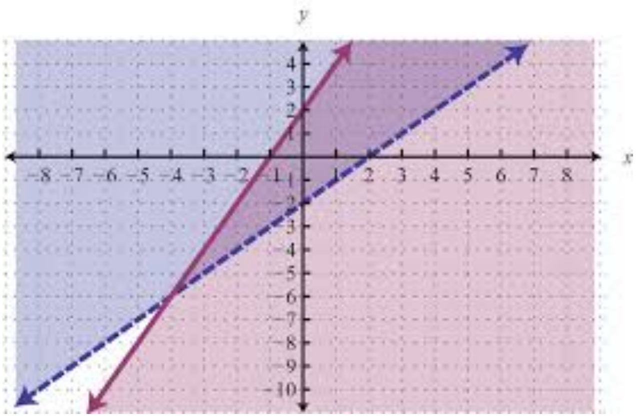
Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson
Eie, M, Chang, Shou-Te. 2010. *A course on Abstract Algebra.* Singapore: World Scientific.
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 3

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

Equality of opportunity is an equal opportunity to prove unequal talents

-David Samuel



Pendidikan Matematika

FKIP UKI

MODUL 3 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Persamaan linear adalah suatu persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan satu variable tunggal. Persamaan digambarkan linear sebab hubungan matematisnya dapat direpresentasikan sebagai garis lurus dalam system koordinat kartesius. Dasar dari suatu persamaan adalah sebuah pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan ruas kiri yang dipisahkan oleh tanda “=” . Hal yang tidak diketahui disebut sebagai variabel. Dan sebuah penyelesaian dari suatu persamaan berupa nilai yang jika disubstitusikan pada variabel menghasilkan sebuah pernyataan yang benar.

   Selanjutnya dalam matematika ada istilah lebih dari, kurang dari, lebih kecil, lebih tinggi, lebih rendah dan tidak sama yang sudah menjadi Bahasa sehari-hari dalam masyarakat. Dalam modul ini akan dipelajari terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan dari satu variabel, dua variael dan tiga variabel.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Tiga

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

   Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus
KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan
P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan
   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Diharapkan mahasiswa dapat menentukan penyelesaian dari persamaan linear satu variabel dan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode

penyelesaian.

4. Prasyarat Kompetensi
   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep pada system bilangan riil dan Himpunan.

5. Kegunaan Modul Tiga
   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada dengan berbagai latihan, contoh dan ilustrasi.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok
   Materi didalam modul ini mencakup : Persamaan linear satu variabel, dua Variabel dan tiga variabel beserta penyelesaiannya.
   Metode-metode penyelesaian dalam menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dan pertidaksamaan linear.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 5 : Mengusai Persamaan dan pertidaksamaan Linear Satu Variabel dan Dua variabel

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

3.1 Pendahuluan

Sebuah pernyataan dalam kehidupan sehari-hari dapat dinyatakan dalam pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan kiri yang dipisahkan tanda sama dengan disebut sebagai persamaan.

Hal yang tidak diketahui dalam sebuah persamaan disebut variable. Contohnya Susi membeli 2 buah pensil seharga Rp. 20.000 maka dapat dinotasikan p sebagai pensil sehingga diperoleh persamaan $2p = Rp. 20000$. Dalam penyelesaian persamaan berupa nilai yang jika disubstitusikan pada variable menghasilkan sebuah pernyataan yang benar. Seperti contoh diatas jika ditanyakan harga satu pensil maka di dapat seharga $Rp. 10.000$.

Selanjutnya dalam matematika ada istilah lebih dari, kurang dari, lebih kecil, lebih tinggi, lebih rendah dan tidak sama yang sudah menjadi Bahasa sehari-hari dalam masyarakat. Istilah-istilah ini biasanya digunakan untuk menentukan nilai minimum atau nilai maksimum dari suatu persamasalahan atau pernyataan yang dapat dimodelkan secara matematis.

Persamaan linear adalah suatu persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan satu variable tunggal. Persamaan digambarkan linear sebab hubungan matematisnya dapat direpresentasikan sebagai garis lurus dalam system koordinat kartesius. Bentuk umum persamaan linear adalah $y = mx + c$.

3.2 Persamaan Linear Satu Variabel

Definisi :

Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Dinotasikan dengan $x = c$.

x : variabel berpangkat satu

c : nilai konstanta

Contoh :

$x = 6$

$3x + 5 = 20$

$x - 4 = 2x + 10$

sebuah penyelesaian dari suatu persamaan adalah sebarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan tersebut disubstitusikan pada variabel yang ada.

Contoh :

$3x - 7 = 29$

persamaan ini mempunyai penyelesaian bilangan 12, karena jika disubstitusikan bilangan 12 ke persamaan diperoleh $3(12) - 7 = 29$ adalah benar. Sedangkan bilangan 3 bukanlah sebuah penyelesaiannya karena $3(15) - 7 \neq 29$.

Berikut ini prinsip penjumlahan dan perkalian dalam menyelesaikan berbagai macam persamaan

1. Prinsip penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a + c = b + c$

   $a - c = b - c$

2. Prinsip perkalian

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a. c = b. c$

   $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, benar untuk $c \neq 0$.

Contoh :

1) Tentukanlah penyelesaian dari $4x - 2 = 50$.

   Jawab :

   $4x - 2 = 50$

   $4x - 2 + 2 = 50 + 2$ menggunakan prinsip penjumlahan

   $4x = 52$

   $\frac{1}{4}(4x) = \frac{1}{4}52$ menggunakan prinsip perkalian

   $x = 13$

2) Tentukanlah penyelesaian dari $3(x-2)-2=5-5(x+5)$

Jawab :

$3(x-2)-2=3-5(x+5)$

$3x-6-2=3-5x-25$

$3x-8=-5x-22$

$3x-8+8=-5x-22+8$ kedua ruas ditambah 8

$3x=-5x-24$

$3x+5x=-5x+5x-24$ kedua ruas ditambah $5x$

$8x=-24$

$\frac{1}{8}(8x)=\frac{1}{8}(-24)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{8}$

$x=-3$

4. Persamaan Ekuivalen

Definisi :

Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut sebagai persamaan ekuivalen.

Contoh :

1. $2x=16$
2. $3x+5=29$
3. $x-5=2x-13$

ketiga persamaan diatas merupakan persamaan yang ekuivalen karena mempunyai himpunan penyelesaian yang sama yaitu, $x=8$.

3.3 Persamaan Linear Bentuk Pecahan satu Variabel

Persamaan yang memuat pecahan disebut sebagai persamaan linear bentuk pecahan. Untuk menyelesaikan persamaan pecahan ini digunakan perkalian dengan variabel.

Contoh :

Tentukanlah penyelesaian dari $\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$

Jawab :

$$\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$$

$35\left(\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7}\right) = 35\left(\frac{3}{5}\right)$ kedua ruas dikali 35

$35\left(\frac{x-3}{5}\right) + 35\left(\frac{2x}{7}\right) = 21$ sifat distributif

$7x - 21 + 10x = 21$

$17x - 21 = 21$

$17x - 21 + 21 = 21 + 21$ kedua ruas di tambah 21

$17x = 42$

$\frac{1}{17}(17x) = \frac{1}{17}(42)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{17}$

$$x = \frac{42}{17}$$

3.4 Pertidaksamaan Linear satu Variabel

Definisi :

Pertidaksamaan linear satu variabel adalah suatu pertidaksamaan yang hanya mempunyai satu variabel dengan pangkat tertinggi varibelnya satu.

Contoh :

$x < 10$

$3x + 4 > 7$

$2x - 3(2x + 1) < 10$

Berikut ini prinsip penjumlahan dan perkalian pada pertidaksamaan linear:

1. Prinsip Penjumlahan

Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

$a + c < b + c$ atau $a + c > b + c$

$a - c < b - c$ atau $a - c > b - c$

2. Prinsip Perkalian

Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real positif. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

$a.c < b.c$ atau $a.c > b.c$

Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real negatif. Jika $a < b$ maka $a.c \geq b.c$

atau

Jika $a > b$ maka $a.c \leq b.c$

Contoh :

Tentukanlah penyelesaian dari

1) $3x - 5 < 8$
2) $4x - 7 > 3(x - 2) + 12$
3) $3x - 4 < 5x + 6$

Jawab :

1) $3x - 5 < 8$

$3x - 5 + 5 < 8 + 5$ kedua ruas ditambah 5

$3x < 13$

$\frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(13)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{3}$

$x < \frac{13}{3}$

2) $4x - 7 > 3(x - 2) + 12$

$4x - 7 > 3x - 6 + 12$ sifat distributif

$4x - 7 > 3x + 6$

$4x - 7 + 7 > 3x + 6 + 7$ kedua ruas ditambah 5

$4x > 3x + 13$

$4x - 3x > 3x - 3x + 13$ kedua ruas ditambah $(-3x)$

$x > 13$

3) $3x - 4 < 5(x + 1) + 6$

$3x - 4 < 5x + 5 + 6$ sifat distibutif

$3x - 4 < 5x + 11$

$3x - 4 + 4 < 5x + 11 + 4$ kedua ruas ditambah 4

$3x < 5x + 15$

$3x - 5x < 5x - 5x + 15$ kedua ruas dikurang $-5x$

$-2x < 15$

$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right)(15)$ kedua ruas dikali $-\frac{1}{2}$

$x \geq -\frac{15}{2}$

3.5 Pertidaksamaan Linear Bentuk Pecahan Satu Variabel

Pertidaksamaan linear pecahan satu variabel merupakan pertidaksamaan yang memuat pecahan. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan pecahan ini digunakan perkalian variabel.

Contoh :

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari

1) $\frac{2x}{3} > 5 - \frac{x}{2}$

2) $\frac{x}{5} < \frac{2x}{3} - 4$

Jawab :

1) $\frac{2x}{3} > 5 - \frac{x}{2}$

$\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}>5-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$ kedua ruas ditambah $\frac{x}{2}$

$6\left(\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}\right)>6(5)$ kedua ruas dikali 6

$4x+3x>30$

$7x>30$

$\frac{1}{7}(7x)>\frac{1}{7}(30)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{7}$

$x>\frac{30}{7}$

2) $\frac{x}{5}<\frac{2x}{3}-4$

$\frac{x}{5}-\frac{2x}{3}<\frac{2x}{3}-\frac{2x}{3}-4$ kedua ruas ditambah $\frac{2x}{3}$

$15\left(\frac{x}{5}-\frac{2x}{3}\right)<15(-4)$

$3x-10x<-60$

$-7x<-60$

$-\frac{1}{7}(-7x)<-\frac{1}{7}(-60)$ kedua ruas dikali $-\frac{1}{7}$

$x\geq\frac{60}{7}$

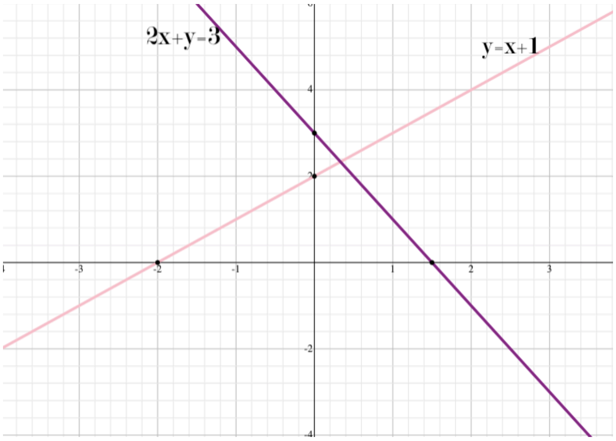
3.6 Persamaan linear dua variabel

Persamaan linear dua variabel merupakan persamaan garis dimana mengandung dua buah variabel yang berbeda yang biasa disebut sebagai variabel independen dan variavel dependen. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $y=mx+c$. Dalam hal ini m adalah gradien garis dan c merupakan titik potong garis dengan sumbu y. Persamaan lain seperti x^3, $\sqrt{y}$ dan xy bukanlah merupakan persamaan linear.

Persamaan linear dua variabel tidaklah harus berupa variabel x dan y, namun bisa juga variabel lainnya seperti s dan t, m dan n atau yang lainnya. Sebagai contoh, $y=2x-1$ dapat diubah menjadi $2x-y-1=$

0, 2 disebut sebagai koefisien x, -1 disebut sebagai koefisien y, dan -1 disebut sebagai konstanta. Selanjutnya persamaan $2s + 5t = 3$, 2 disebut sebagai koefisien s, 5 disebut sebagai koefisien t dan 3 disebut sebagai konstanta.

Persamaan linear dua variabel dapat digambarkan dalam grafik pada koordinat kartesius. Misalnya persamaan $y = x + 1$, maka dapat didekripsikan seperti gambar dibawah ini.



Gambar 15 Grafik persamaan dua variabel

Sistem persamaan linear dua variabel, pada umumnya dibentuk oleh dua persamaan linear dua variabel yang memiliki variabel yang sama. Contoh, $2x + y = 5$ dan $x + y = 3$. Akar atau himpunan penyelesaian dari system persamaan linear dua variabel adalah pasangan terurut (x, y) yang memenuhi kedua persamaan yang membentuk system tersebut. Penyelesaian persamaan linear dua variable ini dapat diselesaikan dengan cara eliminasi, substitusi dan eliminasi-substitusi.

Contoh :

1. Tentukanlah penyelesaian dari persamaan berikut

   $x + y = 8$ dan $2x + 3y = 19$

   Jawab :

Dengan menggunakan metode substitusi

$x + y = 8$

$x = 8 - y$ (1)

$2x + 3y = 19$ (2)

Substitusi (1) ke (2)

$2(8 - y) + 3y = 19$

$16 - 2y + 3y = 19$

$16 + y = 19$

$y = 19 - 16$

$y = 3$ (3)

Substitusi (3) ke (1) maka diperoleh

$x = 8 - y = 8 - 3 = 5$

Sehingga disimpulkan penyelesaian dari kedua persamaan diatas adalah (5,3).

2. Tentukanlah penyelesaian dari persamaan berikut

   $4x - 2y = 14$ dan $x + 3y = 1$

   Jawab :

   Dengan menggunakan metode eliminasi

   $4x - 2y = 14$ (1)

   $x + 3y = 1$ (2)

   Elimiasi persamaan (1) dan (2) dengan cara seperti berikut ini

   $4x - 2y = 14$

   $x + 3y = 1$ dikali 4

   maka persamaan (2) berikut berubah menjadi

   $4x + 12y = 4$ (3)

   Selanjutnya dilakukan eliminasi persamaan (1) dan (3)

   $4x - 2y = 14$

$$\underline{4x + 12y = 4 -}$$

$$-14y = 10$$

$$y = \frac{10}{14}$$

$$y = \frac{5}{7}$$

Selanjutnya untuk memperoleh penyelesaian variable x maka dilakukan eliminasi kedua

$4x - 2y = 14$ dikali 3

$x + 3y = 1$ dikali 2

menjadi

$12x - 6y = 42$ (4)

$2x + 6y = 2$ (5)

Eliminasi persamaan (4) dan (5)

$$12x - 6y = 42$$

$$\underline{2x + 6y = 2 +}$$

$$14x = 44$$

$$x = \frac{44}{14}$$

$$x = \frac{22}{7}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left(\frac{22}{7}, \frac{5}{7}\right)$

Persamaan linear dua variabel dapat digunakan sebagai suatu cara menyajikan persoalan sehari-hari secara matematika (model matematika).

Contoh :

1. Umur Cindy 7 tahun lebih muda dari umur Rahel. Jumlah umur mereka ialah 43 tahun. Tentukanlah umur mereka masing-masing.

   Jawab :

2. Sebuah taman berbentuk segi empat mempunyai ukuran panjang 8 m lebih panjang dari lebarnya. Jika keliling taman tersebut adalah 44 m, tentukanlah luas taman tersebut!

   Jawab :

   Misalkan

   p : panjang taman

   l : lebar taman

   k : Keliling taman

   maka model matematika dari situasi yang ada diketahui

   $p = 8 + l$ (1)

   $k = 2p + 2l = 44$ (2)

   maka dengan substitusi (1) ke (2) diperoleh

$$44 = 2(8 + l) + 2l$$
$$44 = 16 + 2l + 2l$$
$$44 = 16 + 4l$$
$$4l = 44 - 16$$
$$4l = 28$$
$$l = \frac{28}{4}$$
$$l = 7$$

   maka dengan substitusi nilai $l = 7$ ke persamaan (1) diperoleh bahwa

   $p = 8 + l = 8 + 7 = 15$

3.7 Pertidaksamaan Linear dua variabel

Pertidaksamaan linear dua variable adalah kalimat terbuka matematika yang memuat dua variable, dengan masing-masing variable berderajat satu yang dihubungan dengan tanda ketaksamaan. Tanda ketaksamaan yang dimaksud diantaranya adalah $>, <, \geq,$ dan $\leq$.

Bentuk pertidaksamaan linear dua variable dapat dituliskan sebagai berikut :

$$ax + by > c$$
$$ax + by < c$$
$$ax + by \geq c$$
$$ax + by \leq c$$

Berbeda dengan penyelesaian pada persamaan linear dua variable yang berupa himpunan pasangan terurut dari titik atau jika digambar pada koordinat kartesius berupa garis lurus, penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variable berupa daerah penyelesaian.

Dalam aplikasinya penyelesian pertidaksamaan linear dua variable berupa daerah yang diarsir atau sebaliknya berupa daerah bersih.

Untuk menentukan daerah penyelesaiannya dapat dilakukan seperti langkah-langkah berikut:

1. Ubahlah tanda ketidaksamaan dari pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan, sehingga diperoleh persamaan linear dua variable.
2. Lukis grafik/garis dari persamaan linear dua variable tadi. Hal ini dapat dilakukan dengan menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y dari persamaan atau menggunakan dua titik sembarang yang dilalui oleh garis. Garis akan membagi dua bidang kartesius.
3. Lakukan uji titik yang tidak dilalui oleh garis (substitusi nilai x dan y ke pertidaksamaan). Jika menghasilkan penyataan yang benar, artinya daerah tersebut merupakan penyelesaiannya, namun apabila menghasilkan pernyataan yang salah maka bagian lainnyalah yang merupakan penyelesaiannya.

Selain langkah-langkah diatas, masih terdapat berbagai macam cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan linear yang disesuaikan dengan teknik pemikiran setiap individu yang menyelesaikannya. Tidak menutup keungkinan untuk setiap orang memiliki cara maupun langkah penyelsaian yang berbeda.

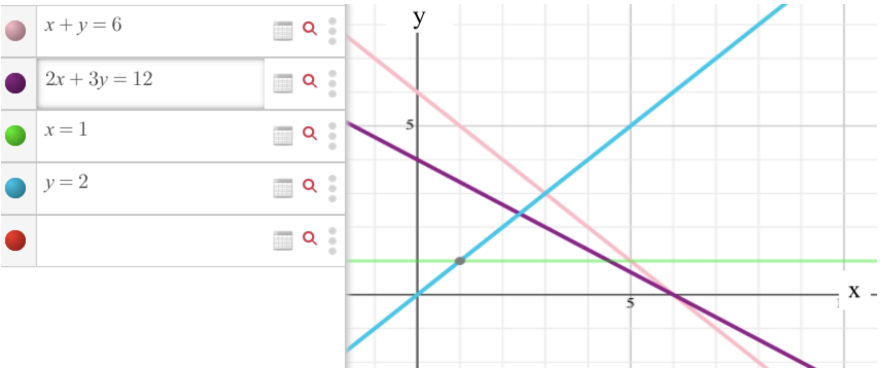
Contoh :

Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear berikut

$x + y \leq 6$, $2x + 3y \leq 12$, dan $x \geq 1$, $y \geq 2$

Jawab :

Langkah pertama adalah dengan menggambar garis $x + y = 6$, $2x + 3y = 12$, dan $x = 1$, $y = 2$.



Gambar 16 Contoh Grafik Pertidaksamaan

Untuk $x + y \leq 6$, kita pilih (0,0), lalu substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$0 + 0 \leq 6$

$0 \leq 6$ (benar), yang berarti dipenuhi.

Sehingga daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat (0,0).

Untuk $2x + 3y \leq 12$, pilih (0,0), lalu kita substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh :

$2(0) + 3(0) \leq 12$

$0 \leq 12$ (benar), yang berarti dipenuhi.

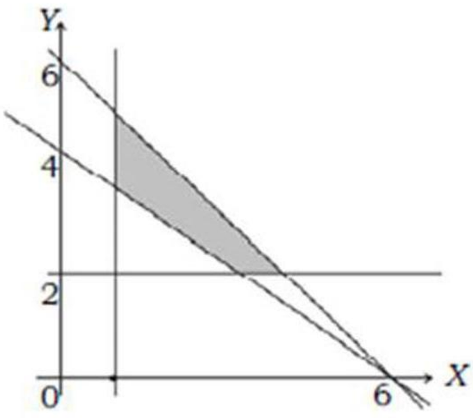
Sehingga dapat kita ketahui daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat (0,0).

Untuk $x \geq 1$, pilih titik $(2,1)$ lalu kita substitusikan ke pertidaksamaan sehingga kita dapatkan $2 \geq 1$ (benar) yang berarti dipenuhi.

Sehinga, daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat titik $(2,1)$.

Untuk $y \geq 2$. Kita pilih titik $(1,3)$ lalu disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga akan kita peroleh $3 \geq 2$ (benar) yang berarti dipenuhi.

Sehingga dapat disimpulka bahwa penyelesaian berada di daerah yang memuat titik $(1,3)$. Daerah himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan tersebut adalah irisan dari ketiga daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan diatas. Seperti yang terlihat pada gambar berikut.



Gambar 17 Daerah penyelesaian

4. **Rangkuman**
   1. Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu.
      Dinotasikan dengan $x = c$.
   2. Prinsip penjumlahan
      Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku
      $a + c = b + c$

$a - c = b - c$

3. Prinsip perkalian

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a. c = b. c$

   $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, benar untuk $c \neq 0$.

4. Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut sebagai persamaan ekuivalen.

5. Prinsip Penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a + c < b + c$ atau $a + c > b + c$

   $a - c < b - c$ atau $a - c > b - c$

6. Prinsip Perkalian

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real positif. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a. c < b. c$ atau $a. c > b. c$

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real negatif.

   Jika $a < b$ maka $a. c \geq b. c$

   atau

   Jika $a > b$ maka $a. c \leq b. c$

7. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $y = mx + c$.

8. Bentuk pertidaksamaan linear dua variable dapat dituliskan sebagai berikut :

   $ax + by > c$

   $ax + by < c$

   $ax + by \geq c$

   $ax + by \leq c$

5. Latihan

1. Seorang tukang parkir mendapat uang sebesar Rp17.000,00 dari 3 buah mobil dan 5 buah motor, sedangkan dari 4 buah mobil dan 2 buah motor ia mendapat uang Rp18.000,00. Jika terdapat 20 mobil dan 30 motor, banyak uang parkir yang diperoleh adalah
2. Di dalam kandang terdapat kambing dan ayam sebanyak 13 ekor. Jika jumlah kaki hewan tersebut 32 2kor, maka jumlah kambing dan ayam masing-masing adalah
3. Tujuh tahun yang lalu umur Ani sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang 2 kali umur Ani sama dengan 5 kali umur Budi ditambah dengan 9 tahun. Umur Budi sekarang adalah....
4. Sebuah toko buku menjual 2 buku gambar dan 8 buku tulis seharga Rp.48.000,00, sedangkan untuk 3 buku gambar dan5 buku tulis seharga Rp.37.000,00. Jika Adi membeli 1 buku gambar dan 2 buku tulis di toko itu, ia harus membayar sebesar…
5. Kakak membeli 2 kg duku dan 1kg manggis dengan harga Rp.12.000,00. Adik membeli 3 kg duku dan 2 kg manggis dengan harga Rp.19.000,00. Jika ibu membeli 4 kg duku dan 5 kg manggis, maka ibu harus membayar ... rupiah

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Jika a dan b memenuhi
   $\begin{cases} \frac{9}{a+2b} + \frac{1}{a-2b} = 2 \\ \frac{9}{a+2b} - \frac{2}{a-2b} = -1 \end{cases}$ maka $a - b^2 =$
2. Diketahui sistem persamaan linear $x + 2y = a$ dan $2x - y = 3$. Jika a merupakan bilangan positif terkecil sehingga persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian bilangan bulat $x = x_0$ dan $y = y_0$, maka nilai $x_0 + y_0$ adalah...
3. Jika penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} (a-2)x + y = 0 \\ x + (a-2)y = 0 \end{cases}$ tidak hanya $x, y = (0,0)$ saja, maka nilai $a^2 - 4a + 3 =$
4. Pada tahun 2001 usia Bayu 7 tahun lebih tua dari usia Andi, sedangkan jumlah umur mereka pada tahun 2007 adalah 43 tahun. Pada tahun 2018 usia Bayu adalah...
5. Diketahui system persamaan $\begin{cases} 4^x + 5^y = 6 \\ 4^{\frac{x}{y}} = 5 \end{cases}$ maka nilai $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$

6. Jika (x_1, y_1) merupakan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $2\square + 5y = 12$ dan $x + 4y = 15$, nilai dari $5x_1 + 3y_1$ adalah...
7. Seorang peternak memelihara dua jenis hewan ternak yaitu kambing dan sapi. Jumlah semua hewan ternaknya adalah 150 ekor. Untuk memberi makan hewan-hewan tersebut setiap harinya, peternak membutuhkan biaya Rp.10.000,00 untuk setiap ekor kambing dan Rp.15.000,00 untuk setiap ekor sapi. Biaya yang dikeluarkan setiap hari untuk memberi makan ternak mencapai Rp.1.850.00,00. Jika x menyatakan banyak kambing dan y menyatakan banyak sapi, model matematika yang tepat untuk permasalahan tersebut adalah...

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke- 6 : Mengusai Persamaan linear tiga variabel
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Persamaan linear tiga variabel. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Persamaan linear tiga variabel. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**
   3.8 Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) merupakan bentuk perluasan dari system persamaan liner dua variabel (SPLDV). Yang mana, pada system persamaan linear tiga variabel terdiri dari tiga persamaan yang masing-masing persamaan memiliki tiga variabel (misal x, y dan z). Dengan begitu bentuk umum dari system persamaan linear tiga variabel dalam x, y dan z dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3 \neq 0$; $b_1, b_2, b_3 \neq 0$; $c_1, c_2, c_3 \neq 0$; $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.

Keterangan :

x, y, z	: variabel
a_1, a_2, a_3	: koefisien variabel x
b_1, b_2, b_3	: koefisien variabel y
c_1, c_2, c_3	: koefisien variabel z
d_1, d_2, d_3	: konstanta persamaan

Terdapat beberapa metode penyelesaian pada system persamaan linear tiga variabel, yaitu metode eliminasi, netode substitusi dan metode gabungan (eliminasi-substitusi).

1. Metode Eliminasi

   Metode eliminasi merupakan cara peyelesaian dengan mengeliminasi atau mengurangkan salah satu variabel. Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode eliminasi, yaitu sebagai berikut:

   1) Eliminasikan persamaan pertama dan kedua atau pertama dan ketiga atau kedua dan ketiga untuk menghilangkan salah satu variabelnya, yaitu x atau y atau z, sehingga menjadi persamaan linear dengan dua variabel.
   2) Ulangi sekali lagi tetapi variasi persamaannya tidak sama dengan langkah (1), sedangkan untuk menghilangkan salah satu variabelnya harus sama dengan langkah (1) sehingga menjadi persamaan linear dua variabel.
   3) Dari langkah (1) dan (2), eliminasikan salah satu variabel sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   4) Ulangi sekali lagi tetapi variasi variabel yang dieliminasi berbeda dengan langkah (3) sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   5) Ulangi langkah (1) sampai langkah (4) tetapi variasi persamaannya tidak sama sehingga diperoleh hasil variabel yang lainnya.
   6) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

   Contoh :

   Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode eliminasi!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Langkah pertama, pilih dua persamaan yang ingin dieliminasi dan hilangkan salah satu variabelnya. Untuk mengeliminasi atau menghilangkan variabelnya, terlebih dahulu membuat koefisien pada variabel yang ingin dieliminasi sama pada kedua persamaan tersebut. Misalkan kita memilih persamaan (1) dan (2) untuk dieliminasi dan variabel z yang ingin dihilangkan. Koefisien pada variabel z pada persamaan (1) adalah 1, sedangkan pada persamaan (2) adalah 2. Untuk menyamakan koefisien pada kedua persamaan tersebut, cukup kita kalikan masing-masing persamaan dengan koefisien yang dimiliki oleh persamaan yang lainnya. Jadi persamaan (1) dikalikan dengan 2 dan persamaan (2) dikalikan dengan 1. Kemudian kita dapat mengurangkan kedua persamaan tersebut untuk memperoleh persamaan (4).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1 \quad \times 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \ \times 1 \qquad -}$

menjadi

$2x - 4y + 2z = 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \ -}$

$-x - 5y = -1$ (4)

Langkah selanjanjutnya, perhatikan bahwa persamaan (4) terdiri atas variabel x dan y. Sekarang kita memerlukan persamaan lain yang mempunyai variabel yang sama dengan persamaan (4). Untuk memperoleh persamaan (5), kita ulangi dengan langkah pertama tetapi dengan variasi persamaan yang berbeda. Misalkan kita memilih persamaan (1) dan (3) untuk dieliminasi dan variabel z yang ingin dihilangkan. Koefisien pada variabel z pada persamaan (1) adalah 1, sedangkan pada persamaan (2) adalah -4. Untuk menyamakan koefisien pada kedua persamaan tersebut, cukup kita kalikan masing-masing persamaan dengan koefisien yang dimiliki oleh persamaan yang lainnya. Jadi persamaan (1) dikalikan dengan -4 dan persamaan (2) dikalikan dengan 1. Kemudian kita dapat mengurangkan kedua persamaan tersebut untuk memperoleh persamaan (5).

Eliminasi Persamaan (1) dan (3)

$x - 2y + z = 1 \qquad \times(-4)$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \qquad \times 1 \quad -}$

menjadi

$-4x + 8y - 4z = -4$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \qquad -}$

$-7x + 2y = -2 \qquad (5)$

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel x.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1 \qquad \times(-7)$

$\underline{-7x + 2y = -2 \quad \times(-1)\ -}$

menjadi

$7x + 35y = 7$

$\underline{7x - 2y = 2 \qquad -}$

$37y = 5$

$$y = \frac{5}{37}$$

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel y.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1 \qquad \times 2$

$\underline{-7x + 2y = -2 \quad \times(-5)\ -}$

menjadi

$-2x - 10y = -2$

$\underline{35x - 10y = 10 \quad -}$

$-37x = -12$

$x = \frac{-12}{-37} = \frac{12}{37}$

Ulangi langkah pertama tetapi variabel yang dihilangkan harus berbeda. Misalkan kita akan menghilangkan variabel x dengan menggunakan persamaan (1) dan (2), maka akan diperoleh persamaan (6).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1 \quad \times 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \;\; \times 1 \qquad -}$

menjadi

$3x - 6y + 3z = 3$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \quad -}$

$7y + z = 0$ (6)

Perhatikan bahwa persamaan (6) terdiri atas variabel y dan z. Sekarang kita memerlukan persamaan lain yang mempunyai variabel yang sama dengan persamaan (6). Untuk memperoleh persamaan (7), kita ulangi dengan langkah sebelumnya tetapi dengan variasi persamaan yang berbeda. Misalkan kita akan menghilangkan variabel x dengan menggunakan persamaan (2) dan (3), maka akan diperoleh persamaan (7).

Eliminasi Persamaan (2) dan (3)

$3x + y + 2z = 3 \qquad \times 3$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \qquad\qquad \times 1 \qquad -}$

menjadi

$3x + y + 2z = 3$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2} \quad -$

$-5y + 6z = 5 \qquad (7)$

Dari persamaan (6) dan (7), misalkan kita hilangkan variabel y

Eliminasi Persamaan (6) dan (7)

$-7y + z = 0 \qquad \times(-5)$

$\underline{-5y + 6z = 5 \qquad \times(-7)} \, -$

menjadi

$35y - 5z = 0$

$\underline{35x - 42z = -35} \quad -$

$37z = 35$

$z = \frac{35}{37}$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$

2. Metode Substitusi

Metode substitusi merupakan cara penyelesaian dengan cara memasukkan salah satu persamaan ke persamaan yang lainnya. Langkah- langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode substitusi, yaitu sebagai berikut:

1) Menyatakan salah satu persamaan dalam bentuk x sebagai fungsi y dan z atau y sebagai fungsi x dan z atau z sebagai fungsi x dan y (pilih yang paling sederhana).
2) Substitusikan langkah (1) ke dalam salah satu persamaan yang lainnya sehingga membentuk persamaan baru yang mengandung dua variabel.
3) Gunakan langkah (2) dengan menyatakan seperti pada langkah (1).

4) Substitusikan langkah ke (2) dan (3) ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai dari salah satu variabel.
5) Jika telah diperoleh nilai dari salah satu variabel maka substitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel yang kedua.
6) Ulangi lagi langkah (5) tetapi mensubstitusikan ke dalam persamaan yang berbeda untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.
7) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode substitusi!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Nyatakan salah satu persamaan ke dalam salah satu bentuk variabel. Misalkan kita ingin menyatakan ke dalam bentuk x sehingga yang memuat variabel y dan z pindahkan ruas ke sisi yang satunya.

$x - 2y + z = 1$ menjadi

$x = 1 + 2y - z$ (4)

Substitusi persamaan (4) ke salah satu persamaan lainnya. Misalkan kita substitusi ke dalam persamaan (2) untuk memperoleh persamaan (5).

$3x + y + 2z = 3$

$3(1 + 2y - z) + y + 2z = 3$

$3 + 6y - 3z + y + 2z = 3$

$3 + 7y - z = 3$

$-z = 3 - 3 - 7y$

$-z = -7y$

$z = 7y$ (5)

Substitusi persamaan (5) ke dalam persamaan (4) untuk memperoleh persamaan (6).

$x = 1 + 2y - z$

$x = 1 + 2y - 7y$

$x = 1 - 5y$ (6)

Substitusi persamaan (5) dan (6) ke salah satu persamaan pada soal. Misalkan kita menggunakan persamaan (3).

$3x + 6y - 4z = -2$

$3(1 - 5y) + 6y - 4(7y) = -2$

$3 - 15y + 6y - 28y = -2$

$3 - 37y = -2$

$-37y = -2 - 3$

$-37y = -5$

$y = -\frac{5}{-37} = \frac{5}{37}$

Substitusi nilai variabel y ke salah satu persamaan, misalkan ke dalam persamaan (6).

$x = 1 - 5y$

$x = 1 - 5\left(\frac{5}{37}\right)$

$x = 1 - \frac{25}{37}$

$x = \frac{37 - 25}{37} = \frac{12}{37}$

Substitusikan nilai variabel x dan y ke salah satu persamaan yang ada pada soal. Misalkan kita menggunakan persamaan (1).

$x - 2y + z = 1$

$\frac{12}{37} - 2\left(\frac{5}{37}\right) + z = 1$

$\frac{12}{37} - \frac{10}{37} + z = 1$

$\frac{2}{37} + z = 1$

$z = 1 - \frac{2}{37}$

$z = \frac{37 - 2}{37} = \frac{35}{37}$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$

3. Metode Gabungan (Eliminasi Substitusi)

Metode gabungan merupakan cara penyelesaian dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan substitusi dengan secara bersamaan. Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode gabungan, yaitu sebagai berikut:

1) Dibuat dua kelompok persamaan yang memungkinkan elimiasi dua persamaan menjadi lebih mudah dan sederhana.
2) Salah satu variabel dari masing-masing kelompok dieliminasikan.
3) Nilai variabel yang diperoleh, disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai-nilai variabel yang lain.

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode gabungan!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Misalkan eliminasi persamaan (1) dan (2) untuk memperoleh persamaan (4).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1$ $\times 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \quad \times 1 \quad -}$

menjadi

$2x - 4y + 2z = 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \quad -}$

$-x - 5y = -1$ (4)

Misalkan eliminasi persamaan (1) dan (3) untuk memperoleh persamaan (5).

Eliminasi Persamaan (1) dan (3)

$x - 2y + z = 1$ $\times(-4)$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \quad \times 1 \quad -}$

menjadi

$-4x + 8y - 4z = -4$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \quad -}$

$-7x + 2y = -2$ (5)

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel y.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1$ $\times 2$

$\underline{-7x + 2y = -2 \quad \times(-5) \, -}$

menjadi

$-2x - 10y = -2$

$\underline{35x - 10y = 10 \quad -}$

$-37x = -12$

$x = -\frac{12}{-37} = \frac{12}{37}$

Misalkan substitusi nilai variabel x ke dalam persamaan (4)

$-x - 5y = -1$

$-\frac{12}{37} - 5y = -1$

$-5y = -1 + \frac{12}{37}$

$-5y = \frac{-37 + 12}{37}$

$-5y = -\frac{25}{37}$

$y = -\frac{25}{37(-5)}$

$y = \frac{5}{37}$

Misalkan substitusi nilai variabel x dan y ke dalam persamaan (1)

$x - 2y + z = 1$

$\frac{12}{37} - 2\left(\frac{5}{37}\right) + z = 1$

$\frac{12}{37} - \frac{10}{37} + z = 1$

$\frac{2}{37} + z = 1$

$z = 1 - \frac{2}{37}$

$z = \frac{37 - 2}{37} = \frac{35}{37}$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$

4. Rangkuman

1) bentuk umum dari system persamaan linear tiga variabel dalam x, y dan z dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3 \neq 0$; $b_1, b_2, b_3 \neq 0$; $c_1, c_2, c_3 \neq 0$; $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.

2) Metode penyelesaian pada system persamaan linear tiga variabel, yaitu metode eliminasi, netode substitusi dan metode gabungan (eliminasi-substitusi).

   a. Metode eliminasi merupakan cara peyelesaian dengan mengeliminasi atau mengurangkan salah satu variabel. Langkah-langkahnya :

      1) Eliminasikan persamaan pertama dan kedua atau pertama dan ketiga atau kedua dan ketiga untuk menghilangkan salah satu variabelnya, yaitu x atau y atau z, sehingga menjadi persamaan linear dengan dua variabel.
      2) Ulangi sekali lagi tetapi variasi persamaannya tidak sama dengan langkah (1), sedangkan untuk menghilangkan salah satu variabelnya harus sama dengan langkah (1) sehingga menjadi persamaan linear dua variabel.
      3) Dari langkah (1) dan (2), eliminasikan salah satu variabel sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
      4) Ulangi sekali lagi tetapi variasi variabel yang dieliminasi berbeda dengan langkah (3) sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.

5) Ulangi langkah (1) sampai langkah (4) tetapi variasi persamaannya tidak sama sehingga diperoleh hasil variabel yang lainnya.
6) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

b. Metode Substitusi merupakan cara penyelesaian dengan cara memasukkan salah satu persamaan ke persamaan yang lainnya. Langkah- langkahnya :
   1) Menyatakan salah satu persamaan dalam bentuk x sebagai fungsi y dan z atau y sebagai fungsi x dan z atau z sebagai fungsi x dan y (pilih yang paling sederhana).
   2) Substitusikan langkah (1) ke dalam salah satu persamaan yang lainnya sehingga membentuk persamaan baru yang mengandung dua variabel.
   3) Gunakan langkah (2) dengan menyatakan seperti pada langkah (1).
   4) Substitusikan langkah ke (2) dan (3) ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai dari salah satu variabel.
   5) Jika telah diperoleh nilai dari salah satu variabel maka substitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel yang kedua.
   6) Ulangi lagi langkah (5) tetapi mensubstitusikan ke dalam persamaan yang berbeda untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.
   7) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

c. Metode Gabungan (Eliminasi Substitusi) merupakan cara penyelesaian dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan substitusi dengan secara bersamaan. Langkah-langkahnya:
   1) Dibuat dua kelompok persamaan yang memungkinkan elimiasi dua persamaan menjadi lebih mudah dan sederhana.

2) Salah satu variabel dari masing-masing kelompok dieliminasikan.
3) Nilai variabel yang diperoleh, disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai-nilai variabel yang lain.

5. Latihan

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut.
$$2x + 5y - 3z = 3$$
$$6x + 8y - 5z = 7$$
$$-3x + 3y + 4z = 15$$
2. Cari tahulah penyelesaian SPLTV dengan menggunakan Matriks! Tentukanlan Penyelesaian persamaan berikut dengan metode matriks.
$$5x - 3y + 2z = 3$$
$$8x - 5y + 6z = 7$$
$$3x + 4y - 3z = 15$$
3. Toko alat tulis Pak Rudi menjual alat tulis berisi buku, spidol, dan tinta dalam 3 jenis paket sebagai berikut.
Paket A: 3 buku, 1 spidol, 2 tinta seharga Rp 17.200
Paket B: 2 buku, 2 spidol, 3 tinta seharga Rp19.700
Paket C: 1 buku, 2 spidol, 2 tinta seharga Rp14.000
Hitunglah harga 1 buah masing-masing item !
4. 3 bersaudara Lia, Ria, dan, Via berbelanja di toko buah. Mereka membeli Apel, Jambu, dan Mangga dengan hasil masing-masing sebagai berikut:
Lia membeli dua buah Apel, satu buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp47.000
Ria membeli satu buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp43.000
Via membelli tiga buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp71.000
Berapa harga 1 buah Apel, 1 buah Jambu, dan 1 buah Mangga?
5. Pak budi memiliki toko kelontong yang menjual campuran beras A, beras B dan beras C yang dijual dengan klasifikasi berikut :
   i. Campuran 3 kg beras A, 2 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual seharga Rp19.700,00.
   ii. Campuran 2 kg beras A, 1 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual Rp14.000.

iii. Campuran 2 kg beras A, 3 kg beras B, dan 1 kg beras C dijual seharga Rp17.200,00.

Hitunglah harga tiap kg beras A, B, dan C ?

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Selesaikan persamaan di bawah ini dengan metode eliminasi dan substitusi ? Kemudian tentukanlah nilai dari $x + y + z$

$$x + y - z = -3$$
$$x + 2\square + z = 7$$
$$2x + y + z = 4$$

2. Diketahui sistem persamaan linear

$$3x - 2y - 3z = 5$$
$$x + y - 2z = 3$$
$$x - y + z = -4$$

jika $\{(x_0, y_0, z_0)\}$ memenuhi persamaan diatas, maka nilai $z_0 =$

3. Perhatikan system persamaan linear tiga variabel berikut

$$x + 5y + 2z = -a - b - c$$
$$3x - y + 4z = 5a + b$$
$$2x + y + 5z = 6a + 1$$

jika himpunan penyelesaian system persamaan tersebut adalah $\{(-2. -3.4)\}$ maka nilai $2a + b + 3c =$

4. Perhatikan system persamaan linear berikut

$$ax + y + 2z = 5$$
$$bx - y + 3z = 3$$
$$cx - y + z = -1$$

jika $a + b = 7$ dan $a + c = 5$ maka nilai $12x + 8z =$

5. Pada suatu hari, tiga sahabat yang bernama Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Mereka membeli buku tulis, pensil dan penghapus. Hasil belanja mereka di toko buku adalah sebagai berikut :

   i. Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.700

   ii. Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.300

   iii. Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp7.100

Berapa harga untuk sebuah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus ?

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul tiga ini menuntun mahasiswa memahami materi Persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari yang sesuai dengan soal-soal pada latihan dan evaluasi pembelajaran diatas.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

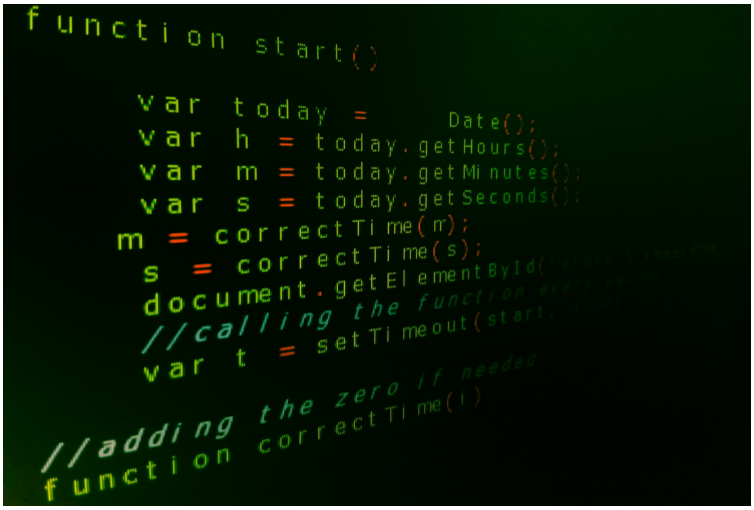
Persamaan linear variabel substitusi Eliminasi

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 4 FUNGSI



Make a dream when you're wake up. Take a risk and realize your dream.

_SCP

Pendidikan Matematika FKIP UKI

MODUL 4 FUNGSI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Salah satu konsep dalam matematika yang paling penting adalah konsep fungsi. Dengan konsep fungsi, para matematikawan maupun para ahli di bidang yang lain dengan jelas dapat mengetahui apakah suatu struktur identik dengan struktur yang lain. Dan hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi dalam pengembangannya.

   Fungsi linear dan fungsi kuadrat merupakan salah satu fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan. Banyak masalah sehari-hari menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat.

   Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang diba- yarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari- jarinya dan se- bagainya.

   Pada modul ini akan dibahas terkait dengan fungsi, jenis-jenisnya dan berbagai macam bentuk penyelesaiannya.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Empat

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

   Keterampilan Umum

   KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan

teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus
KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan
P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan
   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi
   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep dasar perkalian berulang dan penjumlahan

berulang. Selain itu juga diperlukan pemahaman tentang persamaan dan pertidaksamaan linear yang telah dibahas di modul sebelumnya.

5. Kegunaan Modul Satu

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi fungsi dan berbagai bentuk persamaan fungsi. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada fungsi untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian fungsi, sifat fungsi yaitu surjektif, injektif dan bijektif, Grafik fungsi, Jenis-jenis fungsi seperti fungsi konstan, fungsi linear, fungsi identitas, fungsi kuadrat, fungsi tangga, fungsi mutlak, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi naik dan fungsi turun, fungsi berpangkat, fungsi polynomial, fungsi rasional, fungsi aljabar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma. Selanjutnya juga memuat tentang operasi pada fungsi dan fungsi komposisi, dan pergeseran grafik fungsi.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 7 : Menguasai konsep Fungsi dan jenis-jenisnya.

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Fungsi dan jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

4.1 Pengertian

Fungsi adalah sebuah alat untuk menggambarkan fakta yang ada dalam ben- tuk matematika. sebuah fungsi dapat direpresentasikan dengan persamaan, grafik, tabel, atau penjelasan verbal; dimana keempat representasi tersebut kita gunakan pada bab ini.

Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang diba- yarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari-jarinya dan sebagainya. Dalam hal ini, nilai dari satu variabel misalkan y bergantung pada nilai dari variabel lainnya yang bisa disebut sebagai x. Biasanya kita baca "y adalah sebuah fungsi dari x" yang dinotasikan dengan

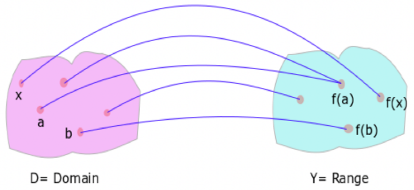
$$y = f(x)$$

notasi diatas menunjukkan y sebagai sebuah fungsi dengan x sebagai variabel bebas ($Independent\ variable$) yang merepresentasikan nilai masukan ke f dan y adalah variabel terikat ($dependent\ variable$) yang merepresentasikan nilai keluaran dari f di x.

Definisi 1.

> Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.

Himpunan D disebut sebagai daerah asal atau domain dan setiap nilai $f(x)$ pada himpunan Y disebut sebagai daerah hasil atau range. Dalam hal ini daerah hasil mungkin tidka semua elemen pada himpunan Y . Sebuah fungsi dapat direpresentasikan seperti dua gambar berikut ini.



(a) Fungsi seperti sebuah mesin (b) Fungsi sebagai Pemetaan dari D ke Y

Gambar 18 Representasi sebuah fungsi

Berikut ini contoh fungsi beserta dengan domain dan range nya

Fungsi	**Domain**	**Range**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1,1]$	$[0,1)$

Dari tabel diatas dapat kita ketahui bahwa

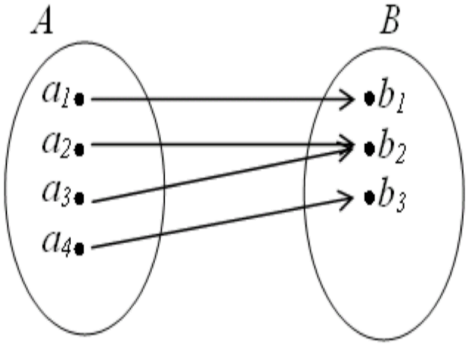
1. Fungsi $y = x^2$ menunjukkan bahwa pemetaan dari $x \in R$ adalah $y \in R$ sehingga domainnya adalah $(-\infty, \infty)$. Daerah hasil dari fungsi $y = x^2$ adalah $[0, \infty)$ karena pangkat dari bilangan riil adalah bilangan positif dan setiap bilangan positif adalah kuadrat dari akarnya sendiri ditulis dengan $y = (y)^2$ untuk $y \geq 0$.
2. Fungsi $y = \frac{1}{x}$ menggambarkan nilai $y \in R$ kecuali pada $x = 0$. Berdasarkan x konsistensi formula pada aritmatika, kita tidak bisa membagi bilangan dengan nol. Sehingga domain dari $y = \frac{1}{x}$ adalah semua bilangan riil kecuali nol dituliskan dengan $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Selanjutnya daerah hasil dari $y = \frac{1}{x}$ adalah semua bilangan riil bukan nol juga karena $y = \frac{1}{x}$. Dengan demikian Rangenya adalah $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
3. Fungsi $y = \sqrt{x}$ memberikan nilai $y \in R$ jika $x \geq 0$. Selanjutnya range dari $y = \sqrt{x}$ adalah $[0, \infty)$karena setiap bilangan positif merupakan beberapa akar dari bilangan (akar dari pangkat bilangan itu sendiri).
4. Pada fungsi $y = \sqrt{4 - x}$, nilai $4 - x$ tidak boleh bernilai negatif. Sehingga $4 - x \geq 0$ atau $x \leq 4$, dimana $y \in R$ untuk semua $x \leq 4$. Range dari $\sqrt{4 - x}$ adalah semua himpunan bilangan positif dituliskan dengan $[0, \infty)$.
5. Fungsi $y = \sqrt{1 - x^2}$ memberikan nilai $y \in R$ untuk x diantara -1 sampai 1. Selain itu maka nilai $1 - x^2$ akan bernilai imajiner. Sehingga daerah hasil atau range dari $\sqrt{1 - x^2}$ adalah [0,1).

4.2 Sifat Fungsi

Secara umum fungsi mempunyai beberap a sifat yang berguna untuk menentukan syarat pada komposisi fungsi dan invers fungsi. Setidaknya ada tiga sifat fungsi dalam matematika antara lain yaitu fungsi pada atau surjektif (onto), fungsi satu-satu atau injektif dan fungsi satu-satu pada atau bijektif (koresponden).

1. Fungsi Surjektif (Pada)

   Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.



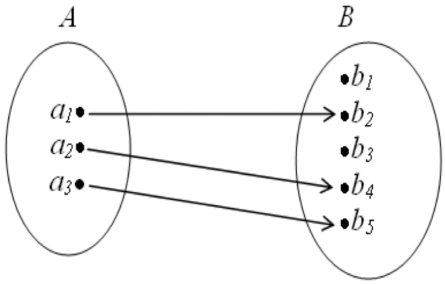
Gambar 19 Fungsi Surjektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan hasil pemetaan $f(A) = \{(1, c), (2, b), (3, a), (4, a)\}$. Sehingga dapat diperoleh bahwa daerah hasil atau range dari fungsi f adalah $R_f = \{a, b, c\}$ dan $R_f = B$. Jadi fungsi ini termasuk fungsi surjektif atau fungsi onto atau disebut juga dengan fungsi pada.

2. Fugsi Injektif (satu-satu)

Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.



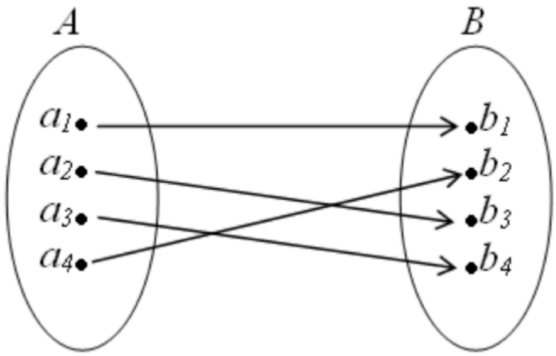
Gambar 20 Fungsi Injektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, a), (2, d), (3, b)\}$. Dapat diketahui bahwa setiap anggota A yang berbeda memiliki peta yang berbeda, atau pasangan yang berbeda. Jadi fungsi f ini termasuk fungsi injektif atau fungsi satu-satu.

3. Fungsi Bijektif (Saru-satu Pada)

   Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.



Gambar 21 Fungsi Bijektif

   Contoh :

   Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$. Dapat diketahui bahwa fungsi f termasuk fungsi surjektif dan fungsi injektif. Fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

4.3 Grafik Fungsi

Grafik sebuah fungsi adalah sebuah representasi visual dari sifat sebuah fungsi pada diagram x- y. Grafik bisa membantu kita memahami aspek-aspek berbeda dari sebuah fungsi, yang bisa jadi sulit dipahami dengan hanya melihat fungsi itu sendiri.

Berikut ini langkah-langkah menggambar grafik fungsi:

1. Langkah pertama

   Buatlah terlebih dahulu analisis pendahuluan yang meliputi:

   - Menentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu-sumbu koordinat (jika koordinat itu gampang ditentukan)
     - i. Titik potong dengan sumbu x, dengan mengambil syarat $y = 0$.
     - ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil syarat $x = 0$.

- Tentukan interval-interval saat fungsi itu nait dan saat fungsi itu turun.
- Tentukan titik-titik stationer serta jenisnya : titik balik maksimum, titik balik minimum, atatu titik belok horizontal.
- Tentukan nilai-nilai fungsi pada ujung-ujung interval. Jika kurva itu akan digambarkan untuk semua bilangan real, maka perlu ditentukan nilai-nilai y untuk nilai x yang besar positif dan untuk nilai x yang besar negative.
- Tentukanlah beberapa titik tertentu untuk memperhalus denah kurva.

2. Langkah kedua

   Dari langkah pertama, titik-titik yang didapat kita sajikan dalam bidang kartesius.
3. Langkah ketiga

   Titik-titik yang telah disajikan dalam bidang kartesius pada langkah kedua, lalu kita hubungkan dengan mempertimbangkan naik atau turunnya fungsi. Dengan demikian kita akan mendapat kurva $y = f(x)$.

Contoh :

Gambarlah denah kurva dari fungsi $f(x) = 4x - x^3$

Jawab :

Langkah pertama

1. Koordinat titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat.

   i. Titik potong dengan sumbu x, dengan engambil $y = 0$.

   $$4x - x^3 = 0$$
   $$x(4 - x^2) = 0$$
   $$x(2 + x)(2 - x) = 0$$

   $x_1 = 0$, atau $x_2 = -2$ atau $x_3 = 2$

   titik-titik potong dengan sumbu x adalah $(-2,0)$, $(0,0)$ dan $(2,0)$.

   ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil $x = 0$ diperoleh :

   $$y = 4(0) - (0)^3 = 0$$

   titik potong sumbu y adalah $(0,0)$
2. Dari $f(x) = 4x - x^3$ maka turunan pertamanya adalah $f'(x) = 4 - 3x^2$ (Materi turunan dapat dilihat pada modul turunan)

   $f(x)$ naik bila $f'(x) > 0$

$4 - 3x^2 > 0$

$3x^2 < 4$

$-\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$f(x)$ turun bila $f'(x) < 0$

$4 - 3x^2 < 0$

$3x^2 > 4$

$x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ atau $x > \frac{2}{3}\sqrt{3}$

3. Nilai-nilai stationernya :

   Untuk $x_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$. Dalam hal ini $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik minimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif saat melewati $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

   Untuk $x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = \frac{16}{9}\sqrt{3}$. Dalam hal ini $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik maksimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif saat melewati $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

   Sehingga titik balik maksimumnya $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimumnya $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$.

4. Untuk x besar maka $y = f(x) = 4x - x^3$ akrab dengan – x^3

   Jika x besar positif, maka y besar negatif

   Jika y besar negative, maka x besar positif

5. Ambil beberapa titik tertentu untuk memperbaiki denah kurva

   $x = -3$ maka $y = f(-3) = 4(-3) - (-3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-3,15)$.

   $x = -1$ maka $y = f(-1) = 4(-1) - (-1)^3 = -3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-1,-3)$.

   $x = 1$ maka $y = f(1) = 4(1) - (1)^3 = 3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(1,3)$.

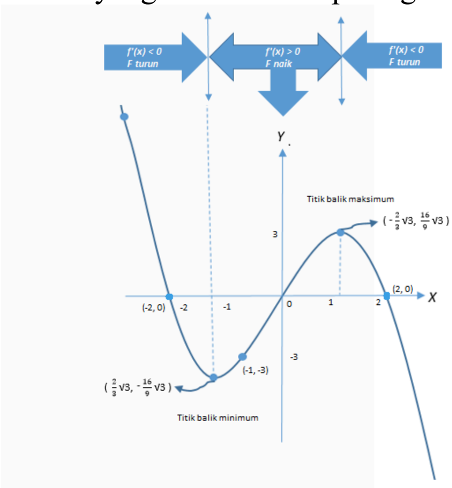
   $x = 3$ maka $y = f(3) = 4(3) - (3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(3,15)$.

Langkah kedua

Beberapa titik yang diperoleh pada langkah pertama diletakkan pada bidang kartesius.

Langkah ketiga

Titik-titik yang telah disajikan pada bidang kartesius itu dihubungkan untuk memperoleh denah kurva yang mulus ibarat pada gambar dibawah ini.



Gambar 22 Grafik Fungsi

untuk memudahkan kita dalam menggambar grafik dari berbagai bentuk fungsi, maka dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa aplikasi yaitu seperti MathLab, Maple, Symbolab dan lain sebagainya.

Beberapa bentuk fungsi yang digambar menggunakan symbolab dapat kita lihat pada jenis-jenis fungsi berikut.

4.4 Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi Konstan (Fungsi Tetap)

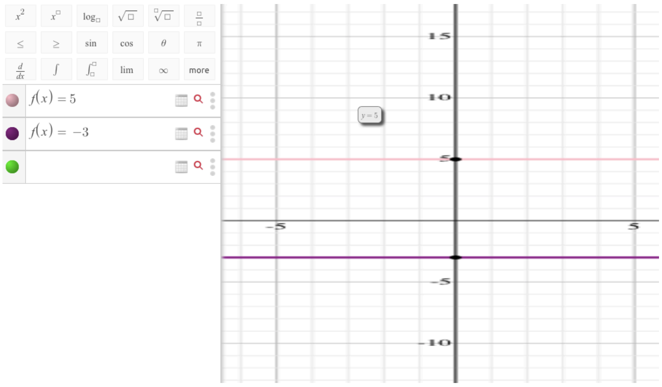
   Suatu fungsi $f: A \to B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.

   Contoh :

   $f(x) = 5$

   $f(x) = -3$

   yang direpresentasikan seperti pada gambar berikut.



Gambar 23 Fungsi Konstan

2. Fungsi Linear

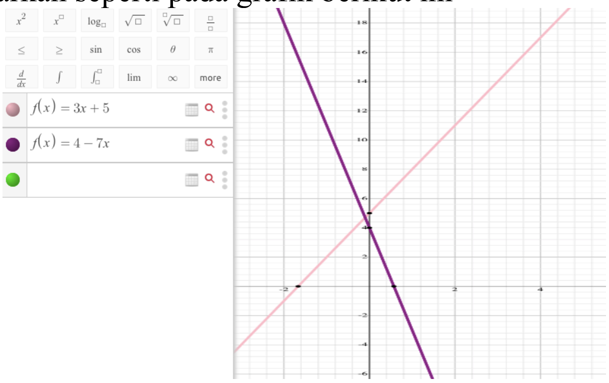
   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.

   Contoh :

   $f(x) = 3x + 5$

   $f(x) = 4 - 7x$

   yang digambarkan seperti pada grafik berikut ini



Gambar 24 Fungsi Linear

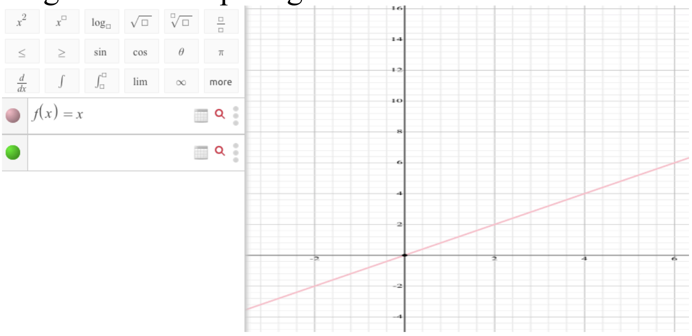
3. Fungsi Identitas

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama.

Contoh :

$$f(x) = x$$

yang dapat digambarkan seperti grafik berikut ini.



Gambar 25 Fungsi Identitas

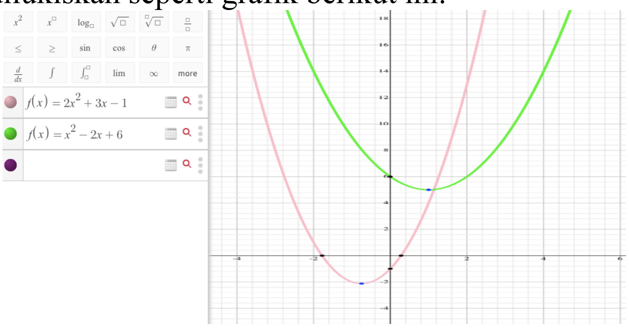
4. Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.

Contoh :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$
$$f(x) = x^2 - 2x + 6$$

yang dapat dilukiskan seperti grafik berikut ini.



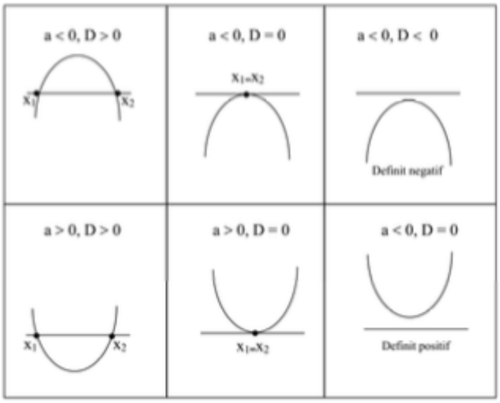
Gambar 26 Fungsi Kuadrat

Pada fungsi kuadrat biasanya disebut dengan persamaan kuadrat ini dapat dilakukan perhitungan pada beberapa titik penting yaitu pada sumbu simetri fungsi yaitu dirumuskan dengan $x = -\frac{b}{2a}$.

Selanjutnya untuk menentukan titik puncak nya dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut:

$x = -\frac{b}{2a}$ dan $y = -\frac{D}{4a}$ dimana $D = b^2 - 4ac$.

jika ditinjau dari nilai a dan D maka grafik parabola yang terbentuk seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 27 Grafik Parabola

5. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah)

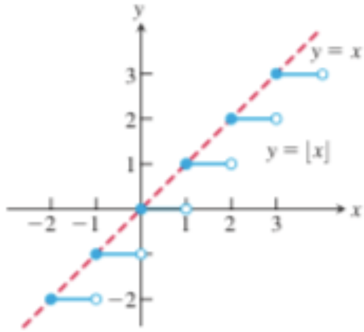
Suatu fungsi disebut sebagai fungsi tangga apabila grafik fungsi $f(x)$ berbentuk interval-interval yang sejajar. Fungsi batas bawah adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan kebawah yang dinotasikan dengan $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Fungsi batas atas adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan atas yang dinotasikan dengan $f(x) = \lceil x \rceil$.

Contoh :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$
$$f(x) = \lceil x \rceil$$

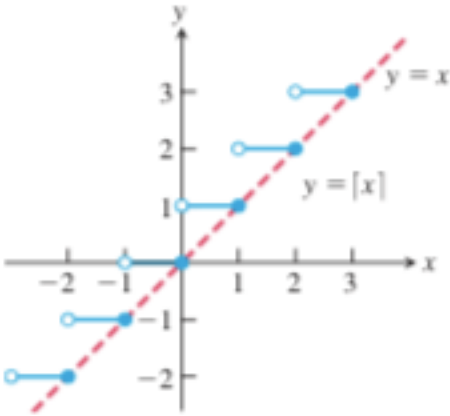
seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 28 Fungsi batas bawah

$\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$ $\lfloor 0.2 \rfloor = 2$

$\lfloor -1.2 \rfloor = -2$ $\lfloor -0.3 \rfloor = -1$ $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ $\lceil -2 \rceil = -2$



Gambar 29 Fungsi batas atas

$\lceil 2.4 \rceil = 3$ $\lceil 1.9 \rceil = 2$ $\lceil 0.2 \rceil = 1$

$\lceil -1.2 \rceil = -1$ $\lceil -0.3 \rceil = 0$ $\lceil 3.6 \rceil = 4$ $\lceil -2 \rceil = -2$

6. Fungsi Mutlak (modulus)

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi modulus (mutlak) apabila fungsi ini memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur harga mutlaknya.

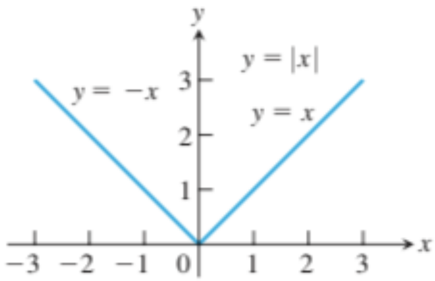
   $f: x \to |x|$ atau $f: x \to |ax + b|$

   $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.

Contoh :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

yang tampak seperti pada grafik berikut.



Gambar 30 Fungsi mutlak

7. Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil. Biasannya grafik fungsi genap adalah simetri pada sumbu y. Sedangkan grafik fungsi ganjil adalah simetri pada titik normal (0,0).

   Contoh :

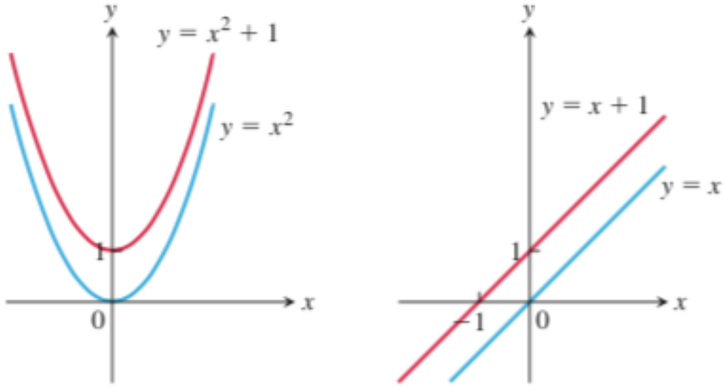
   $f(x) = x^2$ adalah Fungsi genap karena $(-x)^2 = x^2$ untuk semua x, yaitu simetri disumbu y.

   $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi genap $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ untuk semua x, yaitu simetri di sumbu y.

   $f(x) = x$ adalah fungsi ganjil $(-x) = -x$ untuk semua x, yaitu simetri di titik normal.

   $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Ganjil karena $f(-x) = -x + 1$ namun $-f(x) = -x - 1$. Sehingga $f(-x) \neq -f(x)$.

   $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Genap karena $(-x) + 1 \neq x + 1$ untuk semua x.



Gambar 31 Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

8. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

   Jika sebuah grafik fungsi menanjak atau naik dari kiri kekanan, kita sebut sebagai fungsi naik (increasing). Jika sebuah grafik dari fungsi menurun dari kiri ke kanan disebut fungsi turun (decreasing).

   Misalnya f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval I dan diketahui x_1 dan x_2 berada pada interval I. Maka

   i. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.

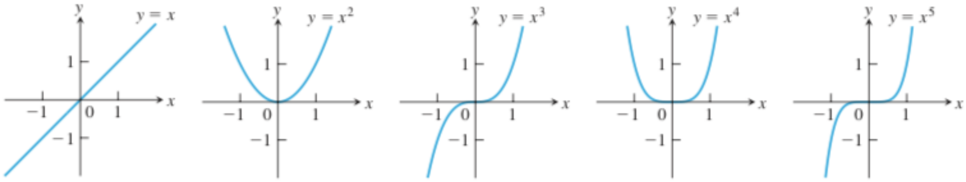
   ii. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.

9. Fungsi Berpangkat

   Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat. Berikut beberapa kasus fungsi berpangkat.

   i. $a = n$, bilangan bulat positif

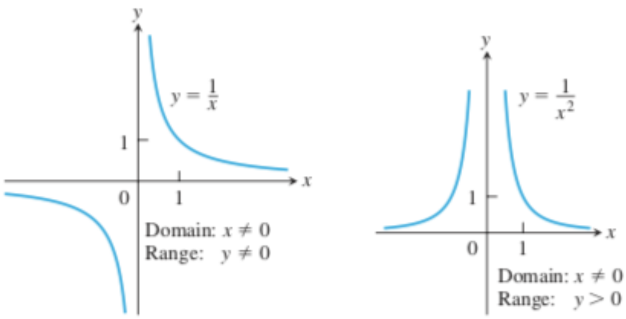
      Grafik fungsi $f(x) = x^n$, untuk $n = 1,2,3,4,5$, dapat dilihat seperti pada gambar dibawah. Untuk semua fungsi yang didefinisikan, dapat kita perhatikan pola grafik yang terbentuk yaitu kurva yang terbentuk melandai mendekati sumbu x.



Gambar 32 Fungsi berpangkat n

ii. $a = -1$ atau $a = -2$

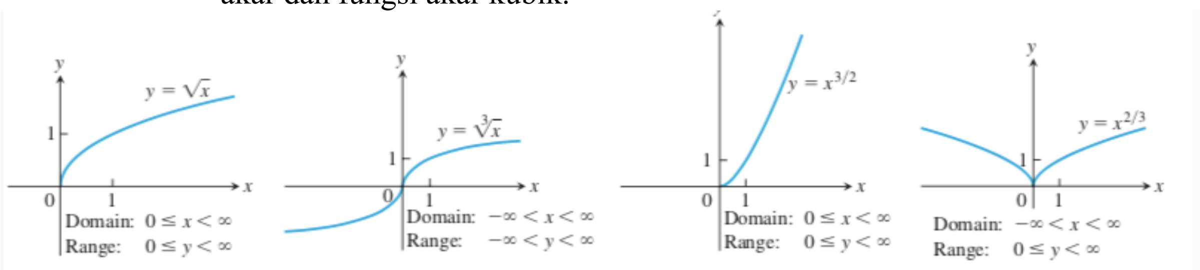
Grafik fungsi $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ dapat direpresentasikan seperti gambar berikut. Fungsi ini didefinisikan untuk semua $x \neq 0$



Gambar 33 fungsi berpangkat -1 dan -2

iii. $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$, dan $\frac{2}{3}$

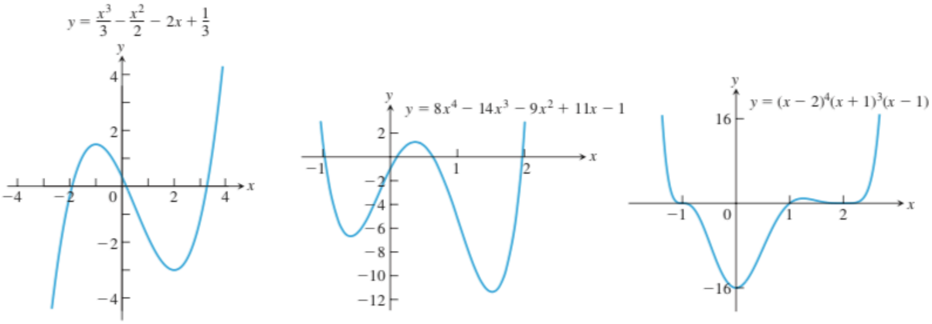
Fungsi $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ merupakan fungsi akar dan fungsi akar kubik.



Gambar 34 Fungsi berpangkat pecahan

10. Fungsi Polinomial (Suku Banyak)

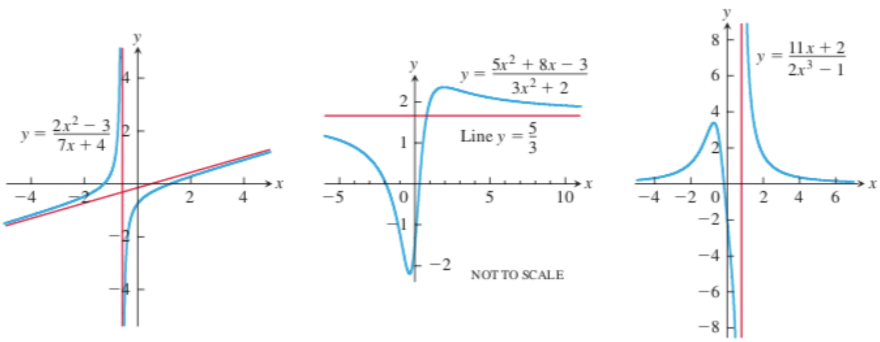
Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta. Jika $a_n \neq 0$ dan $n > 0$, maka n disebut sebagai derajat polynomial. Fungsi linear dengan $m \neq 0$ disebut sebagai polynomial dengan derajat 1. Derajat dua disebut sebagai fungsi kuadrat dan derajat tiga disebut sabagai fungsi kubik.



Gambar 35 Fungsi Polinomial

11. Fungsi Rasional

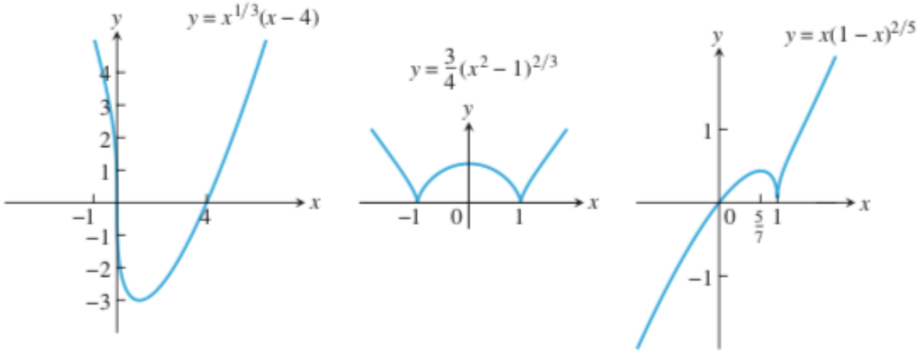
Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Domain dari fungsi rasional adalah himpunan bilangan riil x dimana $q(x) \neq 0$. Berikut beberapa grafik fungsi rasional.



Gambar 36 Fungsi Rasional

12. Fungsi Aljabar

Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, pengurangan dan akar. Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi aljabar.

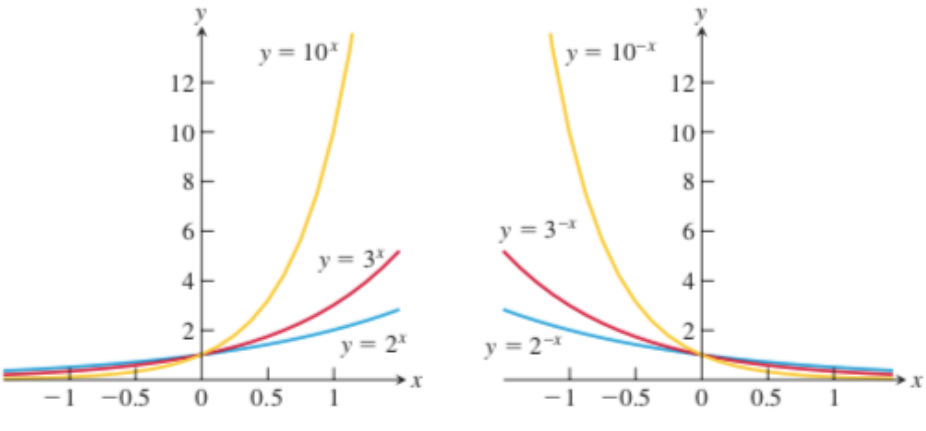


Gambar 37 Fungsi Aljabar

13. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.

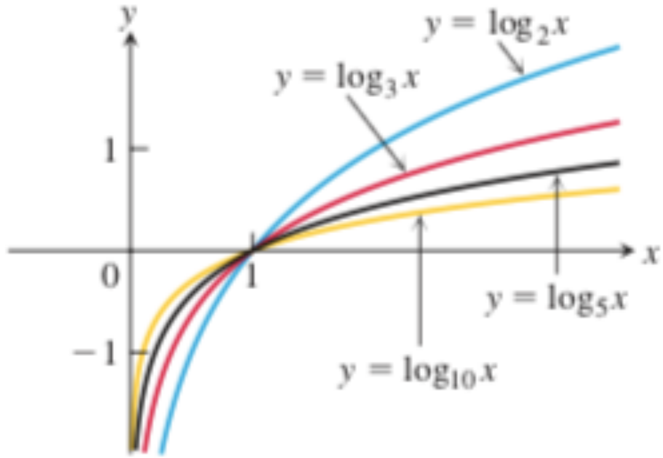
Fungsi eksponensial memiliki domain $(-\infty, \infty)$ dan range $(0, \infty)$ sehingga fungsi eksponensial tidak pernah diasumsikan bernilai 0. Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi eksponensial.



Gambar 38 Fungsi eksponensial

14. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif. Berikut ini beberapa grafik fungsi logaritma



Gambar 39 Fungsi logaritma

4. Rangkuman

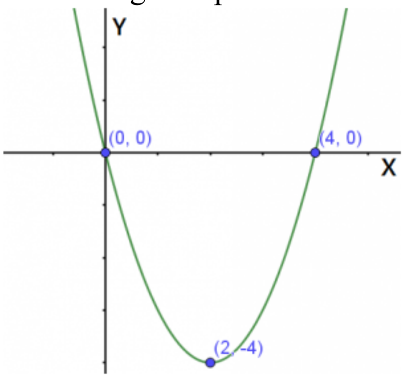
1. Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.
2. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.
3. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.
4. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.
5. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi

delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.

6. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.
7. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.
8. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.
9. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah), $f(x) = \lfloor x \rfloor$ dan $f(x) = \lceil x \rceil$.
10. Fungsi Mutlak (modulus), $f: x \to |x|$ atau $f: x \to |ax + b|$ dimana $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.
11. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.
12. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.
13. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.
14. Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat.
15. Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta.
16. Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
17. Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar.
18. Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.
19. Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif.

5. Latihan

1. Diantara diagram panah fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif dan bijektif? Jelaskan!
2. Suatu fungsi $f: R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 2$
   a. Tentukan $f(-1)$, $f(a)$ dan $f(1)$
   b. Tentukan a jika $f(a) = 23$
   c. Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 34?
3. Tentukanlah persamaan garis yang melalui
   a. Titik $M(1,2)$ dan $N(-1,6)$
   b. Titik $(-2,3)$ dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu x positif.
4. Tentukan persamaan garis I yang melalui $R(3,1)$ dan tegak lurus garis AB dimana titik $A(2,3)$ dan $B(6,5)$.
5. Koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 + 2kx + k + 5$ adalah (m, m). Nilai $k + m =$
6. Persamaan grafik parabola dibawah ini adalah

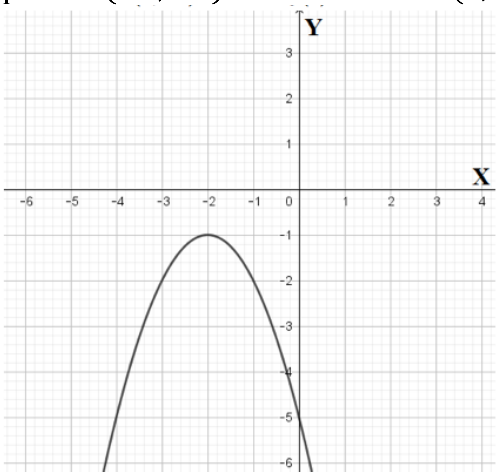


7. Jika f adalah fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(1,0)$, $(4,0)$, dan $(0,-4)$ maka nilai dari $f(7) =$
8. Diketahui fungsi $f(x) = (a+1)x^2 - 2ax + (a-2)$ definit negative. Nilai a yang memenuhi adalah
9. Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + 6x + a$ mempunyai sumbu simetri $x = 3$, maka nilai maksimum fungsi tersebut adalah
10. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 7x + 2 = 0$ adalah r dan s. Tentukan hasil dari $\frac{r}{(r^2+1)^2} + \frac{s}{(s^2+1)^2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah domain dan range dari fungsi berikut
   a. $f(x) = x^3$
   b. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$
   c. $f(x) = \tan x$
   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

2. Fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(-1,3)$ dan titik baliknya sama dengan titik balik dari grafik $f(x) = x^2 + 4x + 3$ adalah
3. Jika grafik $f(x) = ax^2 + (2a + 6)x + 2a - 2$ menyinggung sumbu x, maka koordinat titik balik maksimumnya adalah
4. Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + x + p$ menyinggung garis $3x + y = 1$ dengan $p > 0$, maka nilai p yang memenuhi adalah
5. Garfik fungsi $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + m + 3$ seluruhnya diatas sumbu x. interval nilai m yang memenuhi adalah
6. Jika p dan q merupakan akar-akar persamaan $x^2 - x + 1 = 0$, nilai dari $p^{2017} + q^{2017}$ adalah
7. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$, maka hasil dari $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 + x_2$ adalah
8. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$, carilah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{x_1^2-1}{2x_1}$ dan $\frac{2x_2}{x_2^2-1}$.
9. Bila m dan n merupakan akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 2x + 1 = 0$, carilah nilai dari $(1 + m^2 + m^3 + \cdots)(1 + n^2 + n^3 + \cdots)$
10. Jika gambar dibawah ini merupakan grafik fungsi kuadrat f dengan titik puncak $(-2, -1)$ dan melalui titik $(0, -5)$, maka nilai $f(2)$ adalah



7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke- 8 : Menguasai Konsep Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

4.5 Operasi Pada Fungsi

Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f+g, f-g$ dan fg seperti

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

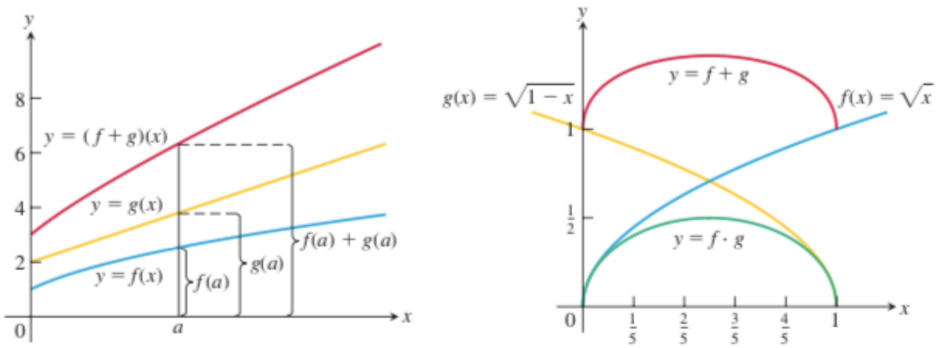
Contoh :

Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \sqrt{1-x}$ dengan $D(f) = [0, \infty)$ dan $D(g) = (-\infty, 1]$. Maka Domain dari fungsi tersebut dapat diperoleh secara umum $[0, \infty) \cap (-\infty, 1]$

Fungsi yang terbentuk dengan menggunakan operasi aljabar adalah sebagai berikut

Fungsi	Rumus	Domain
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f.g$	$(f.g)(x)=f(x)g(x)$ $=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
f/g	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ kecuali $x=1$
g/f	$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ kecuali $x=0$

Grafik pada operasi fungsi tersebut dapat digambarkan seperti pada grafik berikut ini.



Gambar 40 Operasi pada fungsi

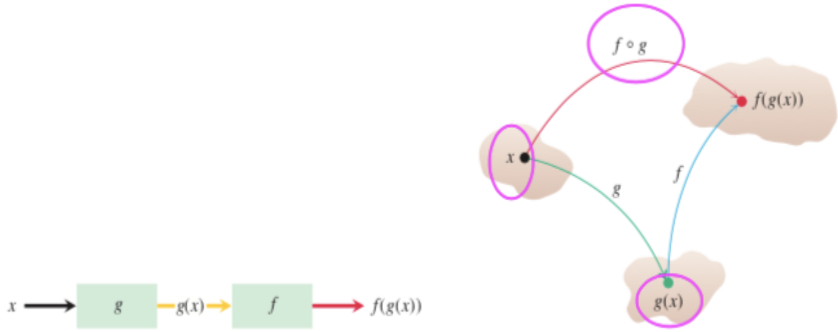
4.5 Fungsi Komposisi

Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.

Berdasarkan definisi diatas diperoleh bahwa $f \circ g$ dapat dibentuk ketika range dari g berada di domain f. Untuk menentukan $(f \circ g)(x)$, maka pertama ditentukan $g(x)$ dan kemudian menentukan $f\big(g(x)\big)$. Fungsi komposisi ini dapat di ilustrasikan seperti tampak pada diagram mesin berikut.



Gambar 41 Fungsi komposisi

Contoh :

Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x + 1$, maka

a. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$ dengan domain $[-1, \infty)$

b. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$ dengan domain $[0, \infty)$

c. $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$ dengan domain $[0, \infty)$

d. $(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$ dengan domain $[-\infty, \infty)$

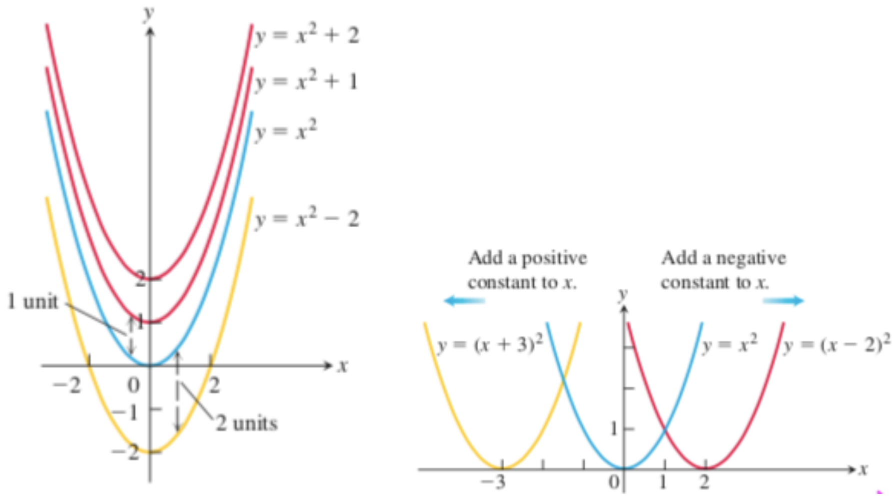
4.6 Pergeseran Grafik Fungsi

Pergeseran grafik sebuah fungsi dapat diperoleh dengan memasukkan beberapa variabel tertentu ke dalam fungsi yang ada. Pergeseran yang ada dibedakan menjadi dua yaitu pergeseran vertical dan pergeseran horizontal.

Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.

Contoh :

Diketahui $f(x) = x^2$ maka diperoleh pergeseran grafik ini untuk $y = x^2 + 1$ bergeser keatas 1 unit, $y = x^2 - 2$ bergeser kebawah 2 unit, $y = (x+3)^2$ bergeser ke kiri 3 unit dan $y = (x-2)^2$ seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 42 Pergeseran vertikal dan Horizontal

Selain pergeseran Vertikal dan Horizontal, ada juga penskalaan pada grafik yang disebut dnegan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.

ii. $y = \frac{1}{c}f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.

iii. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

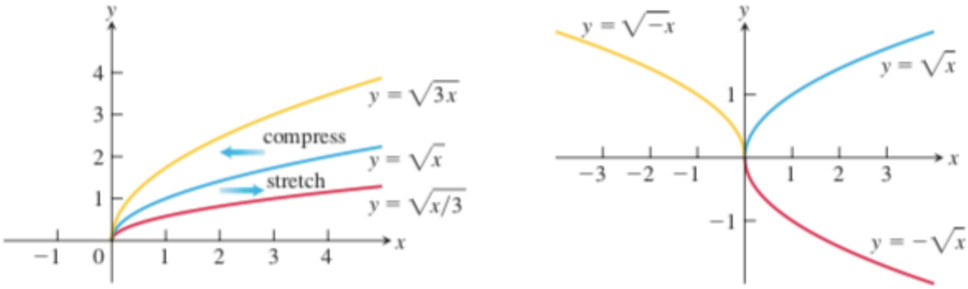
i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu

x.

ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

Contoh :

Diketahui $y = \sqrt{x}$, maka diperoleh peregangan sebesar 3 secara vertikal jika dikalikan 3 yaitu $y = 3\sqrt{x}$ dan mengecil (terkompress) jika dikalikan dengan $\frac{1}{3}$ yaitu $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$. Selanjutnya akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebanyak 3 jika $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$. Kemudian disebut refleksi terhadap sumbu x jika grafik $y = -\sqrt{x}$ dan refleksi terhadap sumbu y jika $y = \sqrt{-x}$. Hal ini tampak pada gambar berikut ini.



Gambar 43 Kompres, Stretch dan Refleksi

4. Rangkuman

1. Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f + g$, $f - g$ dan fg seperti
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
2. Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.

3. Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.
4. Penskalaan pada grafik yang disebut dengan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

   Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.

   ii. $y = \frac{1}{c} f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.

   iii. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

   iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

   Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.

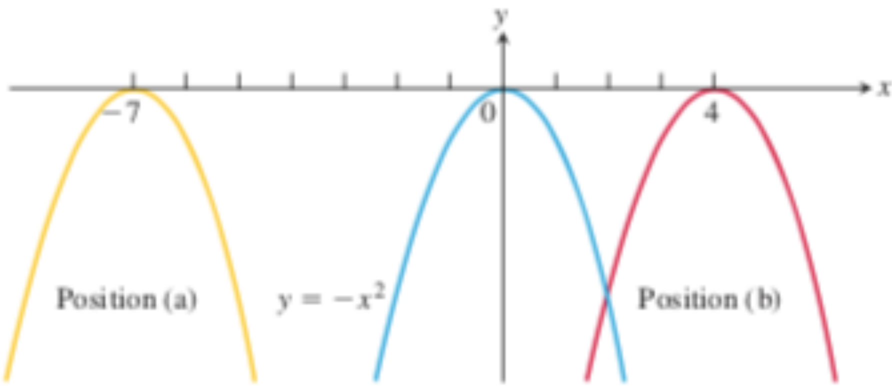
   ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

5. Latihan

1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $f + g$, dan $f.g$
   a. $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x-1}$
   b. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = \sqrt{x-1}$
2. Jika $f(x) = x + 5$ dan $g(x) = x^2 - 3$, tentukanlah
   a. $f\big(g(0)\big)$
   b. $g\big(f(0)\big)$
   c. $f\big(g(x)\big)$
   d. $g\big(f(x)\big)$
   e. $f\big(f(-5)\big)$
   f. $g\big(g(2)\big)$
   g. $f\big(f(x)\big)$
   h. $g\big(g(x)\big)$
3. Misalkan $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x$
4. Perhatikanlah tabel berikut

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

   Tentukanlah nilai dari
   a. $f\big(g(-1)\big)$
   b. $g\big(f(0)\big)$
   c. $f\big(f(-1)\big)$
   d. $g\big(g(2)\big)$
   e. $g\big(f(-2)\big)$
   f. $f\big(g(1)\big)$
5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = -x^2$ yang bergeser secara horizontal. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b)

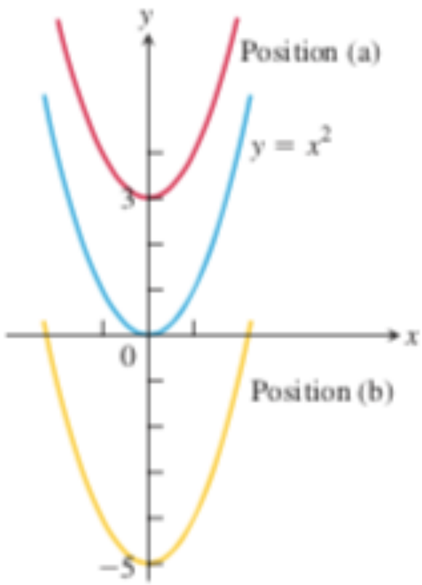


6. Evaluasi Pembelajaran

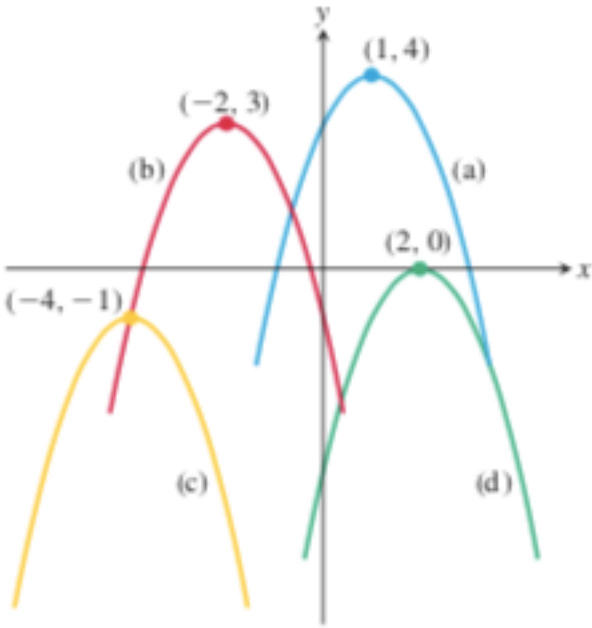
1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $\frac{f}{g}$, dan $\frac{g}{f}$
   a. $f(x) = 2$, $g(x) = x^2 + 1$
   b. $f(x) = 1$, $g(x) = 1 + \sqrt{x}$
2. Diketahui fungsi berikut

$$f(x) = x^2 + 2$$
$$g(x) = x - 2$$
$$h(x) = 2x - 5$$

   Tentukanlah
   a. $fogoh\ (x)$
   b. $gofoh\ (x)$
   c. $gohof\ (x)$
   d. $gogof\ (x)$
   e. $hohof\ (x)$
3. Misalkan $f(x) = 2x^3 - 4$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x + 2$
4. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b).



5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a), (b), (c) dan (d).



7. **Umpan Balik**
Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul
   Modul empat ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Fungsi. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari seperti pada soal latihan dan evaluasi pembelajaran.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Identitas	Kuadrat	Linear	Mutlak	Modulus
Polinomial	Eksponensial	Domain	Range	

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 5 Sistem Bilangan Riil, Himpunan, Persamaan dan Pertidaksamaan Linear, dan Fungsi

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat
   Modul lima ini memuat tentang rangkuman materi sistem bilangan riil, himpunan, persamaan dan pertidaksamaan liniear dan Fungsi. Materi yang disajikan menjadi bahan bagi mahasiswa untuk mempersiapkan mid semester atau Ujian Tengah Semester (UTS). Sehingga modul ini menunjang mkebutuhan mahasiswa mempersiapkan ujiannya dengan mempelajari berbagai materi dan menyelesaikan berbagai soal yang dapat digunakan untuk melatih kemampuannya. Modul lima ini dapat digunakan secara mandiri dan kelompok sehingga mahasiswa dapat belajar secara mandiri maupun bersama-sama.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Lima
   Sikap
   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius
   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;
   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.
   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

   Keterampilan Umum
   KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
   KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
   KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan

etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus
KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan
P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan
   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Mahasiswa diharapkan memahami pengertian matriks, jenis- jenis matriks, operasi dan sifat-sifat matriks, determinan, dan invers, serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

4. Prasyarat Kompetensi
   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan sistem persamaan linear. Memahami konsep dasar bilangan dan mampu mengoperasikannya.

5. Kegunaan Modul Lima
   Kegunaan modul Lima ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi Matriks dan operasinya, determinan dan Invers matriks. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok
   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi pada matriks, sifat-sifat matriks, determinan matriks dan invers matriks.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 9 : Menguasai Sistem Bilangan Riil, Himpunan, Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear dan Fungsi

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Matriks, Operasi dan sifat-sifatnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Sistem Bilangan Riil, Himpunan, Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan linear dan Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

5.1 MODUL 1

A. Rangkuman 1

1) Jenis-jenis himpunan bilangan yang merupakan bagian dari himpunan bilangan riil:

   a. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$

   b. Himpunan bilangn cacah $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$

   c. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

   d. Himpunan bilangan rasional/terukur $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$. Bilangan Irrasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}^*$. Contoh bilangan Irrasional yang terkenal adalah $\sqrt{2}$, π , e dan sebagainya.

   e. Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

   f. Himpunan Bilangan Kompleks $\mathbb{C}$.

2) Sifat-sifat Bilangan Riil : Komutatif, Asosiatif, Distributif, Identitas Invers.

3) Sifat-sifat Urutan Bilangan Riil : Trikotomi, Transitif, Penambahan, Perkalian.

4) Bentuk Pangkat yaitu bentuk pangkat positif dan Negatif.

5) Jika $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka
   a. $a^n = a.a.a.a \ldots a.a.a$
   b. disebut sebagai perkalian a sebanyak n kali. a disebut bilangan pokok dan n disebut sebagai pangkat.

6) Jika $a \in R$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $a^p . a^q = a^{p+q}$

7) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

   i. $a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

8) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0, p$ dan q adalah bilangan bulat positif maka $(a^p)^q = a^{p.q} = a^{pq}$

9) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p adalah bilangan bulat maka $(ab)^p = a^p b^p$.

10) Jika $a \neq 0$, $a \in R$ dan n bilagan bulat positif maka $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dan $a^0 = 1$.

B. Rangkuman 2

1) Beberapa sifat bentuk akar yaitu
   a. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
   b. $p \sqrt[n]{a} + q \sqrt[n]{a} = (p+q) \sqrt[n]{a}$
   c. $p \sqrt[n]{a} - q \sqrt[n]{a} = (p-q) \sqrt[n]{a}$
   d. $\sqrt[n]{a}b = \sqrt[n]{a}. \sqrt[n]{b}$
   e. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dimana $b \neq 0$
   f. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

2) Jika $m, n \in N$ dengan $n \neq 1$, dan a adalah bilangan riil yang tidak negatif maka:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dan } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

3) Berikut ini beberapa persamaan Eksponen:

4) Jika $a^{f(x)} = 1$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = 0$.

5) Jika $a^{f(x)} = a^p$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = p$.

6) Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x)$=$g(x)$.

7) Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, $b > 0$ dan $b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$.

8) Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dimana $a^{f(x)} = p$ maka bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $Ap^2 + Bp + C = 0$.

9) Jika diketahui suatu perpangkatan dengan $a^c = b$ maka bentuk tersebut dapat diubah ke dalam bentuk logaritma menjadi
$\log_a b = c$ atau ${}^a log\ b = c$ untuk $a \neq 1$, dan $a > 0$.

10) Beberapa sifat logaritma diantarnya adalah
    a. ${}^a log\ a = 1$
    b. ${}^a log\ 1 = 0$
    c. ${}^{a^n} log\ b^m = \frac{m}{n}\ {}^a log\ b,\ dengan\ n \neq 0$.
    d. ${}^a log\ b = \frac{1}{{}^b \log a}$
    e. ${}^a log\ b = \frac{{}^p log\ b}{{}^p log\ b}$, dengan $p > 0$, dan $p \neq 1$.
    f. $a^{{}^a log\ b} = b$
    g. ${}^a log\ b \times {}^b log\ c = {}^a log\ c$
    h. ${}^a log\ bc = {}^a log\ b + {}^a log\ c$
    i. ${}^a log \frac{b}{c} = {}^a log\ b - {}^a log\ c$

5.2 MODUL 2

A. Rangkuman 1

1) Banyaknya anggota suatu himpunan A disebut sebagai kardinalitas A yang dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

2) Himpunan yang tidak memiliki anggota, kardinalnya sama dengan 0, yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { }.
3) Jenis-jenis himpunan :
   a. Himpunan Kosong (*empty set*), $n(A) = 0$. Himpunan kosong biasanya dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { }.
   b. Himpunan Semesta (*universal set*), S
   c. Himpunan Bagian (*subset*), $A \subseteq B$. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal berikut
      1. A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri, dinotasikan dengan $A \subseteq A$.
      2. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A, dinotasikan dengan $\emptyset \subseteq A$.
      3. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$.
   d. Himpunan yang sama, dinyatakan dengan $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.
   e. Himpunan yang ekuivalen, dinotasikan dengan $n(A) = n(B)$. Dapat juga dituliskan dengan $A \cong B \Leftrightarrow |A| = |B|$.
   f. Himpunan Bersilangan, $A \cap B \neq \emptyset$
   g. Himpunan yang saling lepas, $A \cap B = \emptyset$
   h. Himpunan kuasa (*power set*), $P(A)$. Jika kardinalitas A adalah n maka banyaknya himpunan kuasanya adalah 2^n.

B. Rangkuman 2

1) Operasi pada himpunan
   a. Irisan (*intersection*), $A \cap B = \{x | x \in A$ dan $x \in B\}$.
   b. Gabungan (*union*), $A \cup B = \{x | x \in A$ atau $x \in B\}$.
   c. Komplemen (*complement*), $\bar{A} = A^c = \{x | x \in S \; dan \; x \notin A\}$.
   d. Selisih (*difference*), $A - B = \{x | x \in A$ dan $x \notin B\}$.
   e. Beda setangkup (*symmetric difference*), $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.
   f. Perkalian Kartesian (*Cartesian product*), $A \times B = \{(a, b) | a \in A$ dan $b \in B\}$.
   g. Perambatan operasi himpunan :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

2) Hukum-hukum Aljabar pada Himpunan

a. Hukum Identitas

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap S = A$$

b. Hukum Nulitas

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup S = S$$

c. Hukum Komplemen

$$A \cup \bar{A} = S$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

d. Hukum Idempoten

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

e. Hukum Involusi

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

f. Hukum Penyerapan

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

g. Hukum Komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

h. Hukum Distributif

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

i. Hukum Asosiatif

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

j. Hukum De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

k. Hukum 0/1

$$\bar{S} = \emptyset$$

$$\bar{\emptyset} = S$$

3) Prinsip Inklusi-Ekslusi

Berikut ini prinsip operasi pada dua himpunan yaitu

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

sedangkan untuk tiga buah himpunan berlaku:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Selanjutnya untuk himpunan berhingga $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ berlaku

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

5.3 MODUL 3

A. Rangkuman 1

1) Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Dinotasikan dengan $x = c$.
2) Prinsip penjumlahan
   a. Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku
   b. $a + c = b + c$
   c. $a - c = b - c$
3) Prinsip perkalian
   i. Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku
   ii. $a.c = b.c$
   iii. $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, benar untuk $c \neq 0$.
4) Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut sebagai persamaan ekuivalen.
5) Prinsip Penjumlahan
   a. Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku
      i. $a + c < b + c$ atau $a + c > b + c$
      ii. $a - c < b - c$ atau $a - c > b - c$

6) Prinsip Perkalian

a. Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real positif. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

b. $a.c < b.c$ atau $a.c > b.c$

c. Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real negatif. Jika $a < b$ maka $a.c \geq b.c$

d. atau

e. Jika $a > b$ maka $a.c \leq b.c$

7) Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $y = mx + c$.

8) Bentuk pertidaksamaan linear dua variable dapat dituliskan sebagai berikut :

a. $ax + by > c$

b. $ax + by < c$

c. $ax + by \geq c$

d. $ax + by \leq c$

B. Rangkuman 2

1) Bentuk umum dari system persamaan linear tiga variabel dalam x, y dan z dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3 \neq 0$; $b_1, b_2, b_3 \neq 0$; $c_1, c_2, c_3 \neq 0$; $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.

2) Metode penyelesaian pada system persamaan linear tiga variabel, yaitu metode eliminasi, netode substitusi dan metode gabungan (eliminasi-substitusi).

3) Metode eliminasi merupakan cara peyelesaian dengan mengeliminasi atau mengurangkan salah satu variabel. Langkah-langkahnya :

   a. Eliminasikan persamaan pertama dan kedua atau pertama dan ketiga atau kedua dan ketiga untuk menghilangkan salah satu variabelnya, yaitu x atau y atau z, sehingga menjadi persamaan linear dengan dua variabel.
   b. Ulangi sekali lagi tetapi variasi persamaannya tidak sama dengan langkah (1), sedangkan untuk menghilangkan salah satu variabelnya harus sama dengan langkah (1) sehingga menjadi persamaan linear dua variabel.
   c. Dari langkah (1) dan (2), eliminasikan salah satu variabel sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   d. Ulangi sekali lagi tetapi variasi variabel yang dieliminasi berbeda dengan langkah (3) sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   e. Ulangi langkah (1) sampai langkah (4) tetapi variasi persamaannya tidak sama sehingga diperoleh hasil variabel yang lainnya.
   f. Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

4) Metode Substitusi merupakan cara penyelesaian dengan cara memasukkan salah satu persamaan ke persamaan yang lainnya. Langkah- langkahnya :

   a. Menyatakan salah satu persamaan dalam bentuk x sebagai fungsi y dan z atau y sebagai fungsi x dan z atau z sebagai fungsi x dan y (pilih yang paling sederhana).
   b. Substitusikan langkah (1) ke dalam salah satu persamaan yang lainnya sehingga membentuk persamaan baru yang mengandung dua variabel.

c. Gunakan langkah (2) dengan menyatakan seperti pada langkah (1).
d. Substitusikan langkah ke (2) dan (3) ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai dari salah satu variabel.
e. Jika telah diperoleh nilai dari salah satu variabel maka substitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel yang kedua.
f. Ulangi lagi langkah (5) tetapi mensubstitusikan ke dalam persamaan yang berbeda untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.
g. Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

5) Metode Gabungan (Eliminasi Substitusi) merupakan cara penyelesaian dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan substitusi dengan secara bersamaan. Langkah-langkahnya:
   a. Dibuat dua kelompok persamaan yang memungkinkan elimiasi dua persamaan menjadi lebih mudah dan sederhana.
   b. Salah satu variabel dari masing-masing kelompok dieliminasikan.
   c. Nilai variabel yang diperoleh, disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai-nilai variabel yang lain.

5.4 MODUL 4

A. Rangkuman 1

1) Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.
2) Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.
3) Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

4) Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.
5) Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.
6) Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.
7) Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.
8) Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.
9) Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah), $f(x) = \lfloor x \rfloor$ dan $f(x) = \lceil x \rceil$.
10) Fungsi Mutlak (modulus), $f: x \rightarrow |x|$ atau $f: x \rightarrow |ax + b|$ dimana $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.
11) Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.
12) Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.
13) Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.
14) Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat.
15) Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta.
16) Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
17) Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar.

18) Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.
19) Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif.

B. Rangkuman 2

1) Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f + g$, $f - g$ dan fg seperti
   a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
   c. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
   d. selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan
   e. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
2) Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
   domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.
3) Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.
4) Penskalaan pada grafik yang disebut dengan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu
   i. Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah
      a. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.
      b. $y = \frac{1}{c}f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.
      c. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

d. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

ii. Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

a. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.

b. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

4. Rangkuman

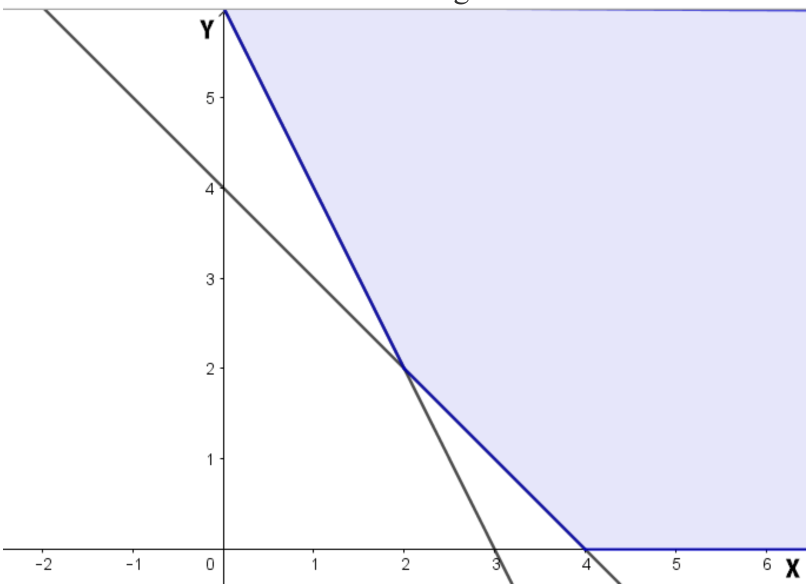
1) Sistem bilangan riil mempelajari tentang bentuk dasar bilangan yang memuat tentang bentuk akar, pangkat dan logaritma.
2) Himpunan menjabarkan tentang berbagai aplikasi darinya dalam kehidupan sehari-hari. Himpunan dapat dioperasikan secara aljabar dan selain itu juga dapat digunakan hukum-hukum nya dalam membuktikan berbagai bentuk himpunan secara matematis.
3) Persamaan dan Pertidaksamaan Linear memuat tentang persamaan untuk satu, dua dan tiga variabel beserta teknik penyelesaiannya. Persamaan dan pertidaksamaan linear ini banyak digunakan didalam mengestimasi hasil atau produk yang dihasilkan oleh mesin tertentu atau juga dapat digunakan dalam menentukan nilai maksimum dan nilai minimum suatu masalah atau kondisi tertentu.
4) Fungsi nerupakan bagian dasar dari matematika. Fungsi dapat digunakan sebagai representasi dari suatu data maupun bentuk lainnya. Fungsi dapat digambarkan melalui pemetaan diagram panah, dengan bentuk umum yaitu $f(x)$ maupun dengan grafik fungsi.

5. Latihan

1. Bila $x = 36$ dan $y = 125$ maka nilai $\frac{x^{-\frac{3}{2}}\sqrt[3]{y^2}}{y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} = \cdots$
2. Jika diketahui x dan y adalah bilangan real dengan $x > 1$ dan $y > 0$. Jika $xy = x^y$ dan $\frac{x}{y} = x^{5y}$, maka $x^2 + 3y = \cdots$
3. Jika $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - 3$ dan $g(x) = 2^x + 3$ maka $\frac{f(x)}{g(x)} = \cdots$
4. Diketahui bahwa $2^w \cdot a^x \cdot b^y \cdot c^z = 2013$ untuk setiap a, b, c, d, x, y, z merupakan bilangan bulat positif dan w bilangan bulat nonnegative dengan $a < b < c$. Nilai $2x + ax + by + cz = \cdots$

5. Dalam basis 10, bilangan bulat positif p memiliki 3 digit, bilangan bulat positif q memiliki p digit, bilangan bulat positif r memiliki q digit. Nilai untuk terkecil untuk r adalah …
6. Jika $\log_2(a-b) = 4$, maka $\log_4\left(\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right) = \cdots$
7. Jika x_1 dan x_2 memenuhi $\left(\log_{(2-x)} 27\right)^2 = 9$ maka nilai $x_1 + x_2$ adalah …
8. Jika $\log_7(\log_3(\log_2 x)) = 0$, nilai $2x + \log_4 x^2$ adalah …
9. Jika $f(x^2 + 3x + 1) = \log_2(2x^3 - x^2 + 7), x \geq 0$ maka $f(5) = \cdots$
10. Jika diketahui $f(n) = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_{n-1} n$ maka $f(8) + f(16) + f(32) + \cdots + f(2^{30}) = \cdots$
11. Tentukan himpunan kuasa dari $G = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset, 1\}\}$.
12. Ada berapa bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 100 yang habis dibagi oleh 6 atau 9?
13. Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1.000 dan habis dibagi oleh 7atau 11?
14. Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1.000 dan habis dibagi oleh 5,7, atau 11?
15. Dari satu kelas terdata 52 dari jumlah siswa yang menyukai Matematika sekaligus Fisika akan mengikuti Olimpiade Fisika. Empat kali dari jumlah siswa yang menyukai keduanya akan mengikuti Olimpiade Matematika. Jika jumlah seluruh siswa ada 44 orang dan siswa yang mengikuti olimpiade secara otomatis menyukai pelajaran yang dilombakan, maka banyak siswa yang hanya mengikuti Olimpiade Matematika (hanya menyukai Matematika) adalah ⋯ orang.
16. Diketahui himpunan $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Tentukan banyaknya himpunan bagian A yang elemennya 3.
17. Misalkan |X| menyatakan banyaknya anggota himpunan X. Jika |A∩B|=10 dan |A|=7, maka banyaknya kemungkinan untuk nilai |B| adalah
18. Jika $A = \{4\}$ dan $B = \{b \mid b2 - 16 = 0, b > 0\}$, apakah dapat dikatakan bahwa $A = B$?
19. Jika $S = \{1,2,3, \cdots, 10\}$, $A = \{2,4,6,8\}$, dan $B = \{1,3,5,7,9\}$, maka tentukan:
    a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
20. Misalkan $Ak = \{x: \frac{1}{k+1} \leq x \leq 1\}$, $k = 1,2,3, \cdots$. Tentukan $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

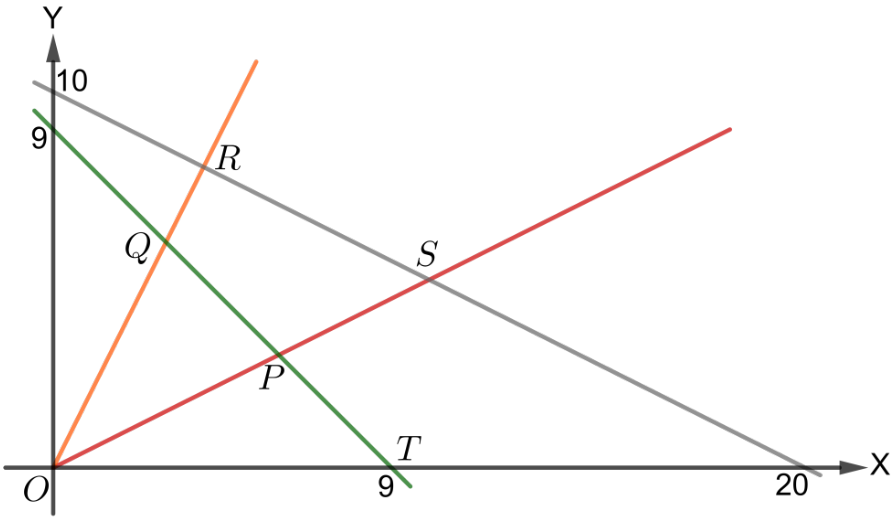
21. Perhatikan grafik berikut.



Nilai minimum dari Z=2x+5y dari daerah yang diarsir adalah

22. Nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 4x + 5y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan $x + 2y \geq 6$; $x + y \leq 8$; $x \geq 0$; $y \geq 2$ adalah

23. Perhatikan gambar berikut.



Diketahui sistem pertidaksamaan: $2y \geq x$; $y \leq 2x$; $2y + x \leq 20$; $x + y \geq 9$. Nilai maksimum untuk $3y - x$ adalah di titik

24. Luas daerah yang dibatasi oleh $2x - y \leq 2$, $x + y \leq 10$, dan $x \geq -2$ adalah

25. Agar fungsi $f(x,y) = nx + 4y$ dengan kendala $2x + y \geq 10,\ x + 2y \geq 8,\ x \geq 0$, dan $y \geq 0$ mencapai minimum hanya di titik $(4,2)$, maka konstanta n memenuhi
26. Jika nilai maksimum $x + y$ pada himpunan $\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0, x + 3y \leq 6, 3x + y \leq a\}$ adalah 4, maka nilai a adalah
27. Seorang pedagang paling sedikit menyewa 28 kendaraan untuk jenis truk dan colt, dengan jumlah yang diangkut sebanyak 272 karung. Truk dapat mengangkut tidak lebih dari 14karung dan colt 8 karung. Ongkos sewa truk Rp500.000,00 dan colt Rp300.000,00. Jika xmenyatakan banyaknya truk dan y menyatakan banyaknya colt, maka model matematika dari permasalahan di atas adalah
28. Luas sebuah tempat parkir adalah $420\ m^2$. Tempat parkir yang diperlukan oleh sebuah sedan adalah $5\ m^2$ dan luas rata-rata sebuah truk $15\ m^2$. Tempat parkir tersebut dapat menampung tidak lebih dari 60 kendaraan. Biaya parkir untuk sebuah sedan Rp3.000,00 dan untuk sebuah truk Rp5.000,00. Jika banyak sedan yang diparkir x buah dan banyak truk y buah, model matematika dari masalah tersebut adalah
29. Untuk menambah penghasilan, seorang ibu rumah tangga setiap harinya memproduksi dua jenis kue untuk dijual. Setiap kue jenis I modalnya Rp1.000,00 dengan keuntungan Rp800,00, sedangkan setiap kue jenis II modalnya Rp1.500,00 dengan keuntungan Rp900,00. Jika modal yang tersedia setiap harinya adalah Rp500.000,00 dan paling banyak hanya dapat memproduksi 400 kue, maka keuntungan terbesar yang dapat diperoleh ibu rumah tangga tersebut adalah
30. Seorang anak diharuskan minum dua jenis tablet setiap hari. Tablet jenis I mengandung 5unit vitamin A dan 3 unit vitamin B. Tablet jenis II mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam 1 hari, anak tersebut memerlukan 25 vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet I Rp4.000,00 per butir dan tablet II Rp8.000,00 per butir, maka pengeluaran minimum untuk pembelian tablet per hari adalah
31. Daerah asal fungsi f yang ditentukan oleh f(x) $= \frac{\sqrt{3x-18}}{2x-20}$ adalah...
32. Jika $g(x) = \frac{-ax-3}{-x-4}$ dan $h(x) = \frac{4x-3}{-x+a}$, nilai $(g \circ h)(3)$ adalah...
33. Diketahui $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = \frac{5x}{x+1}$. Jika h adalah fungsi sehingga $(g \circ h)(x) = x - 2$ maka $(h \circ f)(x) = \cdots$
34. Jika $f(x) = 3^{x-1}$ maka $f^{-1}(81) = \cdots$
35. Daerah asal fungsi $h(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x+2}}$ agar terdefenisi adalah...

36. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$. Jika $g(x) = x - 1$ dan $(fog)(x) = x^3 - 4x$, nilai dari $f(2) = \cdots$
37. Jika fungsi $\sqrt{\frac{x^2-8x+5}{x^2+x+12}}$ terdefenisi untuk $x \leq ax \leq a$ atau $x \geq bx \geq b$, maka nilai $a + b = \cdots$
38. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x3x - 2$. Daerah asal fungsi komposisi $(gof)(x)$ adalah...
39. Diketahui $f(x) = \frac{9x+17}{x+2}$; $x \neq -2$ dan $f - 1(x)$ adalah invers dari $f(x)$. Nilai dari $f^{-1}(10)$ adalah...
40. Jika $f(x + 1) = x^2 + 2x + 1$ dengan $x > 0$, maka $f^{-1}\big(x - 1 + f(x - 1)\big) = \cdots$

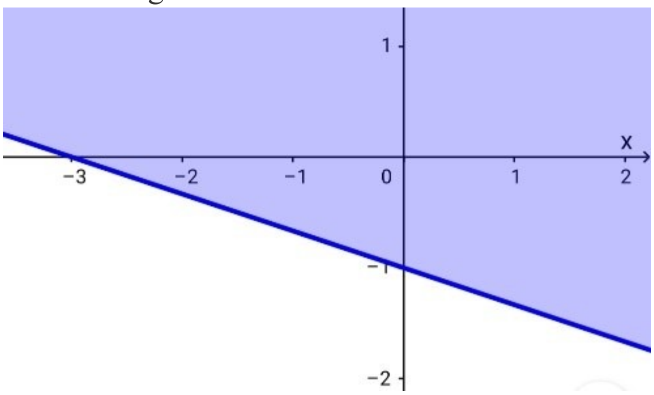
6. Evaluasi Pembelajaran

1. Nila x yang memenuhi $\frac{2^x}{4^{x+2}} = 16 \cdot 4^x$ adalah …
2. Nilai dari $\frac{1}{10^{-2017}+1} + \frac{1}{10^{-2016}+1} + \frac{1}{10^{-2015}+1} + \cdots + \frac{1}{10^{0}+1} + \cdots + \frac{1}{10^{2015}+1} + \frac{1}{10^{2016}+1} + \frac{1}{10^{2017}+1}$ adalah …
3. Bentuk sederhana dari $\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}}-x\right)\left(x+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}$ dengan $x \neq 0$ adalah …
4. Diketahui bahwa $3^{(y-x)}(x + y) = 1$ dan $(x + y)^{(x-y)} = 3$, nilai $x^{3y} = \cdots$
5. Jika $8^m = 27$, maka $2^{m+2} + 4^m = \cdots$
6. Sebuah lingkaran memiliki jari-jari $\log a^2$ dan keliling $\log b^4$, maka $\log_a b = \cdots$
7. Jika diketahui $x = \log a$, $y = \log b$ dan $z = \log c$. Maka bentuk sederhana dari $\log \frac{a}{b^2}\sqrt{c}$ dalam x, y dan z adalah …
8. Diketahui persamaan $\log_2(\log_3(\log_5 a)) = \log_3(\log_5(\log_2 b)) = \log_5(\log_2(\log_3 c)) = 0$. Maka nilai dari $a + b + c = \cdots$
9. Jika (p, q) merupakan penyelesaian dari sistem berikut :
$$\log_3 x + \log_2 y = 4$$
$$\log_3 x^2 - \log_4 4y^2 = 1$$
maka nilai $p - q = \cdots$
10. Jika $a > 1, b > 1$ dan $c > 1$ maka $\left(\log_a \frac{1}{b}\right)\left(\log_b \frac{1}{c}\right)\left(\log_c \frac{1}{a}\right) = \cdots$
11. Diketahui:
$S = \{x \mid x \leq 12, x\ bilangan\ asli\}$

$P = \{x \mid 1 \leq x < 12, x\ bilangan\ prima\}$
$Q = \{x \mid 1 \leq x \leq 12, x\ bilangan\ ganjil\}$
Gambarkan diagram Venn.

12. Dari 50 siswa, 30 siswa menyukai **aritmetika**, 30 siswa menyukai **geometri**, dan 30 siswa menyukai **aljabar**. Banyaknya siswa yang menyukai **aritmetika** dan **geometri** adalah 15orang. Banyaknya siswa yang menyukai **aritmetika** dan **aljabar** juga 15 orang, sama halnya dengan yang menyukai **aljabar** dan **geometri**. Berapa banyak siswa yang menyukai ketiga-ketiganya?
13. Diketahui himpunan $B = \{x \mid 3 < x < 8, x\ bilangan\ asli\}$ dan $C = \{x \mid 5 \leq x \leq 10, x\ bilanganasli\}$. Anggota dari $C - B$ adalah
14. Diketahui $S = \{1,2,3, \cdots ,10\}$ adalah himpunan semesta. Jika himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{2,3,5,7\}$, maka $(A \cap B)^C = \cdots$
15. Diketahui dua himpunan A dan B. Jika $A \cap B = A$, $n(A) = 5$, dan $n(B - A) = 6$, maka $n(B) = \cdots$
16. Berilah contoh 2 himpunan yang bila diiriskan hasilnya adalah himpunan kosong!
17. Berilah contoh 2 himpunan tak hingga yang bila diiriskan hasilnya himpunan berhingga!
18. Jika $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, dan $C = \{c, d, g\}$, maka tunjukkan bahwa:
    a. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
    b. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
19. Misalkan $A_1 = (0,1)$, $A_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $A_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\cdots, A_{10} = \left(0, \frac{1}{10}\right)$ dengan $(a, b) = \{x: a < x < b\}$ yang menggambarkan interval terbuka antara a dan b. Tentukan $\bigcup_1^{10} A_k$ dan $\bigcap_{k=1}^{10} A_k$.
20. Berapa banyaknya anggota dari $|A \cup B \cup C \cup D|$ jika setiap himpunan berukuran 50, setiap irisan dari dua himpunan berukuran 30, setiap irisan dari tiga himpunan berukuran 10, dan irisan dari keempat himpunan berukuran 2?

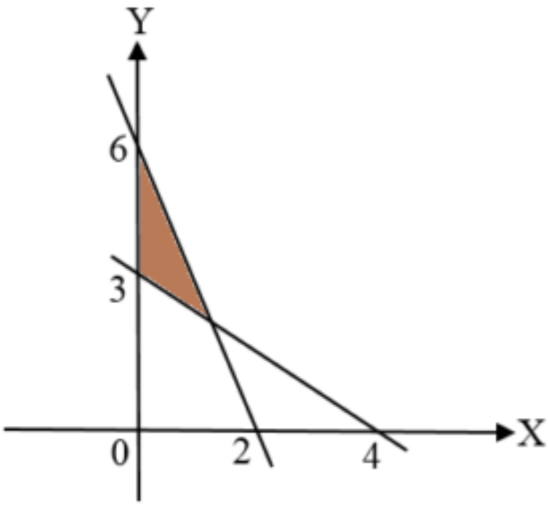
21. Perhatikan grafik berikut.



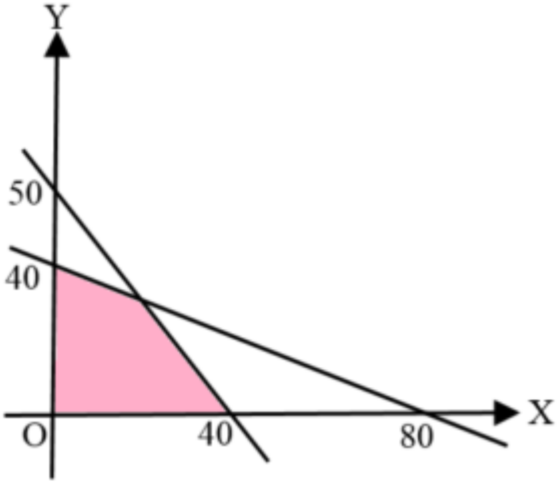
Tentukanlah pertidaksamaan dari daerah yang diarsir diatas!

22. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear $\{2x + y \leq 6x + 3y \geq 6, x \geq 0, y \geq$0 untuk x, y anggota bilangan real!

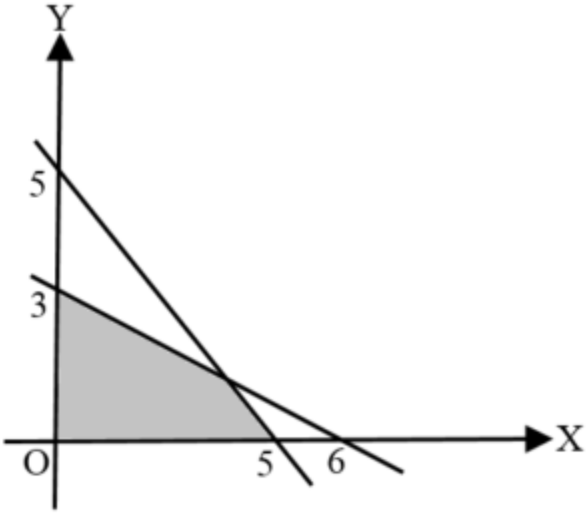
23. Sistem pertidaksamaan linear untuk daerah yang diarsir pada gambar di bawah adalah ⋯⋯



24. Daerah yang diarsir pada grafik di bawah merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan ⋯



25. Perhatikan gambar berikut ini.



Nilai maksimum untuk fungsi objektif $P=3x+5y$ adalah

26. Panitia karyawisata suatu sekolah ingin menyewa 2 jenis bus selama 3 hari. Bus jenis A dapat menampung 30 orang dengan harga Rp3.000.000,00. Bus jenis B dapat menampung 40 orang dengan harga Rp4.500.000,00. Karyawisata tersebut diikuti oleh 240 orang. Jika bus yang dibutuhkan paling banyak 7 unit, maka jenis bus yang harus disewa agar pengeluaran seminimum mungkin adalah
27. Pak Alim memiliki lahan pertanian seluas 8 hektare. Ia akan menanami lahan tersebut dengan tanaman padi dan jagung. Dari satu hektare lahan yang ditanam padi dapat dipanen 3 ton padi, sedangkan dari satu hektare lahan yang ditanam jagung dapat dipanen 4 ton jagung. Pak Alim ingin

memperoleh hasil panen tidak kurang dari 30 ton. Jika biaya menanam padi pada 1 hektare lahan adalah Rp500.000,00 dan biaya menanam jagung pada 1 hektare lahan adalah Rp600.000,00, maka biaya minimum yang harus dikeluarkan Pak Alim adalah

Suatu lembaga survei disewa oleh stasiun TV di kota A untuk mengetahui animo pemirsa tentang program-program penyiaran TV tersebut. Ketentuan-ketentuan responden yang diajukan oleh pihak TV adalah sebagai berikut.

- Responden sekurang-kurangnya 500 orang yang berasal dari luar kota A.
- Banyak responden dalam kota A tidak lebih dari responden luar kota A.
- Jumlah semua responden tidak lebih dari 1.500 orang.

Jika lembaga survei telah menetapkan bahwa banyaknya responden di luar kota dan dalam kota A berturut-turut adalah x dan y, maka:

a. tuliskan sistem pertidaksamaan yang memenuhi masalah di atas;
b. gambarkan daerah penyelesaiannya;
c. tentukan koordinat titik pojoknya.

28. Agar sistem persamaan linear $\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + cz = -1 \\ ax + 3y - cz = -3 \end{cases}$ mempunyai penyelesaian $x = 1$, $y = -1$, dan $z = 2$, maka nilai $a + b + c$ adalah
29. Diberikan sistem persamaan $\begin{cases} (a-1)x + (b-1)y = 0 \\ (b+1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$ dengan $a \neq b$. Agar penyelesaian pertidaksamaan diatas tidak hanya $(x, y) = (0,0)$ saja, maka nilai $a + b =$
30. Andri pergi ke tempat kerja pukul 7.00 setiap pagi. Jika menggunakan mobil dengan kecepatan 40km/jam, maka dia tiba di tempat kerja terlambat 10 menit. Jika menggunakan mobil dengan kecepatan 60km/jam, maka dia tiba ditempat kerja 20 menit sebelum jam kerja dimulai. Jadi, jarak antara rumah Andri dan tempat kerja adalah
31. Jika $f(x) = \frac{x-2011}{x-1}$, maka $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ *adalah*
32. Jika $f(x) = ax + 3, f(x) = ax + 3,\ a \neq 0 a \neq 0$ dan $f^{-1}(f^{-1}(9)) = 3$ maka nilai $a^2 + a + 1$ adalah
33. Jika fungsi f dan g mempunyai invers dan memenuhi $g(x-2) = f(x+2)$, maka $g^{-1}(x) = \cdots$
34. Jika fungsi f dan fungsi g mempunyai invers dan memenuhi $f(x) = g(4+2x)$, maka $f^{-1}(x) = \cdots$

35. Jika $f(2-x)=\frac{x}{2}+3$, maka $f^{-1}(x)=\cdots$
36. Jika $f(x)=x^2-1$, dan $g(x)=\frac{x-2}{x+1}$ maka daerah asal fungsi $f\cdot g$ adalah...
37. Jika $\mathrm{f(x)}=1-\mathrm{x}^2$, dan $\mathrm{g(x)}=\sqrt{5-\mathrm{x}}$ maka daerah hasil fungsi komposisi $f\circ g, fg, f+g$ dan $f-g$ adalah...
38. Diketahui $f(2x)=-\frac{1}{x+2}$ dan $f^{-1}\left(\frac{2}{a}\right)=3a$ maka nilai $a=\cdots$
39. Jika $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ maka $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ adalah...
40. Diketahui $f(x)=x^2+1$ dan $g(x)=ax+2$, dengan $a\neq 0$. Jika $(f\circ g-1)(1)=5$ maka $4a^2-3=\cdots$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C.PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul lima ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman diatas, karena hanya terdiri dari satu kegiatan pembelajaran. Modul ini menuntun mahasiswa memahami dan mengulang kembali materi modul 1 hingga modul 4. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan UTS pada materi yang telah dipelajari seperti pada soal latihan dan evaluasi pembelajaran.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Identitas	Kuadrat	Linear	Mutlak	Modulus
Polinomial	Eksponensial	Domain	Range	

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

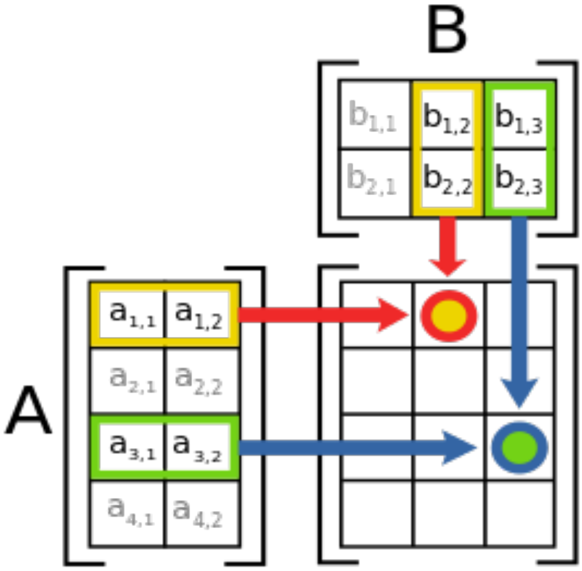
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 6

MATRIKS

Move and make a movement.

-SCP



Pendidikan Matematika

FKIP UKI

MODUL 6 MATRIKS

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat
   Matriks dalam matematika digunakan untuk menyatakan bilangan-bilangan ke dalam jajaran empat persegipanjang, terbentuknya suatu matriks dapat diperoleh melalui suatu sistem persamaan linier, demikian pula sebaliknya bahwa suatu sistem persamaan linier dapat diperoleh melalui suatu matriks. Dalam kehidupan sehari-hari penggunaan matriks dapat mempermudah penyajian suatu data dari tabel sekaligus operasi-operasi bilangan yang terkandung di dalamnya. Oleh karena itu, pemahaman mengenai matriks ini sangat penting untuk diperoleh.
   Modul ini memuat berbagai penjabaran tentang materi matriks dan juga latihan dan evaluasi pencapaian materi matriks.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Lima
   Sikap
   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius
   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;
   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.
   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

   Keterampilan Umum
   KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
   KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
   KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharapkan memahami pengertian matriks, jenis- jenis matriks, operasi dan sifat-sifat matriks, determinan, dan invers, serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan sistem persamaan linear. Memahami konsep dasar bilangan dan mampu mengoperasikannya.

5. Kegunaan Modul Enam

   Kegunaan modul Enam ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi Matriks dan operasinya, determinan dan Invers matriks. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok
   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi pada matriks, sifat-sifat matriks, determinan matriks dan invers matriks.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 10 : Menguasai Matriks, Operasi dan sifat-sifatnya

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Matriks, Operasi dan sifat-sifatnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Matriks, Operasi dan sifat-sifatnya. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

6.1 Apa itu Matriks?

Matriks umumnya digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier pada mata kuliah aljabar linear yang telah dipelajari sejak dibangku sekolah.

Pada matematika diskrit, Matriks digunakan untuk merepresentasikan struktur diskrit diantaranya adalah relasi, graf dan pohon. Pokok bahasan Matriks merupakan topik yang umum bagi mahasiswa yang telah mempelajarinya dari tingkat SMA.

Untuk mempelajari materi matriks, berikut kita definisikan bentuk matriks sebagai berikut.

Definisi :

Matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran yang berbentuk persegi atau persegi panjang dalam bentuk baris dan kolom. Matriks M yang berukuran *m* baris dan *n* kolom atau sering disebut matriks berukuran (berordo) *mxn* ditulis dengan M_{mxn} atau M_{mn} adalah

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Catatan :

a_{ij} disebut anggota bilangan atau elemen atau komponen dari matriks M pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Jika jumlah baris sama dengan jumlah kolom (m=n) matriks tersebut dinamakan Matriks bujur sangkar (*square matrix*).

6.2 Jenis-Jenis Matriks

1. Matriks Identitas

   Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen diagonalnya adalah bilangan 1 dan elemen lainnya adalah 0, dilambangkan dengan I.

   Berikut ini contoh matriks Identitas 3x3 dan 5x5 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Nol

   Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya adalah bilangan nol. Berikut contoh matriks nol yang biasanya disimbolkan dengan O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Matriks Skalar

   Matriks skalar adalah matriks yang elemen diagonal utamanya sama sedangkan bilangan skalar dan elemen yang lain adalah nol. Berikut contoh matriks skalar, dengan skalar sama dengan 3.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Matriks Diagonal

   Matriks yang diagonal utamanya bukan nol sedangkan elemen yang lain adalah nol. Berikut contoh matriks diagonal.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Segitiga Atas/Bawah
   a. Matriks segitiga atas

      Matriks segitiga atas adalah matriks jika elemen-elemen diatas diagonal bernilai nol, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i < j$. Berikut contoh matriks segitiga atas

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

   b. Matriks segitiga bawah

      Matriks segitiga bawah adalah matriks jika elemen-elemen di bawah diagonal bernilai nol, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i > j$. Berikut contoh matriks segitiga bawah

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Matriks Simetri (*symmetry*)

   M adalah matriks setangkup atau simetri jika $M^T = M$, yaitu jika setiap elemen di atas diagonal adalah pencerminan dari elemen di bawah diagonal terhadap sumbu diagonal matriks. Berikut contoh matriks simetri:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

7. Matriks 0/1 ($zero - one$)

   Matriks 0/1 adalah matriks yang setiap elemennya 0 atau 1. Berikut ini adalah matriks 0/1 dengan ukuran $4x4$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selain jenis matriks di atas, berikut ini beberapa jenis-jenis matriks lainnya yang diklasifikasikan berdasarkan baris dan kolomnya yaitu:

1. Matriks Baris adalah matriks yang terdiri dari satu baris.

   Contoh :

   $$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Kolom adalah matriks yang terdiri dari satu kolom.

   Contoh:

   $$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Matriks Mendatar adalah matriks yang jumlah kolom lebih banyak daripada jumlah barisnya. Secara umum disebut matriks persegi panjang.

   Contoh:

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Matriks Tegak adalah matriks yang jumlah baris lebih banyak dari jumlah kolomnya. Secara umum juga disebut sebagai matriks persegi panjang.

   Contoh :

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6.3 Operasi-operasi Pada Matriks

Sama halnya dengan operasi pada bilangan bulat secara umum, Matriks memiliki beberapa operasi yaitu

1. Penjumlahan Matriks

Dua buah Matriks atau lebih dapat dijumlahkan jika ukuran kedua atau lebih matriks tersebut berukuran sama. Misalnya matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\ x\ n$. Maka penjumlahan $A + B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

Misalkan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

maka

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh :

Penjumlahan dua buah matriks berukuran 5x5 :

Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Hasil penjumlahan pada matriks A dan B adalah

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 4+2 & 3+3 & 1+5 & -1+7 \\ 3+2 & 5+3 & 4+4 & 1+1 & -2+6 \\ 5+4 & 1+1 & 7+2 & 2+5 & -2+2 \\ 1+5 & 3+3 & 8+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+2 & 1+1 & 4+0 & 0+3 & -3+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & 8 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 9 & 7 & 0 \\ 6 & 6 & 10 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Sama halnya dengan penjumlahan, dua buah matriks dapat dioperasikan pada pengurangan jika kedua matriks tersebut berukuran atau berordo sama. Misalnya matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\ x\ n$. Maka penjumlahan $A - B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} - b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

Misalkan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

maka

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh :

Operasi pengurangan pada dua buah matriks 3x3 :

Diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasil pengurangan matriks A terhadap B adalah

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 - (-4) & 2 - 1 & 5 - 2 \\ 4 - 5 & 7 - 2 & 1 - 6 \\ 1 - 2 & -2 - 3 & 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks yang pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua. Misalkan matriks pertama A berukuran mxn dan matriks kedua B berukuran nxs, maka perkalian matriks A dan B dilambangkan dengan $AXB = C$ akan berukuran atau berordo mxs. Dalam hal ini

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

untuk setiap $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ dan $c_{ij} \in C$.

Contoh :

Misalkan dua matriks A dan B adalah sebagai berikut

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

hasil perkalian matriks A dan B adalah

$$\square\ x\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(1) + 1(2) + (-3)(3) & 2(4) + 1(0) + (-3)(6) \\ 4(1) + 1(2) + (-5)(3) & 4(4) + 1(0) + (-5)(6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$$

4. Perkalian Matriks dengan Skalar

   Misalkan k adalah bilang skalar. Maka perkalian matriks M dengan bilangan skalar k adalah sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$kM = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

   Contoh :

   Perkalian skalar k dengan matriks M sebagai berikut :

   $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $k = 2$

maka,

$$kM = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Pembagian pada Matriks

   Pembagian pada Matriks memiliki syarat yang sama dengan perkalian matriks. Namun berbeda dengan pembagian biasa, dua matriks dapat di dioperasikan pada pembagian dengan rumus :

   Misalkan matriks A membagi matriks B, dituliskan dengan

$$\frac{A}{B} = A\left(\frac{1}{B}\right) = AB^{-1}$$

   B^{-1} adalah invers dari matriks B, yang akan dibahas pada pokok bahasan berikutnya.

6. Transpose Matriks

   Transpose dari matriks M diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris pada matriks menjadi kolom matriks. Misalkan matriks M berukuran mxn maka matriks transpos dari M juga berukuran mxn yang dalam hal ini dituliskan dengan M^T, sebagai berikut :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   maka

$$M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   Contoh :

   Misalkan $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ maka diperoleh transpose dari M adalah

$$M^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

6.4 Sifat-sifat Matriks

1. Perkalian Matriks tidak komutatif

   Perkalian pada Matriks tidak bersifat komutatif yaitu

   Misalkan :

   $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{pmatrix}$

   diperoleh perkalian matriks

   $$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak + bm + co & al + bn + cp \\ dk + em + fo & dl + en + fp \end{pmatrix}$$

   dan

   $$BA = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka + ld & kb + le & kc + lf \\ ma + nd & mb + ne & mc + nf \\ oa + pd & ob + pe & oc + pf \end{pmatrix}$$

   disimpulkan bahwa

   $$AB \neq BA$$

2. Bersifat Asosiatif

   a. Asosiatif pada Penjumlahan

      Matriks bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan yaitu,

      Misalkan :

      $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$

      untuk semua $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{R}$

      diperoleh penjumlahan matriks

      $$(A + B) + C = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+k & b+l & c+m \\ d+n & e+o & f+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+k+r & b+l+s & c+m+t \\ d+n+u & e+o+v & f+p+w \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k+r & l+s & m+t \\ n+u & o+v & p+w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+k+r & b+l+s & c+m+t \\ d+n+u & e+o+v & f+p+w \end{pmatrix}$$

Jadi disimpulkan bahwa Matriks bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan.

b. Asosiatif pada perkalian

Hukum asosiatif berlaku pada operasi matriks yaitu $(AB)C = A(BC)$.

Berikut akan kita buktikan bahwa $(AB)C = A(BC)$.

Mis:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}$

diperoleh perkalian matriks seperti

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_r a_{1r}b_{r1} & \sum_r a_{1r}b_{r2} & \dots & \sum_r a_{1r}b_{rk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r a_{mr}b_{r1} & \sum_r a_{mr}b_{r2} & \dots & \sum_r a_{mr}b_{rk} \end{pmatrix}$$

$$(AB) = \begin{pmatrix} \sum_r a_{1r}b_{r1} & \sum_r a_{1r}b_{r2} & \dots & \sum_r a_{1r}b_{rk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r a_{mr}b_{r1} & \sum_r a_{mr}b_{r2} & \dots & \sum_r a_{mr}b_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_r a_{1r}b_{r1}c_{11} + \sum_r a_{1r}b_{r2}c_{21} + \cdots + \sum_r a_{1r}b_{rk}c_{k1} & \dots & \sum_r a_{1r}b_{rk}c_{1n} + \sum_r a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \\ \sum_r a_{mr}b_{r1}c_{11} + \sum_r a_{mr}b_{r2}c_{21} + \cdots + \sum_r a_{mr}b_{rk}c_{k1} & \dots & \sum_r a_{mr}b_{rk}\, c_{1n} + \sum_r a_{mr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_r \sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r \sum_k a_{1r}b_{rk}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r \sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r \sum_k a_{mr}b_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari bentuk dari $A(BC)$

$$BC = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k b_{1k}c_{k1} & \sum_k b_{1k}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{1k}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_k b_{1k}c_{k1} & \sum_k b_{1k}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{1k}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}\sum_k b_{1k}c_{k1} + a_{12}\sum_k b_{1k}c_{k1} + \cdots + a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \dots & a_{11}\sum_k b_{1k}c_{kn} + a_{12}\sum \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1}\sum_k b_{1k}c_{k1} + a_{m2}\sum_k b_{2k}c_{k1} + \cdots + a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \dots & a_{m1}\sum_k b_{1k}c_{kn} + a_{m2}\sum \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_k a_{11}b_{1k}c_{k1} + \sum_k a_{12}b_{1k}c_{k1} + \cdots + \sum_k a_{1r}b_{1k}c_{k1} & \dots & \sum_k a_{11}b_{1k}c_{kn} + \sum_k a_{12} \\ \vdots & \ddots & \\ \sum_k a_{m1}b_{1k}c_{k1} + \sum_k a_{m2}b_{2k}c_{k1} + \cdots + \sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k1} & \dots & \sum_k a_{m1}b_{1k}c_{kn} + \sum_k a_{m} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k1} & \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k1} & \sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r\sum_k a_{mr}\square_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}
$$

Jadi terbukti bahwa $(AB)C = A(BC)$.

3. Bersifat Distributif

   Matriks bersifat distributif jika ukuran matriks dapat dioperasikan pada penjumlahan dan perkalian matriks.

   a. Distributif kiri

      Hukum distributif kiri berlaku pada matriks, yaitu $A(B + C) = AB + AC$

      Misalkan :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ untuk semua $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e + k & f + l \\ g + m & h + n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} ae + ak + bg + bm & af + al + bh + bn \\ ce + ck + dg + dm & cf + cl + dh + dn \end{matrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ak + bm & al + bn \\ ck + dm & cl + dn \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg + \square k + bm & af + bh + al + bn \\ ce + dg + ck + dm & cf + dh + cl + dn \end{pmatrix}$$

disimpulkan bahwa $A(B + C) = AB + AC$

b. Distributif kanan

Hukum distributif kanan berlaku pada matriks, yaitu $(B + C)A = BA + CA$

Misalnya :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$, untuk semua $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$(B + C)A = \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e + k & f + l \\ g + m & h + n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} ea + ka + fc + lc & eb + kb + fd + ld \\ ga + ma + hc + nc & gb + mb + hd + nd \end{matrix}$$

$$BA + CA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ka + lc & kb + ld \\ ma + nc & mb + nd \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ea + fc + ka + lc & eb + fd + kb + ld \\ ga + hc + ma + nc & gb + hd + m\square + nd \end{pmatrix}$$

disimpulkan bahwa $(B + C)A = BA + CA$

4. Perkalian dengan Matriks Identitas tidak mengubah Matriks yang dikalikan

   Matriks identitas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tidak akan mengubah matriks yang dioperasikan terhadapnya, yaitu

   $$IA = AI = A$$

   Misalnya $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diperoleh

   $$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AI = A$$

5. Perkalian berulang matriks atau Pemangkatan matriks

   Sama halnya dengan perkalian berulang pada bilangan, perkalian atau pemangkatan matriks dapat ditulis dengan :

   $A^k = AAA \ldots A$ untuk k kali perkalian berulang matriks A dan $A^0 = I$

6. Matriks Ortogonal

   Matriks ortogonal adalah matriks bujur sangkar dimana $AA^T = A^T A = I = AA^{-1}$. Dengan kata lain $A^T = A^{-1}$.

   Contoh :

   Diketahui Matriks Ortogonal

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

   Karena Matriks A adalah matriks ortogonal, akan dibuktikan bahwa $A^T A = I$, diperoleh :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks A adalah matriks ortogonal.

4. Rangkuman

1) Matriks M yang berukuran *m* baris dan *n* kolom atau sering disebut matriks berukuran (berordo) *mxn* ditulis dengan M_{mxn} atau M_{mn} adalah

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) Matriks Identitas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Matriks Nol

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Matriks Skalar

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Matriks Diagonal

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6) Matriks Segitiga Atas/Bawah

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7) Matriks Simetri (*symmetry*), $M^T = M$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

8) Matriks 0/1 ($zero - one$)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) Matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\ x\ n$. Maka penjumlahan $A + B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

10) Matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\ x\ n$. Maka penjumlahan $A - B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} - b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

11) Matriks pertama A berukuran mxn dan matriks kedua B berukuran nxs, maka perkalian matriks A dan B dilambangkan dengan $AXB = C$ akan berukuran atau berordo mxs. Dalam hal ini

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

untuk setiap $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ dan $c_{ij} \in C$.

12) Matriks M dengan bilangan skalar k adalah sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{maka } kM = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

13) Misalkan matriks A membagi matriks B, dituliskan dengan

$$\frac{A}{B} = A\left(\frac{1}{B}\right) = AB^{-1}$$

B^{-1} adalah invers dari matriks B

14) Matriks M berukuran mxn maka matriks transpos dari M juga berukuran mxn yang dalam hal ini dituliskan dengan M^T, sebagai berikut :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ maka } M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

15) Sifat-sifat Matriks :

1) Perkalian Matriks tidak komutatif, $AB \neq BA$
2) Bersifat Asosiatif, $(AB)C = A(BC)$.
3) Bersifat Distributif, $A(B + C) = AB + AC$ dan $(B + C)A = BA + CA$
4) Perkalian dengan Matriks Identitas tidak mengubah Matriks yang dikalikan.
5) Perkalian berulang matriks atau Pemangkatan matriks, $A^k = AAA \dots A$ untuk k kali perkalian berulang matriks A dan $A^0 = I$
6) Matriks Ortogonal, $AA^T = A^TA = I = AA^{-1}$. Dengan kata lain $A^T = A^{-1}$.

5. Latihan

1. Diberikan matriks berikut ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah

a. AD
b. BE
c. F+E
d. E-F

e. -4B

f. $2D+C^2$

g. B^T-A^2

h. (BE)F

2. Diketahui sebuah matriks $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & a \\ b & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & c \end{pmatrix}$ adalah matriks ortogonal.

   Tentukanlah nilai dari $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 9 & 3y+5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Jika matriks AB=A+C, maka nilai $2x - y = \cdots$

4. Dengan menggunakan skalar $s = 2$ dan matriks-matriks pada nomor 1 diatas, tunjukkan hubungan-hubungan berikut

   a. $(kD)^t = kD^t$

   b. $(E+F)^t = E^t + F^t$

   c. $(CD)^t = D^t C^t$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah nilai dari $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{2018}$

2) Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ y & 9 \end{pmatrix}$. Jika $A + B - C = \begin{pmatrix} 8 & 5x \\ -x & -4 \end{pmatrix}$, maka nilai $x + 2xy + y$ adalah

3) Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ serta B^tadalah transpos dari matriks B. Hasil dari $A^2 \times B^t = \cdots$

4) Jika $A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ memenuhi $(A+B)^2 = A^2 + AB + B^2$, maka nilai k yang memenuhi adalah

5) Sistem persamaan linear $5x - 4y = -1$ dan $3x + 2y = 17$ memiliki penyelesaian $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \end{pmatrix}$. Nilai dari $ab + cd = \cdots$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke- 11 : Menguasai Determinan dan Invers pada matriks
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Determinan dan Invers pada matriks. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Determinan dan Invers pada matriks. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

6.5 Determinan Matriks

Dalam bidang aljabar linear, determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi atau bujur sangkar. Determinan matriks A ditulis dengan $det\ (A)$ atau $det\ A$ atau $|A|$. Untuk menentukan determinan matriks dari setiap matriks bujur sangkar berbeda-beda, yaitu diklasifikasikan dengan :

1. **Determinan Matriks 2x2**

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh :

Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - (-6) = 11$$

2. **Determinan Matriks 3x3**

Untuk menentukan determinan matriks 3x3 terdapat dua cara, yaitu dengan metode Sarrus dan dengan metode penjumlahan dari perkalian komponen matriks 3x3 dengan kofaktornya.

a. Metode Sarrus

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

$$det\ (A) = |A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

b. Penjumlahan dari perkalian komponen dengan Kofaktor

Untuk menentukan determinan dengan menggunakan metode kofaktor, perlu diketahui setiap minor dari anggota setiap matriks. Minor dari a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} yang didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A dengan elemen selain baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A. Dan $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$ dinyatakan sebagai kofaktor dari a_{ij} dinotasikan dengan C_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$$

Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dapat dituliskan dengan

$det\ (A) = |A| = aC_{11} + bC_{12} + cC_{13}$

$$det\ (A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\left(-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukanlah determinan dari matriks A dengan metode Sarrus dan Kofaktor.

Jawab :

Metode Sarrus

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{matrix}$$

$$= (30 + (-6) + 0) - (0 + (-3) + (-40))$$

$$= 67$$

Metode Kofaktor

Kofaktor dari setiap komponen a_{ij} yaitu

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 33$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -30$$

maka, dengan rumus determinan menggunakan metode kofaktor dengan $a = 1$, $b = -2$, dan $c = 0$ diperoleh

$$det\ (A) = 1(33) + (-2)(-17) + 0(30)$$

$$det\ (A) = 67$$

3. Determinan Matriks 4x4

Untuk menentukan determinan matriks 4x4 dapat diselesaikan dengan metode kofaktor, seperti pada matriks 3x3. Berikut contoh untuk menentukan determinan matriks 4x4.

Contoh :

Diketahui Matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, Tentukan determinan dari matriks A.

Jawab :

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan salah satu metode untuk menentukan determinan matriks 3x3 diperoleh

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 91$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -25$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

sehingga diperoleh $\det(A) = 200$

4. Determinan matriks 5x5

Untuk menentukan determinan dari matriks 5x5 dapat menggunakan metode kofaktor. Selain itu, berikut ini adalah metode lain untuk menentukan determinan matriks 5x5 dengan mereduksi matriks tersebut ke matriks 4x4 yang disebut dengan metode *Chio*. Selanjutnya, kita menggunakan metode-metode sebelumnya untuk menentukan determinan 4x4 dan seterusnya. Persamaan untuk menentukan determinan matriks nxn dengan menggunakan metode Chio adalah

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, Tentukanlah determinan dari matriks tersebut.

Jawab :

$$\det(A) = \frac{1}{(2)^3} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{1}{(2)^3}\begin{vmatrix} 6 & 14 & 4 & 6 \\ -2 & -20 & -4 & 6 \\ 11 & 14 & 4 & 3 \\ 7 & 24 & 6 & 17 \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan metode Kofaktor maupun *Chio* diperoleh bahwa determinan matriks 4x4 yaitu sub matriks A adalah

$$\begin{vmatrix} 6 & 14 & 4 & 6 \\ -2 & -20 & -4 & 6 \\ 11 & 14 & 4 & 3 \\ 7 & 24 & 6 & 17 \end{vmatrix} = 1680$$

sehingga diperoleh bahwa

$$\det(A) = \frac{1}{(2)^3} 1680 = 210$$

Berdasarkan metode kofaktor diatas dapat disimpulkan dalam bentuk teorema sebagai berikut.

Teorema 1:
Determinan matriks A yang berukuran nxn dapat dihitung dengan mengalikan komponen-komponen dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali setiap komponen entri terhadap kofaktornya untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

untuk ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i

atau

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

untuk ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j

dimana C_{iJ} adalah kofaktor komponen a_{ij} dengan $C_{iJ} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ untuk setiap M_{ij} minor dari komponen a_{ij}.

Berikut ini beberapa sifat determinan:

a. $|AB| = |A||B|$
b. $|A^T| = |A|$

c. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

6.6 Invers Matriks

Sebelum membahas invers dari setiap matriks bujur sangkar, berikut kita definisikan adjoin dari suatu matriks.

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

adalah sembarang matriks berukuran nxn dan C_{ij} adalah **kofaktor dari A** untuk $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, maka matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

dinamakan matriks kofaktor dan transpos dari matriks kofaktor disebut **adjoin** A dari matriks A, yaitu

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Jika dilakukan operasi perkalian pada matriks A dengan adjoinnya, diperoleh

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Misalkan perkalian A dengan adjoinnya disebut matriks B, maka elemen-elemen dari matriks B adalah

$b_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$

sehingga $b_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $b_{ii} = \det A$.

Diperoleh ,

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

$$= \det A\ x\ I$$

Jadi, $A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \det A\ x\ I$ jika dan hanya jika $\frac{A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = I$

dengan kata lain, kita dapat simpulkan bahwa

$$A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = \frac{1}{|A|}\ \boldsymbol{Adj}\ (\boldsymbol{A})$$

Catatan :

Jika determinan dari sebuah matriks tersebut tidak nol, maka invers dari matriks tersebut ada.

Selain metode di atas, berikut ini adalah metode lain untuk menentukan invers sebuah matriks dengan reduksi baris disebut metode Eliminasi Gauss-Jordan. Jika diketahui matriks A, maka proses Eliminasi baris elementer dilakukan untuk mengubah matriks $(A|I)$ menjadi matriks $(I|A^{-1})$. Dinotasikan dengan

$$(A\,|\,I) \Rightarrow (I\,|\,A^{-1})$$

Untuk menjelaskan metode Eliminasi Gauss Jordan, diberikan contoh untuk matriks 3x3, sebagai berikut:

Contoh :

Diketahui matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan invers dari matriks A tersebut, dilakukan Reduksi elementer seperti

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kemudian kita mereduksi setiap baris demi baris matriks diatas seperti

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 4 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 4 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{63}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{21} & \frac{2}{63} & \frac{11}{63} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{21} & -\frac{10}{63} & \frac{8}{63} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{21} & \frac{2}{63} & \frac{11}{63} \end{array}\right)$$

jadi diperoleh invers dari matriks A adalah matriks yang di sebelah kanan, yaitu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{21} & -\frac{10}{63} & \frac{8}{63} \\ -\frac{1}{21} & \frac{2}{63} & \frac{11}{63} \end{pmatrix}$$

Berikut beberapa contoh untuk menentukan invers matriks bujur sangkar.

1. **Invers matriks 2x2**

   Jika diketahui matriks A sebagai berikut

   $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

   maka, Invers dari matriks A adalah

   $A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)$

   $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

   Berdasarkan contoh di atas, jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka Invers matriks 2x2 dapat dituliskan juga sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. **Invers Matriks 3x3**

   Contoh :

   Tentukanlah invers dari matriks berikut ini $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

   Jawab:

   Kita menggunakan ekspansi kofaktor untuk menentukan adjoin dari matriks diatas yaitu

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 33 & 10 & -2 \\ -17 & 5 & -1 \\ -30 & -3 & 14 \end{pmatrix} \text{ dan } |A| = 67$$

sehingga diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 33 & 10 & -2 \\ -17 & 5 & -1 \\ -30 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{33}{67} & \frac{10}{67} & -\frac{2}{67} \\ -\frac{17}{67} & \frac{5}{67} & -\frac{1}{67} \\ -\frac{30}{67} & -\frac{3}{67} & \frac{14}{67} \end{pmatrix}$$

3. **Invers Matriks 4X4**

Contoh :

Tentukanlah invers matriks berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Dengan menggunakan Eliminasi Gauss-Jordan , kita lakukan dengan mereduksi kolom dan baris seperti berikut ini :

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 14 & 18 & -8 & -6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{20} & -\frac{18}{20} & \frac{8}{20} & \frac{6}{20} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{20} & \frac{6}{20} & \frac{4}{20} & -\frac{2}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{36}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{12}{20} & -\frac{4}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{20} & \frac{8}{20} & -\frac{8}{20} & \frac{4}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{20} & -\frac{18}{20} & \frac{8}{20} & \frac{6}{20} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Jadi Inversi matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

4. **Invers Matriks 5X5**

Contoh :

Tentukanlah Invers dari

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dengan menggunakan Adjoin matriks

b. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dengan menggunakan Eliminasi Gauss Jordan

Jawab :

a. Berikut kofaktor dari matriks A dengan menggunakan rumus $C_{ij} = (-1)^{1+j} M_{ij}$.

$C_{11} = 12$	$C_{12} = 2$	$C_{13} = -6$	$C_{14} = -4$	$C_{15} = -1$
$C_{21} = 24$	$C_{22} = -5$	$C_{23} = -12$	$C_{24} = 10$	$C_{25} = -11$
$C_{31} = 39$	$C_{32} = -16$	$C_{33} = -33$	$C_{34} = -5$	$C_{35} = 8$
$C_{41} = 84$	$C_{42} = 13$	$C_{43} = 69$	$C_{44} = -26$	$C_{45} = 7$
$C_{51} = 3$	$C_{52} = 4$	$C_{53} = 15$	$C_{54} = 8$	$C_{55} = 2$

Determinan dari matriks $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -27$

Sehingga diperoleh adjoin A adalah matriks transpos dari kofaktor matriks A. Disimpulkan

$$A^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 12 & 24 & 39 & 84 & 3 \\ 2 & -5 & -16 & 13 & 4 \\ -6 & -12 & -33 & 69 & 15 \\ -4 & 10 & -5 & -26 & 8 \\ -1 & -11 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Kita menggunakan Gauss-jordan untuk menentukan Invers dari matriks B dengan mereduksi baris matriks sebagai berikut

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -13 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 30 & 0 & 7 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -13 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 2 & -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -13 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 30 & 0 & 7 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -13 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -13 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 100 & -28 & 35 & -4 & 44 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -43 & 12 & -15 & 2 & -19 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -48 & 14 & -16 & 2 & -22 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 100 & -28 & 35 & -4 & 44 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -43 & 12 & -15 & 2 & -19 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{48} & \frac{16}{48} & -\frac{2}{48} & \frac{22}{48} & -\frac{6}{48} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{34}{48} & -\frac{16}{48} & \frac{2}{48} & \frac{74}{48} & \frac{6}{48} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{56}{48} & \frac{80}{48} & \frac{8}{48} & -\frac{88}{48} & -\frac{72}{48} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{48} & -\frac{32}{48} & \frac{10}{48} & \frac{34}{48} & \frac{30}{48} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{26}{48} & -\frac{16}{48} & -\frac{10}{48} & -\frac{34}{48} & \frac{18}{48} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{48} & \frac{16}{48} & -\frac{2}{48} & \frac{22}{48} & -\frac{6}{48}
\end{array}\right)$$

sehingga diperoleh

$$(I|B^{-1}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{24} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{24} & \frac{37}{24} & \frac{1}{8} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{5}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{3}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{24} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{24} & \frac{17}{24} & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{24} & -\frac{17}{24} & \frac{3}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{8}
\end{array}\right)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa invers matriks B adalah

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}
-\frac{17}{24} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{24} & \frac{37}{24} & \frac{1}{8} \\
\frac{7}{6} & \frac{5}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{3}{2} \\
-\frac{13}{24} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{24} & \frac{17}{24} & \frac{5}{8} \\
\frac{13}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{24} & -\frac{17}{24} & \frac{3}{8} \\
-\frac{7}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{8}
\end{pmatrix}$$

4. Rangkuman

1. Determinan Matriks 2x2

   Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Determinan Matriks 3x3

   Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

$$det\ (A) = |A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|\mathrm{A}| = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

3. Determinan Matriks 4x4

   Determinan Matriks 4x4 dapat ditentukan dengan metode kofaktor seperti pada matriks 3x3 berikut. Minor dari a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} yang didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A dengan elemen selain baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks A. Dan $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$ dinyatakan sebagai kofaktor dari a_{ij} dinotasikan dengan C_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$$

   Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dapat dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = aC_{11} + bC_{12} + cC_{13}$$

$$det\ (A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\left(-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

4. Determinan Matriks 5x5 hingga nxn

Persamaan untuk menentukan determinan matriks nxn dengan menggunakan metode Chio adalah

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

5. Invers Matriks

Jika dilakukan operasi perkalian pada matriks A dengan adjoinnya, diperoleh

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Misalkan perkalian A dengan adjoinnya disebut matriks B, maka elemen-elemen dari matriks B adalah

$b_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$

sehingga $b_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $b_{ii} = \det A$.

Diperoleh ,

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A\ x\ I$$

Jadi, $A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \det A\ x\ I$ jika dan hanya jika $\frac{A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = I$

dengan kata lain, kita dapat simpulkan bahwa

$$A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = \frac{1}{|A|}\ \boldsymbol{Adj\ (A)}$$

5. Latihan

1. Tentukanlah nilai determinan dan invers dari matriks-matriks berikut ini:

a. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 7 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix}$ dan $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Apabila $B - A = C^T$, maka nilai $det\ B = \cdots$

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & x \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & x & 1 \end{pmatrix}$ dengan $|B|=83$. Tentukanlah nilai $|A|$.

4. Tentukanlah invers matriks A jika $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ 5 & 4 & a \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $det\ A = -56$.

5. Jika $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ dengan $\alpha^2 \neq 1 \neq \beta^2$, maka $det\ (A) = \cdots$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah nilai p dan q dari matriks-matriks berikut ini jika $|A| = 1$ dan $|B^T| = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2p & q+1 \\ 3 & p+\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2q & -3 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah x, y, z dan θ dari persamaan berikut

$$\begin{pmatrix} x+y & 1 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \\ 1 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin 3\theta° & 0 \\ 0 & \sin \theta° & 1 \\ 1 & \tan \theta° & x-y \end{pmatrix}$$

3. Diketahui A, B, C dan D adalah matriks berukuran 2×2 yang memenuhi $A + CB^t = CD$. Jika matriks A memiliki invers, $\det(B^t - D) = m$, dan $\det(C) = n$, maka $\det(2A^{-1}) = \cdots$

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dan B^t adalah transpos matriks B. Jika $\det(2AB) = k \det(AB)^{-1}$, maka $k = \cdots$

5. Perhatikan matriks berikut

$$P = \begin{pmatrix} \log_{\sqrt{3}} 2 & \log_{1/2} 3 \\ \log_{1/9} 4 & \log_{2\sqrt{2}} 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log_4 3 & \log_{1/2} 3\sqrt{3} \\ \log_{1/3} 8 & \log_9 \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

nilai det P adalah ...

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul lima ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi matrik, jenis, operasi, determinan dan inversnya. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari sesuai dengan soal latihan dan evaluasi pembelajaran yang ada.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Matriks	Identitas	Ortogonal	Determinan	Invers
Transpos	Skalar	Distributif	Asosiatif	Komutatif

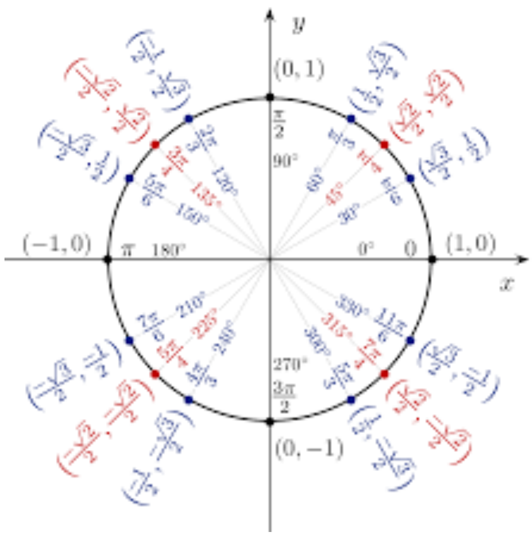
4. Referensi

   Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.
   Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 7 TRIGONOMETRI

Mengalah bukan berarti kalah. Berserah bukan berarti menyerah.

-SCP



Pendidikan Matematika

FKIP UKI

MODUL 7 TRIGONOMETRI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Trigonometri merupakan salah satu cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga, contohnya seperti sinus, kosinus, dan tangen. Trigonometri sangat banyak digunakan dibidang industri, teknik, astronomi, pelacakan signal, alat0alat medis dan lain sebagainya.

Pada modul ini akan dibahas berbagai teori dan konsep trigonometri seperti rumus dasar trigonometri, identitas trigonometri, sudut-sudt berelasi dan berbagai pengembangan rumus-rumus trigonometri hingga aplikasi trigonometri.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul tujuh

Sikap

S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul Tujuh

Kegunaan modul tujuh ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi trigonometri dan aplikasinya. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. **Materi Pokok dan Sub Materi Pokok**
   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian Trigonometri, ukuran sudut, perbandingan trigonometri, koordinat kutub, identitas trigonometri, grafik fungsi trigonometri, aturan sinus, aturan kosinus, luas segitiga, rumus-rumus trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan trigonometri dan aplikasi trigonometri.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke- 12: Menguasai konsep trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga.
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

7.1 Pengertian

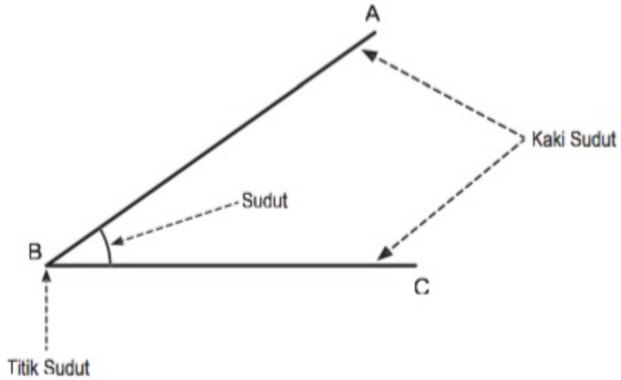
Kata trigonometri berasal dari bahasa yunani “trigonon” yang berarti tiga sudut dan “metron” yang berarti mengukur. Sehingga Trigonometri dapat disimpulkan sebagai cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga yang menggunakan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

Pada abad ketiga Masehi, astronom pertama ali mencatat panjang sisi-sisi dan sudut-sudut dari segitiga siku-siku antara masing-masing sisi yang memiliki hubungan. Perhitungan ini didefinisikan menjadi fungsi trigonometri yang saat ini menjadi bagian dari matematika murni dan terapan. Contohnya untuk menganalisis metode dasar seperti transformasi fourier atau gelombang persamaan, menggunakan fungsi trigonometri untuk memahami fenomena yang berhubungan dengan lingkaran melalui banyak penggunaan dibidang yang berbeda seperti fisika, teknik mesin dan listrik, music dan akustik, astronomi dan biologi.

Awalnya trigonometri dapat dilacak hingga zaman Mesir Kuno, Babilonia, dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun lalu. Matematikawan India menjadi perintis perhitungan variabel aljaar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.

7.2 Ukuran Sudut

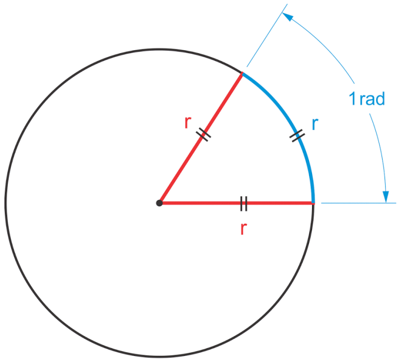
Sudut dapat dibentuk oleh dua garis yang memiliki titik pangkal yang sama (berimpit). Berikut ini gambar sudut dengan melakukan rotasi sinar garis yang membentuk sudut, biasanya disebut sebagai sudut :



Gambar 44 Ukuran sudut

Dalam trigonometri, ada dua macam ukuran sudut yang sering digunakan yaitu ukuran sudut dalam derajat dan ukuran sudut dalam radian, yang dilambangkan dengan ° dibaca derajat dan *rad* dibaca radian. Adapun hubungan antara keduanya adalah

$$1\ rad = 57{,}2958 \ldots{}^\circ$$
$$1^\circ = 0{,}0174 \ldots rad$$



Gambar 45 Hubungan radian dan derajat

Satu derajat (1°) didefinisikan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh $\frac{1}{360}$ putaran atau dapat ditulis dengan $1° = \frac{1}{360}$ putaran.

Sehingga untuk membuktikan hubungan radian dan derajat diatas dapat menggunakan konsep perbandingan sudut pusat dan panjang busur.

$$\frac{sudut\ pusat}{360°} = \frac{panjang\ busur}{keliling}$$

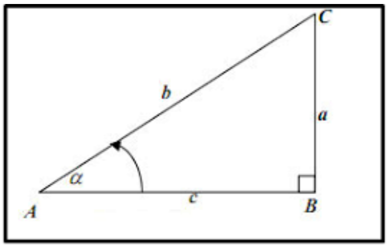
ingat bahwa sudut pusat sebesar 1 radian, panjang busur adalah jari-jari r dan keliling adalah $2\pi r$. Sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{1\,rad}{360°} = \frac{r}{2\pi r}$$

atau dapat disederhanakan mendekati $1° = \frac{\pi}{180}$

7.3 Perbandingan Trigonometri

Perbandingan pada trigonometri dapat diartikan sebagai perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Perhatikan segitia ABC dibawah ini.



Gambar 46 Perbandingan Trigonometri

Sudut B merupakan sudut siku-siku yang besarnya 90°, sisi AC atau sisi yang berada didepan sudut siku-siku disebut sebagai sisi miring (hipotebusa).

Perbandingan sisi-sisi segitiga dapat mendefinisikan bentuk dasar trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$
$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

atau

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$

Lebih lanjut Perbandingan dari beberap bentuk trigonometri ini menghasilkan bentuk trigonometri yang lain yaitu

$$cesec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c}$$

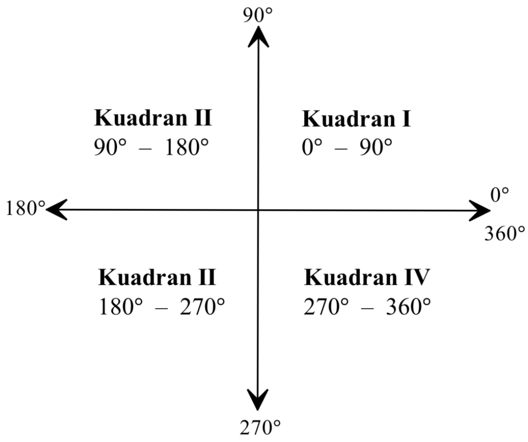
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

atau

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a}$$

Perbandingan trigonometri pada sudut-sudut yang berelasi dapat digunakan untuk menentukan nilai sinus, cosinus dan tangennya. Sudut-sudut berelasi ini dapat dibentuk pada sudut-sudut tertentu, yaitu pada sudut $90°, 180°, 270°$ dan $360°$.

Sudut-sudt berelasi pada trigonometri yaitu dengan memperhatikan kuadran sudut dan sudut istimewa yang ada.



Gambar 47 Kuadran

Pada kuadran I, semua bentuk trigonometri bernilai positif.

Pada kuadran II, hanya nilai sinus dan kosekan yang bernilai positif.

Pada kuadra III, hanya nilai Tangen dan Cotangen yang bernilai positif.

Pada kuadran IV, hanya nilai Kosinus dan Sekan yang bernilai positif.

Berdasarkan sifat ini, maka dapat diperoleh bahwa nilai-nilai trigonometri pada sudut-sudt yang berelasi sebagai berikut:

1. Kuadran I

$$\cos(90-\alpha)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\tan(90-\alpha)^\circ = \cot\alpha^\circ$$
$$\cot(90-\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$
$$\sec\,(90-\alpha)^\circ = \csc\alpha^\circ$$
$$\csc(90-\alpha)^\circ = \sec\alpha^\circ$$

2. Kuadran II

$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180-\alpha)^\circ = -\tan\alpha^\circ$$
$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cot\alpha^\circ$$
$$\sec(180-\alpha)^\circ = -\sec\alpha^\circ$$

3. Kuadran III

$$\sin(180+\alpha)^\circ = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(180+\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180+\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

4. Kuadran IV

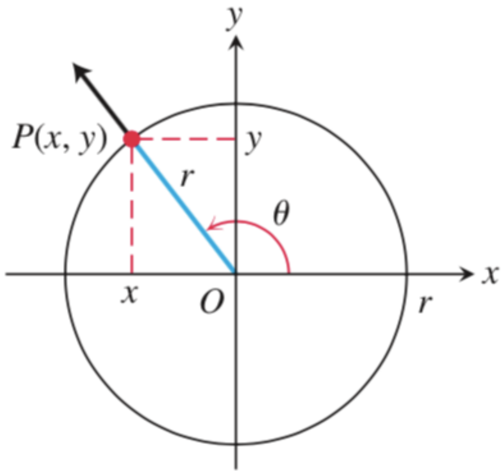
$$\sin(360-\alpha)^\circ = \sin\,(-\theta^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(360-\alpha)^\circ = \cos\,(-\theta^\circ) = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(360-\alpha)^\circ = \tan\,(-\theta^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$

Selain itu untuk bilangan bulat n berlaku

$$\sin(\alpha+n.360)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\cos(\alpha+n.360)^\circ = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(\alpha+n.360)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

7.4 Koordinat Kutub (Koordinat Polar)

Pada umumnya letak suatu titik pada suatu bidang $x-y$ dapat disajikan dengan menggunakan koordinat kartesius dan koordinat kutub. Perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 48 Koordinat kutub

Jika pada koordinat kartesius diketahui titik $P(x, y)$ maka dapat kita ubah dalam bentuk trigonometri dengan menggunakan perbandingan sisi segitiga siku-siku seperti berikut

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $cosec\ \theta = \frac{r}{y}$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$

$\cot\theta = \frac{x}{y}$

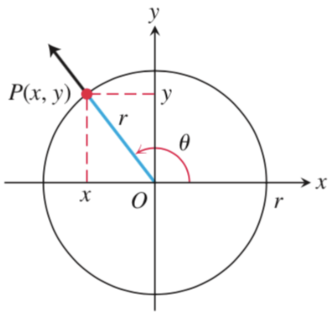
Berdasarkan persamaan ini, maka titik P pada koordinat kartesius diata dapat kita ubah menjadi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ sehingaa titik P menjadi $(r\cos\theta, r\ sin\ \theta)$. Pada koordinat polar atau kutub, titik P biasanya dituliskan dengan $P(r, \theta)$.

Berikut ini nilai sin, cos dan tan pada sudut-sudut istimewa

Derajat	**-135**	**-90**	**-45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**
Radian	$-\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
Sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tan	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$

7.5 Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri dapat diperoleh dari hubungan phytagoras yang ditinjau secara geometri. Perhatikan bahwa trigonometri dikembangkan dari segitiga siku-siku. Lebih lanjut, dapat kita gunakan untuk menemukan identitas trigonometri.



Gambar 49 Identitas Trigonometri

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ingat bahwa □ $= r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, maka

$$r^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2$$
$$r^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$
$$r^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$
$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

atau biasanya ditulis dengan

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

(1)

selanjutnya jika persamaan ini diubah dengan membagikannya dengan $\sin^2 \theta$ diperoleh

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\cot^2 \theta + 1 = cosec^2\theta$$

atau

$$\cot^2 \theta - cosec^2\theta = 1$$

Jika persamaan (1) dibagikan dengan $\cos^2 \theta$ diperoleh

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$
$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

atau

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

7.6 Grafik Fungsi Trigonometri

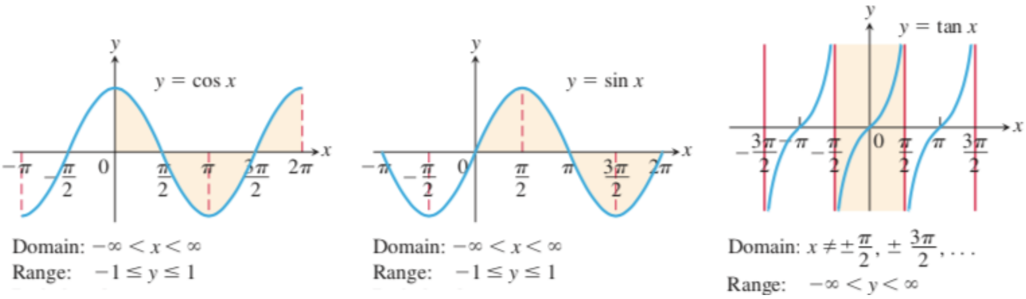
Fungsi yang memetakan himpunan sudut x° ke himpunan bilangan riil $\sin x^\circ$, $\cos x^\circ$, dan $\tan x^\circ$ disebut sebagai fungsi sinus, fungsi kosinus dan fungsi tangen, yang dilambangkan dengan:

$f: x \rightarrow \sin x^\circ$ atau $f(x) = \cos x^\circ$

$f: x \rightarrow \cos x^\circ$ atau $f(x) = \cos x^\circ$

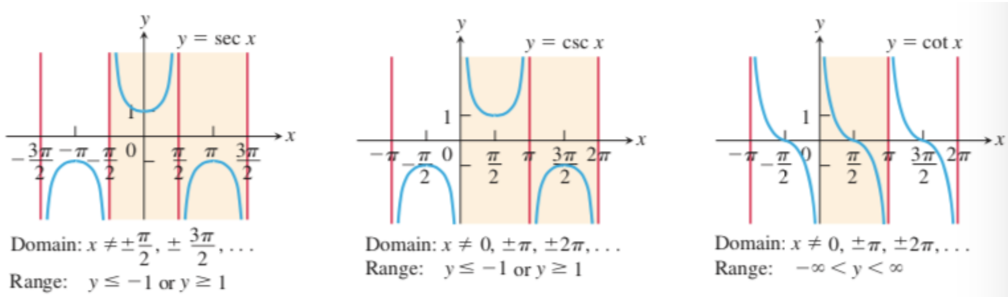
$f: x \rightarrow \tan x^\circ$ atau $f(x) = \tan \square^\circ$

fungsi-fungsi trigonometri tersebut dapat digambarkan seperti pada grafik berikut ini.



Gambar 50 Grafik sinus, cosinus dan tangen

Lebih lanjut digambarkan beberapa fungsi trigonometri yang lain yaitu untuk sekan, kosekan dan kotangen, seperti tampak pada gambar berikut ini.

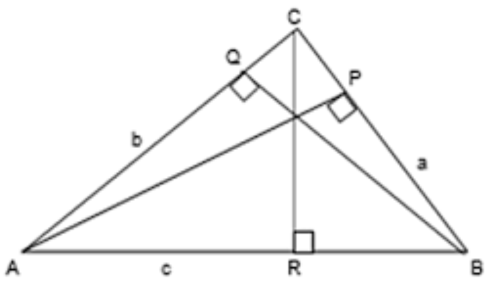


Gambar 51 Grafik sekan, kosekan dan tangen

7.7 Dalil-Dalil dalam Segitiga

1. Aturan Sinus

Aturan sinus diperoleh dengan memperhatikan segitiga lancip. Perhatikanlah segitiga lancip berikut ini.



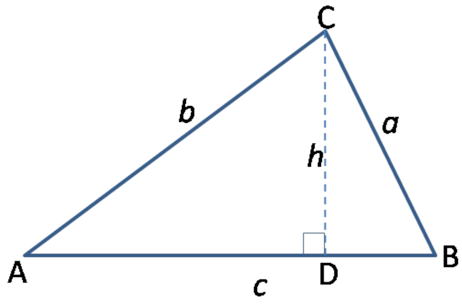
Gambar 52 Aturan sinus

Maka aturan sinus adalah

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. **Aturan Kosinus**

Aturan kosinus dapat diperoleh dengan memperhatikan berbagai bentuk segitiga. Sebagai contohnya perhatikan segitiga beriku ini.



Gambar 53 aturan Kosinus

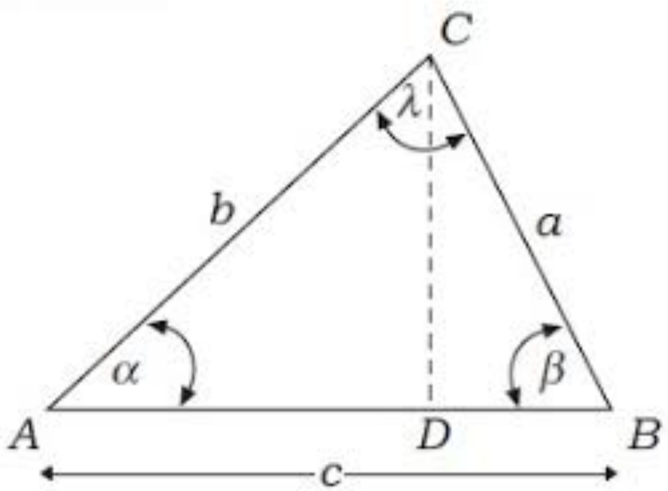
Maka aturan kosinus yang terbentuk adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

3. **Luas Segitiga**

Menentukan luas segitiga dapat dilakukan dengan menggunakan trigonometri.

Perhatikan segitiga berikut.



Gambar 54 Luas segitiga

Berdasarkan gambar diatas, maka luas segitiga dapat dirumuskan dengan

$$L = \frac{1}{2} ab \sin \lambda$$
$$L = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$
$$L = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

4. Rangkuman

1. Hubungan antara radian dan derajat

$$1\, rad = 57{,}2958 \ldots ^\circ$$
$$1^\circ = 0{,}0174 \ldots rad$$
$$\frac{1\, rad}{360^\circ} = \frac{r}{2\pi r}$$

2. Perbandingan sisi-sisi segitiga dapat mendefinisikan bentuk dasar trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$
$$\cos \alpha = \frac{AB}{A\square} = \frac{c}{b}$$
$$\tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

atau

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$

$$cesec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

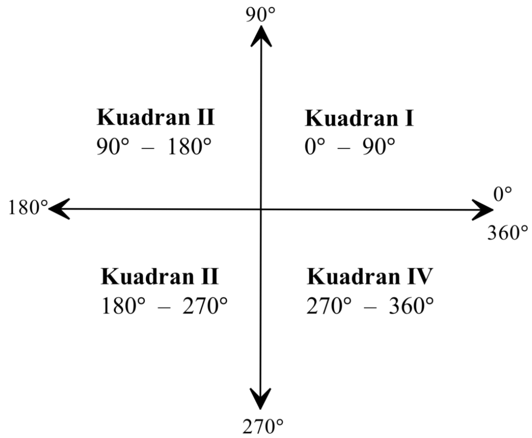
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

atau

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a}$$

3. Sudut-sudut berelasi pada trigonometri yaitu dengan memperhatikan kuadran sudut dan sudut istimewa yang ada.



a. Kuadran I

$$\cos(90-\alpha)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\tan(90-\alpha)^\circ = \cot\alpha^\circ$$
$$\cot(90-\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$
$$\sec\,(90-\alpha)^\circ = \csc\alpha^\circ$$
$$\csc(90-\alpha)^\circ = \sec\alpha^\circ$$

b. Kuadran II

$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180-\alpha)^\circ = -\tan\alpha^\circ$$
$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cot\alpha^\circ$$
$$\sec(180-\alpha)^\circ = -\sec\alpha^\circ$$

c. Kuadran III

$$\sin(180+\alpha)^\circ = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(180+\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180+\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

d. Kuadran IV

$$\sin(360-\alpha)^\circ = \sin(-\theta^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(360-\alpha)^\circ = \cos(-\theta^\circ) = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(360-\alpha)^\circ = \tan(-\theta^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$

Selain itu untuk bilangan bulat n berlaku

$$\sin(\alpha+n.360)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\cos(\alpha+n.360)^\circ = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(\alpha+n.360)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

4. Berikut ini nilai sin, cos dan tan pada sudut-sudut istimewa

Derajat	**-135**	**-90**	**-45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**
Radian	$-\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
Sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tan	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$

5. Identitas trigonometri

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta$$

atau

$$\cot^2\theta - cosec^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

6. Aturan sinus adalah

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

7. Aturan kosinus yang terbentuk adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

8. Luas segitiga dapat dirumuskan dengan

$$L = \frac{1}{2} ab \sin \lambda$$
$$L = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$
$$L = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

5. Latihan

1. Uraikanlah bentuk berikut dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan kosinus, kemudian sederhanakan
   a. $\cos(x - 60)°$
   b. $\cos(x + 45)°$
   c. $\sin(x - 120)°$
   d. $\sin(x + 30)°$
2. Buktikanlah bahwa
   a. $\sin(90 - x)° = \cos x$
   b. $\cos(270 + x)° = \sin x$
   c. $\sin(270 + x) = -\sin x$
   d. $\cos(180 - x) = -\cos x$
3. Jika $\tan A = 1$ dan $\tan B = \sqrt{3}$, tentukanlah :
   a. $\tan(A + B)$
   b. $\tan(A - B)$
4. buktikanlah bahwa
$$\tan(\alpha + 45) = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$
5. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi $c = 2$ dan sudut $A = \frac{\pi}{4}$ dan $B = \frac{\pi}{3}$. Tentukanlah panjang a, b dan besar sudut C.

6. Evaluasi Pembelajaran

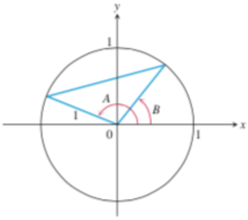
1. Untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut
   a. $\sin 2x = \sin 3x + \sin x$
   b. $6 \cos 2x - 11 \cos x + 8 = 0$
   c. $3 \cos 2x - 10 \cos x + 7 = 0$
   d. $\cos^2 2x - 5 \sin 4x - 6 \sin^2 2x = 0$
2. Gunakanlah rumus penjumlahan trigonometri untuk menyelesaiakan persamaan berikut
   a. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
   b. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

c. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

d. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

3. Buktikanlah bahwa $\tan(A - B) = \frac{\tan \square - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

4. Perhatikanlah gambar dibawah ini. Gunakanlah aturan kosinus untuk membuktikan $\cos(A - B)$



5. Gunakanlah rumus $\cos(A - B)$ untuk mengidentifikasi $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ untuk memperoleh $\sin(A + B)$.

6. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi $a = 2$ dan $b = 3$ dan $C = 60°$. Tentukanlah panjang dari c. Kemudian tentukanlah besar sudut B dengan menggunakan aturan sinus.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 13 : Menguasai Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

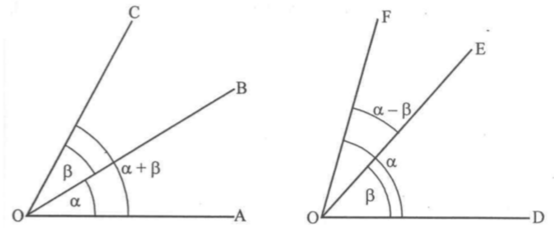
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

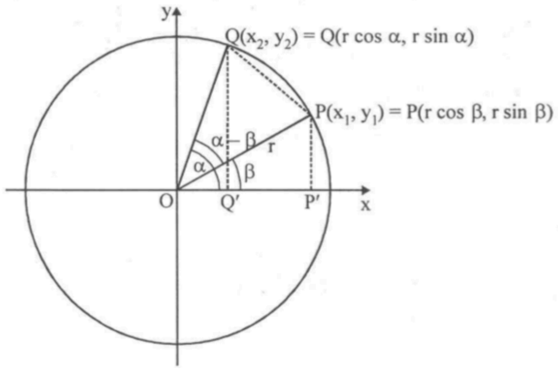
7.8 Rumus-Rumus Trigonometri

Misalnya α dan β adalah sudut-sudut sembarang. Maka jumlah α dan β atau $(\alpha + \beta)$ dan selisih α dan β atau $(\alpha - \beta)$ dapat diilustrasikan dengan gambar berikut.



Gambar 55 Jumlah dan selisih sudut

Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut diantaranya adalah



Gambar 56 Jumlah dan selisih sudut koordinat polar

1. Rumus untuk $cos\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$cos\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$cos\ (\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\square$$

Bukti :

2. Rumus untuk $sin\ (\alpha + \beta)$ dan $sin\ (\alpha - \beta)$

$$sin\ (\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$sin\ (\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

3. Rumus untuk $tan\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Rumus trigonometri untuk sudut rangkap diantaranya adalah

1. Rumus untuk $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Bukti :

Untuk membuktikan rumus ini, dapat kita gunakan rumus jumlah dua sudut yaitu

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$

$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2. Rumus untuk $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Bukti :

Untuk membuktikan rumus ini, dapat kita gunakan rumus jumlah dua sudut yaitu

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$

$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3. Rumus untuk $\tan 2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Bukti :

Dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\beta)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

atau pembuktian lainnya dapat dilakukan dengan

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin \square \cos\alpha}{\cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Rumus trigonometri untuk sudut pertengahan diantaranya adalah

1. Rumus untuk $\sin\frac{1}{2}\alpha$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

2. Rumus untuk $\cos\frac{1}{2}\alpha$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$$

3. Rumus untuk $\tan \frac{1}{2}\alpha$

$\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}$ untuk $\cos \alpha \neq -1$

$\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}$ untuk $\sin \alpha \neq 0$

atau

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}$$

7.9 Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri dituliskan dengan $\sin x = \sin \alpha$ dimana $\alpha \in R$. Untuk meyelesaiakn persamaan trigonometri dapat dilakukan dengan menggunakan hubungan perbandingan trigonometri pada sudut berelasi seperti

$$\sin(180° - \alpha°) = \sin \alpha°$$
$$\sin(\alpha° + k.360°) = \sin \alpha°$$

dengan menggunakan hubungan-hubungan diatas, maka penyelesaian persamaan trigonometri $\sin x° = \sin \alpha°$ dapat ditetapkan sebagai berikut

1. Jika $\sin x° = \sin \alpha°$ dimana $x \in R$, maka $x = \alpha° + k.360°$ atau $x = (180° - \alpha°) + k.360°$ dengan $k \in R$. (x dalam derajat)
2. Jika $\sin x° = \sin A$ dimana $x \in R$, maka $x = A + k.2\pi$ atau $x = (x - A) + k.2\pi$ dengan $k \in R$. (x dalam radian)

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari tiap persamaan berikut ini

7.10 $\sin 2x° = \sin 40°$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360°$

7.11 $\sin 3x° = \sin 45°$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360°$

Jawab :

a. $\sin 2x° = \sin 40°$, maka diperoleh

$2x = 40° + k.360$ atau $2x = (180° - 40°) + k.360$

$x = 20° + k.180$ atau $2x = 140° + k.360$

$x = 70° + k.180°$

untuk $k = 0$ maka $x = 20°$ atau $x = 70°$

untuk $k = 1$ maka $x = 200°$ atau $x = 250°$

Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah $\{20°, 70°, 200°, 250°\}$

b. $\sin 3x° = \sin 45°$, maka diperoleh

$3x = 45° + k.360$ atau $3x = (180° - 45°) + k.360$

$x = 15° + k.120$ atau $3x = 135° + k.360$

$x = 45° + k.120°$

untuk $k = 0$ maka $x = 15°$ atau $x = 45°$
untuk $k = 1$ maka $x = 135°$ atau $x = 165°$
untuk $k = 2$ maka $x = 255°$ atau $x = 285°$
Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah $\{15°, 45°, 135°, 165°, 255°, 285°\}$

Selanjutnya persamaan trigonometri untuk kosinus dan tangen dapat juga diselesaikan seperti pada $\sin x = \sin \alpha$ dimana $\alpha \in R$. Untuk meyelesaiakn persamaan trigonometri $\cos x = \cos \alpha$ dan $\tan x = \tan \alpha$ dapat dilakukan dengan menggunakan hubungan perbandingan trigonometri pada sudut berelasi, yaitu

$$\cos x = \cos \alpha$$

Nilai cosinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 4 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° \\ -\alpha° + k.360° \end{cases}$$

Sedangkan untuk

$$\tan x = \tan \alpha$$

Nilai tangen suatu sudut positif di kuadran 1 dan 3 sehingga untuk persamaan $\tan x = \tan \alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \alpha° + k.180°$$

Persamaan trigonometri lainnya dapat berebtuk persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ maupun berbentuk polynomial. Jika persamaan trigonometri kita berbentuk persamaan kuadrat, maka bentuk penyelsaiannya dapat menggunakan aturan dalam persamaan kuadrat, yaitu dengan pemfaktoran maupun dengan melengkapkan kuadrat sempurna. Untuk menyelesaikan bentuk persamaan kuadrat diperlukan wawasan tentang identitas trigonometri seperti

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

perlu diperhatikan bahwa rentang untuk nilai sinus dan kosinus adalah

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$-1 \le \cos x \le 1$$

Contoh :
Tentukanlah himpunan penyelesaian dari

a. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ untuk interval $0° \leq x \leq 360°$
b. $2 - 2\cos^2 x = \sin x$ untuk interval $0° \leq x \leq 360°$
Jawab :
a. Misalnya $p = \cos x$ maka $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ dapat diubah menjadi

$$p^2 - p - 2 = 0$$
$$(p - 2)(p + 1) = 0$$

Jadi $p_1 = 2$ atau $p_1 = 1$
$\cos x = 2$ atau $\cos x = 1$, dengan $\cos x = 2$ tidak memenuhi penyelesaian. Sehingga $\cos x = -1$

$$x = 180° + k.360°$$

diperoleh nilai $x = 180°$ atau himpunan penyelesaiannya adalah $\{180°\}$

b. $2 - 2\cos^2 x = \sin x$ dapat diubah menjadi

$$2(1 - \cos^2 x) = \sin x$$
$$2(\sin^2 x) = \sin x$$
$$2\sin^2 x = \sin x$$
$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$
$$\sin x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = 0$ atau $\sin x = \frac{1}{2}$

i. $\sin x = 0$

$$x = 0° + k.360°$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 0°$
untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 360°$

□ $= 180° + k.360°$

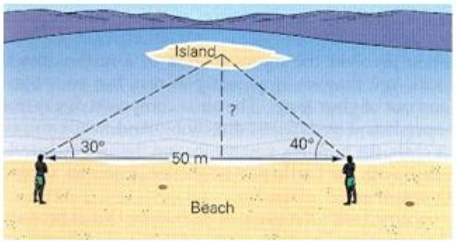
untuk $k = 0$ diperoleh $x_3 = 180°$

ii. $\sin x = \frac{1}{2}$
kuadran I
$x = 30° + k.360°$
untuk $k = 0$ diperoleh $x_4 = 30°$
Kuadran II
$x = (180° - 30°) + k.360°$
$x = 150° + k.360°$
untuk $k = 0$ diperoleh $x_5 = 150°$

Himpunan penyelesaian dari persamaan diatas adalah $\{0°, 30°, 150°, 180°\}$

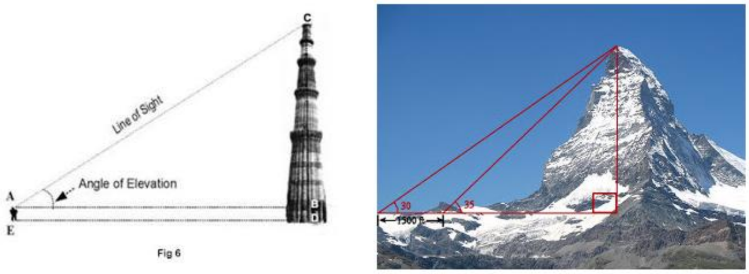
a. Aplikasi Trigonometri

Dalam kehidupan sehari – hari kita sering melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki ataupun gedung bertingkat yang sedang dibangun. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri. Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas. Itu baru sebagian kecil dari manfaat trigonometri, perlu alasan lain untuk menemukan rumus-rumus trgonometri membantu hidup kita. Berikut beberapa contoh penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, misalya dalam navigasi untuk menemukan jarak dari pantai ke suatu titik di laut.



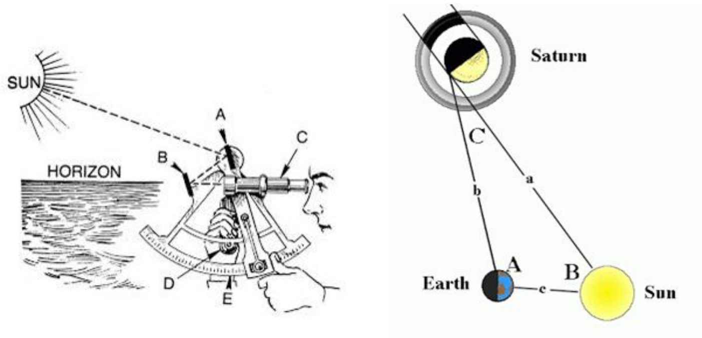
Gambar 57 Titik sudut laut

Trigonometri umumnya juga digunakan dalam mencari ketinggian menara dan pegunungan, pohon dan sebagainya.



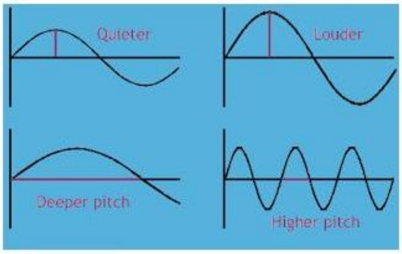
Gambar 58 Tinggi gunung dan menara

Trigonometri juga digunakan dalam oseanografi dalam menghitung ketinggian gelombang air laut dan digunakan astronomi dalam menentukan jarak antara benda-benda angkasa.



Gambar 59 Bumi dan Planet lain

Fungsi sinus dan cosinus merupakan dasar bagi teori fungsi periodik seperti pada gelombang suara dan cahaya.



Gambar 60 Gelombang suara dan cahaya

Arsitek menggunakan trigonometri untuk menghitung beban struktural, kemiringan atap, permukaan tanah dan banyak aspek lain, termasuk bayangan matahari dan sudut cahaya.

4. Rangkuman

1. Rumus untuk $cos\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$cos\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$cos\ (\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

2. Rumus untuk $sin\ (\alpha + \beta)$ dan $sin\ (\alpha - \beta)$

$$sin\ (\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$sin\ (\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

3. Rumus untuk $tan\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$tan\ (\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$tan\ (\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

4. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
5. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
6. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
7. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos □}{2}}$
8. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$
9. $\tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
10. $\sin(180° - \alpha°) = \sin\alpha°$
11. $\sin(\alpha° + k.360°) = \sin\alpha°$
12. Jika $\sin x° = \sin\alpha°$ dimana $x \in R$, maka $x = \ \alpha° + k.360°$ atau $x = (180° - \alpha°) + k.360°$ dengan $k \in R$. (x dalam derajat)
13. Jika $\sin x° = \sin A$ dimana $x \in R$, maka $x = \ A + k.2\pi$ atau $x = (x - A) + k.2\pi$ dengan $k \in R$. (x dalam radian)
14. Untuk persamaan $\cos x = \cos\alpha$ penyelesaiannya adalah:
$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° \\ -\alpha° + k.360° \end{cases}$$
15. Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas.

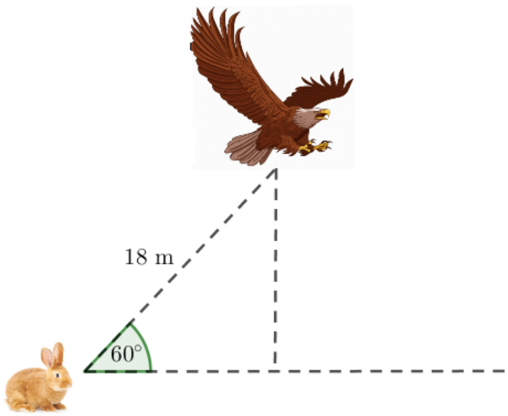
5. Latihan

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Jika titik P di tengah-tengah AB dan titik Q di tengah-tengah BC, maka jarak titik H dengan garis PQ adalah … .
2. Jika $sin\ \alpha, cos\ \alpha, \frac{3}{2}$ membentuk barisan geometri, maka jumlah 8 suku pertamanya adalah … .
3. Jika $\cos x = 2\sin x$, maka nilai $\sin x \cos x$ adalah
4. Jika $3\sin x + 4\cos y = 5$, maka nilai maksimum $3\cos x + 4\sin y$ adalah

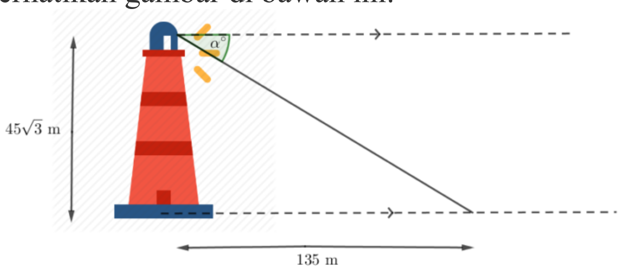
5. Diketahui $1 + \log_3(\tan x) + (\log_3(\tan x))^2 + (\log_3(\tan x))^3 + \cdots = \frac{2}{3}$, dengan $0 \le x \le \pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}$, nilai $\sin 2x$ adalah

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Jika $\sin x + \cos x = a$, maka $\sin^4 x + \cos^4 x = \cdots$
2. Jika sudut α memnuhi $\cos^2 \alpha + 2\sin(\pi - \alpha) = \sin^2(\pi + \alpha) + 1\frac{1}{2}$ maka $\sin \alpha = \cdots$
3. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle A = \alpha$, $\angle B = 90°$ dan $\angle C = \gamma$. Jika $\cos \alpha = x$, maka $\cos(\alpha + 2\,\gamma) = \cdots$
4. Jika $\sin \alpha + \sin \beta = 2\sqrt{A}$ dan $\cos \alpha + \cos \beta = 2\sqrt{B}$, maka $\cos(\alpha - \beta) = \cdots$
5. Misalkan ABC adalah segitiga siku-siku pda titik C. Jika panjang sisi dihadapan A, B dan C berturut-turut adalah a, b, c maka $\cos 2A = \cdots$
6. Seekor kelinci yang berada di lubang tanah tempat persembunyiannya melihat seekor elang yang sedang terbang dengan sudut 60◦ (lihat gambar). Jika jarak antara kelinci dan elang adalah 18 meter, maka tinggi elang dari atas tanah adalah ⋯ meter.

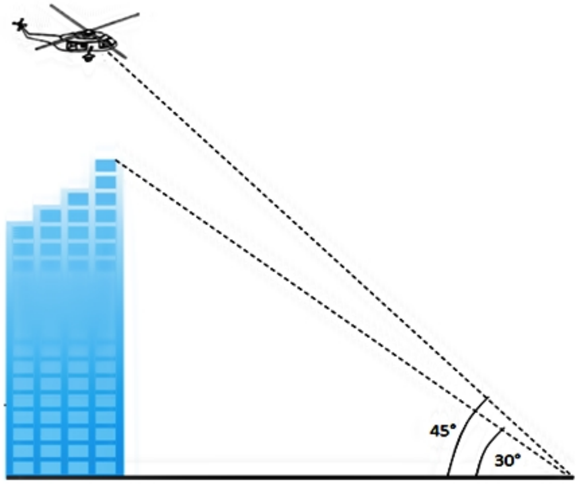


7. Perhatikan gambar di bawah ini.



Diketahui seseorang yang berada di atas mercusuar dengan tinggi 453 meter sedang mengamati sebuah objek di bawahnya dengan jarak antara objek dan mercusuar sejauh 135 meter. Sudut depresi yang terbentuk adalah

8. Dari suatu titik pada bukit, tampak ujung-ujung suatu landasan pacu Bandara Kuala Namu yang sedang dibangun horizontal dengan sudut depresi $53°$ dan $14°$. Jarak ujung landasan yang lebih dekat sepanjang lereng bukit adalah 870 meter. Jika $sin\,53° = 0{,}8$ dan $\tan 14° = 0{,}25$, maka panjang landasan pacu tersebut adalah ··· meter.
9. Sebuah mobil melaju dari tempat A sejauh 16 km dengan arah $40°$, kemudian berbelok sejauh 24 km ke tempat B dengan arah $160°$. Jarak A dan B adalah…km.
10. Perhatikan gambar berikut.



Gambar di atas menunjukkan seorang anak yang berada pada jarak 32 meter dari kaki sebuah gedung. Ia mengamati puncak gedung dan helikopter di atasnya dengan sudut elevasi masing-masing $30°$ dan $45°$. Hitunglah tinggi helikopter tersebut dari atas gedung.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul
   Modul Tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Trigonometri dan Aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran
   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Trigonometri	Identitas	Rangkap	Sinus
Kosinus	Tangen	Sekan	Kosekan
Kotangen	Radian	Derajat	

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

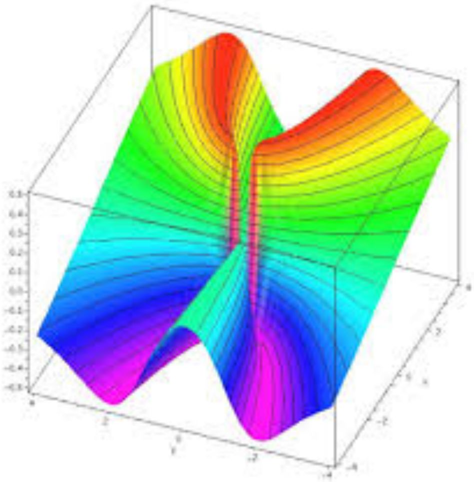
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 8

LIMIT DAN KEKONTINUAN

Semua orang punya batasnya masing-masing. Namun semua orang punya kesempatan dan kemampuan untuk menembus batas dan berjuang.

-SCP



Pendidikan Matematika

FKIP UKI

MODUL 8 LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Limit merupakan suatu materi dasar yang digunakan dalam menentukan batas suatu fungsi tertentu. Limit banyak digunakan dalam menyelesaiakn berbagai permasalahan sehari-hari seperti dalam perusahaan memproduksi barang tertentu dan bagian kesehatan. Sering sekali limit menjadi materi yang sulit dimengerti oleh peserta didik, namun dengan adanya penjebaaran yang rinci melalui modul ini, diharapkan mahasiswa dapat menguasai materi yang ada hingga akhirnya dapat mengaplikasikannya dikemudian hari bahkan menyelesaikan berbagai permasalahan yang ada. Dalam modul ini akan membuat materi limit dari yang sangat dasar sekali dan modul ini dapat digunakan secara mandiri maupun berkelompok.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Enam

Sikap

S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan

etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus
KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan
P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. **Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan**
   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.
   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. **Prasyarat Kompetensi**
   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. **Kegunaan Modul Delapan**
   Kegunaan modul Delapan ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi limit dan kekontinuan

beserta aplikasinya. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. **Materi Pokok dan Sub Materi Pokok**

Materi pada modul ini mencakup : Pengertianlimit, definisi limit dengan epsilon delta, operasi limit, limit tak hingga dan asimtot limit.

D. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

Minggu ke- 14: Menguasai konsep dasar limit dan kekontinuan beserta operasinya

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

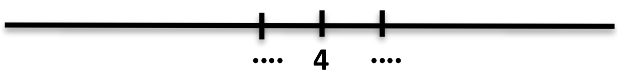
Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan limit dan kekontinuan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

8.1 Apa itu Limit?

Secara etimologi, limit berarti batas. Didalam matematika, limit merupakan konsep dasar di dalam analisis dan kalkulus tentang kelakuan suatu fungsi mendekati titik masukan tertentu.

Misalkan kita memiliki garis bilangan berikut :



Gambar 61 Garis bilangan

Pastinya terdapat bilangan yang tak terhingga banyaknya yang mendekati nilai 4 baik dari arah kiri maupun kanan.

Matematikawan abad ketujuh belas sangat tertarik mempelajari gerak benda-benda di dekat bumi, gerak planet dan bintang. Studi ini melibatkan kecepatan benda dana rah geraknya setiap saat, dan mereka mengetahui arah pada saat tertentu sepanjang garis yang bersinggungan dengan jalur gerak. Konsep batas adalah dasar untuk menemukan kecepatan benda yang bergerak dan garis singgung kurva. Dalam modul ini kita akan mengembangkan limit secara intuitif dan formal. Hal ini dilakukan dengan menggunakan batas untuk menggambarkan cara suatu fungsi bervariasi. Beberapa fungsi bervariasi. Fungsi dapat digambarkan yaitu dengan fungsi yang kontinu maupun fungsi yang tidak kontinu atau biasa disebut dengan fungsi yang melompat. Fungsi-fungsi yang akan dibahas bervariasi dan tidak menentu, atau cenderung meningkat atau cenderung menurun.

Limit muncul ketika menemukan laju perubahan sesaat dari suatu fungsi atau garis singgung kurva. Ini merupakan definisi informal limit yang menunjukkan bagaimana kita menghitung nilai limit.

8.1 Limit Fungsi

Suatu fungsi $f(x)$ dapat kita tentukan nilainya dengan mensubstitusikan nilai domainnya kepada fungsi yang ada. Namun pada beberapa fungsi tertentu, ada kondisi dimana kita tertarik untuk mengetahui nilai dari fungsi didekat titik tertentu c, namun tidak di c. Misalnya kita memiliki fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Maka kita dapat melihat bagaimana kondisi fungsi $f(x)$ tersebut disekitar $x = 1$, karena penyelesaian dari fungsi tersebut adalah $x \neq 1$ (karena penyebut tidak boleh bernilai 0). Maka untuk menyelesaikannya dapat kita sederhanakan terlebih dahulu menjadi

$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ untuk $x \neq 1$.

Dalam hal ini maka kita simpulkan bahwa fungsi $f(x)$ dapat terdefinisi kecuali di titik $x = 1$, sehingga biasa disebut dengan terdefinisi pada interval terbuka. Sehingga fungsi tersebut tidak kontinu di titik $x = 1$. Namun jika sembarang nilai $f(x)$ berada didekat L untuk semua nilai x

yang mendekati nilai c, kita katakan bahwa nilai $f(x)$ pada batas L ketika x mendekati c, dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Sehingga pada fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dapat kita simpulkan bahwa

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ atau $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

8.2 Aturan Limit

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, c dan k adalah bilangan riil dan

   $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

   a. Aturan penjumlahan

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

   b. Aturan selisih

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

   c. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\lim_{x\to c}\big(k.f(x)\big) = k.L$$

d. Aturan pembagian

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L.M$$

e. Aturan pangkat

$\lim_{x\to c}\big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

f. Aturan akar

$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

g. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

h. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

i. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

j. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

Contoh :

1. $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x - 3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x - \lim_{x\to c} 3 = c^3 + 4c - 3$

2. $\lim_{x \to c} \frac{x^4+x^2-1}{x^2+5} = \frac{\lim_{x \to c}(x^4+x^2-1)}{\lim_{x \to c}(x^2+5)}$

$$= \frac{\lim_{x \to c} x^4 + \lim_{x \to c} x^2 - \lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2 + \lim_{x \to c} 5}$$

$$= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

3. $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x \to -2} (4x^2 - 3)}$

$$= \sqrt{\lim_{x \to -2} 4x^2 - \lim_{x \to -2} 3}$$

$$= \sqrt{4(-2)^2} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{16 - 3}$$

$$= \sqrt{13}$$

8.3 Definisi Limit

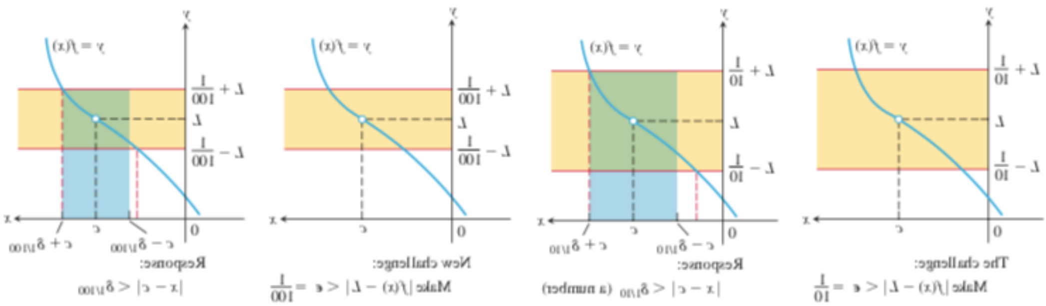
Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval terbuka c, kecuali di titik c. Maka nilai limit dari $f(x)$ dimana x mendekati c adalah L, yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat sembarang bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku,

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Definisi ini dapat kita lihat representasinya pada grafik berikut ini



Gambar 62 Definisi limit epsilon dan delta

Contoh :

Buktikanlah bahwa

$$\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2$$

Jawab :

Dari bentuk limit yang ada diketahui bahwa $c = 1$, $f(x) = 5x - 3$ dan $L = 2$. Misalkan $\epsilon > 0$, maka kita harus menemukan $\delta > 0$ sehingga jika $x \neq 1$ dan x berada disekitar δ dari $c = 1$, yaitu ketika

$$0 < |x - 1| < \delta$$

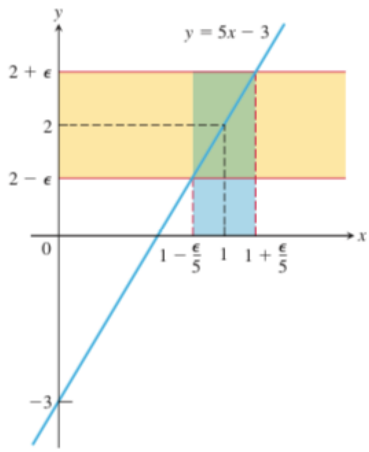
adalah benar bahwa $f(x)$ sekitar ϵ dari $L = 2$, seingga

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

Sebaliknya kita akan menemukan nilai δ melalui pertidaksamaan ϵ:

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5|$$
$$< \epsilon$$
$$5|x - 1| < \epsilon$$
$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$$

Selanjutnya kita ambil $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, (seperti tampak pada gambar dibawah ini).



Gambar 63 Contoh limit yang terdefinisi epsilon dan delta

Jika $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$, maka

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

sehingga terbukti bahwa $\lim_{x\to 1}(5x - 3) = 2$.

Untuk menemukan δ dimana diketahui f, L, c dan $\epsilon > 0$, dapat ditentukan dengan dua langkah berikut:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a, b) yang memuat c dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq c$.
2. Menentukan nilai $\delta > 0$ padainterval $(c - \delta, c + \delta)$ yang berpusat pada c di dalam interval (a, b). Pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq c$ pada interval δ.

Contoh:

Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ jika

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

Jawab:

Untuk menyelesaikannya, dapat kita ikuti langkah-langkah diatas seperti:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x) - 4| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a, b) yang memuat $x = 2$ dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq 2$.

   Untuk $x \neq c = 2$, kita mempunyai $f(x) = x^2$, dan pertidaksamaan untuk menemukan penyelesaiannya adalah $|x^2 - 4| < \epsilon$.

$$|x^2 - 4| < \epsilon$$

$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$

$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$

$$\sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}$$

jadi pertidaksamaan $|f(x) - 4| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq 2$ di interval terbuka $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$

2. Menentukan nilai $\delta > 0$ yang berpusat pada interval $(2-\delta, 2+\delta)$ di dalam interval $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$.

   Kita ambil δ sebagai jarak dari $x = 2$ yang mendekati titik akhir $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$. Dengan kata lain, ambil $\delta = \min\left\{\left(2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\right)\right\}$. Jika δ memiliki bilangan tersebut atau yang lebih kecil dan bernilai positif, pertidaksamaan $0 < |x - 2| < \delta$ akan otomatis berada pada x diantara $\sqrt{4-\epsilon}$ dan $\sqrt{4+\epsilon}$ untuk membuat $|f(x) - 4| < \epsilon$. Untuk semua x,

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

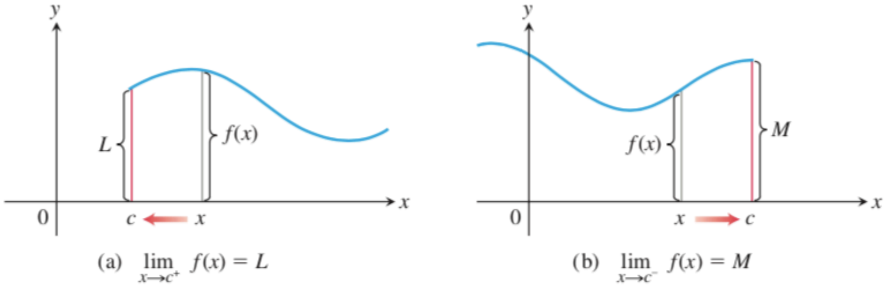
   sehingga pembuktian kita sudah lengkap untuk $\epsilon < 4$.

8.4 Limit Satu Sisi

Untuk memiliki sebuah limit L diman x mendekati c, sebuah fungsi f haruslah terdefinisi dari dua arah c dan nilai dari $f(x)$ dari keuda arah tersebut haruslah L, f haruslah terdefinisi di beberapa interval terbuka disekitar c, tapi tidak tepat di c. Hal ini menyatakan bahwa limit adalah dua arah.

Jika f tidak memenuhi pada duarah di c, maka dapat dimungkinkan limit satu arah. Jika limit dari arah kanan maka disebut dengan limit kanan dan jika dari arah kiri disebut sebagai limit kiri.

Limit kanan biasanya dituliskan dengan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (c, b), x mendekati c dan $c < b$. Sedangkan limit kiri dituliskan dengan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (a, c), x mendekati c dan $a < c$. Ilustrasi dari definisi limit satu arah diatas dapat digambarkan seperti berikut:



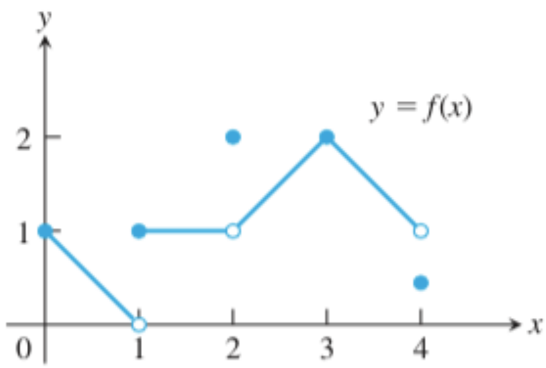
Gambar 64 Limit satu arah

Teorema 1

Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Perhatikan grafik berikut



Gambar 65 Ketidakkontinuan

Dari gambar diatas dapat kita peroleh bahwa :

1. Di titik $x = 0$

   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$dan $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada. Fungsi ini tidak terdefinisi dari arah kiri $x = 0$.

2. Di titik $x = 1$

   $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ walaupun $f(1) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada karena limit kanan dan limit kiri tidak sama.

3. Di titik $x = 2$

   $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ walaupuan $f(2) = 2$.

4. Di titik $x = 3$

   $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 2$.

5. Di titik $x = 4$

   $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, walaupun $f(4) \neq 1$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ dan $\lim_{x \to 4} f(x)$ tidak ada. Fungsinya tidak terdefinisi dari arah kanan $x = 4$.

Berdasarkan hal diatas maka limit satu arah dapat didefinisikan dengan:

Fungsi $f(x)$ memiliki limit kanan di c dan dituliskan dengan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c < x < c + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Selanjutnya fungsi $f(x)$ memiliki limit kiri di c dan dituliskan dengan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c - \delta < x < c \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Jawab:

Misalkan $\epsilon > 0$ dimana diketahui $c = 0$ dan $L = 0$, maka kita akan menentukan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku

$0 < x < \delta \implies \left|\sqrt{x} - 0\right| < \epsilon$ atau $0 < x < \delta \implies \sqrt{x} < \epsilon$. Dengan menguadratkan kedua sisi dari pertidaksamaan diatas maka $x^2 < \epsilon$ jika $0 < x < \delta$.

Jika kita memilih $\delta = \epsilon^2$ maka diperoleh,

$0 < x < \delta = \epsilon^2 \implies \sqrt{x} < \epsilon$ atau $0 < x < \epsilon^2 \implies |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$

sehingga berdasarkan definisi, makan di simpulkan terbukti untuk $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

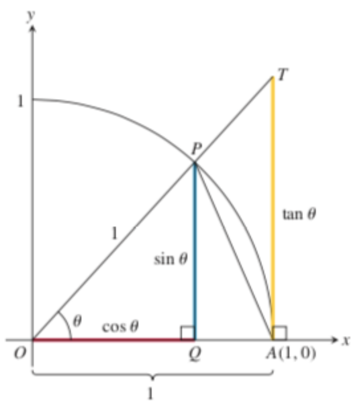
Teorema 2

Limit dari $\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini, maka kita perlu membuktikan bahwa nilai limit kiri dan kanannya bernilai 1.

1. Untuk membuktikan limit kanannya bernilai 1, kita mulai dengan nilai positif dari $\theta < \frac{\pi}{2}$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 66 Limit bernilai 1

Dari gambar diatas diperoleh

$$\text{Luas } \Delta OAP < Luas\ Juring\ OAP < Luas\ \Delta OAT$$

Hal ini dapat dinyatakan dengan

$$\text{Luas } \Delta OAP = \frac{1}{2}\ alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{Luas juring } \Delta OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Luas } \Delta OAT = \frac{1}{2}alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Sehingga,

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

Jika pertidaksamaan ini kita bagi dengan $\frac{1}{2}\sin\theta$ akan bernilai positif karena $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, yaitu:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

dengan mengambil kebaikan dari pertidaksamaan ini diperoleh bahwa

$$1 > \frac{\theta}{\sin\theta} > \frac{1}{\cos\theta}$$

Karena $\lim_{x\to 0^+} \cos\theta = 1$ maka dengan menggunakan Teorema Sandwhich diperoleh

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

2. Untuk membuktikan limit kirinya kita akan menggunakan fungsi ganjil yaitu $\sin\theta$ dan θ. Sehingga, $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ adalah fungsi genap yaitu grafik yang simetrik pada sumbu y. Kesimetrian ini mengakibatkan limit kiri di 0 ada dan nilainya sama dengan limit kanan.

$$\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Jadi berdasarkan pembuktian limit kiri dan limit kanan diatas, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

Contoh :

1. Tentukanlah nilai limit dari :

   a. $\lim_{p \to 0} \frac{coh\, p - 1}{p} = 0$

   b. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

   Jawab :

   a. $\lim_{p \to 0} \frac{coh\, p - 1}{p} = \lim_{p \to 0} - \frac{2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p}$

   misalkan $\theta = \frac{p}{2}$, maka

   $$\lim_{p \to 0} - \frac{2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p} = - \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \square\ = -(1)(0) = 0$$

   b. untuk menyelesaiakn persamaan ini, maka kita kalikan dengan $\frac{2}{5}$

   yaitu $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{2}{5}\right) .\ \sin 2x}{\left(\frac{2}{5}\right) .\ 5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

   misalkan $\theta = 2x$ maka dengan menggunakan teorema 2 diatas diperoleh hasilnya adalah $\frac{2}{5}$.

2. Tentukanlah nilai limit dari :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t}$$

   Jawab:

   Dengan menggunakan definisi dari $\tan t$ dan $\sec 2t$, kita memiliki

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t\sec 2t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}=\frac{1}{3}(1)(1)(1)=\frac{1}{3}$$

8.5 Kekontinuan

Misalkan c adalah bilangan riil di sumbu x. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kanan di titik c jika $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kiri di c jika $\lim_{c\to c^-} f(x)=f(c)$.

Dengan menggunakan teorema 7.1 secara langsung didapat bahwa fungsi f adalah kontinu di titik c dari domainnya jika dan hanya jika kontinu di kiri dan dikanan. Kita sebut sebuah fungsi adalah kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ jika kontinu kanan di a, kontinu kiri di b dan kontinu di seluruh titik interior dari intervalnya. Jika sebuah fungsi tidak kontinu di titik interior c dari domainnya, maka kita sebut f tidak kontinu di c, dan c adalah sebuah titik yang tidak kontinu dari fungsi f. Ingatlah bahwa fungsi f dapat dikatakan kontinu, kontinu kanan, kontinu kiri hanya di titik c dengan syarat $f(c)$ terdefinisi.

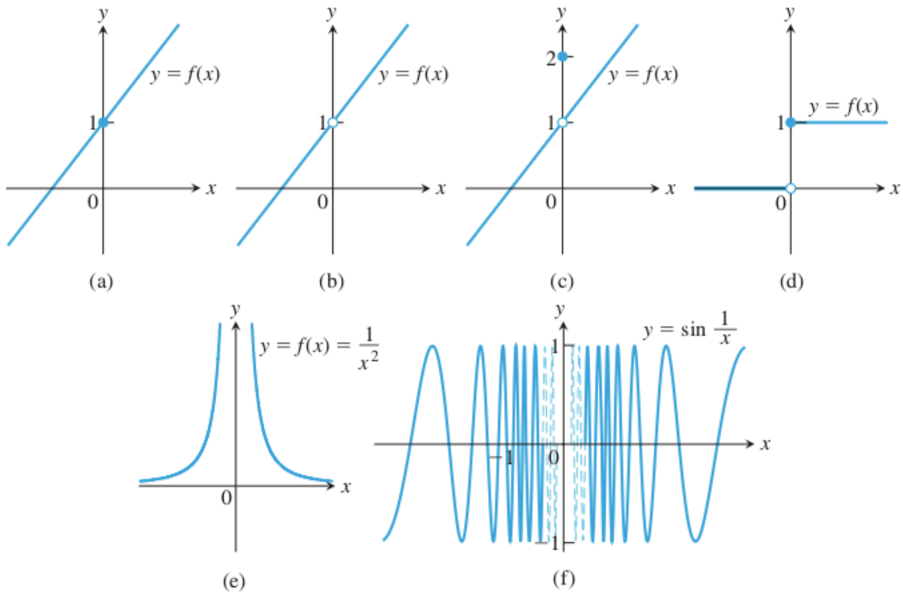
Dapat kita simpulkan kekontinuan di titik interior dengan menggunakan bentuk tes kontinu berikut:

Sebuah fungsi $f(x)$ adalah kontinu di titik $x=c$ jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi berikut:

1. $f(c)$ ada (c berada di domain f)
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ ada (f memiliki sebuah limit ketika $x\to c$)

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya)

Perhatikan grafik berikut ini:



Gambar 67 Kekontinuan

Dari gambar diatas terdapat beberapa tipe dari ketidakkontinuan. Pada gambar (a) merupakan kontinu di $x = 0$, gambar (b) seharusnya kontinu jika $f(0) = 1$. Selanjutnya gambar (c) harusnya kontinu jika $f(0)$ bernilai 1 bukan 2. Ketidakkontinuan pada gambar (c) ini ditolak atau *removable*. Fungsi seperti ini memiliki nilai limit ketika $x \to 0$ dan kita dapat menghilangkan ketidakkontinuan dengan mengatur $f(0)$ sama dengan nilai limitnya.

Lebih jauh lagi pada gambar (d) melalui f sangat kompleks, yaitu $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada dan tidak ada kemungkinan mengubah nilai f menjadi 0. Sehingga pada kondisi ini disebut sebagai ketidakkontinuan yang lompat (*jump discontinuity*), yaitu limit satu sisinya ada tapi memiliki nilai yang berbeda. Fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pada gambar (e) memiliki ketidakkontinuan yang tak terbatas (*infinite discontinuity*). Fungsi di gambar (f) memiliki ketidakkontinuan yang berisolasi (*oscillating discontinuity*), yaitu pergerakan yang kesana kemari sangat banyak untuk memiliki nilai limit ketika $x \to 0$.

Sebuah fungsi dikatakan fungsi yang kontinu jika kontinu di setiap tidak dari domainnya. Hal ini kita sebut sebagai sifat dari fungsi. Sebuah fungsi selalu memiliki domain yang spesifik. Jika kita mengubah domain, maka kita mengubah fungsinya yang berarti juga memungkinkan untuk mengubah sifatnya.

Misalkan fungsi $y = \frac{1}{x}$ adalah fungsi yang kontinu karena kondisinya adalah kontinu disetiap titik dari domainnya. Fungsi ini tidak kontinu pada titik $x = 0$, karena tidak terdefinisi pada titik tersebut. Sehingga fungsi ini tidak kontinu di setiap titik yang mengandung $x = 0$.

Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

1. Operasi Penjumlahan

$$f + g$$

2. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f - g$$

3. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \qquad \text{untuk setiap nilai } k$$

4. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

5. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

6. Perpangkatan

$$f^n \qquad \text{untuk } n \text{ adalah bilangan bulat positif}$$

7. Bentuk Akar

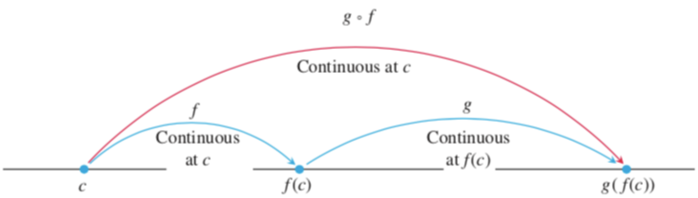
$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

Sifat-sifat ini dapat kita gunakan untuk membuktikan rumus limit. Salah satunya asalah sifat penjumlahan pada limit yaitu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c)+g(c)\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan ini, dapat kita simpulkan bahwa $f+g$ adalah kontinu.

Semua komposisi dari fungsi-fungsi yang kontinu adalah kontinu. Jika $f(x)$ adalah kontinu di $x=c$ dan $g(x)$ adalah kontinu di $x=f(c)$, maka $g\circ f$ adalah kontinu di $x=c$. Kondisi ini menyatakan nilai limitnya ketika $c\to c$ adalah $g\big(f(c)\big)$. Hal ini dapat digambarkan seperti pada gambar berikut ini



Gambar 68 Limit fungsi komposisi

Secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk teorema berikut:

Teorema 3

Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x\to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$$

Bukti :

Misalkan $\epsilon > 0$. Karena g adalah kontinu di b, maka terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga

$|g(y) - g(b)| < \epsilon$ dimana $0 < |y - b| < \delta_1$.

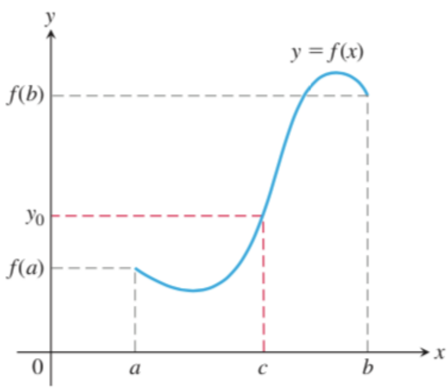
Karena $\lim_{x \to c} f(x) = b$, terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$.

Jika kita misalkan $y = f(x)$, maka kita memperoleh

$|y - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$

dimana hal ini mengakibatkan $|g(y) - g(b)| = \left|g\big(f(x)\big) - g(b)\right| < \epsilon$ ketika $0 < |x - c| < \delta$. Sehingga berdasarkan definisi limit terbuktilah $\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b)$.

Jika f adalah sebuah fungsi yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, dan jika $y_0$adalah nilai diantara $f(a)$ dan $f(b)$, maka $y_0 = f(c)$ untuk c di $[a, b]$. Seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 69 Kontinu pada interval tertutup

4. Rangkuman

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$

2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, c dan k adalah bilangan riil dan $\lim_{x\to c} f(x) = L, \lim_{x\to c} g(x) = M$, maka

   a. Aturan penjumlahan

   $$\lim_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

   b. Aturan selisih

   $$\lim_{x\to c}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

   c. Aturan perkalian dengan konstanta

   $$\lim_{x\to c}\big(k.f(x)\big) = k.L$$

   d. Aturan pembagian

   $$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L.M$$

   e. Aturan pangkat

   $\lim_{x\to c}\big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

   f. Aturan akar

   $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

   g. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

   $$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

   h. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

i. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

j. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

5. Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

6. Limit dari $\frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

7. Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

   i. Operasi Penjumlahan

$$f + g$$

   ii. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f - g$$

   iii. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \text{ untuk setiap nilai } k$$

   iv. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

   v. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

   vi. Perpangkatan

$$f^n \qquad \text{untuk } n \text{ adalah bilangan bulat positif}$$

vii. Bentuk Akar

$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

8. Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x \to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

5. Latihan

1. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada

   a. $lim \frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to 2$

   b. $lim \frac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to -1$

   c. $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2. Tentukanlah limit dari $g(x)$ ketika x mendekati nilai yang diketahui

   a. $\lim_{x \to 0^+} \left(4g(x)\right)^{\frac{1}{3}} = 2$

   b. $\lim_{x \to \sqrt{5}} \left(\frac{1}{x+g(x)}\right) = 2$

3. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

   b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3}$

   c. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$

4. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

   a. $f(x) = x + 1, L = 5, c = 4, \epsilon = 0.01$

b. $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, c = 0, \epsilon = 0.1$

c. $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, c = 4, \epsilon = 0.05$

5. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.

a. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-7) = 2$

b. $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x-5} = 2$

6. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

a. $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

b. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

c. $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

7. Gunakanlah $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\csc 2x}{\cos 5x}$

b. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$

c. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

8. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu

a. $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

b. $y = \frac{x+3}{\boldsymbol{x^2-3x-10}}$

c. $y = \frac{\cos x}{\boldsymbol{x}}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada

   a. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

   b. $\lim\limits_{x\to\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\sin x\right)$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin x}$

2. Tentukanlah limit dari $g(x)$ ketika x mendekati nilai yang diketahui

a. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{3x^2+1}{g(x)}\right) = \infty$

b. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{5-x^2}{\sqrt{g(x)}}\right) = 0$

3. Tentukanlah limit dari

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+\sin x + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

4. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

a. $f(x) = x^2 - 5, L = 11, c = 4, \epsilon = 1$

b. $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, c = 1, \epsilon = 0.05$

5. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.

a. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1, jika\ f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

6. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

a. $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

b. $\lim\limits_{h \to -2^+} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2}$

c. $\lim\limits_{h \to -2^-} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2}$

7. Gunakanlah $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

b. $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

c. $\lim_{y \to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

8. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu

a. $y = \frac{x \tan x}{\boldsymbol{x^2+1}}$

b. $y = \frac{\boldsymbol{\sqrt{x^4+1}}}{\boldsymbol{1+sin^2 x}}$

c. $y = (2-x)^{\mathbf{1/5}}$

9. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetulnya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa yang menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-15 : Menguasai Limit Tak Hingga
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan himpunan beserta jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi limit tak hingga. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skills.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

8.7 Limit Tak Hingga

1. **Limit berhingga dimana $x \to \pm\infty$**

   Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

   jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

   Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

   jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

   Contoh :

   1. Buktikanlah bahwa

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

   b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Jawab :

a. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = \frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan bulat positif yang lebih besar. Jadi terbukti $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

b. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = -\frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan yang lebih kecil dari $-\frac{1}{\epsilon}$. Jadi terbukti $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. Tentukanlah nilai dari

   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$

   b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$

Jawab:

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} 5 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$

b.
$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x \to -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \\ &= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

2. Limit Tak Hingga Fungsi Rasional

Untuk menentukan limit dari fungsi rasional ketika $x \to \pm\infty$, terlebih dahulu kita membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi x. Hasil yang ada tergantung kepada derajat pada persamaan yang ada.

Contoh :

Tentukanlah limit dari

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1}$

Jawab :

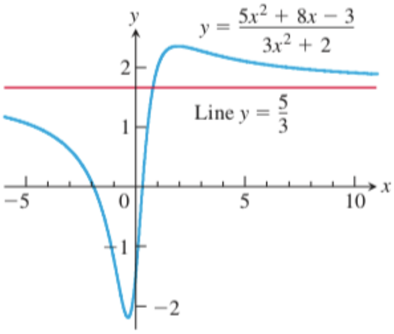
a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$

3. Asimtot Horizontal

Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ atau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Misalkan $f(x) = \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ memiliki garis $y = \frac{5}{3}$ sebagai asimtot horizontal di kiri dan dikanan, karena $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{5}{3}$ dan $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{5}{3}$. Hal ini terihat seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 70 Asimtot Horizontal

Contoh :

1. Tentukanlah asimtot horizontal dari

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$$

Jawab :

Kita menentukan limit ketika $x \to \pm\infty$.

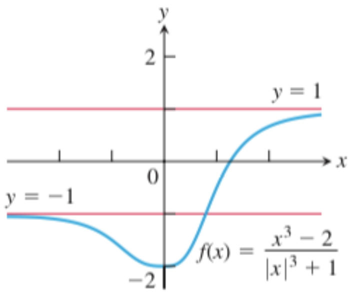
Untuk $x \geq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 1$$

Untuk $x < 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{(-x)^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{-1 + \frac{1}{x^3}} = -1$$

jadi asimtot horizontalnya adalah $y = -1$ dan $y = 1$, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 71 Contoh asimtot horizontal

2. Dengan menggunakan Teorema Sandwhich, tentukanlah asimtot horizontal dari

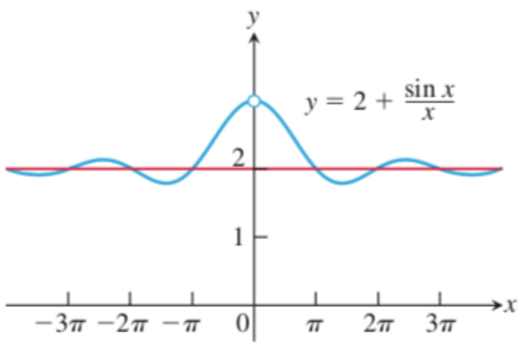
$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

Jawab:

Kita akan menentukannya dengan $x \to \pm\infty$. Karena $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ dan $\lim_{x \to \pm\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$, kita mempunyai $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ dengan menggunakan teorema sandwhich. Sehingga,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 + 0 = 2$$

dengan garis $y = 2$ adalah asimtot horizontal dari kurva kanan dan kiri. Contoh ini mengilustrasikan bahwa kurva yang ada mungkin berpotongan dengan salah satu asimtot horizontalnya beberapa kali.



Gambar 72 asimtot horizontal berpotongan di beberapa titik

4. Asimtot Miring

Jika derajat pangkat pembilang fungsi rasional adalah lebih besar 1 dari derat pangkat penyebutnya, maka grafiknya memiliki asimtot miring. Untuk menemukan persamaannya kita membagikan pembilang dengan penyebutnya untuk mengekspresikan fungsi f seperti fungsi linear ditambah sisa pembagian dimana mendekati 0 ketika $x \to \pm\infty$.

Contoh :

Tentukanlah asimtot miring dari :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

Jawab :

Kita akan menyelesaikannya dengan $x \to \pm\infty$. Kita melakukan pembagian biasa yaitu $x^2 - 3$ membagi $2x - 4$ diperoleh:

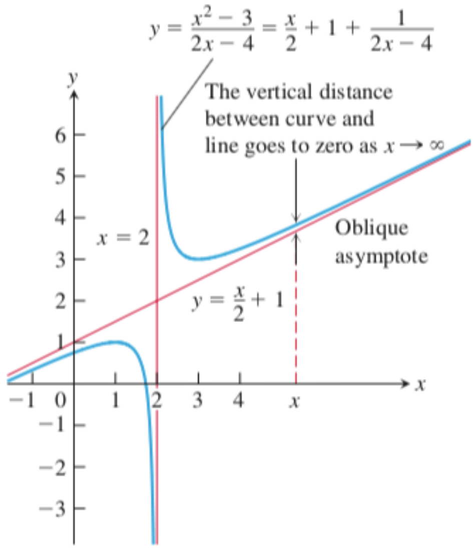
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2x - 4}\right)$$

$\frac{x}{2} + 1$ adalah sebagai linear $g(x)$ dan $\frac{1}{2x-4}$ sebagai sisa pembagian.

Ketika $x \to \pm\infty$, sisa pembagian membuat jarak vertikal antara f dan g, menuju nol, yang membuat garis miring

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

sebagai asimtot dari grafik f. Garis $y = g(x)$ adalah asimtot kiri dan kanan.



Gambar 73 Asimtot miring

5. Limit Tak Hingga

Ingat kembali tentang fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$. Ketika $x \to 0^+$, nilai f meningkat tanpa batas di setiap bilangan riil positif. Misalkan diberikan bilangan riil positif B, bagaimanapun besarnya, nilai dari f menjadi semakin besar. Jadi, f tidak memiliki limit ketika $x \to 0^+$. Berdasarkan hal ini dapat kita deskripsikan kebiasaan dari f dengan menyatakan $f(x)$ mendekati ∞ ketika $x \to 0^+$. Dituliskan dengan

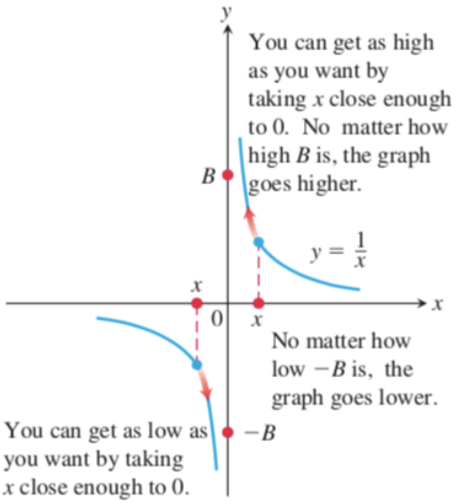
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil ∞, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan positif ketika $x \to 0^+$.

Selanjutnya, ketika $x \to 0^-$, nilai dari $f(x) = \frac{1}{x}$ menjadi besar dan negatif. Misalkan diberikan bilangan riil negatif $-B$, nilai dari f akan berada dibawah $-B$. Kita tuliskan dengan

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil $-\infty$, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan negatif ketika $x \to 0^-$.



Gambar 74 Limit Tak hingga

Contoh:

Tentukanlah nilai dari limit fungsi berikut:

a. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$

b. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$

c. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7}$

Jawab:

a. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

b. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$

c. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-6x^2+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2(x-3)+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} = -\infty$

6. Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > B$.

Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) < -B$

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Jawab:

Misalkan $B > 0$, kita akan mencari $\delta > 0$ sehingga diperoleh

$$0 < |x-0| < \delta$$

yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > B$.

Sekarang dimiliki

$$\frac{1}{x^2} > B \text{ jika dan hanya jika } x^2 < \frac{1}{B}$$

persamaan ini ekuivalen dengan

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$$

kita memilih $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ atau sebarang bilangan bulat negatif yang lebih kecil, sehingga kita peroleh bahwa

$|x| < \delta$ yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B$

Sehingga melalui definisi terbukti bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

7. Asimtot Vertikal

Sebuah garis $x = a$ adalah vertikal asimtot dari grafik fungsi jika

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ atau $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

Contoh :

Tentukanlah asimtot horizontal dan asimtot vertikal dari

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

Jawab:

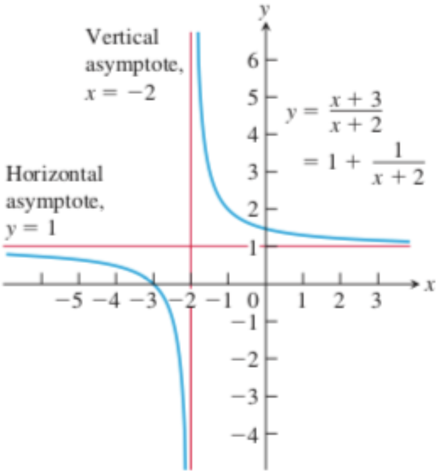
Dalam menyelesaikan ini kita akan menggunakan $x \to \pm\infty$ dan $x \to -2$ dimana penyebut akan menjadi nol.

Persamaan dari fungsi yang ada dapat kita ubah dengan membagikan pembilang dan penyebut sehingga menghasilkan siswa pembagian yaitu

$x + 3$ membagi $x + 2$ yaitu sama dengan

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

ketika $x \to \pm\infty$, kurva mendekati asimtot horizontal $y = 1$; ketika $x \to -2$ kurva mendekati asimtot vertikal $x = -2$. Kita dapat melihat bahwa persamaan ini adalah berasal dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ yaitu naik 1 unit secara vertikal dan bergeser ke kiri sebesar 2 unit, seperti tampak pada gambar dibawah ini. Sehingga asimtotnya seperti garis koordinat yaitu $y = 1$ dan $x = -2$.



Gambar 75 Asimtot Horizontal dan Vertikal

4. Rangkuman

1) Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

2) Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

3) Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

a. Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > B.$

b. Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < -B$

5. Latihan

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

   b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3}$

   c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$

   d. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   e. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$

   b. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$

   c. $y = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

   b. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

   c. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$

   d. $y = \sqrt{\frac{x^2+9}{9x^2+1}}$

4. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{-5x-3}{2x+5}$

   b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-7x}{x+1}$

   c. $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\theta-1}{\theta}$

   d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

   e. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{12x^3+128}$

   f. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   g. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

   b. $f(x) = \frac{\cos 2x-1}{\sin x}$

   c. $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$

b. $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$

c. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

4. Tentukanlah asimtot miring dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

a. $y = x + x\sin\frac{1}{x}$

b. $y = \sqrt{x^2+1}$

c. $y = \sqrt{x^2+2x}$

d. $y = \frac{2x^{5/2}+2x-3}{\sqrt{x}+1}$

5. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

9. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Kontinu	Limit	Asimtot	Epsilon	Delta
Diskontinu	Komposisi			

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 9 MATRIKS, TRIGONOMETRI, LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Trigonometri merupakan salah satu cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga, contohnya seperti sinus, kosinus, dan tangen. Trigonometri sangat banyak digunakan dibidang industri, teknik, astronomi, pelacakan signal, alat0alat medis dan lain sebagainya.

Pada modul ini akan dibahas berbagai teori dan konsep trigonometri seperti rumus dasar trigonometri, identitas trigonometri, sudut-sudt berelasi dan berbagai pengembangan rumus-rumus trigonometri hingga aplikasi trigonometri.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Sembilan

Sikap

S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan

etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus
KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan
P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. **Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan**

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. **Prasyarat Kompetensi**

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. **Kegunaan Modul Sembilan**

   Kegunaan modul tujuh ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi Matriks, Trigonometri, Limit dan

Kekontinuan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. **Materi Pokok dan Sub Materi Pokok**
   Materi pada modul ini mencakup : Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**
   Minggu ke-16 : Menguasai Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan
2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skills.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

9.1 Modul 6

A. Rangkuman 1

a. Matriks M yang berukuran *m* baris dan *n* kolom atau sering disebut matriks berukuran (berordo) *mxn* ditulis dengan M_{mxn} atau M_{mn} adalah

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

b. Matriks Identitas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Matriks Nol

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Matriks Skalar

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e. Matriks Diagonal

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

f. Matriks Segitiga Atas/Bawah

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

g. Matriks Simetri (*symmetry*), $M^T = M$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

h. Matriks 0/1 ($zero - one$)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\ x\ n$. Maka penjumlahan $A + B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

j. Matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\,x\,n$. Maka penjumlahan $A - B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} - b_{mn}$, dimana C berukuran $m\,x\,n$.

k. Matriks pertama A berukuran mxn dan matriks kedua B berukuran nxs, maka perkalian matriks A dan B dilambangkan dengan $AXB = C$ akan berukuran atau berordo mxs. Dalam hal ini

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

untuk setiap $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ dan $c_{ij} \in C$.

l. Matriks M dengan bilangan skalar k adalah sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{maka } kM = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

m. Misalkan matriks A membagi matriks B, dituliskan dengan

$$\frac{A}{B} = A\left(\frac{1}{B}\right) = AB^{-1}$$

B^{-1} adalah invers dari matriks B

n. Matriks M berukuran mxn maka matriks transpos dari M juga berukuran mxn yang dalam hal ini dituliskan dengan M^T, sebagai berikut :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ maka } M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o. Sifat-sifat Matriks :
   a. Perkalian Matriks tidak komutatif, $AB \neq BA$
   b. Bersifat Asosiatif, $(AB)C = A(BC)$.
   c. Bersifat Distributif, $A(B + C) = AB + AC$ dan $(B + C)A = BA + CA$
   d. Perkalian dengan Matriks Identitas tidak mengubah Matriks yang dikalikan.

e. Perkalian berulang matriks atau Pemangkatan matriks, $A^k = AAA \dots A$ untuk k kali perkalian berulang matriks A dan $A^0 = I$

f. Matriks Ortogonal, $AA^T = A^T A = I = AA^{-1}$. Dengan kata lain $A^T = A^{-1}$.

B. Rangkuman 2

1) Determinan Matriks 2x2

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

5. Determinan Matriks 3x3

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

$$det\ (A) = |A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|\mathrm{A}| = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

6. Determinan Matriks 4x4

Determinan Matriks 4x4 dapat ditentukan dengan metode kofaktor seperti pada matriks 3x3 berikut. Minor dari a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} yang didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A dengan elemen selain baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks A. Dan $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$ dinyatakan sebagai kofaktor dari a_{ij} dinotasikan dengan C_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$$

Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dapat dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = aC_{11} + bC_{12} + cC_{13}$$

$$det\ (A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\left(-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

7. Determinan Matriks 5x5 hingga nxn

   Persamaan untuk menentukan determinan matriks nxn dengan menggunakan metode Chio adalah

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

8. Invers Matriks

   Jika dilakukan operasi perkalian pada matriks A dengan adjoinnya, diperoleh

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

   Misalkan perkalian A dengan adjoinnya disebut matriks B, maka elemen-elemen dari matriks B adalah

   $b_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$

   sehingga $b_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $b_{ii} = \det A$.

   Diperoleh ,

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det A \end{pmatrix} = \det A\ x\ I$$

   Jadi, $A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \det A\ x\ I$ jika dan hanya jika $\frac{A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = I$

   dengan kata lain, kita dapat simpulkan bahwa

$$A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = \frac{1}{|A|}\ \boldsymbol{Adj\ (A)}$$

9.2 MODUL 7

A. Rangkuman 1

10. Hubungan antara radian dan derajat

$$1\,rad = 57{,}2958\ldots°$$
$$1° = 0{,}0174\ldots rad$$
$$\frac{1\,rad}{360°} = \frac{r}{2\pi r}$$

11. Perbandingan sisi-sisi segitiga dapat mendefinisikan bentuk dasar trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$
$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

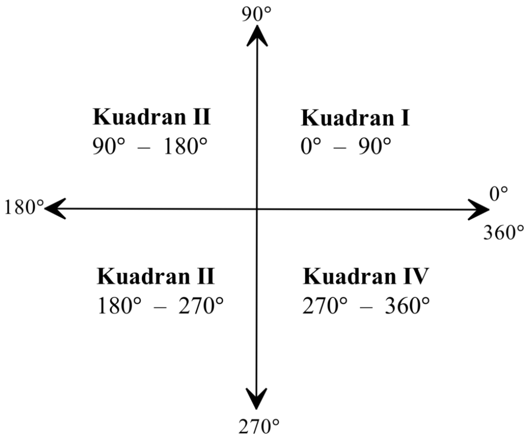
atau

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$
$$cesec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

atau

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a}$$

12. Sudut-sudut berelasi pada trigonometri yaitu dengan memperhatikan kuadran sudut dan sudut istimewa yang ada.



e. Kuadran I

$$\cos(90-\alpha)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\tan(90-\alpha)^\circ = \cot\alpha^\circ$$
$$\cot(90-\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$
$$\sec\,(90-\alpha)^\circ = \csc\alpha^\circ$$
$$\csc(90-\alpha)^\circ = \sec\alpha^\circ$$

f. Kuadran II

$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180-\alpha)^\circ = -\tan\alpha^\circ$$
$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cot\alpha^\circ$$
$$\sec(180-\alpha)^\circ = -\sec\alpha^\circ$$

g. Kuadran III

$$\sin(180+\alpha)^\circ = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(180+\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$
$$\tan(180+\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

h. Kuadran IV

$$\sin(360-\alpha)^\circ = \sin\,(-\theta^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(360-\alpha)^\circ = \cos\,(-\theta^\circ) = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(360-\alpha)^\circ = \tan\,(-\theta^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$

Selain itu untuk bilangan bulat n berlaku

$$\sin(\alpha + n.360)^\circ = \sin\alpha^\circ$$
$$\cos(\alpha + n.360)^\circ = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(\alpha + n.360)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

13. Berikut ini nilai sin, cos dan tan pada sudut-sudut istimewa

Derajat	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120

Radian	$-\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
Sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tan	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$

14. Identitas trigonometri

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta$$

atau

$$\cot^2\theta - cosec^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

15. Aturan sinus adalah

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

16. Aturan kosinus yang terbentuk adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

17. Luas segitiga dapat dirumuskan dengan

$$L = \frac{1}{2}ab\sin\lambda$$
$$L = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$
$$L = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

B. Rangkuman 2

1) Rumus untuk $cos\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$
   i. $cos\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
   ii. $cos\ (\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

2) Rumus untuk $sin\ (\alpha + \beta)$ dan $sin\ (\alpha - \beta)$
   i. $sin\ (\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
   ii. $sin\ (\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

3) Rumus untuk $tan\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

i. $tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

ii. $tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

4) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

5) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

6) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

7) $\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$

8) $\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}}$

9) $\tan \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

10) $\sin(180° - \alpha°) = \sin \alpha°$

11) $\sin(\alpha° + k.360°) = \sin \alpha°$

12) Jika $\sin x° = \sin \alpha°$ dimana $x \in R$, maka $x = \ \alpha° + k.360°$ atau $x = (180° - \alpha°) + k.360°$ dengan $k \in R$. (x dalam derajat)

13) Jika $\sin x° = \sin A$ dimana $x \in R$, maka $x = \ A + k.2\pi$ atau $x = (x - A) + k.2\pi$ dengan $k \in R$. (x dalam radian)

14) Untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° \\ -\alpha° + k.360° \end{cases}$$

15) Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas.

9.3 MODUL 8

A. Rangkuman 1

1) Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

2) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$

3) Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

4) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$

5) Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

6) Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, *c* dan *k* adalah bilangan riil dan $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

k. Aturan penjumlahan

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

l. Aturan selisih

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

m. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\lim_{x \to c} \big(k. f(x)\big) = k. L$$

n. Aturan pembagian

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L. M$$

o. Aturan pangkat

$\lim_{x \to c} \big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

p. Aturan akar

$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

q. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

r. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

s. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

t. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

7) Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan} \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

8) Limit dari $\frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

9) Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

i. Operasi Penjumlahan

$$f + g$$

ii. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f - g$$

iii. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \quad \text{untuk setiap nilai } k$$

iv. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

v. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \qquad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

vi. Perpangkatan

$$f^n \qquad \text{untuk } n \text{ adalah bilangan bulat positif}$$

vii. Bentuk Akar

$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

10) Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x \to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

B. Rangkuman 2

1) Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

2) Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3) Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

   a. Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

   jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > B$.

b. Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < -B$

4. Rangkuman

Matriks merupakan bagian persamaan yang dituliskan secara berbeda. Matriks ini digunakan dalam berbagai penyederhadaan beberapa variabel untuk menemukan solusinya. Matriks dapat diaplikasikan dalam menentukan nilai determinan, dan invers dari beberapa pemodelan matematika yang terdiri dari variabel yang lebih atau sama dengan dua.
Trigonometri mempelajari tentang segitiga dan sudut. Trigonommetri dapat digunakan dalam menyelesaikan berbagai permasalahan sehari-hari yaitu untuk menghitung ketinggian sebuah bbenda atau tower tanda menaikinya keatas. Selain itu, trigonometri juga banyak digunakan dalam ranah ilmu yang lain seperti fisika dan teknik.
Limit dan Kekontinuan dipelajari disini dan dijabarkan untuk menentukan batas dari suatu fungsi tertentu. Limit ini dapat meningkatkan kemampuan analisis peserta didik.
Didalam modul ini memuat berbagai rangkuman dari ketiga materi diatas yang berguna untuk mereview dan mempersiapkan mahasiswa melakukan Ujian Akhir Semester (UAS).

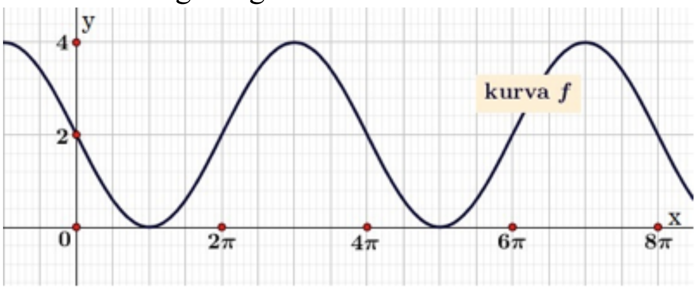
5. Latihan

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; dan $A + B = C$. Invers matriks C adalah
2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & a \\ b & -2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Jika A^T adalah transpose matriks A, nilai $2a + \frac{1}{2}b$ yang memenuhi persamaan $2A^T - B = CD$ adalah
3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Jika $C = AB$, invers matriks C adalah $C^{-1} = \cdots$
4. Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan wisata seperti tabel di bawah ini:

	Paket I	Paket II
Sewa Hotel	5	6
Tempat Wisata	4	5
Biaya Total	3.100.000	3.000.000

Bentuk matriks yang sesuai untuk menentukan biaya sewa hotel tiap malam dan biaya satu temoat wisata adalah

5. Jika $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $AB = \begin{pmatrix} 10 & a \\ 14 & b \end{pmatrix}$, maka nilai ab adalah
6. Diketahui $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 1 & d \end{pmatrix}$, jika $A = A^{-1}$, nilai $|a - d|$ adalah
7. Diketahui l adalah garis yang dinyatakan oleh $|A| = 0$ dimana $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ x & y & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, persamaan garis yang sejajar l dan melalui titik $(3,4)$ adalah
8. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dan determinan dari matriks PQ adalah k. Jika garis $2x - y = 4$ dan $3x - 2y = 5$ berpotongan di A, maka persamaan garis yang melalui A dengan gradient k adalah
9. Nilai semua x sehingga matriks $\begin{pmatrix} \sqrt{x^2 - 1} & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix}$, mempunyai invers adalah
10. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ memenuhi $A \cdot A = A + I$, maka $b^2 = \cdots$
11. Jika $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = a$ untuk $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ maka $\tan \frac{1}{2}\theta = \cdots$
12. Jika $\sin A = \sqrt{2pq}$ dan $\tan A = \frac{\sqrt{2pq}}{p-q}$, maka $p^2 + q^2 = \cdots$
13. Perhatikan kurva fungsi trigonometri berikut



jika $f(x) = a + b \sin cx$, maka $a + b + c = \cdots$

14. Diketahui A dan B adalah sudut lancip yang memenuhi $\tan(A + B) = \frac{1}{2}$ dan $\tan(A - B) = \frac{1}{3}$. Nilai $\tan A$ adalah …
15. Diketahui $\sin A = \frac{1}{a}$, A adalah sudut tumpul. Nilai $\cos A = \cdots$
16. Sebidang tanah berbentuk segitiga dengan setiap titik sudutnya diberi tonggak pembatas $A, B,$ dan C. Jika jarak antara tonggak A dan B adalah

$300\ m$, sudut $ABC = 45°$, dan sudut $BCA = 60°$, jarak antara tonggak A dan C adalah …

17. Perhatikan gambar berikut

Tiga orang petugas dinas lingkungan hidup akan mengukur panjang Danau Tanralili di Kabupaten Goa. Orang pertama berada di titik A, orang kedua berada di titik B, dan orang ketiga berada di titik C. Ketiga petugas tersebut mengukur panjang Danau Tanralili dengan bantuan drone. Dari titik A orang pertama menerbangkan drone dengan jurusan tiga angka $45°$ ke titik B dan tercatat drone terbang selama 15 menit dengan kecepatan 1,2 km/jam. Kemudian dari titik B orang kedua menerbangkan drone dengan jurusan tiga angka $105°$ ke titik C dan tercatat drone terbang selama 20 menit dengan kecepatan 1,2 km/jam. Jika p adalah jarak titik A ke titik C atau panjang Danau Tanralili dalam meter, nilai $p^2 = \cdots$

18. Diketahui sistem persamaan
    a. $\sin(x + y) = 1 + \frac{1}{5}\cos y$
    b. $\sin(x - y) = -1 + \cos y$
    c. dengan $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Maka $\cos 2x = \cdots$
19. Diketahui
    a. $x = \cos A - 2\sin B$
    b. $y = \sin A + 2\cos B$
    c. nilai minimum dari $x^2 + y^2 = \cdots$
20. Jika α dan β merupakan sudut lancip dari suatu segitiga siku-siku dan $\tan\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$, maka $\sin^2\alpha = \cdots$
21. Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} 3x - p, & x \leq 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

agar $\lim_{x \to 2} f(x)$ mempunyai nilai, maka $p = \cdots$

22. Tentukanlah nilai limit fungsi berikut:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x^5-4x}{2x^4+x}$

b. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-x-20}{x-5}$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x-x^3}\right)$

23. Jika $\lim\limits_{x \to -3} \frac{\frac{1}{ax}+\frac{1}{3}}{bx^3+27} = -\frac{1}{3^5}$, nilai $a+b$ untuk a dan b bulat positif adalah …

24. Diketahui $f(x) = 5x^2 + 3$. Hasil dari $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ adalah …

25. Jika $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) - 3g(x)\big) = 2$ dan $\lim\limits_{x \to a} \big(3f(x) + g(x)\big) = 1$ maka $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \cdots$

26. Jika a dan b adalah dua bilangan real dengan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+2ax+b}{x-2} = -3$, maka $ab = \cdots$

27. Jika $f(x) = x^2 + ax + b$ dengan $f(1) = 0$ dan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x+1)-f(x)}{x-1} = 2$, maka $b = \cdots$

28. Jika kurva $f(x) = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu y di titik $(0,1)$ dan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = -4$ maka $\frac{b+c}{a} = \cdots$

29. Jika $|f(x) - 2| \leq x + 3$, maka nilai $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \cdots$

30. Jika $p > 0$ dan $\lim\limits_{x \to p} \frac{x^3+px^2+qx}{x-p} = 12$, maka nilai $p - q$ adalah …

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Sebuah matriks dikatakan matriks orthogonal jika $A^{-1} = A^T$. Jika diketahui $\begin{pmatrix} a & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & b & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & c \end{pmatrix}$ adalah matriks orthogonal. Tentukanlah $a^2 + b^2 + c^2 =$

2. Jika $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ dan $A^2 - xA + yI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka $x + y = \cdots$

3. Jika $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 1 & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ dan $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, maka nilai $z - x = \cdots$

4. Jika $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ dengan $x \neq \frac{1}{2}$, maka nilai $\frac{1}{2}x + y = \cdots$
5. Jika $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} x & y \\ -z & z \end{pmatrix} = 2P^{-1}$ dengan P^{-1} menyatakan invers matriks P, maka $x + y = \cdots$
6. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, B memiliki invers, dan $(AB^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ maka matriks $B = \cdots$
7. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 3 \end{pmatrix}$. Jika determinan AB adalah 10, maka $xy = \cdots$
8. Jika $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dengan $b^2 \neq 2a^2$, maka $x + y = \cdots$
9. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ x & 3y+2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 3X \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ memenuhi $A + B = C^t$ dengan C^t transpose matriks C, maka $2x + 3y = \cdots$
10. Diberikan matriks matriks A, B, C, dan D berikut ini
    $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jika x, y, z, dan w secara berurutan adalah jumlah entri-entri pada matriks A^{2013}, B^{2013}, C^{2013} dan D^{2013}, pernyataan-pernyataan berikut yang benar adalah:
    i. $w - 1 = y^{2013}$
    ii. $z = 3y^{2012}$
    iii. $4z = 3x$
    iv. $2w - x = 2$
11. Jika θ dikuadran IV dan $\cos\theta = \frac{1}{a}$, maka $\sin\theta = \cdots$
12. Jika $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, maka $\frac{\sin(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\tan\alpha} = \cdots$
13. Jika $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$, maka nilai minimum dari $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ tercapai saat $x = \cdots$
14. Jika $2\tan^2 x + 3\tan x - 2 = 0$ dan $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$, maka $\sin x + \cos x = \cdots$
15. Panjang bayangan sebuah Menara adalah 12 m. Jika sudut evaluasi matahari pada saat itu 60°, maka tinggi Menara adalah …
16. Diketahui sistem persamaan berikut

$$\cos(a - b) = \frac{4}{5}\sin(a + b)$$

$$\sin 2a + \sin 2b = \frac{9}{10}$$

    nilai dari $\sin(a + b) = \cdots$

17. Diketahui

$$x = \sin\alpha + \sqrt{3}\sin\beta$$
$$y = \cos\theta + \sqrt{3}\cos\beta$$

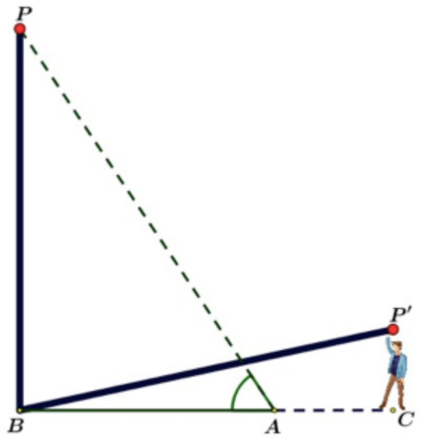
nilai maksimum dari $x^2 + y^2$ adalah $a + b\sqrt{3}$. Nilai $a + b = \cdots$

18. Jika (x, y) dengan $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$, merupakan penyelesaian dari sistem persamaan :

$$\cos 2x + \cos 2y = -\frac{2}{5}$$
$$\cos y = 2\cos x$$

maka $\cos x + \cos y = \cdots$

19. Andi berada di titik A dab berjarak $6\sqrt{3}$ m dari titik B dengan sudut elevasi di titik A terhadap puncak tiang bendera adalah 60°. Andi ingin memasang tali dengan cara merobohkan tiang bendera. Dia harus bergerak menuju titik C sehingga jarak antara ujung tiang bendera ke titik C adalah 2m seperti gambar berikut.



Jika α adalah sudut yang dibentuk BP' dan BC, nilai dari $\frac{1}{\sin\alpha}$ adalah …

20. Diketahui $\sin A = \frac{1}{a}$, A adalah sudut tumpul. Nilai $\cos A = \cdots$

21. Tentukanlah nilai limit fungsi berikut:

    a. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

    b. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x-6}{3x^2-5x-2}$

    c. $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2x^2-7x+3}$

22. Jika $f(x) = x^2 + ax + b$ dengan $f(2) = 0$ dan $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{f(x+1)-f(x)}{x-2} = 2$, maka $b = \cdots$

23. Jika $a = \displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}}$ maka nilai $4 - a$ adalah …

24. Untuk $t > 0$ maka $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t+1} - 1\right) = \cdots$

25. Tentukanlah nilai limit tak hingga berikut

    a. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+7}{x^2+3x+4}$

    b. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{18^2-x+1}-3x}{\sqrt{x^2+2x}}$

    c. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

    d. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{5(x-1) + 2\sqrt{4x^2 - 23x - 6}}$

    e. $\lim_{x\to\infty} 2x^2\left(1 - \cos\frac{6}{x}\right)$

26. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 - 5} - \sqrt{x^2 + 6x} - x + 3\right)$ adalah …

27. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \cdots$

28. Nilai dari $\lim_{y\to\infty} \sqrt{6y}\cos\frac{3}{\sqrt{y}}\sin\frac{5}{\sqrt{y}}$ adalah …

29. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{3}{x}}{\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\cdot x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}$ adalah

30. Tentukanlah asimtot miring, asimtot vertical dan asimtot horizontal dari fungsi berikut:

    a. $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}+2x-3}{\sqrt{x}+1}$

    b. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

    c. $y = x + x\sin\frac{1}{x}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran ini. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Kontinu	Limit	Asimtot	Epsilon	Delta
Diskontinu	Komposisi			

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.