BMP.UKI: SCP-05-MD-PFIS-I-2022

BUKU MATERI PEMBELAJARAN

MATEMATIKA DASAR

Disusun oleh:

Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

JAKARTA

2022

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan pertolonganNya penulisan Buku Materi Pembelajaran (BMP) Matematika Dasar ini dapat diselesaikan. Terima kasih untuk seluruh dosen dan segenap rekan kerja di Prodi pendidikan Fisika FKIP UKI yang turut membantu dan mendukung proses penulisan buku ini.

Buku ini ditulis untuk membantu proses pembelajaran pada mata kuliah Matematika dasar yang dapat digunakan oleh seluruh mahasiswa untuk belajar secara mandiri. Selain itu, buku ini dapat juga digunakan di dalam kelas dalam proses tatap muka dengan dosen pegampu dengan menggunakan model pembelajaran berpusat pada mahasiswa atau yang biasa disebut dengan *Student Centered Learning (SCL)*. Kiranya buku ini dapat digunakan dan membantu memaksimalkan proses pembelajaran untuk memcapai kompetensi lulusan yang kreatif, inovatif unggul dan kompeten.

Setiap kritik dan saran yang membangun dapat disampaikan kepada penulis untuk meningkatkan kualitas BMP ini. Kiranya Tuhan memberkati kita semua.

Jakarta, Agustus 2022

Penulis

Santri Chintia Purba

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PETUNJUK PENGGUNAAN BMP

Bagian ini memuat cara penggunaaan modul supaya peserta didik dapat mencapai tujuan yang diinginkan. Bagian ini juga memuat tentang peran dosen mengenai tata belajar dengan menggunakan modul. Berikut ini dijabarkan petunjuk penggunaan BMP Matematik Dasar yaitu:

a. Petunjuk bagi mahasiswa

   Mahasiswa mengikuti langkah-langkah kegiatan pembelajaran yang sudah ada di dalam modul yaitu dengan memahami materi yang dijabarkan didalam modul baik secara mandiri maupun kelompok. Mahasiswa harus mempersiapkan alat tulis dan alat hitung yang dibutuhkan.

   Waktu pembelajaran yang dibutuhkan disetiap modul adalah sebanyak 2 minggu, yaitu 4 sks dikali dengan 2. Sehingga total waktu yang dibutuhkan adalah 400 menit per modul.

   Mahasiswa dapat memahami materi dan menyelesaikan soal-soal latihan maupun tugas yang diberikan sesuai dengan waktu yang ditentukan.

   Evaluasi akan dilakukan disetiap akhir satu modul dengan melakukan quis yang diberikan oleh dosen.

   Soal latihan yang dimuat didalam modul ini dapat digunakan untuk evaluasi *self assessment* mahasiswa, untuk melihat sejauh mana pemahaman mahasiswa akan materi yang ada.

   Soal-soal yang tersedia beragam yang terdiri dari soal latihan yang mudah, sedang dan sukar. Sehingga mahasiswa dapat meningkatkn pemahamannya dan kemampuan berpikirnya akan materi dan permasalahan yang ada.

b. Peran dosen

   Dosen sebagai fasilitator pembelajaran mengarahkan peserta didik melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan strategi pembelajaran yang digunakan yaitu *Teacher Centered Learning* (SCL). Dosen menjelaskan tata cara menggunakan modul dan menjelaskan kegiatan pembelajran yang akan dilakukan. Pembelajaran dilakukan dengan kooperatif learning, yaitu mahasiswa membentuk kelompok-kelompok kecil yang terdiri dari 3-4 orang. Anggota kelompok dipilih secara acak dan disesuaikan dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Dosen menjelaskan beberapa materi dan mendiskusikannya bersama mahasiswa, selanjutnya mahasiswa akan melakukan diskusi kelompok sesuai dengan topik dan bahan diskusi yang diberikan.

Dosen akan memperhatikan kondisi diskusi peserta didik dan peserta didik dapat bertanya kepada dosen jika ada materi yang sulit untuk dipahami.

Selanjutnya dosen uga berperan mengevaluasi proses pembelajaran yang dilakukan dengan menggunakan isntrumen yang disusun yaitu dengan melakukan quiss di setiap akhir topik yang diselesaikan.

CAPAIAN PEMBELAJARAN LULUSAN

Sikap

S1	Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
S2	Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
S3	Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.
S4	Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.
S5	Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.
S6	Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
S7	Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.
S8	Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
S9	Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.
S10	Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.
S11	Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.
S12	Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1	Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
KU2	Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3	Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses

	pembelajaran xiiisika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika
KK4	Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat
KK7	Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2	Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER

<table>
<tr><td></td><td colspan="5">UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA</td></tr>
<tr><td colspan="6">RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER</td></tr>
<tr><td>MATA KULIAH</td><td>KODE</td><td>Rumpun MK</td><td>BOBOT (sks)</td><td>SEMESTER</td><td>Tgl Penyusunan</td></tr>
<tr><td>MATEMATIKA DASAR</td><td>141141013</td><td>MATEMATIK A</td><td>3</td><td>I</td><td>30 Agustus 2022</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OTORISASI</td><td colspan="2">Pengembang RPS</td><td colspan="2">Koordinator RMK</td><td>Ka. PRODI</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tim Penyusun RPS :
Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.</td><td colspan="2">Taat Guswantoro M.Si.</td><td>Taat Guswantoro M.Si.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capaian Pembelajaran (CP)</td><td colspan="5">CPL</td></tr>
<tr><td colspan="5">Sikap
S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.
S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.
S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.
S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.
S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.
S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.
S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.
S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.
S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.</td></tr>
</table>

		S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan. S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya. **Keterampilan Umum** KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya. KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur. **Keterampilan Khusus** KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran xivisika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika. KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat. KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah. **Pengetahuan** P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi
	CPMK	
		1. Mahasiswa mampu memahami kompetensi yang akan dicapai pada mata kuliah Matematika Dasar, menganalisis bahan/materi, jadwal perkuliahan, mentaati kontrak kuliah dan menyelesaikan tugas tepat waktu serta membuat rencana program belajar mandiri maupun kelompok berdasarkan hasil analisis, serta mampu menunjukkan penghayatan dan pengamalan nilai-nilai kristiani. 2. Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Sistem Bilangan Riil, Bidang datar dan Bangun Ruang, Persamaan dan pertidaksamaan Linear, Fungsi, Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan, Turunan dan Pemanfaatan Teknologi dalam menggambarkannya.
Deskripsi Singkat MK	Mata kuliah ini dimaksudkan untuk memberi kemampuan pada mahasiswa tentang konsep-konsep matematika mengenai Sistem Bilangan Riil, Bidang datar dan Bangun Ruang, Persamaan dan pertidaksamaan Linear, Fungsi, Matriks, Trigonometri, Limit dan	

	Kekontinuan, Turunan yang memuat definisi, sifat-sifat, teknik, dan teorema terkait beserta aplikasinya yang mampu menerapkannya dalam menyelesaikan masalah yang ada berupa berbagai bentuk soal maupun project.	
Bahan Kajian	Sistem Bilangan Riil, Bidang datar dan Bangun Ruang, Persamaan dan pertidaksamaan Linear, Fungsi, Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan, Turunan	
Pustaka	Utama:	
	a. Modul Matematika Dasar	
	Pendukung: 1. Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.	
	2. Varberg, Rurcell, Rigdon. *Kalkulus.* Jakarta: Erlangga.	
Media Pembelajaran	Perangkat lunak:	Perangkat keras:
	Microsoft Teams	Laptop Spidol board marker Whiteboard Poster LCD
Team Teaching		
Matakuliah syarat	-	

MgKe- (1)	(Kemampuan Akhir yangDirencanakan) (2)	(Materi Pembelajaran) (3)	Bentuk dan Metode Pembelajaran (Media dan sumber belajar) (4)	Estimas iWaktu (5)	Pengalaman Belajar Mahasiswa (6)	Kriteria		
						(7)	(8)	(9)
1-2	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan	Sistem Bilangan, sifat-sifat bilangan, sifat-sifat urutan system bilangan riil, Sistem Bilangan riil, Bentuk Pangkat : Pangkat Positif dan Pangkat negatif, bentuk akar, pangkat pecahan,	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi	100'	Mahasiswa memahami sistem bilangan riil Mahasiswa mampu menguasai materi sistem bilangan, bentuk pangkat, akar dan logaritma	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	

	masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Sistem Bilangan Riil, eksponensial dan logaritma	Grafik eksponen dan persamaannya, dan Logaritma.	Project					
3-4	Mampu memahami dan menganalisi bangun datar dan bangun ruang	Bangun datar, jenis-jenis bangun datar, persegi, persegi Panjang, trapezium, segitiga, layang-layang, lingkaran	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Menjelaskan pengertian konsep dasar dan mengitung serta membedakan bangun datar dan bangun ruang	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	
5-6	Mampu memahami dan menjelaskan tentang konsep dasar-dasar matematika yang meliputi persamaan linier dua variabel dan tiga variabel	Persamaan linear satu variabel, dua Variabel dan tiga variabel beserta penyelesaiannya. Metode-metode penyelesaian dalam menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dan pertidaksamaan linear.	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa menguasai persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel Mahasiswa mampu menentukan dan menganlisis persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	

7-8	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan materi Fungsi	1. Pengertian fungsi, sifat fungsi yaitu surjektif, injektif dan bijektif, Grafik fungsi, Jenis-jenis fungsi, operasi pada fungsi, aturan fungsi, fungsi komposisi dan fungsi invers.	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa dapat menentukan nilai fungsi Mahasiswa mampu menganalisis jenis-jenis fungsi Mahasiswa menguasai operasi fungsi seperti komposisi dan invers suatu fungsi	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	
9-10	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Matriks	Pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi pada matriks, sifat-sifat matriks, determinan matriks dan invers matriks.	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa memahami Pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi pada matriks, sifat-sifat matriks, determinan matriks dan invers matriks.	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	
11-12	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata dan menganalisis konsep-konsep pada materi trigonometri, grafik dan aplikasinya	Pengertian Trigonometri, ukuran sudut, perbandingan trigonometri, koordinat kutub, identitas trigonometri, grafik fungsi trigonometri, aturan sinus, aturan kosinus, luas segitiga, rumus-rumus trigonometri, persamaan dan	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa memahami manfaat trigonometri Mahasiswa menguasai konsep trigonometri dan aplikasinya	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	

		pertidaksamaan trigonometri dan aplikasi trigonometri.						
13-14	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan dalam memecahkan masalah nyata serta fenomena spesifik dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Limit dan kekontinuan.	Pengertianlimit, definisi limit dengan epsilon delta, operasi limit, limit tak hingga dan asimtot limit.	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Memahami materi kemiringan sebuah grafik Menentukan limit dari sebuah fungsi dan hukum-hukumnya, menganalisis keberadaan sebuah limit fungsi, membuktikan limit satu arah dan menentukan keberadaan limitnya, fungsi yang kontinu dan tidak kontinu, limit fungsi hingga maupun tak hingga.	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	
15-16	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Turunan dan aplikasinya	Pengertian Turunan, Rumus Dasar turunan, turunan sebagai suatu perubahan, Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain, fungsi implisit dan Aplikasi Turunan	Bentuk:Kuliah Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	100’	Mahasiswa dapat menentukan nilai tangen atau kemirungan sebuah dungsi dengan menentukan turunan fungsi dan aturan-aturannya. Mahasiswa memahami aplikasi turunan dan menguasai konsep turunan dalam fungsi trigonometri Mahasiswa memahami aturan Chain dalam turunan Mahasiswa menguasai konsep turunan pada fungsi implisit	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis	

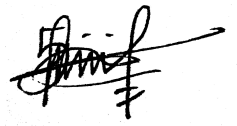
PENILAIAN :

Tugas : 20%, Quis : 15%, Project 1: 25%, Final Project : 30%, Afektif : 10%

SISTEM PENILAIAN

Rentang Skor Nilai Akhir	**80,0-100**	**75,0-79,9**	**70,0-74,9**	**65,0-69,9**	**60,0-64,9**	**55,0-59,9**	**50,0-54,9**	**45,0-49,9**	**<49,9**
Nilai Huruf	A	A-	B+	B	B-	C+	C	D	E
Nilai Angka	4	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,0	0

Terima kasih atas kerja sama dan kerja keras mahasiswa sekalian.
Jakarta, 30 Agustus 2021

Mengetahui,	Disusun oleh,
Ketua Program Studi	Dosen Pengampu
	
Taat Guswantoro, M.Si.	Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

KONTRAK PERKULIAHAN

Kontrak perkuliahan merupakan kesepakatan antara dosen pengampu mata kuliah dengan mahasiswa yang ditanda tangani oleh ketua kelas. Adapun kontrak perkuliahan di dalam mata kuliah Matematika Dasar Prodi pendidikan Fisika Semester Gasal TA 2021/2022 yaitu :

1. Setiap Mahasiswa memiliki BMP
2. Keterlambatan paling lama 10 menit.
3. Setiap tugas dikumpulkan ontime sesuai dengan deadline yang disepakati, konsekuensi telat pengurangan nilai -5 dihari yang sama, -10 lebih dari sehari.
4. Perkuliahan diawali dengan Doa yang dipimpin secara bergantian.
5. Setiap mahasiswa bersedia ditempatkan dikelompok yang disusun oleh dosen.
6. Evaluasi Pembelajaran dilakukan dengan Quis, Penugasan dan Project.
7. Perkuliahan online dilakukan dengan 2 sks dosen menjelaskan, 2 sks mahasiswa mandiri atau diskusi melalui BMP yang sudah disediakan.

Demikianlah kontak perkuliahan ini disusun untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya. Untuk hal-hal kesepakatan lainnya dapat diatur kemudian sesuai dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Disepakati oleh,

Dosen Pengampu Mata Kuliah

Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc.

NIP/NIDN : 191660/0330039402

Ketua Kelas

Louisa Ayu

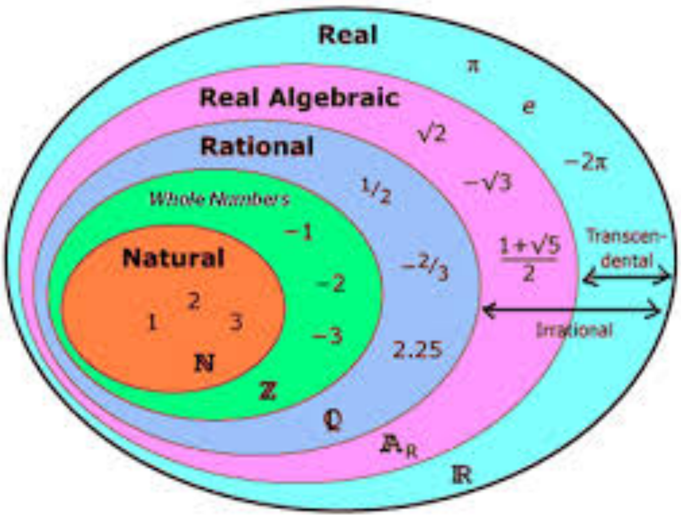
NIM : 2113150001

MODUL 1

SISTEM BILANGAN RIIL, EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

Langkah awal adalah sebuah jalan dan aksi nyata menuju menggapai kesuksesan

-SCP



Pendidikan Fisika

FKIP UKI

MODUL 1 SISTEM BILANGAN RIIL, EKPONENSIAL DAN LOGARITMA

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Sistem bilagan riil merupakan salah satu materi dasar matematika yang sangat penting untuk dipahami dan dikuasai oleh peserta didik sistem bilangan adalah seperangkat susunan satuan yang teratur secara teori dan asas yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan secara matematis. Sistem bilangan riil berarti bilangan yang teratur dan dioperasikan secara matematis adalah bilangan riil. Bilangan riil biasanya disebut sebagai bilangan nyata.

   Modul satu ini akan mepelajari tentang system bilangan riil yaitu mulai dari jenis-jenis himpunan pada bilangan, sifat-sifat bilangan, operasi pada bilangan. Selain itu, pada modul ini juga akan dibahas tentang perkalian berulang atau perpangkatan atau biasa disebut dengan eksponensial, juga sifat-suifatnya beserta operasi pada perpangkatan. Selain itu juga memuat Bentuk akar dan bentuk logaritma. Dalm hal ini dijabarkan secara terinci dan jelas berbagai bentuk persamaan logaritma dan fungsi-fungsi pada logaritma dan eksponen.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Satu

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep dasar perkalian berulang dan penjumlahan berulang. Memahami konsep dasar bilangan dan mampu mengoperasikannya.

5. Kegunaan Modul Satu

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi system bilangan riil, bentuk akar, eksponensial dan logaritma. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada Modul satu ini, diantaranya Sistem Bilangan, sifat-sifat bilangan, sifat-sifat urutan system bilangan riil, Sistem Bilangan riil, Bentuk Pangkat : Pangkat Positif dan Pangkat negatif, bentuk akar, pangkat pecahan, Grafik eksponen dan persamaannya, dan Logaritma.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-1 : Menguasai Sistem Bilangan dan Bentuk Eksponen

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan system bilangan, Perpangkatan dan Logaritma. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Sistem Bilangan, Bentuk Pangkat dan Logaritma. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Materi Sistem Bilangan Riil**

   1.1 Sistem Bilangan

   Menurut KBBI bilangan merupakan satuan dalam sistem matematis yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan. Sedangkan sistem merupakan susunan yang teratur dari pandangan, teori, asas, dan sebagainya. Sehingga disimpulkan bahwa sistem bilangan adalah seperangkat susunan satuan yang teratur secara teori dan asas yang abstrak dan dapat diunitkan, ditambah dan dikalikan secara matematis. Sistem bilangan riil berarti bilangan yang teratur dan dioperasikan secara matematis adalah bilangan riil. Bilangan riil biasanya disebut sebagai bilangan nyata.

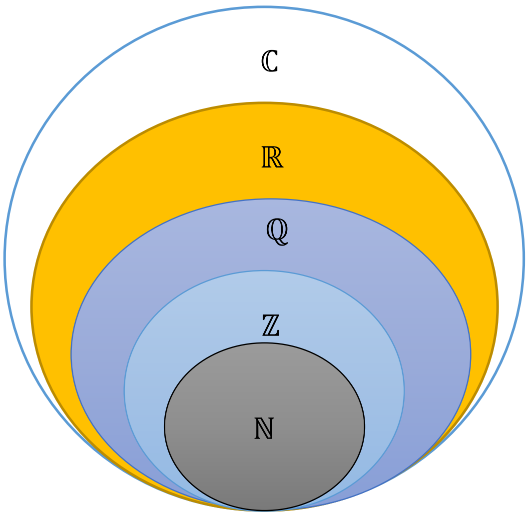
Dalam Matematika Dasar terdapat konsep dari himpunan obyek-obyek, khususnya tentang konsep himpunan dari bilangan-bilangan yang banyak sekali diterapkan untuk matematika maupun penerapan di bidang-bidang yang lain. Himpunan bilangan yang penting untuk diketahui adalah himpunan bilangan Asli, himpunan bilangan Cacah, himpunan bilangan Bulat, himpunan bilangan Rasional, himpunan bilangan Irrasional (tak terukur), dan himpunan bilangan Real. Diharapkan mahasiswa dapat memahami konsep himpunan bilangan yang penting untuk diketahui dan mampu menggunakan sifat-sifat dari himpunan bilangan.

Berikut ini jenis-jenis himpunan bilangan yang merupakan bagian dari himpunan bilangan riil.

1. Himpunan bilangan asli atau sering juga disebut dengan himpunan bilangan bulat positif yang dituliskan dengan
$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots\}$$
2. Himpunan bilangn cacah biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{W}$ yang berasal dari Bahasa inggris yaitu *whole numbers*, dinotasikan dengan
$$\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$$
3. Himpunan bilangan bulat ditulis dengan $\mathbb{Z}$ yang berasal dari Bahasa Jerman yaitu Zahlen yang artinya bilangan. Himpunan bilangan bulat terdiri dari bilangan nol, bilangan negartif dan bilangan positif, yang dituliskan dengan
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$$

4. Himpunan bilangan rasional/terukur merupakan bilangan ang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dimana a dan b merupakan bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0. Bilangan rasional memuat bilangan bulat, bilangan asli, bilangan cacah, bilangan prima, bilangan decimal yang terukur. Selanjutnya bilangan decimal ataupun pecahan yang tidak terukur disebut sebagai bilangan Irrasional. Contoh bilangan Irrasional yang terkenal adalah $\sqrt{2}$, π , e dan sebagainya. Bilangan rasional biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$ dan bilangan Irrasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}^*$.
5. Himpunan bilangan riil adalah sekelompok bilangan nyata yang memuat bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional dan Irrasional. Bilangan ini biasanya dinotasikan dengan $\mathbb{R}$.
6. Himpunan Bilangan Kompleks merupakan bilangan himpunan bilangan terbesar di matematika yang memuat seluruh bilangan riil dan bilangan imajiner yang biasnya dilambangkan dengan $\mathbb{C}$.

Sistem bilangan diatas dapat disimpulkan seperti gambar berikut:



Gambar 1 Sistem Bilangan

Di dalam bahan ajar ini, bilangan yang akan dibahas hanyalah sampai bilangan riil.

1.2 Sifat-sifat Bilangan Riil

1. Komutatif (pertukaran)

   Sifat komutatif pada bilangan riil yaitu terhadap penjumlahan dan perkalian

   $a + b = b + a$ dan $ab = ba$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Asosiatif

   Sifat asosiatif pada bilangan riil berlaku pada operasi penjumlahan dan perkalian yaitu

   $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. Distributif

   Sifat distributive perkalian pada bilangan riil dinyatakan dengan

   $(a + b)c = ac + bc$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. Identitas

   Unsur identitas pada bilangan riil dibagi menjadi dua yaitu

   - Terhadap operasi penjumlaha unsur identitasnya adalah 0 sehingga $a + 0 = a$
   - Terhadap operasi perkalian unsur identitasnya adalah 1 sehingga $a.1 = a$.

5. Invers

   Invers pada bilangan riil dibagi menjadi dua yaitu

   - Terhadap operasi penjumlaha inversnya adalah lawan dari bilangan itu sendiri yaitu $-a$, sehingga $a + (-a) = 0$.
   - Terhadap operasi perkalian inversnya adalah kebalikan dari bilangan itu sendiri yaitu $\frac{1}{a}$, sehingga $a.\frac{1}{a} = 1$.

6. Jika a dan b dua bilangan Real, maka terdapat suatu bilangan Real c sehingga $a + c = b$. Bilangan c ini kita nyatakan dengan $b - a$ yang disebut selisih dari b dan a. Selisih $a - a$ kita nyatakan dengan simbol 0. Simbol 0 ini selanjutnya disebut nol.

1.3 Sifat-sifat Urutan Bilangan Riil

1. Trikotomi

   Jika a dan b adalah bilangan riil, maka berlaku $a < b$ atau $a > b$ atau $a = b$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Transitif

   Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. Penambahan

   $a < b$ jika dan hanya jika $a + c < b + c$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. Perkalian
7. $a < b$ jika dan hanya jika $ac < bc$ untuk c positif dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.
8. $a < b$ jika dan hanya jika $ac > bc$ untuk c negatif dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1.4 Sistem Bilangan Riil

Himpunan bilangan riil dengan semua operasi dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya dinamakan system bilangan riil. Penulisan himpunan dalam bentuk interval/selang yaitu :

1. Interval tertutup

$$\{x | a \leq x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\} = [a, b]$$

2. Interval terbuka

$$\{x | a < x < b,\ x \in \mathbb{R}\} = (a, b)$$

3. Interval setengah terbuka atau setengah tertutup

$$\{x | a \leq x < b,\ x \in \mathbb{R}\} = [a, b)$$

atau

$$\{x|a < x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\} = (a, b]$$

4. Interval tak terbatas

$$\{x|x \geq b,\ x \in \mathbb{R}\} = [b, \infty)$$

atau

$$\{x|x < a,\ x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, a]$$

1.5 Bentuk Pangkat

Salah satu kegunaan notasi pangkat adalah untuk menyederhanakan atau meringkas penulisan bilangan. Contohnya 100.000.000 dapat dtuliskan dengan notasi pangkat yaitu 10^8. Notasi pangkat ini dapat menghemat tempat sehingga banyak digunakan dalam perumusan maupun penyederhanaan perhitungan yang bernilai besar maupun kecil. Penggunaan pangkat ini banyak ditemukan pada perhitungan di Kimia, Biologi, Fisika, Ekonomi dan sebagainya.

a. Pangkat bulat positf

Perkalian berulang suatu bilangan dapat dinatakan dalam bentuk bilangan berpangkat yang biasa disebut dengan pengkat bilangan positif. Sebagai contoh

$$5 = 5^1$$

$$5.5 = 5^2$$

$$5.5.5 = 5^3$$

$$5.5.5.5.5.5.5 = 5^7$$

bentuk 5^7 dibaca dengan “lima pangkat tujuh”. Bilangan 5 disebut sebagai bilangan pokok atau bilangan dasar sedangkan 7 disebut sebagai pangkat atau eksponen.

Secara umum, bilangan berpangkat didefinisikan dengan

Jika $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka
$a^n = a.a.a.a \ldots a.a.a$
disebut sebagai perkalian a sebanyak n kali.
a disebut bilangan pokok dan n disebut sebagai pangkat.

Contoh :

1. $4^3 = 4.4.4 = 64$
2. $128 = 2.2.2.2.2.2.2 = 2^7$
3. $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$
4. $-5.-5.-5.-5.-5 = (-5)^5$
5. $-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

b. Sifat-sifat Pangkat bulat positif

Pada bilangan berpangkat positif dapat dilakukan beberapa operasi aljabar yaitu operasi perkalian, pembagian dan pemangkatan. Berikut ini beberapa sifat dan ketentuan pada bilangan bulat berpangkat positif diantaranya adalah

1) Jika $a \in R$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$a^p.a^q = a^{p+q}$

Contoh :

$3^7.3^4.3 = 3^{7+4+1} = 3^{12}$

$25.5^7.5^6 = 5^2.5^7.5^6 = 5^{2+7+6} = 5^{15}$

2) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Contoh :

$2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$

$3^5 : 3^8 = 3^{5-8} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

$125 : 5 = 5^3 : 5^1 = 5^{3-1} = 5^2$

3) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $(a^p)^q = a^{p.q} = a^{pq}$

Contoh :

$$(7^2)^4 = 7^8$$

$$(x^3)^5 = x^{15}$$

4) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p adalah bilangan bulat maka $(ab)^p = a^p b^p$.

Contoh :

$(2x^3y^2)^4 = 2^4x^{3.4}y^{2.4} = 2^4x^{12}y^8$

$\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^2 = \frac{2^2x^6}{3^2y^4}$

c. Pangkat buat negatif dan nol

Jika bentuk perpangkatan dari bilangan dasar kurang dari satu dan nol maka akan diperoleh pangkat bilangan bulat negarif dan nol. Prinsip pangkat bilangan bulat negatif sama dengan prinsip pada pangkat bilangan bulat positif.

Contoh :

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = 3^{-1}.3^{-1}.3^{-1}.3^{-1} = 3^{-4}$$

$$a^{-1} : a^{-3} = a^{-1-(-3)} = a^2$$

Untuk mendefinisikan a^ndengan a bilangan riil dan n bilangan bulat negative dan nol, maka dapat digunakan teorema-teorema perpangkatan pada bilangan bulat positif, seperti :

$\frac{a^{\square}}{a^n} = 1$, Jika teorema $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ digunakan maka akan diperoleh $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ dan untuk $q = p + n$ maka diperoleh $\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^{p+n}} = a^{p-(p+n)} = a^n$.

Dengan demikian dapat disimpulkan teorema berikut ini

> Jika $a \neq 0$, $a \in R$ dan n bilangan bulat positif maka
> $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dan $a^0 = 1$.

Contoh :

Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut ini

1) $\frac{a^2b^2}{ab} . \frac{c^2}{a}$
2) $\frac{3^2 5x}{15y^2}$
3) $(2xyz^2)^3 \left(\frac{x^2y}{y^2z}\right)$
4) $\frac{wuv^2}{w^2z} + \frac{w}{u^2v}$
5) $\frac{x^2z^3}{x^{-3}yz^{-2}}$

Jawab :

1) $\frac{a^2b^2}{ab} . \frac{c^2}{a} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b}$
$$= a^{2-2}b^{2-1}c^2$$
$$= a^0bc^2$$
$$= bc^2$$
2) $\frac{3^2 5x}{15y^2} = \frac{3^2.5.x}{3.5.y^2}$
$$= 3^{2-1}5^{1-1}xy^{-2}$$
$$= 3.5^0.xy^{-2}$$
$$= 3xy^{-2}$$
3) $(2xyz^2)^3 \left(\frac{x^2y}{y^2z}\right) = (2^3x^3y^3z^6)\left(\frac{x^2y}{y^2z}\right)$

$$= 2^3 x^{3+2} y^{3+1-2} z^{6-1}$$

$$= 2^3 x^5 y^2 z^4$$

4) $\frac{wuv^2}{w^2z} + \frac{w}{u^2v} = \frac{wu^{1+2}v^{2+1} + w^{1+2}z}{w^2u^2vz}$

$$= \frac{wu^3v^3 + w^3z}{w^2u^2vz}$$

$$= \frac{u^3v^3 + w^2z}{wu^2vz}$$

5) $\frac{x^2z^3}{x^{-3}yz^{-2}} = \frac{x^{2-(-3)}z^{3-(-2)}}{y}$

$$= \frac{x^5z^5}{y}$$

$$= \frac{(xz)^5}{y}$$

4 Rangkuman

1. Jenis-jenis himpunan bilangan yang merupakan bagian dari himpunan bilangan riil:
   Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots\}$
   Himpunan bilangn cacah $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$
   Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
   Himpunan bilangan rasional/terukur $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$. Bilangan Irrasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}^*$. Contoh bilangan Irrasional yang terkenal adalah $\sqrt{2}$, π , e dan sebagainya.
   Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.
   Himpunan Bilangan Kompleks $\mathbb{C}$.
2. Sifat-sifat Bilangan Riil : Komutatif, Asosiatif, Distributif, Identitas Invers.
3. Sifat-sifat Urutan Bilangan Riil : Trikotomi, Transitif, Penambahan, Perkalian.
4. Bentuk Pangkat yaitu bentuk pangkat positif dan Negatif.

5. Jika $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka

$$a^n = a.a.a.a \dots a.a.a$$

disebut sebagai perkalian a sebanyak n kali. a disebut bilangan pokok dan n disebut sebagai pangkat.

6. Jika $a \in R$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $a^p . a^q = a^{p+q}$
7. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

8. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q adalah bilangan bulat positif maka $(a^p)^q = a^{p \cdot q} = a^{pq}$
9. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p adalah bilangan bulat maka $(ab)^p = a^p b^p$.
10. Jika $a \neq 0$, $a \in R$ dan n bilagan bulat positif maka

    $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dan $a^0 = 1$.

5. Latihan

Sederhanakanlah bentuk pangkat berikut ini

1. $(3x^2 . y^{-5})(-3x^{-8} . y^9)$
2. $\frac{5x^5y^2}{7x^3y^{-5}}$
3. $\frac{6\sqrt{10x}}{3\sqrt{2x^2}}$
4. $\frac{5^{2-n}-(0,2)^n}{5^{1-n}+(0,2)^n}$
5. $(8x^3 . y^{12})^{\frac{1}{6}}$
6. $\frac{(ab^2c)^3(ac^3)^5}{(a^4bc^5)^2}$
7. $\frac{(ac^2)(a^3b)^2+(a^2b)^5(bc^3)^3}{(a^3bc^2)^2}$
8. $\frac{2x^2yz^3}{(xyz^2)^3+(x^2yz)^2}$
9. $\frac{3mn^2}{(2km^2n)-(3mn^5)^2}$

10. $\frac{(p^2qr)^2(r^4s)^6+(ps^2)^3}{(p^2r)^3(qs^2)+(p^4rs)^2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Gambarkanlah dalam suatu skema tentang pembagian system bilangan riil!
2. Tentukanlah nilai $y \in R$ sehingga $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2y+3}{3}+8\right)+16\right)+8\right)=1$
3. Jika $1{,}54^2 = 2{,}3716$, maka 154^2 adalah
4. Nilai dari $(4^{-1}+3^{-2}+7^{-1})^{-1}$ adalah
5. Jika $2a^3+3a^3+a^3+4a^3=1250$ maka nilai a^2+a adalah

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-2: Menguasai Bentuk Akar dan Logaritma

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan system bilangan, Perpangkatan dan Logaritma. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Sistem Bilangan, Bentuk Pangkat dan Logaritma. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

1.6 Bentuk Akar

Akar pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman yang bernama Christoff Rudolf didalam bukunya yang berjudul Die Cross dengan simbol $\sqrt{}$. Simbol tersebut dipilih karena memiliki kemiripan dengan huruf “r” yang diambil dari kata “radix” yang merupakan bahasa latih dari akar pangkat dua yang merupakan kebalikan dari kuadrat. Pernyataan yang ditulis dengan tanda akar disebut bentuk akar.

Bentuk akar merupakan bagian dari bilangan rasional dan irrasional. Bentuk akar biasanya digunakan sebagai bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangakt pecahan. Contohnya seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ dan sebagainya.

a. Sifat bentuk akar

   Adapun beberapa sifat bentuk akar yaitu

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

2) $p\,\sqrt[n]{a} + q\,\sqrt[n]{a} = (p+q)\,\sqrt[n]{a}$

3) $p\,\sqrt[n]{a} - q\,\sqrt[n]{a} = (p-q)\,\sqrt[n]{a}$

4) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

5) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dimana $b \neq 0$

6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

b. Operasi hitung bentuk akar

1) Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Jika a, b dan c adalah bilangan rasional positif, maka berlaku persamaan berikut

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$$

dan

$$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$$

Contoh :

1. $8\sqrt{8} + 3\sqrt{8} + \sqrt{8} = (8+3+1)\sqrt{8}$
   $= 12\sqrt{8}$
   $= 24\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3-5+4)\sqrt{2}$
   $= 2\sqrt{2}$
3. $5\sqrt{7} + 6\sqrt{28} - 3\sqrt{63} = 5\sqrt{7} + 12\sqrt{7} - 27\sqrt{7}$
   $= (5+12-27)\sqrt{7}$
   $= -10\sqrt{7}$

2) Operasi Perkalian dan Pembagian

Jika a, b dan c adalah bilangan rasional positif, maka berlaku persamaan berikut

$$\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

dan

$$\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Contoh :

1. $\sqrt{4}.\sqrt{8} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}(3\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3}.3\sqrt{3}) - (\sqrt{3}.\sqrt{2})$
   $= 9 - \sqrt{6}$
3. $\sqrt{300}:\sqrt{6} = \sqrt{\frac{300}{6}}$
   $= \sqrt{50}$
   $= \sqrt{25}.\sqrt{2}$
   $= 5\sqrt{2}$
4. $5\sqrt{2} - 2\sqrt{8} + 4\sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{4}.\sqrt{2} + 4.\sqrt{9}.\sqrt{2}$
   $= 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$
   $= (5 - 4 + 12)\sqrt{2}$
   $= 13\sqrt{2}$

c. Merasionalkan Bentuk Akar

Suatu bentuk pecahan dimana penyebutnya mengandung bentuk akar, maka dapat disederhanakan degan merasionalkan bentuk akar yang ada. Merasionalkan bentuk pecahan dari penyebut tersebut maka pembilang dan penyebut harus dikalikan dnegan bentuk rasional dari bentuk akar yang ada pada penyebutya. Berikut ini beberapa bentuk penyederhanaan bentuk akar dengan cara merasionalkan penyebutnya adalah

1) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

2) $\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}}.\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$

3) $\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}} \cdot \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$

4) $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$

5) $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$

Contoh :

Rasionalkanlah penyebut dari pecahan berikut ini:

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
2. $\frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Jawab :

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2}$$

$$= -(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

2. $\frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$= \frac{(2-\sqrt{7})(4\sqrt{2}+\sqrt{3})}{32-3}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt{14}-\sqrt{21}}{29}$$

1.7 Pangkat Pecahan

Bilangan riil yang memenuhi persamaan $a^n = b$, disebut sebagai akar pangkat n dari b yang dinotasika dengan $a = \sqrt[n]{b}$. Akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$ dapat juga ditulis sebagai bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$. Demikian juga sebaliknya, bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$ dapat ditulis sebagai akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$. Jadi $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

Berikut ini beberapa sifat pangkat pecahan

a. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$a^p . a^q = a^{p+q}$$

b. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$a^p := a^{p-q}$$

c. Jika $a \in R$, dan $p, q \in Q$ maka

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

d. Jika $a \in R$, $a \neq 0$ dan $p, q \in Q$ maka

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

e. Jika $a \in R$, dan $p, q, r \in Q$ maka

$$(a^p . b^q)^r = (a^p)^r (b^q)^r = a^{pr} . b^{qr}$$

f. Jika $a, b \in R$, $b \neq 0$, dan $p, q, r \in Q$ maka

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^r = \frac{a^{pr}}{b^{qr}}$$

Contoh :

1. $3^{\frac{1}{3}} . 3^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}} = 3^{\frac{17}{6}}$

2. $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{7}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}y\right)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{x^{\frac{14}{15}}}{x^{\frac{2}{15}}y^{\frac{2}{5}}}$

3. $\dfrac{a^{-3}b^2c}{abc} = a^{-3-1}b^{2-1}c^{1-1} = a^{-4}b$

4. Jika n memenuhi perkalian $25^{0,25}$ sebanyak n kali dituliskan dengan $25^{0,25} \times 25^{0,25} \times 25^{0,25} \times ... \times 25^{0,25} = 125$, maka nilai $(n-3)(n+2)$ adalah

Jawab :

$25^{0,25} \times 25^{0,25} \times 25^{0,25} \times ... \times 25^{0,25} = 125$

$(25^{0,25})^n = 125$

$(5^{0,5})^n = 5^3$

$5^{0,5n} = 5^3$

$0,5n = 3$

$n = 6$

maka $(n-3)(n+2) = (6-3)(6+2) = 3.8 = 24$

5. Jika $4^x - 4^{x-1} = 6$ maka $(2x)^x = \cdots$

   Jawab :

   $4^x - 4^{x-1} = 6$

   $2^{2x} - 2^{2(x-1)} = 6$

   $2^{2x}(1 - 2^{-2}) = 6$

   $2^{2x}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 6$

   $2^{2x}\left(\frac{3}{4}\right) = 6$

   $2^{2x} = 8$

   $2^{2x} = 2^3$

   $2x = 3$

   $x = \frac{3}{2}$

   Sehingga diperoleh

   $(2x)^x = \left(2.\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = (3)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$

1.8 Fungsi Eksponen dan Grafiknya

Fungsi eksponen adalah pemetaan bilangan real x ke a^x yang bentuk umum- nya dituliskan dengan $f(x) = a^x$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ untuk

$a \in R$ mempunyai beberapa sifat sebagai berikut:

1. Kurva dari fungsi eksponen terletak diatas sumbu x disebut juga den- gan definit positif.
2. Memotong sumbu y di titik $(0, 1)$
3. Mempunyai garis yang sejajar dengan sumbu x(asimtot datar) $y = 0$
4. Grafik akan berbentuk monoton naik untuk $f(x) = a^x$
5. Grafik monoton turun untuk $f(x) = a^{-x}$

Untuk lebih jelasnya, berikut ini contoh gambar grafik fungsi eksponen

Gambar 2 Grafik fungsi eksponen a^x

Gambar 3 Grafik fungsi eksponen a^{-x}

1.9 Bentuk Persamaan Eksponen

Bentuk persamaan eksponen adalah persamaan yang di dalamnya terdapat pangkat-pangkat yang terbentuk sebagai fungsi x dimana x adalah bilangan peubah. Berikut ini beberapa persamaan Eksponen:

1. Jika $a^{\square(x)} = 1$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = 0$.

2. Jika $a^{f(x)} = a^p$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = p$.

3. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x)$=$g(x)$.

4. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, $b > 0$ dan $b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $f(x)$ = 0.

Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dimana $a^{f(x)} = p$ maka bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $Ap^2 + Bp + C = 0$.

1.10 Logaritma

Logaritma merupakan suatu operasi invers atau kebalikan dari perpangkatan (eksponen). Di dalam eksponen kita mencari hasil pangkat sedangkan logaritma digunakan untuk menentukan besar pangkatnya. Logaritma dapat didefinisikan seperti berikut ini

> Jika diketahui suatu perpangkatan dengan $a^c = b$ maka bentuk tersebut dapat diubah ke dalam bentuk logaritma menjadi
>
> $$\log_a b = c \text{ atau } {}^a log\ b = c$$
>
> untuk $a \neq 1$, dan $a > 0$.

Dalam hal ini a disebut sebagai basis logaritma, b sebagai bilangan yang dicari nilai logaritmanya atau biasa disebut dengan numerus dan

c adalah besar pangkat atau nilai logaritma. Jika ditemukan penulisan logaritma tanpa basis, maka secara umum basis dari logaritma tersebut adalah 10. Misalnya ${}^{10}log\ a = \log a.$ Namun jika basis dari bentuk logaritma adalah $e = 2{,}718$ maka bentuk logaritma tersebut disebut sebagai logaritma natural, biasanya dinotasikan dengan ln.

Sebagai contoh, misalkan diberikan bentuk logaritma seperti ${}^{2}log\ 8 = c,$ maka dapat kita temukan bahwa $c = 3$, karena $2^3 = 8$. Berdasarkan contoh tersebut dapat disimpulkan bahwa logaritma merupakan suatu operasi kebalikan nilai yang menjadi pagkat dari suatu bilangan tertenttu. Berikut ini beberapa contoh lain dari hubungan antara bentuk perpangkatan dan Logaritma.

Tabel 1. Hubungan Bentuk pangkat dan Logaritma

Bentuk Pangkat	**Bentuk Logaritma**
$3^5 = 243$	${}^{3}log\ 243 = 5$
$3^{-5} = \frac{1}{243}$	${}^{3}log\ \frac{1}{243} = -5$
$9^{\frac{3}{2}} = 27$	${}^{9}log\ 27 = \frac{3}{2}$

Penyelesaian soal-soal logaritma tidak dapat lepas dari penggunaan sifat-sifat logaritma itu sendiri. Adapun beberapa sifat logaritma diantarnya adalah

1. ${}^{a}log\ a = 1$
2. ${}^{a}log\ 1 = 0$
3. ${}^{a^n}log\ b^m = \frac{m}{n}\ {}^{a}log\ b,\ dengan\ n \neq 0.$
4. ${}^{a}log\ b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$
5. ${}^{a}log\ b = \frac{{}^{p}log\ b}{{}^{p}log\ b}$, dengan $p > 0$, dan $p \neq 1$.
6. $a^{{}^{a}log\ b} = b$

7. $^{a}log\ b \times\ ^{b}log\ c =\ ^{a}log\ \square c$

8. $^{a}log\ bc =\ ^{a}log\ b +\ ^{a}log\ c$

9. $^{a}log\frac{b}{c} =\ ^{a}log\ b -\ ^{a}log\ c$

Contoh :

1. $^{5}\log 125 =\ ^{5}\log 5^{3}$

$= 3.\ ^{5}\log 5$

$= 3.1$

$= 3$

2. $^{9}\log 64 +\ ^{9}\log 125 =\ ^{9}\log 64 \times 125$

$=\ ^{9}\log 8000$

$=\ ^{9}\log 8000$

$=\ ^{3^2}\log 20^{3}$

$$= \frac{3}{2}\ ^{3}\log 20$$

atau dapat juga diselesaikan dengan

$^{9}\log 64 +\ ^{9}\log 125 =\ ^{3^2}\log 4^{3} +\ ^{3^2}\log 5^{3}$

$$= \frac{3}{2}\ ^{3}\log 4 + \frac{3}{2}\ ^{3}\log 5$$

$$= \frac{3}{2}(\ ^{3}log\ 4 \times 5)$$

$$= \frac{3}{2}\ ^{3}log\ 20$$

3. Jika diketahui $^{3}log\ 2 = A$, $^{3}log\ 5 = B$ dan $^{6}log\ 3 = C$, maka tentukanlah nilai dari $^{12}log\ 50$ dan $^{5}log\ 24$.

Jawab :

$$^{18}\log 50 = \frac{^{3}log\ 50}{^{3}log\ 18}$$

$$= \frac{^{3}log\ 25 \times 2}{^{3}log\ 3 \times 6}$$

$$= \frac{{}^{3}log\ 5^2 + {}^{3}log\ 2}{{}^{3}log\ 3 + {}^{3}log\ 6}$$

$$= \frac{2.\ {}^{3}log\ 5 + {}^{3}log\ 2}{1 + \frac{1}{C}}$$

$$= \frac{2B + A}{\frac{C+1}{C}}$$

$$= \frac{2BC + AC}{C + 1}$$

$${}^{5}\log 24 = {}^{5}\log 3 \times 8$$

$$= {}^{5}\log 3 + {}^{5}\log 8$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{{}^{3}log\ 8}{{}^{3}log\ 5}$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{{}^{3}log\ 2^3}{B}$$

$$= \frac{1 + 3.\ {}^{3}log\ 2}{B}$$

$$= \frac{1 + 3A}{B}$$

4. $\sqrt{2}^{\,{}^{2}\log 81} = 2^{\frac{1}{2}\,{}^{2}\log 81}$

$$= 2^{\frac{1}{2}\,{}^{2}\log 9^2}$$

$$= 2^{\,{}^{2}\log (9^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2^{\,{}^{2}\log 9}$$

$$= 9$$

5. Diketahui ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, tentukanlah nilai dari ${}^{60}\log 36$.

Jawab :

$${}^{60}\log 36 = \frac{{}^{2}\log 36}{{}^{2}\log 60}$$

$$= \frac{{}^2\log(4\times 9)}{{}^2\log(4\times 3\times 5)}$$

$$= \frac{{}^2\log 2^2 + {}^2\log 3^2}{{}^2\log 2^2 + {}^2\log 3 + {}^2\log 5}$$

$$= \frac{2 + 2\,{}^2\log 3}{2 + {}^2\log 3 + ({}^2\log 3\,.\,{}^3\log 5)}$$

$$= \frac{2 + 2a}{2 + a + ab}$$

6. Jika solusi dari persamaan $5^{x+5} = 7^x$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = {}^a\log 5^5$, maka nilai $a = \cdots$

   Jawab :

   $5^{x+5} = 7^x$

   $\log 5^{x+5} = \log 7^x$

   $(x + 5)\log 5 = x\log 7$

   $x\log 5 + 5\log 5 = x\log 7$

   $5\log 5 = x\log 7 - x\log 5$

   $5\log 5 = x\log\frac{7}{5}$

   $x = \frac{\log 5^5}{\log\frac{7}{5}} = {}^{\frac{7}{5}}\log 5^5$

   Karena $x = {}^a\log 5^5 = {}^{\frac{7}{5}}\log 5^5$ maka $a = \frac{7}{5}$

4 Rangkuman

1. Beberapa sifat bentuk akar yaitu

   i. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

   ii. $p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p + q)\sqrt[n]{a}$

   iii. $p\sqrt[n]{a} - q\sqrt[n]{a} = (p - q)\sqrt[n]{a}$

iv. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

v. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dimana $b \neq 0$

vi. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

2. Jika $m, n \in N$ dengan $n \neq 1$, dan a adalah bilangan riil yang tidak negatif maka:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dan } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

3. Berikut ini beberapa persamaan Eksponen:

   i. Jika $a^{f(x)} = 1$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = 0$.

   ii. Jika $a^{f(x)} = a^p$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x) = p$.

   iii. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$ maka $f(x)$=$g(x)$.

   iv. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dimana $a > 0$ dan $a \neq 0$, $b > 0$ dan $b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$.

   v. Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ dimana $a^{f(x)} = p$ maka bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $Ap^2 + Bp + C = 0$.

4. Jika diketahui suatu perpangkatan dengan $a^c = b$ maka bentuk tersebut dapat diubah ke dalam bentuk logaritma menjadi

$$\log_a b = c \text{ atau } {}^a log\ b = c$$

untuk $a \neq 1$, dan $a > 0$.

5. Beberapa sifat logaritma diantarnya adalah

   i. ${}^a log\ a = 1$

ii. $\quad {}^{a}log\ 1 = 0$

iii. $\quad {}^{a^n}log\ b^m = \frac{m}{n}\ {}^{a}log\ b,\ dengan\ n \neq 0.$

iv. $\quad {}^{a}log\ b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

v. $\quad {}^{a}log\ b = \frac{{}^{p}log\ b}{{}^{p}log\ b}$, dengan $p > 0$, dan $p \neq 1$.

vi. $\quad a^{{}^{a}log\ b} = b$

vii. $\quad {}^{a}log\ b \times {}^{b}log\ c = {}^{a}log\ c$

viii. $\quad {}^{a}log\ bc = {}^{a}log\ b + {}^{a}log\ c$

ix. $\quad {}^{a}log\frac{b}{c} = {}^{a}log\ b - {}^{a}log\ c$

5 Latihan

1. Sederhanakanlah bentuk akar berikut ini

   a. $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

   b. $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}$

   c. $\frac{2-\sqrt{xy}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}$

   d. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^3}}}}$

   e. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[10]{\sqrt{x^5y^3}}}}}$

   f. $\sqrt{\sqrt[7]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a^7bc^3}}}}}}}$

2. Jika $a^{f(x)} = a^p$, $a > 0$, $a \neq 0$, maka $f(x) = p$. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan berikut ini.

a. $2^{4x-1} = 128$

b. $5^{3x-6} = 1$

c. $2^{2x-7} = \frac{1}{32}$

d. $9^{x^2+x} = 27^{x^2-1}$

e. $25^{x+2} = (0{,}2)^{\mathbf{1-x}}$

f. $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$

g. $25^{x+3} = 5^{x-1}$

h. $\left(\frac{1}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2x+1}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2^{4x-1}}}{128}}$

i. $\sqrt{8^{3x+2} = (16)^{\frac{3}{4}}}$

j. $3^{2x+2} + 8.3^{x} - 1 = 0$

3. Tentukanlah nilai logaritma berikut ini

a. $\frac{({}^4\log 3)({}^4\log 6)}{({}^4\log 9)({}^8\log 2)+({}^4\log 9)({}^8\log 3)}$

b. ${}^{\frac{1}{2}}\log 5 \times {}^5\log 4 \times {}^2\log \frac{1}{8} \times ({}^5\log 25)^2$

c. $\frac{{}^3\log \sqrt{6}}{({}^3\log 18)^2-({}^3\log 2)^2}$

d. $2\ {}^6\log 16 - 3\ {}^6\log 4 + {}^6\log 9$

e. ${}^2\log\left({}^2\log \sqrt{\sqrt{2}}\right)$

4. Jika diketahui ${}^2\log 3 = a$, ${}^3\log 5 = b$ dan ${}^5\log 7 = c$ maka tentukanlah

a. ${}^7\log 2$

b. ${}^{125}\log 72$

c. ${}^{128}\log 49 + {}^9\log 343 + {}^6\log 7$

5. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen $9^{2x-4} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4}$ adalah …

6. Jika $2^x = m$ dan $2^y = n$ dengan $x > 0$ dan $y > 0$ maka $\frac{2x+3y}{x+2y} = \cdots$

6 Evaluasi Pembelajaran

Jika nilai $x = 2^{10}$, maka tentukanlah nilai bentuk akar berikut ini

1. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5}}}$
2. $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}}}$
3. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}}}$
4. $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^{15}}}}}}}$

Tentukanlah nilai logaritma berikut ini

5. ${}^{2}\log \frac{4}{3} + 2.\ {}^{2}\log \sqrt{12}$
6. $2^{5} \log 15 + {}^{5}\log 4 - 2\ {}^{5}\log 6$
7. ${}^{3}\log 4 + {}^{9}\log \frac{1}{2} - {}^{27}\log 5^{-2}$
8. $5^{\,{}^{125}\log 27} + 3^{\,{}^{9}\log 64}$
9. ${}^{6}\log 4\ .\ {}^{64}\log 5\ .\ {}^{\frac{1}{27}}\log 8\ .\ {}^{2}\log 81\ .\ {}^{625}\log 36$
10. Jika diketahui ${}^{2}\log 5 = p$, ${}^{5}\log 7 = q$ dan ${}^{7}\log 9 = c$ maka tentukanlah
    a. ${}^{3}\log 2 + {}^{7}\log 2 - {}^{9}\log 5 + {}^{2}\log 36$
    b. ${}^{81}\log 70$
    c. $7^{\,{}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 21}$

11. Jika ${}^{2}\log x + {}^{2}\log y = 12$ dan $3\,{}^{2}\log x - {}^{2}\log y = 4$ maka $x + y =$ …

12. Nilai x yang memenuhi $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x} - \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{-x} = \frac{3}{2}$ adalah …

13. Jika diketahui $a^{b} = 2^{2020} - 2^{2019}$, tentukanlah nilai $a + b$

14. Jika $x > 0$ dan $x \neq 0$ pada $x^{k} = \frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{x}$, maka nilai k adalah…

15. Diketahui ${}^{64}\log\sqrt{16^{x-4}} = \frac{1}{2}$. Nilai x yang memebuhi persamaan persebut adalah …

16. Akar-akar persamaan $2.9^{x} - 5.3^{x} + 10 = 7$ adalah a dan b. Nilai ab dan $a^{2} + b^{2}$ adalah …

7 Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul satu ini menuntun mahasiswa memahami materi Sistem Bilangan Riil secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Sistem	Bilangan	Akar	Komutatif
Asosiatif	Transitif	Identitas	Invers
Logaritma	Eksponen	*Zahlen*	*Whole*

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson

Eie, M, Chang, Shou-Te. 2010. *A course on Abstract Algebra.* Singapore: World Scientific.

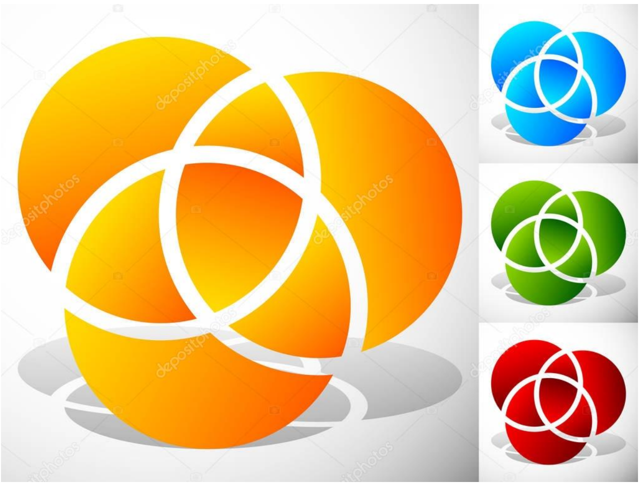
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 2

BIDANG DATAR DAN BANGUN RUANG

Problems come to shape our character, behavior and mindset.

-SCP



Pendidikan Fisika FKIP UKI

MODUL 2 BIDANG DATAR DAN BANGUN RUANG

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Bangun datar dan bangun ruang merupakan materi dasar matematika yang biasa disebut dengan geometri. Geometri menjadi salah satu materi yang dipelajari sejak dini di bangku sekolah. Materi ini dapat dipahami dengan menggunakan kemampuan mengimajinasikan suatu bentuk ataupu bangun tertentu.

   Didalam modul ini akan disajikan berbagai materi yang bekaitan dengan bidang datar yaitu: persegi, persegi panjang, segitiga, trapezium, jajar genjang, belah ketupat, laying-layang dan lingkaran. Setiap materi disajikan dengan memuat berbagai gambar dan contoh soal. Selanjutnya juga memuat materi tentang bangun ruang yaitu kubus, balok, limas, tabung, prisma, kerucut, dan bola. Setiap materi disajikan dengn berbagai gambar dan contoh soal yangmenarik. Modul ini dapat digunakan mahasiswa baik secara mandiri maupu kelompok untuk meningkatkan kemampuan geometri dari setiap mahasiswa.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Dua

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

   S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran 38isika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Diharapkan mahasiswa dapat mendeskripsikan pengertian himpunan, menuliskan himpunan dalam berbagai cara penulisan himpunan, menyebutkan macam-macam himpunan, menentukan relasi pada himpunan dan menggunakan operasi-operasi himpunan.

4. Prasyarat Kompetensi

   Untuk memahami materi pada modul ini, adapun kompetensi prasyarat yang dimiliki yaitu kemampuan didalam mengoperasikan berbagai macam bentuk himpunan Bilangan, Operasi Bilangan dan Secara khusus seluruh sifat-sifat pada Sistem Bilangan Riil yaitu yang terdapat pada modul satu.

5. Kegunaan Modul Dua

   Modul dua ini berguna untuk menjadi sumber belajar mahasiswa untuk memahami materi Himpunan baik dengan pembelajaran individu maupun berkelompok. Materi yang disajikan lengkap sehinggga memudahkan mahasiswa memahami setiap materi dengan baik.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini adalah Pengertian Himpunan, Keanggotaan himpunan dan bilangan, penulisan himpunan, macam-macam himpunan, operasi pada himpunan, sifat-sifat operasi himpunan, hokum-hukum pada himpunan dan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke-3: Menguasai Bidang datar: Persegi, persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapezium, belah ketupat, laying-layang, dan lingkaran

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Bidang datar: Persegi, persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapezium, belah ketupat, laying-layang, dan lingkaran. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Bidang datar: Persegi, persegi panjang, segitiga, jajargenjang, trapezium, belah ketupat, laying-layang, dan lingkaran. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

Geometri berasal dari Bahasa Yunani yaitu geo yang berarti “bumi", dan metron yang berarti “pengukuran”. Sehingga geometri disebut sebagai ilmu ukur, atau ilmu bangun. Geometri merupakan cabang matematika yang berkaitan tentang bentuk, ukuran, posisi relatif gambar, dan sifat ruang.

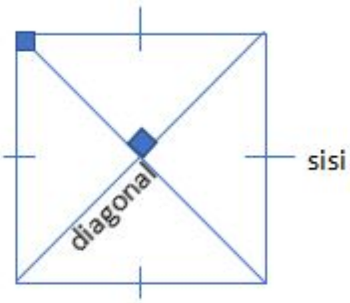
Geometri muncul secara independen di sejumlah budaya awal sebagai ilmu pengetahuan praktis tentang panjang, luas, dan volume, dengan unsur-unsur dari ilmu matematika formal. Geometri sedara sederhana dibagi dalam dua tenis, yaitu geometri dimensi dua dan geometri dimensi tiga.

Geometri dalam dua dimensi adalah suatu bentuk yang berupa dua dimensi, yang berarti bangunan tersebut hanya melibatkan panjang dan lebar. Geometri dalam dua dimensi ini basa juga disebut dengan bidang datar. Berbagai bidang datar yang dipelajari dalam modul ini yaitu persegi, persegi panjang, segitiga, jajar genjang, trapesium, belah ketupat, layang-layang, dan lingkaran.

Selanjutnya Geometri dalam tiga dimensi adalah suatu bentuk yang berupa tiga dimensi, yang berarti bangunan tersebut melibatkan panjang, lebar dan tinggi. Geometri tida dimensi ini bias disebut denganbangun ruang baik itu bangun rang sisi datar maupun bangun ruano sisi lengkung. Bebagai tenis bentuk bangun ruang yaitu kubus, balok, prisma, kerucut, limas, tabbing dan Bola.

2.1 Persegi

Persegi atau bujur sangkar adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang sama panjang dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.



Gambar 4 Persegi

Sifat-sifat persegi yaitu sebagai berikut.

- Memiliki empat sisi yang sama panjang (dua pasang sisi yang sejajar).
- Mempunyai empat sudut siku-siku.
- Memiliki dua diagonal yang saling berpotongan tegak lurus.

Semua jenis bangun datar pasti memiliki keliling, tidak terkecuali bangun datar persegi. Menghitung keliling persegi dapat dengan cara mengalikan 4 sisinya. Hal ini dikarenakan keliling persegi merupakan penjumlahan keempat sisinya yang sama panjang. Sehingga rumus keliling persegi adalah

$$Keliling\ (K) = sisi + sisi + sisi + sisi$$

atau

$$Keliling\ (K) = 4 \times sisi$$

Selain keliling, bangun datar persegi juga memiliki luasan, dimana luasan persegi dihitung dengan menguadratkan panjang sisinya. Sehingga rumus untuk luas persegi adalah

$$Luas\ (L) = (sisi\ persegi)^2$$

$$Luas\ (L) = s^2$$

Contoh :

Tentukanlah Keliling dan luas taman yang berbentuk persegi yang memiliki sisi 3 m.

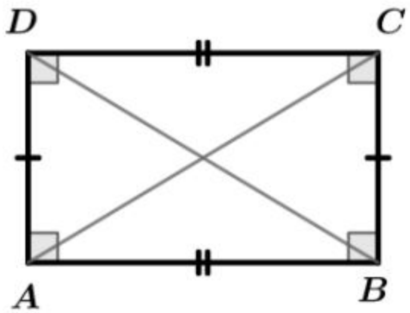
Jawab:

$$Keliling\ (K) = 4 \times sisi = 4 \times 3m = 12m$$

$$Luas\ (L) = (3m)^2 = 9m^2$$

2.2 Persegi Panjang

Persegi panjang adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh dua pasang sisi yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.

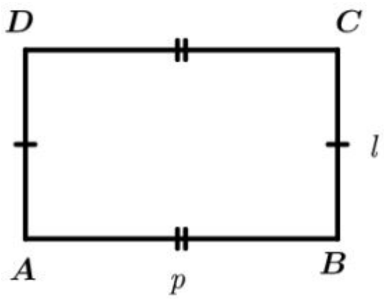


Gambar 5 Persegi Panjang

Sifat-sifat persegi panjang yaitu sebagai berikut.

- Memiliki empat buah sisi. Dalam persegi panjang ABCD tersebut terdapat empat sisi yaitu sisi AB, BC, CD, dan DA.
- Sisi-sisi yang sejajar dan berhadapan sama panjang. Dalam persegi panjang ABCD, sisi-sisi yang sejajar dan berhadapan adalah sisi AB dengan sisi CD dan sisi BC dengan sisi AD.
- Memiliki dua diagonal yang sama panjang. Dalam persegi panjang di atas terdapat diagonal AC dan diagonal BD. Kedua diagonal memiliki ukuran yang sama.
- Memiliki empat sudut siku-siku. Dalam persegi panjang ABCD, terdapat sudut ABC, sudut BCD, sudut CDA, dan sudut DAB yang masing-masing berukuran 90^{o} atau sudut siku-siku.
- Memiliki dua simetri lipat dan simetri putar.

Perhatikan gambar berikut



Gambar 6 Persegi panjang dengan panjang p dan lebar l

Keliling persegi panjang dapat ditentukan dengan menjumlahkan seluruh sisi dari persegi yaitu:

$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = p + l + p + l = 22 + 2l$$

atau

$$Keliling(K) = 2(p + l)$$

Selanjutnya Luas persegi panjang dapat ditentukan dengan mengalikan panjang persegi panjang terhadap lebar dari persegi panjang, yang dituliskan dengan:

$$Luas\ (L) = panjang \times lebar = p \times l$$

Keterangan:

K : Keliling Persegi Panjang

L : Luas Persegi Panjang

p : Panjang Persegi Panjang

l : Lebar Persegi Panjang

Contoh :

Tentukanlah keliling dan luas kolam renang yang berbentuk persegi panjang dimana panjangnya sebesar 6m dan lebarnya 2/3 dari panjangnya.

Jawab:

Panjang = 6m

Lebar = 2/3 (6m) = 4m

$$Keliling(K) = 2(p + l) = 2(6m + 4m) = 20m$$

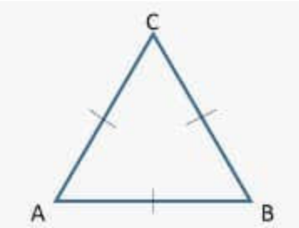
$$Luas\ (L) = p \times l = 6m \times 4m = 24m^2$$

2.3 Segitiga

Sebuah segitiga adalah poligon dengan tiga ujung dan tiga simpul. Ini adalah salah satu bentuk dasar dalam geometri. Segitiga dengan simpul A, B, dan C dilambangkan △ABC.

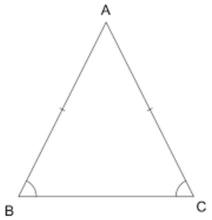
Berdasarkan panjang sisinya, bangun datar segitiga dibedakan menjadi tiga, yaitu segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sembarang.

1. Segitiga Sama Sisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama panjang dan ketiga sudutnya sama besar (60°).



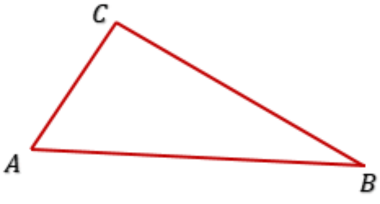
Gambar 7 Segitiga sama sisi

2. Segitiga Sama Kaki adalah segituga yang dua dari tiga sisinya sama panjang dan memiliki sepasang sudut yang sama besar.



Gambar 8 Segitiga sama kaki

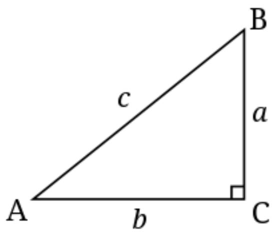
3. Segitiga Sembarang adalah ketiga sisinya tidak sama panjang dan ketiga sudutnya tidak sama besar.



Gambar 9 Segitiga sembarang

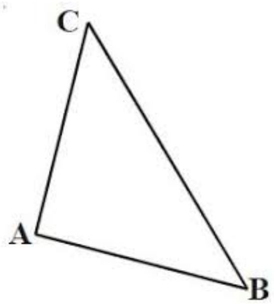
Berdasarkan besar sudutnya, bangun datar segitiga dibedakan menjadi tiga, yaitu segitiga sama siku-siku, segitiga lancip, dan segitiga tumpul.

1. Segitiga Siku-Siku adallah segitiga yang memiliki sudut terbesarnya adalah sudut siku-siku (90 derajat).



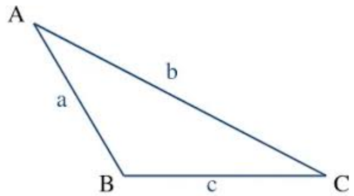
Gambar 10 Segitiga siku-siku

2. Segitiga Lancip merupakan segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip.



Gambar 11 Segitiga lancip

3. Segitiga Tumpul merupakan segitiga yang satu sudutnya merupakan sudut tumpul.

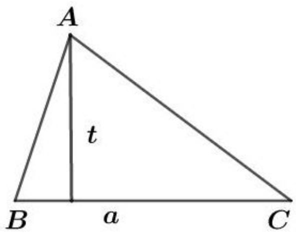


Gambar 12 Segitiga tumpul

Dari berbagai bentuk segitiga diatas, dapat dituliskan rumus untuk menghitung keliling yaitu dengan menjumlahkan ketiga sisi dari setiap segitiga, yang dituliskan dengan:

$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ AC$$

Selanjutnya, untuk menentukan Luas dari segitiga, dilakukan dengan menggunakan tinggi dari segitiga yang dimiliki seperti pada gambar berikut:



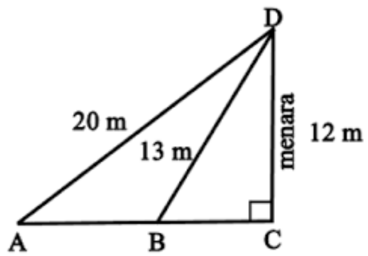
Gambar 13 Luas Segitiga

Sehingga luas segitiga dihitung dengan:

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} alas \times tinggi = \frac{1}{2} a \times t = \frac{1}{2} at$$

Contoh:

Tentukanlah keliling △ABD dan luas △ACD seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 14 Segitiga dari menara

Jawab:

Unutk menentukan keliling dan luas segitiga yang ditanyakan, maka terlebih dahulu kita menentukan panjang AB, BC dan AC dengan menggunakan rumus Phytagoras seperti berikut:

$$AC^2 = AD^2 - CD^2 = (20m)^2 - (12m)^2 = 400m^2 - 144m^2$$

$$= 256m^2$$

$$AC = \sqrt{256m^2} = 16m$$

$$BC^2 = BD^2 - CD^2 = (13m)^2 - (12m)^2 = 169m^2 - 144m^2 = 25m^2$$

$$BC = \sqrt{25m^2} = 5m$$

$$AB = AC - BC = 16m - 5m = 11m$$

Jadi,

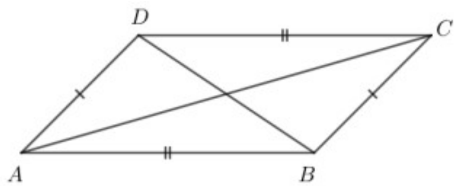
$$Keliling \ \triangle \text{ ABD} = \text{sisi AB} + \text{sisi BD} + \text{sisi AD} = 11\text{m} + 13\text{m} + 20\text{m}$$

$$= 45\text{m}$$

$$Luas \ \triangle \text{ ACD} = \frac{1}{2} AC \times CD = \frac{1}{2} 16m \times 12m = 96m^2$$

2.4 Jajar Genjang

Jajar genjang atau jajaran genjang (bahasa Inggris: *parallelogram*) adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh dua pasang rusuk yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki dua pasang sudut yang masing-masing sama besar dengan sudut di hadapannya.



Gambar 15 Jajar genjang

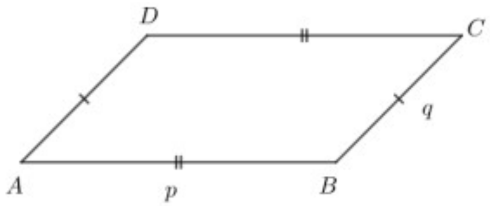
Sifat-sifat jajar genjang yaitu sebagai berikut.

- Jajar genjang memiliki dua pasang sisi yang sejajar dan sama panjang. Sisi AB sejajar dengan sisi CD sehingga ukuran sisi AB = ukuran sisi CD. Sisi BC sejajar dengan sisi AD sehingga ukuran sisi BC = ukuran sisi AD.
- Jajar genjang memiliki dua pasang sudut yang saling berhadapan dan sama besar. Kedua pasang sudut yang berhadapan pada jajar genjang ABCD di atas yaitu sudut ABC dengan sudut ADC serta sudut BAD berhadapan dengan sudut BCD. Ukura sudut ABC

sama dengan ukuran sudut ADC, serta ukuran sudut BAD sama dengan ukuran sudut BCD.

- Jajar genjang memiliki dua diagonal yang saling berpotongan. Kedua diagonal pada bangun jajar genjang tidak sama panjang.

Untuk memahami keliling jajar genjang, perhatikan gambar berikut.



Gambar 16 Jajar genjang dengan panjang p dan levar q

Pada gambar di atas terdapat bangun jajar genjang ABCD dengan ukuran sisi AB adalah p dan ukuran sisi BC adalah q. Keliling bangun jajar genjang tersebut dirumuskan sebagai berikut.

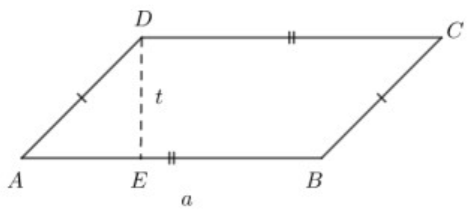
$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = p + q + p + q$$

$$Keliling\ (K) = 2p + 2q$$

$$Keliling\ (K) = 2(p + q)$$

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 17 Jajar genjang dengan lebar a dan tinggi t

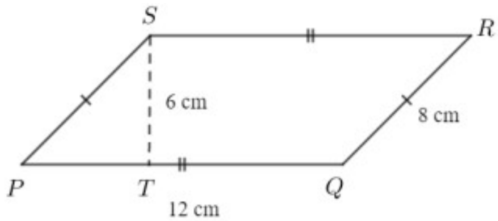
Pada gambar di atas terdapat bangun jajar genjang ABCD dengan sisi alas AB berukuran *a* dan tinggi jajar genjang yaitu DE berukuran *t*. Tinggi bangun jajar genjang tegak lurus dengan sisi alas jajar genjang. Luas bangun jajar genjang dirumuskan sebagai berikut.

$$Luas\ (L) = AB \times DE$$

$$Luas\ (L) = a \times t = at$$

Contoh :

Tentukanlah keliling dan luas jajar genjang berikut



Gambar 18 Contoh jajar genjang

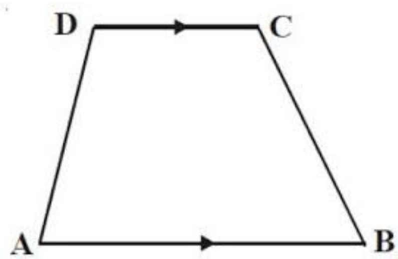
Jawab:

$$Keliling\ (K) = 2(PQ + QR) = 2(12cm + 8cm) = 2(20cm) = 40cm$$

$$Luas\ (L) = PQ \times ST = 12cm \times 6cm = 72cm^2$$

2.5 Trapesium

Trapesium adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang dua di antaranya saling sejajar namun tidak sama panjang.Trapesium termasuk jenis bangun datar segi empat yang mempunyai ciri khusus.



Gambar 19 Trapesium

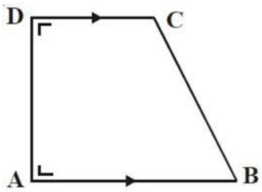
Sifat-sifat trapesium yaitu sebagai berikut.

- Memiliki sepasang sisi sejajar
- Memiliki dua pasang sudut sama besar (trapesium sama kaki) atau memiliki dua sudut siku-siku (trapesium siku-siku).

- Jumlah besar sudut yang berdekatan di antara dua garis sejajar adalah 180 derajat.

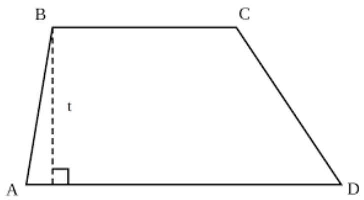
Trapesium dibagi menjadi dua jenis yaitu trapezium siku-siku dan trapezium sembarang.

1. Trapesium siku-siku adalah trapezium yang memiliki dua buah sudut siku-siku , sepasang sisi sejajar dan panjang diagonal pada trapezium tidak sama.



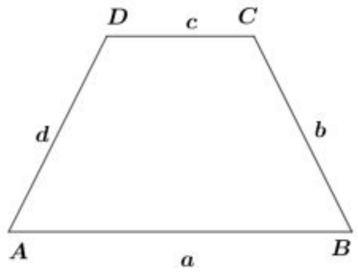
Gambar 20 Trapesium siku-siku

2. Trapesium sembarang adalah trapezium yang memiliki sepasang sisi yang sejajar. Selain itu, trapesium jens ini memlik empat sudut yang tidak sama besar serta dua diagonalnya tidak sama panjang.



Gambar 21 Trapesium sembarang

Secara umum, untuk menghitung keliling bangun datar dapat dilakukan dengan menghitung jumlah panjang setiap sisinya. Perhatikan gambar berikut



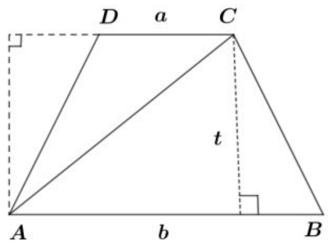
Gambar 22 Trapesium dengan panjang sisi a, b, c dan d

Keliling trapezium dapat dihitung dengan menjumahkan seluruh sisinya:

$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = a + b + c + d$$

Selanjutnya Perhatikan gambar berikut.



Gambar 23 Keliling dan Luas Trapesium

Luas trapezium dihitung dengan

$$Luas\ (L) = Luas\ \triangle \text{ ABC} + \text{Luas } \triangle \text{ ACD}$$

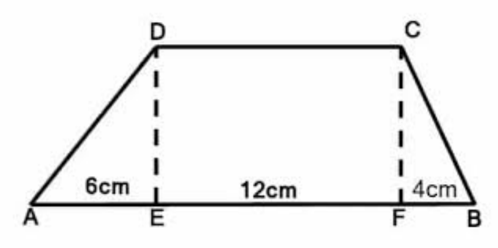
$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} b \times t + \frac{1}{2} \text{a} \times \text{t}$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} t(b + a)$$

$$Luas\ (L) = \frac{(a + b)t}{2}$$

Contoh :

Tentukanlah keliling dan luas trapezium ini jika diketahui tingginya adalah 8 cm.



Gambar 24 Contoh trapesium

Jawab:

Untuk menentukan keliling dan luas trapezium diatas,maka terlebih dahulu kita menentukan panjang sisi AD dan BC dengan menggunakan rumus phytagoras, yaitu:

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = (6cm)^2 + (8cm)^2 = 36cm^2 + 64cm^2$$
$$= 100cm^2$$
$$AD = \sqrt{100cm^2} = 10cm$$
$$BC^2 = BF^2 + BC^2 = (4cm)^2 + (8cm)^2 = 16cm^2 + 64cm^2 = 80cm^2$$
$$AD = \sqrt{80cm^2} = 4\sqrt{5}cm$$
$$AB = AE + EF + FB = 6cm + 12cm + 4cm = 22cm$$

Jadi, Keliling trapezium tersebut adalah

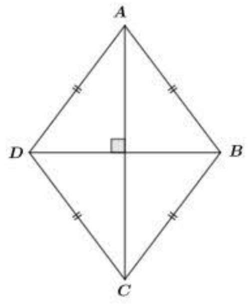
$$Keliling\ (K) = AB + BC + CD + DA$$
$$= 22cm + 4\sqrt{5}cm + 12cm + 10cm$$
$$Keliling\ (K) = 4\left(11 + \sqrt{5}\right)cm$$

Selanjutnya, Luas trapesium adalah

$$Luas\ (L) = \frac{(AB + CD)DE}{2} = \frac{(22cm + 12cm)8cm}{2} = 136\text{cm}^2$$

2.6 Belah Ketupat

Belah ketupat adalah jajargenjang yang memiliki diagonal sama panjang dan tegak lurus satu sama lain.



Gambar 25 Belah Ketupat

Sifat-sifat belah ketupat yaitu sebagai berikut.

- Memiliki empat buah sisi yang sama panjang, yaitu sisi AB, BC, CD, dan DA.
- Memiliki dua pasang sudut yang berhadapan dan sama besar, yaitu sudut ABC dengan sudut ADC dan sudut BAD dengan sudut BCD.
- Memiliki dua buah diagonal yang saling berpotongan tegak lurus, yaitu diagonal AC dan diagonal BD. Satu diagonal membagi dua diagonal yang lain sama panjang. Diagonal AC membagi diagonal BD menjadi dua sama panjang, begitu pula dengan diagonal BD membagi diagonal AC menjadi dua sama panjang.
- Memiliki dua simetri lipat dan simetri putar. Masing-masing sumbu simetri berimpit dengan diagonal AC dan diagonal BD.

Untuk menghitung keliling dan luas belah ketupat, dapat dilakukan dengan menggunakan rumus berikut.

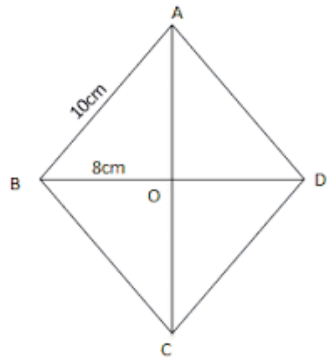
$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = s + s + s + s = 4s$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

Contoh:

Tentukanlah keliling dan luas dari belah ketupat berikut:



Gambar 26 Contoh Belah ketupat

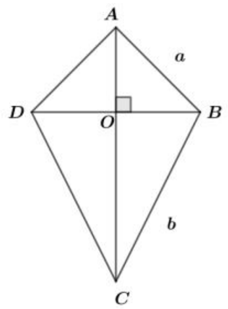
Jawab :

$$Keliling\ (K) = 4s = 4 \times 10cm = 40cm$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{16 \times 16}{2} = 128\ cm^2$$

2.7 Layang-Layang

Bangun datar layang-layang merupakan salah satu bangun dua dimensi dengan empat sisi. Layang-Layang memiliki dua pasang sisi yang sama panjang tetapi tidak sejajar.



Gambar 27 Layang-layang

Sifat-sifat layang-layang yaitu sebagai berikut.

- Memiliki dua pasang sisi yang sama panjang dan tidak sejajar. Sisi AB sama dengan sisi AD dan sisi BC sama dengan sisi CD.
- Memiliki dua sudut yang sama besar. Sudut ABC sama dengan sudut ADC.
- Memiliki dua diagonal yang saling tegak lurus. Diagonal AC tegak lurus dengan diagonal BD.
- Memiliki satu sumbu simetri yaitu garis yang berhimpit dengan garis AC.

Untuk menentukan keliling dan luas layang-layang dapat dilakukan dengan menggunakan rumus berikut:

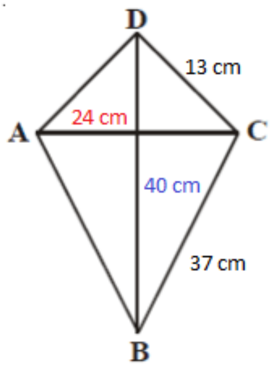
$$Keliling\ (K) = sisi\ AB + sisi\ BC + sisi\ CD + sisi\ DA$$

$$Keliling\ (K) = a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b)$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

Contoh:

Tentukanlah keliling dan luas dari layang –layang berikut:



Gambar 28 Contoh Layang-layang

Jawab:

$$Keliling\ (K) = 2(37cm + 13cm) = 2(50cm)$$

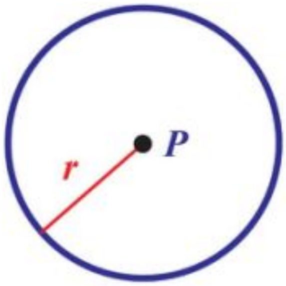
$$= 100cm$$

$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} diagonal\ 1 \times diagonal\ 2 = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{24cm \times 40cm}{2}$$

$$= 480\ cm^2$$

2.8 Lingkaran

Lingkaran adalah bentuk yang terdiri dari semua titik dalam bidang yang berjarak tertentu dari titik tertentu, pusat; ekuivalennya adalah kurva yang dilacak oleh titik yang bergerak dalam bidang sehingga jaraknya dari titik tertentu adalah konstan.

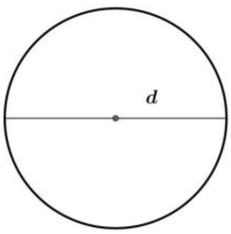


Gambar 29 Lingkaran

Sifat Lingkaran:

- Memiliki satu titik pusat.
- Jarak sembarang titik pada lingkaran terhadap pusat adalah sama.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 30 Lingkaran dengan diameter d

Keliling lingkaran dapat dirumuskan sebagai berikut.

Keliling Lingkaran = π x diameter lingkaran

$$K = \pi \times d$$

Karena ukuran diameter adalah dua kali ukuran jari-jari lingkaran, maka:

$$K = \pi\times(2\times r) = 2\times\pi\times r$$

Keterangan:

K : keliling lingkaran

π : phi, konstanta dengan nilai 3,1459… (22/7)

d : diameter lingkaran

r : jari-jari lingkaran

Luas lingkaran = π x jari-jari lingkaran x jari-jari lingkaran

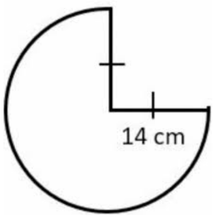
$$\mathrm{L} = \pi\times \mathrm{r}\times\mathrm{r} = \pi\,\mathrm{r}^2$$

Hubungannya dengan diameter dirumuskan sebagai

$$\mathrm{L} = \pi\times\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\right)^2 = \frac{1}{4}\times\pi\times\mathrm{d}^2$$

Contoh:

Tentukanlah Keliling dan luas lingkaran berikut



Gambar 31 Contoh Lingkaran

Jawab:

$$\text{Keliling} = \frac{3}{4}(2\pi\mathrm{r}) = \frac{3}{4}2\cdot\frac{22}{7}\cdot 14\mathrm{cm} = 66\mathrm{cm}$$

$$L = \pi\times r^2 = \frac{22}{7}\cdot(14\mathrm{cm})^2 = 2156\mathrm{cm}^2$$

4. Rangkuman

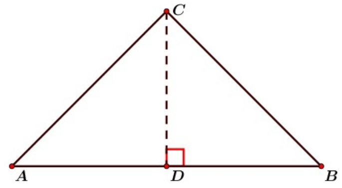
1) Persegi atau bujur sangkar adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang sama panjang dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.
2) Persegi panjang adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk

oleh dua pasang sisi yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki empat buah sudut yang kesemuanya adalah sudut siku-siku.

3) Sebuah segitiga adalah poligon dengan tiga ujung dan tiga simpul. Ini adalah salah satu bentuk dasar dalam geometri.
4) Jajar genjang atau jajaran genjang (bahasa Inggris: *parallelogram*) adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh dua pasang rusuk yang masing-masing sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, dan memiliki dua pasang sudut yang masing-masing sama besar dengan sudut di hadapannya.
5) Trapesium adalah bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk yang dua di antaranya saling sejajar namun tidak sama panjang.
6) Belah ketupat adalah jajar genjang yang memiliki diagonal sama panjang dan tegak lurus satu sama lain.
7) Bangun datar layang-layang merupakan salah satu bangun dua dimensi dengan empat sisi.
8) Lingkaran adalah bentuk yang terdiri dari semua titik dalam bidang yang berjarak tertentu dari titik tertentu, pusat

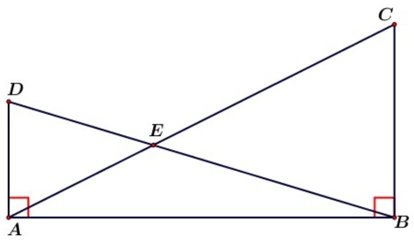
5. Latihan

1) Perhatikan gambar berikut:



jika diketahui AC=7, segitiga ABC siku-siku di C, dan CD merupakan garis tinggi. Berapakah panjang CD?

2) Perhatikan gambar berikut

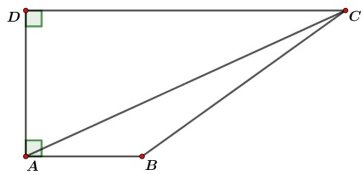


segilima ABCED terbentuk dari dua segitiga siku-siku ABC dan BAD dengan AD=3cm dan BC=5cm. Sisi AC dan BD berpotongan di titik E. Jika luas segitiga $AEB = 12cm^2$, berapakah jarak E dan AB? Apakah pernyataan (1) dan (2) berikut cukup untuk menjawab pertanyaan tersebut.

(1) AC=14 cm

(2) BD=12cm

3) Perhatikan gambar berikut ini

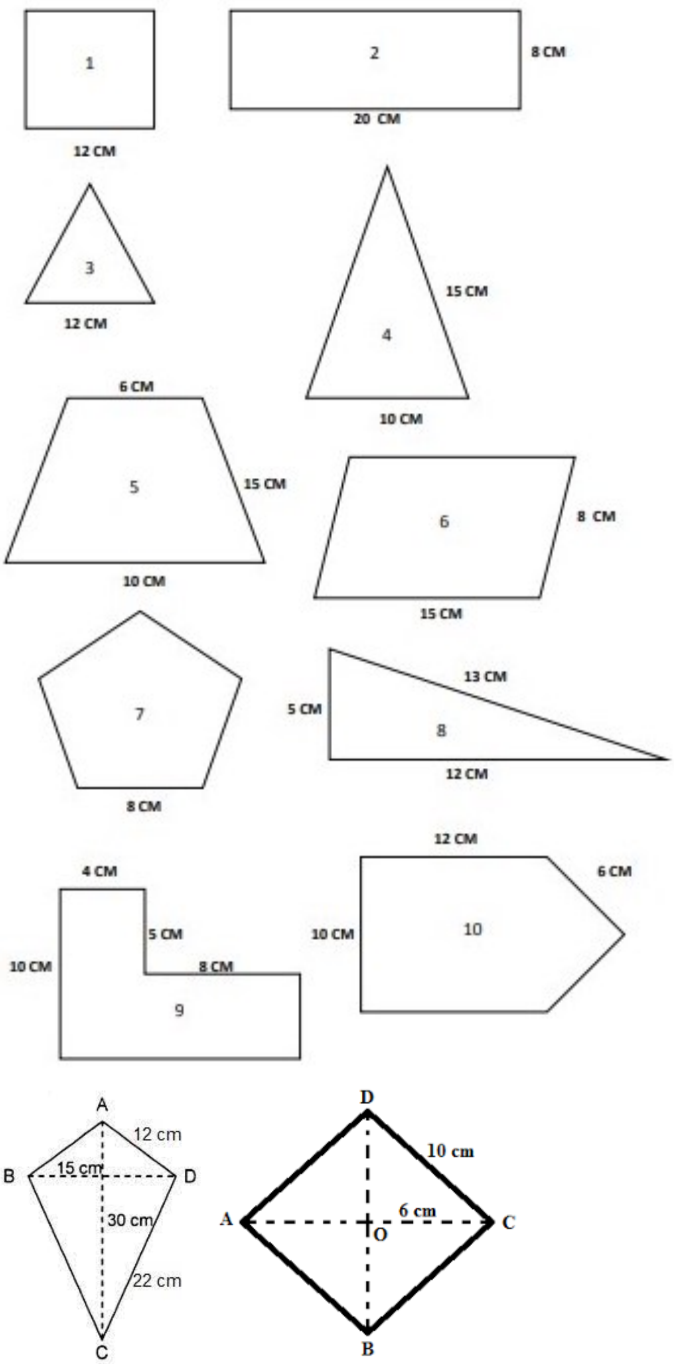


pada trapezium siku-siku ABCD, AC=9, jika luas segitiga ABC=10, berapakah panjang CD? Penyataan yang manakah berikut ini yang tepat untuk menentukan panjang CD tersebut?

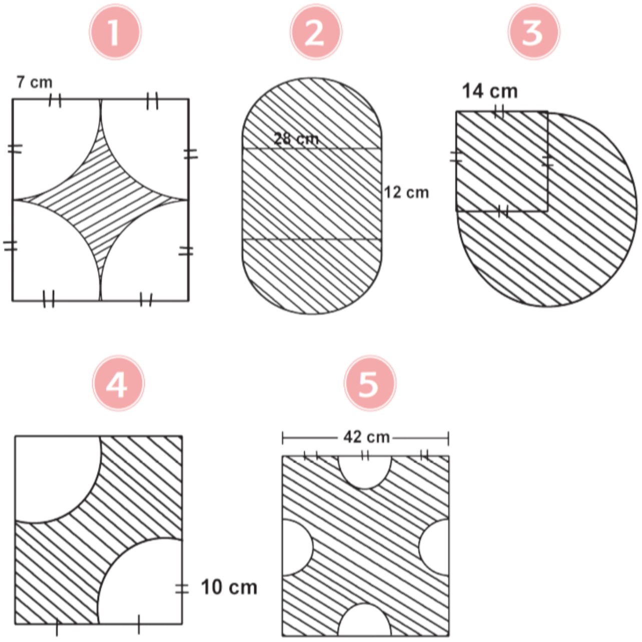
(1) AB=4

(2) BC=7

4) Tentukanlah Keliling dan luas setiap bidang pada gambar dibawah ini:

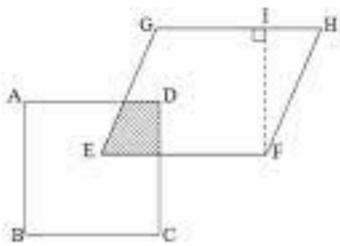


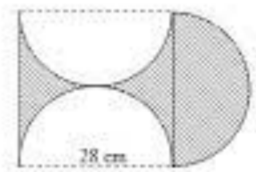
5) Tentukanlah luas daerah yang diarsir pada gambar dibawah ini

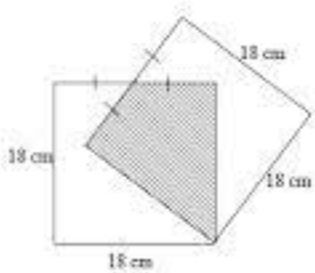


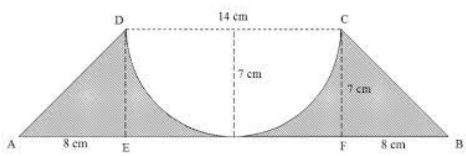
6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah luas daerah yang diarsir berikut

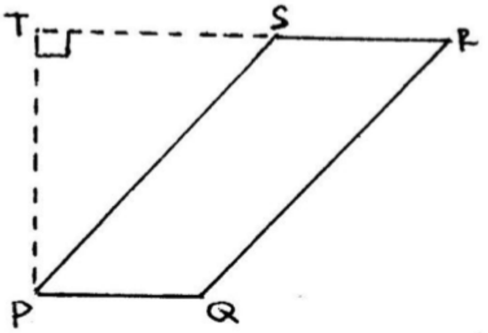








2) Perhatikan gambar dibawah!



PQRS adalah jajar genjang, dengan panjang TR=22cm, PQ=7cm, dan QR=25cm. Berapakah panjang PT?

3) Diketahui keliling belah ketupat 100cm dan panjang salah satu diagonalnya adalah 48 cm. Tentukanlah luas belah ketupat tersebut.
4) Bentuk kebun Pak Yusuf adalah trapesium siku-siku dengan panjang sisi sejajar adalah 20 m dan 25 m dengan panjang sisi siku-sikunya 12 m. Disekeliling kebun akan dibuat pagar dengan biaya Rp25.000 per meter. Berapak biaya yang diperlukan Pak Yusuf untuk pembuatan pagar seluruhnya?
5) Raka membuat kolam renang berbentuk persegi panjang berukuran 10m dan lebar 8m. Disekeliling kolam akan dibuat jalan dengan lebar 1m dan dipasang keramik. Tentukan luas keramik yang dibutuhkan untuk membuat jalan tersebut!

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-4 : Menguasai konsep bangun Ruang: Kubus, Balok, Prisma, kerucut, limas, tabung dan bola

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

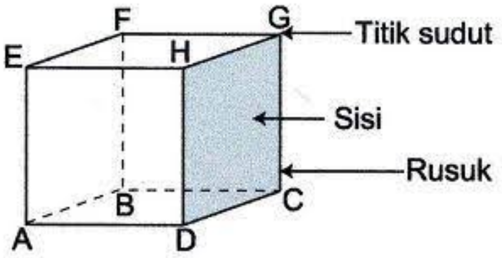
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Bangun Ruang: Kubus, Balok, Prisma, kerucut, limas, tabung dan bola. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Bangun Ruang: Kubus, Balok, Prisma, kerucut, limas, tabung dan bola. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

2.9 Kubus

Kubus merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh enam sisi serupa yang berwujud bujur sangkar. Kubus juga dikenal dengan nama lain yaitu bidang enam beraturan. Kubus sebetulnya adalah bentuk khusus dari prisma segiempat, sebab tingginya sama dengan sisi alas.



Gambar 32 Kubus

1. Sisi kongruen ada sebanyak 6 buah yang terdiri atas:
   a. bidang alas kubus: ABCD
   b. bidang atas kubus: EFGH
   c. sisi tegak kubus: ABEF, CDGH, ADEH, dan BCFG.
2. Rusuk sama panjang ada sebanyak 12 buah (AB = BC = CD = DA = EF = FG = GH = HE = AE = BF = CG = DH).
3. Titik sudut berjumlah 8 titik (A, B, C, D, E, F, G, H).
4. Diagonal bidang yang sama panjang sebanyak 6 buah (AC = BD = EG = FH = AF = BE = CH = DG = AH = DE = BG = CF).
5. Diagonal ruang yang sama panjang sebanyak 4 buah (AG = BH = CE = DF).
6. Bidang diagonal kongruen berjumlah 6 buah (ABGH, EFCD, BCHE, FGDA, BFHG, dan AEGC).

Sifat bangun Kubus:

- Seluruh sisi kubus berbentuk persegi dengan mempunyai luas yang sama.
- Seluruh rusuk kubus memiliki panjang yang sama.
- Masing-masing diagonal bidang pada kubus mempunyai panjang yang sama.
  Perhatikan ruas garis BG dan CF pada gambar di atas. Kedua garis tersebut adalah diagonal bidang kubus ABCD.EFGH yang mempunyai ukuran sama panjang.
- Masing-masing diagonal ruang pada kubus memiliki panjang yang sama.
  Dari kubus ABCD.EFGH pada gambar di atas , ada dua diagonal ruang, yakni HB dan DF di mana keduanya berukuran sama panjang.
- Masing-masing bidang diagonal pada kubus berbentuk persegi panjang.
  Perhatikan bidang diagonal ACGE pada gambar di atas.

$$Volume = s \times s \times s = s^3$$

$$Luas\ Permukaan = 6\ s \times s = 6s^2$$

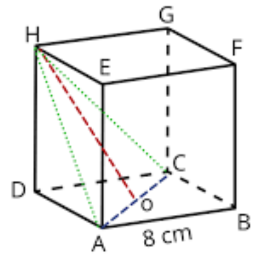
$$Panjang\ diagonal\ bidang = s\sqrt{2}$$

$$Panjang\ diagonal\ ruang = s\sqrt{3}$$

$$Luas\ bidang\ diagonal = s^2\sqrt{2}$$

Contoh :

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 33 Contoh kubus

Tentukanlah :

a. Volume
b. Luas Permukaan
c. Panjang diagonal bidang
d. Panjang diagonal ruang
e. Luas bidang diagonal
f. Luas ΔACH

Jawab :

a. Volume

$$Volume = s^3 = (8cm)^3 = 512cm^3$$

b. Luas Permukaan

$$Luas\ Permukaan = 6s^2 = 6(8cm)^2 = 384cm^2$$

c. Panjang diagonal bidang

$$Panjang\ diagonal\ bidang = s\sqrt{2} = 8\sqrt{2}cm$$

d. Panjang diagonal ruang

$$Panjang\ diagonal\ ruang = s\sqrt{3} = 8\sqrt{3}cm$$

e. Luas bidang diagonal

$$Luas\ bidang\ diagonal = s^2\sqrt{2} = 64\sqrt{2}cm$$

f. Luas ΔACH

$$Luas\ \Delta ACH = \frac{1}{2}AC \times OH$$

Untuk menentukan panjang OH, kita gunakan rumus phytagoras yaitu

$$OH^2 = AH^2 - AO^2 = \left(8\sqrt{2}cm\right)^2 - \left(4\sqrt{2}cm\right)^2$$

$$= 128cm^2 - 32cm^2 = 96cm^2$$

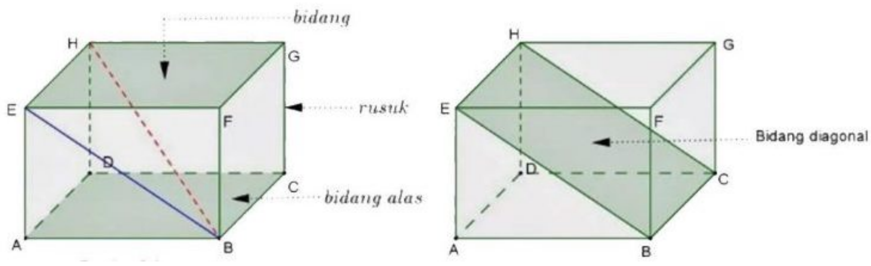
$$OH = \sqrt{96cm^2} = 4\sqrt{6}cm$$

$$Luas\ \Delta ACH = \frac{1}{2}AC \times OH = \frac{1}{2}8\sqrt{2}cm \times 4\sqrt{6}cm = 16\sqrt{12}cm^2$$

$$= 32\sqrt{3}cm^2$$

2.10 Balok

Balok adalah suatu bangun ruang yang mempunyai tiga pasang sisi segi empat. Di mana pada masing-masing sisinya yang berhadapan mempunyai bentuk serta ukuran yang sama. Berbeda halnya dengan kubus di mana seluruh sisinya kongruen berbentuk persegi, dan pada balok hanya sisi yang berhadapan yang sama besar. Serta tidak seluruhnya berbentuk persegi, kebanyakan berbentuk persegi panjang.



Gambar 34 Balok

Pada masing-masing dari bangun ruang sisi datar yang satu ini sama seperti yang ada pada kubus.

Suatu balok terdiri tas sisi, sudut, diagonal bidang, diagonal ruang, serta yang terakhir yaitu bidang diagonal.

Berikut akan kami berikan rincian jumlahnya untuk kalian semua:

1. Sisi berbentuk persegi dan juga persegi panjang sebanyak 6 buah, antara lain yaitu:
   - bidang alas kubus: ABCD
   - bidang atas kubus: EFGH
   - sisi tegak kubus: ABEF, CDGH, ADEH, dan BCFG.
2. Rusuk sebanyak 12 buah yang dapat dibagi menjadi 3 kelompok, antara lain:
   - panjang (p) yakni rusuk terpanjang dari alas balok serta rusuk lainnya yang sejajar: AB, DC, EF dan HG
   - lebar (l) adalah rusuk terpendek dari alas balok dan juga rusuk lainnya yang sejajar: BC, AD, FG, dan EH
   - tinggi (t) adalah rusuk yang tegak lurus terhadap panjang dan lebar balok: AE, BF, CG, dan DH.
3. Titik sudut berjumlah 8 titik (A, B, C, D, E, F, G, H).
4. Diagonal bidang sebanyak 6 buah (AC, BD, EG, FH, AF, BE, CH, DG, AH, DE, BG, dan CF).
5. Diagonal ruang yang berjumlah 4 buah (AG, BH, CE, dan DF).
6. Bidang diagonal yang berbentuk persegi panjang dengan jumlah 6 buah, antara lain: ABGH, EFCD, BCHE, FGDA, BFHG, dan AEGC.

Berikut ini beberapa sifat Balok:

1. Sedikitnya sebuah balok mempunyai dua pasang sisi yang berbentuk persegi panjang.
2. Rusuk-rusuk yang sejajar memiliki ukuran yang sama panjang: AB = CD = EF = GH, dan AE = BF = CG = DH.

3. Pada masing-masing diagonal bidang pada sisi yang berhadapan berukuran sama panjang, yakni:
ABCD dengan EFGH, ABFE dengan DCGH, dan BCFG dengan ADHE yang mempunyai ukuran sama panjang.
4. Masing-masing diagonal ruang pada balok mempunyai ukuran sama panjang.
5. Masing-masing bidang diagonalnya berbentuk persegi panjang.

Berikut ini beberapa rumus yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam balok:

$$Volume = p.l.t$$

$$Luas\ Permukaan = 2\ (pl\ +\ pt\ +\ lt)$$

$$Panjang\ Diagonal\ Bidang = \sqrt{p2 + l2}$$

atau

$$Panjang\ Diagonal\ Bidang = \sqrt{p^2 + t^2}$$

atau

$$Panjang\ Diagonal\ Bidang = \sqrt{l^2 + t^2}$$

$$Panjang\ Diagonal\ Ruang \coloneqq \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Keterangan:

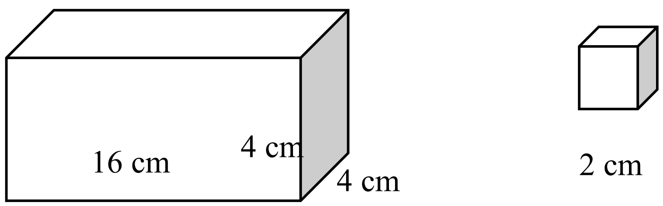
p : panjang

l : lebar

t : tinggi

Contoh :

Perhatikan gambar disamping!



Gambar 35 Contoh Balok

Budi sedang bermain pasir di halaman rumah. Ia mempunyai wadah seperti tampak pada gambar di atas. Wadah apakah yang digunakan Budi tersebut! Berapa kalikah Budi harus menuangkan Pasir dari wadah A supaya wadah B penuh? Jelaskan!

Jawab:

Diketahui :

Gambar A : p = 16 cm

l = 4 cm

t = 4 cm

Gambar B : s = 2 cm

Ditanya :

wadah apa?

Berapa kali Budi harus menuangkan pasir dari wadah B supaya wadah A penuh?

Jawab :

Gambar A : Balok Gambar B : Kubus

Volume balok = p.l.t = 16cm . 4cm . 4cm = 256 cm^3

Volume kubus = $s^3 = (2\ cm)^3 = 8\ cm^3$

Jadi,

Banyaknya pasir yang dituang dari B ke A

256 cm^3/8 cm^3 = 32 kali

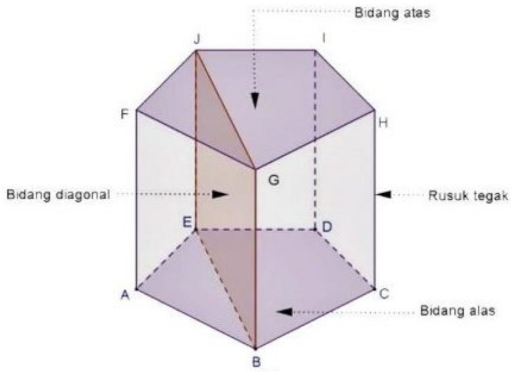
Jadi Budi harus menuangkan pasir sebanyak 32 kali dari wadah B ke wadah A sehingga wadah A penuh.

2.11 Prisma

Prisma merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi di mana alas dan juga tutupnya kongruen serta sejajar berbentuk segi-n. Sisi-sisi tegak dalam prisma memiliki beberapa bentuk, antara lain: persegi, persegi panjang, atau jajar genjang. Dilihat dari tegak rusuknya, prisma terbagi menjadi dua macam, yaitu: prisma tegak dan prisma miring.

Prisma tegak merupakan prima di mana rusuk-rusuknya tegak lurus dengan alas dan juga tutupnya. Sementara untuk prisma miring merupakan prisma di mana rusuk-rusuk tegaknya tidak tegak lurus pada alas dan juga tutupnya.

Apabila kita lihat dari bentuk alasnya, prisma terbagi lagi menjadi beberapa macam, yaitu: prisma segitiga, prisma segi empat, prisma segi lima, dan lain sebagainya. Prisma yang alas dan juga tutupnya berbentuk persegi disebut sebagai balok dan kubus. Sementara untuk prisma yang memiliki alas dan tutupnya berbentuk lingkaran disebut sebagai tabung.



Gambar 36 Prisma

Prisma terdiri atas bidang alas dan juga bidang atas yang sama serta kongruen, sisi tegak, titik sudut, dan tinggi. Tinggi prisma adalah jarak antara bidang alas serta bidang atas.

Sifat Prisma yaitu Memuat hubungan antara jumlah titik sudut (t), sisi (s), dan juga rusuk (r) pada prisma:$s + t = r + 2$. Selanjutnya berikut ini rumus yang biasa digunakan dalam prisma:

$$Volume = Luas\ alas\ x\ Tinggi$$

$$Luas\ permukaan = (2\ x\ Luas\ Alas) + (Keliling\ alas\ x\ tinggi)$$

Contoh :

Ani mempunyai sebuah tempat pensil yang unik berbentuk prisma segitiga. Jika luas alas dan volume tempat pensil tersebut berturut-turut adalah 25 cm^2 dan 275 cm^3, tentukanlah tinggi tempat pensil jika panjang alasnya 5 cm.

Jawab:

Diketahui :

Luas alas = 25 cm^2

Volume = 275 cm^2

Ditanya :

tinggi prisma = ... ?

gambar = ... ?

Jawab :

V = Luas alas . tinggi

275 cm^2 = 25 cm^2 . t

t =275 cm^2 /25 cm^2

Jadi t = 11 cm

Luas alas Δ = ½ alas .tinggi

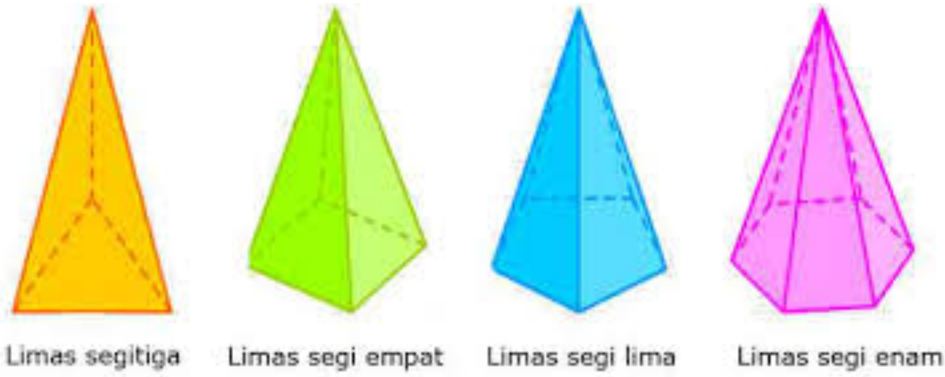
25 cm^2 = ½ 5 cm . t Δ

t Δ = 50 cm^2/5 cm

t Δ = 10 cm

2.12 Limas

Limas merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh alas berbentuk segi-n (dapat berupa segi tiga, segi empat, segi lima, dll) serta bidang sisi tegak berbentuk segitiga yang berpotongan di satu titik puncak. Terdapat banyak jenis limas yang dikategorikan dengan dilandasi bentuk alasnya. Antara lain: limas segitiga, limas segi empat, limas segi lima, dan yang lainnya. Limas dengan mempunyai alas berbentuk lingkaran disebut sebagai kerucut. Sementara untuk limas dengan alas yang berupa persegi disebut sebagai piramida.



Gambar 37 Limas

Bangun ruang limas terdiri atas bidang alas, sisi tegak, rusuk, titik puncak, dan juga tinggi.

1. Jumlah sisi tegaknya sama dengan jumlah sisi alas. Apabila alasnya segitiga maka jumlah sisi tegaknya juga ada sebanyak 3 sisi, apabila alasnya berbentuk segi lima maka jumlah sisi tegaknya terdapat 5 sisi.
2. Jumlah rusuknya adalah kelipatan dua dari bentuk alas. Apabila alasnya segitiga maka jumlah rusuknya sebanyak 6 rusuk, apabila alasnya berupa segiempat maka jumlah rusuknya sebanyak 8 rusuk.
3. Tinggi limas adalah jarak terpendek dari titik puncak limas ke bidang alas. Tinggi limas selalu tegak lurus dengan titik potong sumbu simetri pada bidang alas.

Berikut ini rumus Volume dan luas permukaan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan pada limas:

$$Volume\ Limas\ = \frac{1}{3} Luas\ Alas \times Tinggi$$

$$Luas\ Permukaan$$
$$= Jumlah\ Luas\ Alas\ +\ Jumlah\ Luas\ sisi\ tegak$$

Contoh:

Sebuah wadah berbentuk limas dengan luas alasnya 49 cm^2 dan tingginya 12 cm. Seorang anak bermain dan mengisi wadah tersebut dengan air, volume air yang dimasukkan oleh anak sebesar 200 cm^3. Apakah air yang dituangkan anak tersebut tumpah, tepat penuh atau tidak penuh? Jelaskan!

Jawab:

Diketahui :

Sisi = 6 cm

Akan dibentuk 6 buah limas

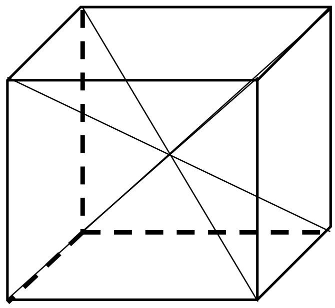
Ditanya :

Bukti : 1 kubus dibuat 6 limas = ...?

Volume 1 buah limas yang terbentuk = ...?

Jawab :

Jika dalam sebuah kubus dibentuk 6 limas maka tampak seperti gambar.



Gambar 38 Limas di dalam kubus

Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat diagonal ruang yang ada pada kubus membentuk 6buah limas yang sama besar dimana titik potong setiap diagonal ruang tersebut menjadi titik puncak dari limas yang dibentuk. Tinggi limas yang dibentuk setengah dari tinggi kubus.

Terbukti bahwa 1 buah kubus dapat dibentuk 6 buah imas yang sama besar.

Berdasarkan perhitungan dengan menggunakan volume kubus dapat dibuktikan

Volume kubus =s^3 = $(6\text{ cm})^3$ = 216 cm^3

Akan dibuktikan bahwa volume 1 limas yang dibentuk dari kubus yaitu 1/6 Volume Kubus = 1/ 6 . 216 cm^3 = 36 cm^3

Jadi terbukti bahwa volume 6 buah limas sama dengan volume 1 buah kubus.

Volume 1buah limas = 1/3 . Luas alas . tinggi

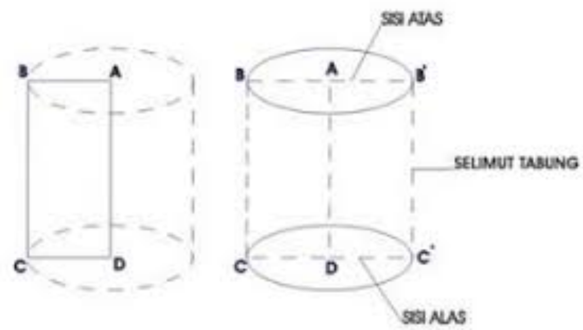
= 1/3. 6cm x 6cm . ½ 6cm

= 1/3 . 36 cm^2 . 3 cm

= 36 cm^3

2.13 Tabung

Bangun tabung merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang mempunyai tutup dan alas yang berbentuk sebuah lingkaran dengan memiliki ukuran yang sama dan diselimuti oleh persegi panjang.



Gambar 39 Tabung

Berikut ini unsur-unsur pada tabung:

a. *Sisi*. Tabung memiliki 3 sisi yang berbeda, antara lain yaitu sisi atas, sisi bawah dan sisi lengkung (yang kemudian disebut selimut tabung). Sisi lengkung tabung merupakan sisi yang dibatasi oleh dua bidang sejajar yakni alas serta atas (tutup) yang berbentuk lingkaran yang kongruen (sama bentuk dan ukurannya). Dan memiliki pusat di A dan D.

b. *Tinggi Tabung***.** Tinggi tabung merupakan jarak antara bidang alas dan juga bidang tutup pada tabung yang biasa dinotasikan dengan menggunakan huruf t. Berdasarkan dari gambar di atas tinggi tabung tersebut yaitu AD.

c. *Jari-jari Tabung.* Jari-jari lingkaran biasa dinotasikan dengan huruf (r), sisi alas tabung merupakan CD serta sisi tutup tabung merupakan AB.

d. *Diameter tabung***.** Diameter tabung biasa dinotasikan dengan menggunakan huruf (d). Diameter alas tabung yaitu CC' serta diameter tutup tabung yaitu BB'.

Beberapa sifat tabung yaitu:

1. Tabung memiliki 3 buah sisi, 1 persegi panjang, 2 lingkaran.
2. Tidak memiliki rusuk.
3. Tidak memiliki titik sudut.
4. Tidak memiliki bidang diagonal.
5. Tidak memiliki diagonal bidang.
6. tabung memiliki sisi alas serta sisi atas berhadapan yang kongruen.
7. Tinggi tabung merupakan jarak titik pusat bidang lingkaran alas dengan titik pusat lingkaran atas.
8. Bidang tegak tabung berwujud lengkungan yang disebut sebagai selimut tabung.
9. Jaring-jaring tabung berwujud 2 buah lingkaran serta 1 persegi panjang.

Berikut ini rumus yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan pada tabung:

1. Rumus untuk menghitung luas alas:

$$luas\ lingkaran = \pi \times r^2$$

2. Rumus untuk menghitung volume pada tabung:

$$Volume = \pi \times r^2 \times t$$

3. Rumus untuk menghitung keliling alas pada tabung:

$$Keliling = 2\times\pi\times r$$

4. Rumus untuk menghitung luas pada selimut tabung:

$$Luas\ Selimut = 2\times\pi\times r\times t$$

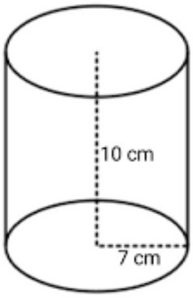
5. Rumus untuk menghitung luas pada permukaan tabung:

$$Luas\ Pemukaan\ tabung = 2\times luas\ alas + luas\ selimut\ tabung$$

$$Luas\ Permukaan\ tabung = 2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r(r+t)$$

Contoh :

Tentukanlah keliling, luas dan volume tabung berikut:



Gambar 40 Contoh Tabung

Jawab:

$$Keliling = 2\times\pi\times r = 2\times\frac{22}{7}\times 7cm = 44cm$$

$$Volume = \pi\times r^2\times t = \frac{22}{7}\times(7cm)^2\times 10cm = 1540cm^3$$

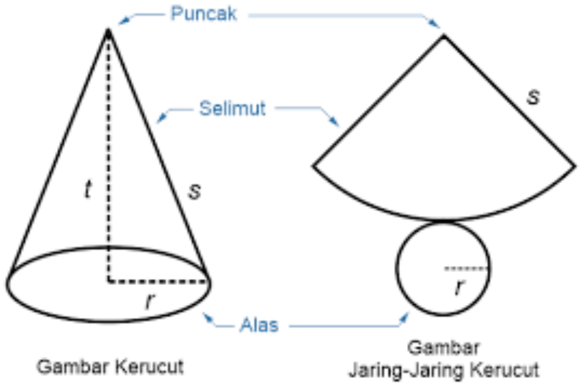
$$Luas\ Permukaan\ tabung = 2\pi r(r+t)$$

$$= 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7cm(7cm + 10cm) = 748cm^2$$

2.14 Kerucut

Kerucut merupakan salah satu bangun ruang yang memiliki sebuah alas yang berbentuk lingkaran dengan selimut yang mempunyai irisan dari lingkaran. Di dalam geometri, kerucut merupakan sebuah limas istimewa yang memiliki alas lingkaran. Kerucut mempunyai 2 sisi dan 1 rusuk.

Sisi tegak kerucut tidak berwujud segitiga namun berwujud bidang miring yang disebut sebagai selimut kerucut. Yang membedakan antara limas dengan kerucut yaitu alas kerucut memiliki bentuk lingkaran, sementara pada limas berbentuk segi n beraturan. Kerucut bisa dibentuk dari sebuah segitiga siku-siku yang kalian putar 360^o, dengan sumbu putar pada sisi siku-sikunya.



Gambar 41 Kerucut

Terdapat beberapa sifat pada bangun ruang kerucut, antara lain ialah sebagai berikut:

- Kerucut memiliki 2 sisi.
- Kerucut tidak memiliki rusuk.
- Kerucut memiliki 1 titik sudut.
- Jaring-jaring kerucut terdiri atas lingkaran serta segitiga.
- Tidak memiliki bidang diagonal
- Tidak memiliki diagonal bidang

Berikut ini rumus untuk menentukan volume dan luas pada kerucut:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\times\pi\times r\times r\times t = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

$$\text{Luas Permukaan} = \text{luas alas} + \text{luas selimut} = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$$

Contoh:

Tentukanlah volume yang diwarnai berikut:

Gambar 42 Contoh Kerucut

Jawab:

Volume yang diarsir

$$= \text{Volume kerucut besar} - \text{Volume kerucut kecil}$$

Sebelumnya kita perlu menentukan tinggi kerucut, yaitu tinggi kerucut kecil dan tingi kerucut besar dengan menggunakan phytagoras.

Tinggi kerucut kecil (t)

$$t = \sqrt{(7\text{cm})^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{147}{4}}\text{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{147}\text{cm}$$

Tinggi kerucut besar (T)

$$T = \sqrt{(21\text{cm})^2 - (7\text{cm})^2} = \sqrt{392}\text{cm} = 14\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{Volume kerucut kecil} = \frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot (7\text{cm})^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{147}\text{cm}$$

$$= \frac{77}{3}\sqrt{147}\text{cm}^3$$

$$\text{Volume kerucut besar} = \frac{1}{3}\pi r^2 T = \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot (7\text{cm})^2 \cdot 14\sqrt{2}\text{cm}$$

$$= \frac{1078}{3}\sqrt{2}\text{cm}^3$$

Jadi volume yang diwarnai adalah

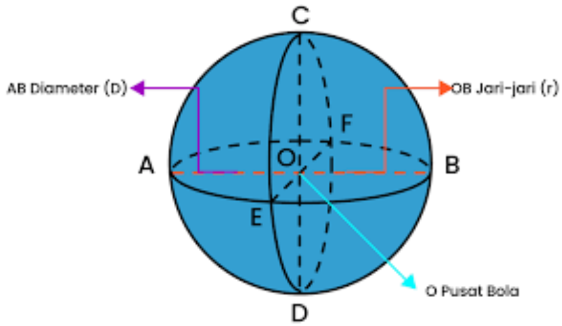
$$\text{Volume yang diarsir} = \text{Volume kerucut besar} - \text{Volume kerucut kecil}$$

$$\text{Volume yang diarsir} = \frac{1078}{3}\sqrt{2}\text{cm}^3 - \frac{77}{3}\sqrt{147}\text{cm}^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(1078\sqrt{2} - 77\sqrt{147}\right)\text{cm}^3$$

2.15 Bola

Bola merupakan salah satu bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh satu bidang lengkung. Atau juga bisa didefinisikan sebagai sebuah bangun ruang berbentuk setengah lingkaran yang diputar mengelilingi garis tengahnya.



Gambar 43 Bola

Berikut ini beberapa sifat Bola:

- Bola memiliki 1 sisi serta 1 titik pusat.
- Bola tidak memiliki rusuk.
- Bola tidak memiliki titik sudut
- Tidak memiliki bidang diagonal
- Tidak memiliki diagonal bidang
- Sisi bola disebut sebagai dinding bola.
- Jarak dinding ke titik pusat bola disebut sebagai jari-jari.
- Jarak dinding ke dinding serta melewati titik pusat disebut sebagai diameter.

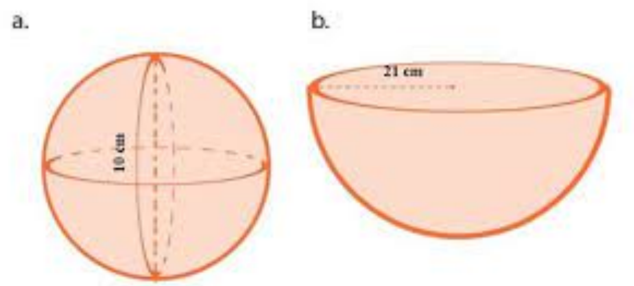
Berikut ini rumus untuk menentukan volume dan luas permukaan bola:

$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

$$\text{Luas Permukaan} = 4 \times \pi \times r^2$$

Contoh :

Tentukanlah Luas dan Volume bola berikut:



Gambar 44 Contoh Bola

Jawab:

a. Luas satu buah bola

$$\text{Luas Permukaan} = 4 \times \pi \times r^2 = 4 \times 3{,}14 \times (5\text{cm})^2 = 314\text{cm}^2$$

Volume satu buah bola

$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times (5\text{cm})^3 = 523{,}33\text{cm}^3$$

b. Luas setengah bola

$$\text{Luas Permukaan} = \frac{1}{2}(4 \times \pi \times r^2) = 2 \times \frac{22}{7} \times (21\text{cm})^2$$

$$= 2.772\text{cm}^2$$

Volume setengah bola

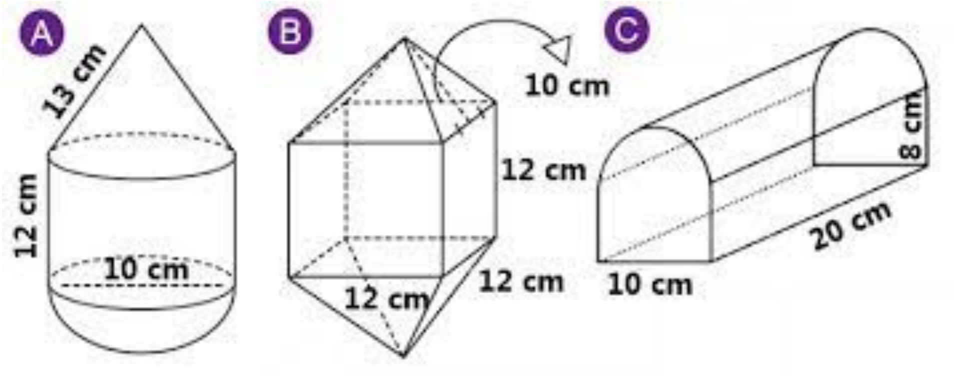
$$\text{Volume} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} \times \pi \times r^3\right) = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (21\text{cm})^3 = 19.404\text{cm}^3$$

4. Rangkuman

1) Kubus merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh enam sisi serupa yang berwujud bujur sangkar.
2) Balok adalah suatu bangun ruang yang mempunyai tiga pasang sisi segi empat. Di mana pada masing-masing sisinya yang berhadapan mempunyai bentuk serta ukuran yang sama.
3) Prisma merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi di mana alas dan juga tutupnya kongruen serta sejajar berbentuk segi-n.
4) Limas merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh alas berbentuk segi-n (dapat berupa segi tiga, segi empat, segi lima, dll) serta bidang sisi tegak berbentuk segitiga yang berpotongan di satu titik puncak.
5) Bangun tabung merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang mempunyai tutup dan alas yang berbentuk sebuah lingkaran dengan memiliki ukuran yang sama dan diselimuti oleh persegi panjang.
6) Kerucut merupakan salah satu bangun ruang yang memiliki sebuah alas yang berbentuk lingkaran dengan selimut yang mempunyai irisan dari lingkaran.
7) Bola merupakan salah satu bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh satu bidang lengkung.

5. Latihan

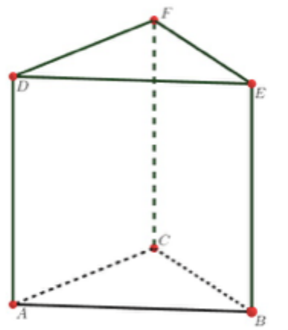
1) Tentukanlah Luas permukaan dan Volume dari setiap bangun berikut:



2) Kubus ABCD EFGH mempunyai panjang rusuk a. Titik K pada perpanjangan DA sehingga $KA = \frac{1}{3}KD$. Jarak titik K ke bidangn BDHF adalah

3) Diketahui limat beraturan T.ABCD. Panjang rusuk tegak dan panjang rusuk alas 4cm. Jarak titik A ke garis TB adalah

4) Perhatikan gambar berikut

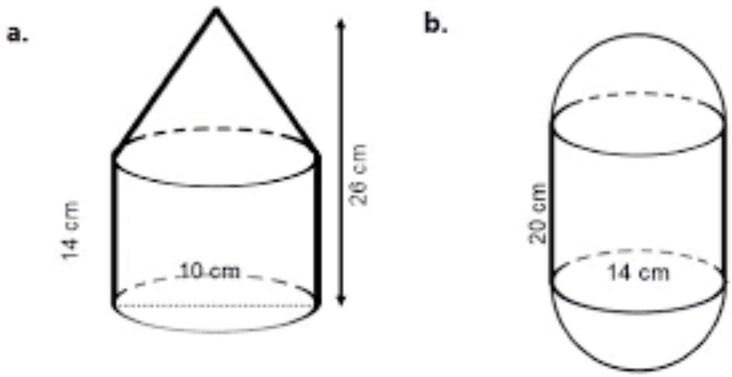


Jika AB=BE=1, maka volume limas E.ACF adalah

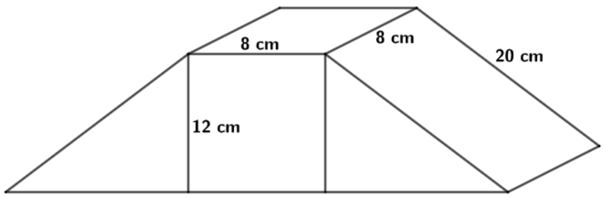
5) Tentukanlah satu Volume bola maksimum yang memungkin dimaukkan kedalam sebuah kubus dengan panjang rusuknya 10cm.

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah luas permukaan dan volume setiap bangun dibawah ini:



c.



2) Diketahui kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 4cm. Titik P adalah titik potong AH dan ED dan titik Q adalah titik potong FH dan EG. Jarak titik B ke garis PQ adalah
3) Diketahui limas segiempat beraturan T.ABCD dengan $AB = BC = 5\sqrt{2}cm$ dan TA=13am. Jarak titik A ke garis TC adalah
4) Prisma tegak segitiga sama sisi ABC.DEF dengan panjang AB=s dan AD=t. Jika G terletak di tegah-tengah sisi EF, maka panjang AG adalah
5) Diketahui jari-jari bola adalah 5cm dan jari-jari alas tabung adalah 1m dan tinggi tabung 5m. Jika bola dimasukkan kedalam sebuah tabung tersebut, berapa banyakkah maksimum bola yang dapat dimasukkan kedalam tabung tertutup tersebut?

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul dua ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul satu ini menuntun mahasiswa memahami materi Sistem Bilangan Riil secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Himpunan	Identitas	Nullitas	Komplemen	
Idempoten	Involusi	Penyerapan	Komutatif	Distributif
Asosiatif	De Morgan	Setangkup	Inklusi	Eksklusi

4. Referensi

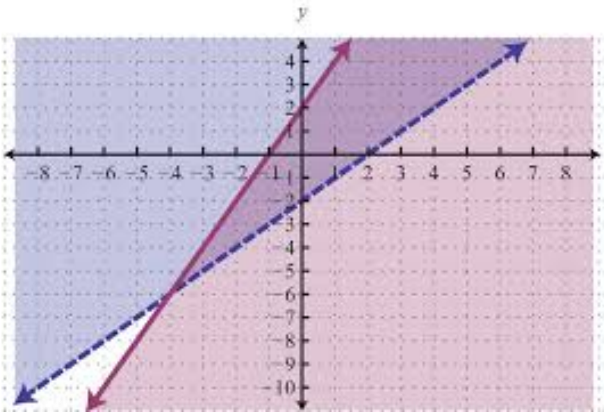
Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson

Eie, M, Chang, Shou-Te. 2010. *A course on Abstract Algebra.* Singapore: World Scientific.
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 3

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

Persamaan setiap orang hanyalah sebuah waktu 24 jam yang sama, namun kesuksesan setiap orang tergantung bagaimana seseorang mempergunakan setiap waktu tersebut.



Pendidikan Fisika

FKIP UKI

MODUL 3 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Persamaan linear adalah suatu persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan satu variable tunggal. Persamaan digambarkan linear sebab hubungan matematisnya dapat direpresentasikan sebagai garis lurus dalam system koordinat kartesius. Dasar dari suatu persamaan adalah sebuah pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan ruas kiri yang dipisahkan oleh tanda "=" . Hal yang tidak diketahui disebut sebagai variabel. Dan sebuah penyelesaian dari suatu persamaan berupa nilai yang jika disubstitusikan pada variabel menghasilkan sebuah pernyataan yang benar.

   Selanjutnya dalam matematika ada istilah lebih dari, kurang dari, lebih kecil, lebih tinggi, lebih rendah dan tidak sama yang sudah menjadi Bahasa sehari-hari dalam masyarakat. Dalam modul ini akan dipelajari terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan dari satu variabel, dua variael dan tiga variabel.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Tiga

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran 90isika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Diharapkan mahasiswa dapat menentukan penyelesaian dari persamaan linear satu variabel dan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep pada system bilangan riil

5. Kegunaan Modul Tiga

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada dengan berbagai latihan, contoh dan ilustrasi.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi didalam modul ini mencakup : Persamaan linear satu variabel, dua Variabel dan tiga variabel beserta penyelesaiannya.

   Metode-metode penyelesaian dalam menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dan pertidaksamaan linear.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

   Minggu ke- 5 : Mengusai Persamaan dan pertidaksamaan Linear Satu Variabel dan Dua variabel

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel dengan berbagai metode penyelesaian. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

3.1 Pendahuluan

Sebuah pernyataan dalam kehidupan sehari-hari dapat dinyatakan dalam pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan kiri yang dipisahkan tanda sama dengan disebut sebagai persamaan. Hal yang tidak diketahui dalam sebuah persamaan disebut variable. Contohnya Susi membeli 2 buah pensil seharga Rp. 20.000 maka dapat dinotasikan p sebagai pensil sehingga diperoleh persamaan $2p = Rp. 20000$. Dalam penyelesaian persamaan berupa nilai yang jika disubstitusikan pada variable menghasilkan sebuah pernyataan yang benar. Seperti contoh diatas jika ditanyakan harga satu pensil maka di dapat seharga $Rp. 10.000$.

Selanjutnya dalam matematika ada istilah lebih dari, kurang dari, lebih kecil, lebih tinggi, lebih rendah dan tidak sama yang sudah menjadi Bahasa sehari-hari dalam masyarakat. Istilah-istilah ini biasanya digunakan untuk menentukan nilai minimum atau nilai maksimum dari suatu persamasalahan atau pernyataan yang dapat dimodelkan secara matematis.

Persamaan linear adalah suatu persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan satu variable tunggal. Persamaan digambarkan linear sebab hubungan matematisnya dapat direpresentasikan sebagai garis lurus dalam system koordinat kartesius. Bentuk umum persamaan linear adalah $y = mx + c$.

3.2 Persamaan Linear Satu Variabel

Definisi :

Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Dinotasikan dengan $x = c$.

x : variabel berpangkat satu

c : nilai konstanta

Contoh :

$x = 6$

$3x + 5 = 20$

$x - 4 = 2x + 10$

sebuah penyelesaian dari suatu persamaan adalah sebarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan tersebut disubstitusikan pada variabel yang ada.

Contoh :

$3x - 7 = 29$

persamaan ini mempunyai penyelesaian bilangan 12, karena jika disubstitusikan bilangan 12 ke persamaan diperoleh $3(12) - 7 = 29$ adalah benar. Sedangkan bilangan 3 bukanlah sebuah penyelesaiannya karena $3(15) - 7 \neq 29$.

Berikut ini prinsip penjumlahan dan perkalian dalam menyelesaikan berbagai macam persamaan

1. Prinsip penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a + c = b + c$

   $a - c = b - c$

2. Prinsip perkalian

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a.c = b.c$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, benar untuk $c \neq 0$.

Contoh :

1) Tentukanlah penyelesaian dari $4x - 2 = 50$.

   Jawab :

   $4x - 2 = 50$

   $4x - 2 + 2 = 50 + 2$ menggunakan prinsip penjumlahan

   $4x = 52$

   $\frac{1}{4}(4x) = \frac{1}{4}52$ menggunakan prinsip perkalian

   $x = 13$

2) Tentukanlah penyelesaian dari $3(x - 2) - 2 = 5 - 5(x + 5)$

   Jawab :

   $3(x - 2) - 2 = 3 - 5(x + 5)$

   $3x - 6 - 2 = 3 - 5x - 25$

   $3x - 8 = -5x - 22$

   $3x - 8 + 8 = -5x - 22 + 8$ kedua ruas ditambah 8

   $3x = -5x - 24$

   $3x + 5x = -5x + 5x - 24$ kedua ruas ditambah $5x$

   $8x = -24$

   $\frac{1}{8}(8x) = \frac{1}{8}(-24)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{8}$

   $x = -3$

4. Persamaan Ekuivalen

Definisi :

Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut sebagai persamaan ekuivalen.

Contoh :

1. $2x = 16$
2. $3x + 5 = 29$
3. $x - 5 = 2x - 13$

ketiga persamaan diatas merupakan persamaan yang ekuivalen karena mempunyai himpunan penyelesaian yang sama yaitu, $x = 8$.

3.3 Persamaan Linear Bentuk Pecahan satu Variabel

Persamaan yang memuat pecahan disebut sebagai persamaan linear bentuk pecahan. Untuk menyelesaikan persamaan pecahan ini digunakan perkalian dengan variabel.

Contoh :

Tentukanlah penyelesaian dari $\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$

Jawab :

$$\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7} = \frac{3}{5}$$

$35\left(\frac{x-3}{5} + \frac{2x}{7}\right) = 35\left(\frac{3}{5}\right)$ kedua ruas dikali 35

$35\left(\frac{x-3}{5}\right) + 35\left(\frac{2x}{7}\right) = 21$ sifat distributif

$7x - 21 + 10x = 21$

$17x - 21 = 21$

$17x - 21 + 21 = 21 + 21$ kedua ruas di tambah 21

$17x = 42$

$\frac{1}{17}(17x) = \frac{1}{17}(42)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{17}$

$$x = \frac{42}{17}$$

3.4 Pertidaksamaan Linear satu Variabel

Definisi :

Pertidaksamaan linear satu variabel adalah suatu pertidaksamaan yang hanya mempunyai satu variabel dengan pangkat tertinggi varibelnya satu.

Contoh :

$x < 10$

$3x + 4 > 7$

$2x - 3(2x + 1) < 10$

Berikut ini prinsip penjumlahan dan perkalian pada pertidaksamaan linear:

1. Prinsip Penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a + c < b + c$ atau $a + c > b + c$

   $a - c < b - c$ atau $a - c > b - c$

2. Prinsip Perkalian

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real positif. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a.c < b.c$ atau $a.c > b.c$

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real negatif. Jika $a < b$ maka $a.c \geq b.c$

   atau

   Jika $a > b$ maka $a.c \leq b.c$

Contoh :

Tentukanlah penyelesaian dari

1) $3x - 5 < 8$
2) $4x - 7 > 3(x - 2) + 12$
3) $3x - 4 < 5x + 6$

Jawab :

1) $3x - 5 < 8$

   $3x - 5 + 5 < 8 + 5$ kedua ruas ditambah 5

   $3x < 13$

$\frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(13)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{3}$

$x < \dfrac{13}{3}$

2) $4x - 7 > 3(x - 2) + 12$

$4x - 7 > 3x - 6 + 12$ sifat distributif

$4x - 7 > 3x + 6$

$4x - 7 + 7 > 3x + 6 + 7$ kedua ruas ditambah 5

$4x > 3x + 13$

$4x - 3x > 3x - 3x + 13$ kedua ruas ditambah $(-3x)$

$x > 13$

3) $3x - 4 < 5(x + 1) + 6$

$3x - 4 < 5x + 5 + 6$ sifat distibutif

$3x - 4 < 5x + 11$

$3x - 4 + 4 < 5x + 11 + 4$ kedua ruas ditambah 4

$3x < 5x + 15$

$3x - 5x < 5x - 5x + 15$ kedua ruas dikurang $-5x$

$-2x < 15$

$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right)(15)$ kedua ruas dikali $-\frac{1}{2}$

$x \geq -\dfrac{15}{2}$

3.5 Pertidaksamaan Linear Bentuk Pecahan Satu Variabel

Pertidaksamaan linear pecahan satu variabel merupakan pertidaksamaan yang memuat pecahan. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan pecahan ini digunakan perkalian variabel.

Contoh :

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari

1) $\frac{2x}{3} > 5 - \frac{x}{2}$

2) $\frac{x}{5} < \frac{2x}{3} - 4$

Jawab :

1) $\frac{2x}{3} > 5 - \frac{x}{2}$

$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} > 5 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ kedua ruas ditambah $\frac{x}{2}$

$6\left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\right) > 6(5)$ kedua ruas dikali 6

$4x + 3x > 30$

$7x > 30$

$\frac{1}{7}(7x) > \frac{1}{7}(30)$ kedua ruas dikali $\frac{1}{7}$

$$x > \frac{30}{7}$$

2) $\frac{x}{5} < \frac{2x}{3} - 4$

$\frac{x}{5} - \frac{2x}{3} < \frac{2x}{3} - \frac{2x}{3} - 4$ kedua ruas ditambah $\frac{2x}{3}$

$$15\left(\frac{x}{5} - \frac{2x}{3}\right) < 15(-4)$$

$3x - 10x < -60$

$-7x < -60$

$-\frac{1}{7}(-7x) < -\frac{1}{7}(-60)$ kedua ruas dikali $-\frac{1}{7}$

$$x \geq \frac{60}{7}$$

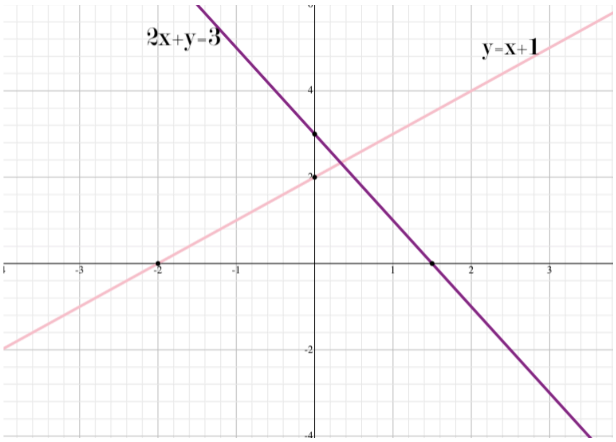
3.6 Persamaan linear dua variabel

Persamaan linear dua variabel merupakan persamaan garis dimana mengandung dua buah variabel yang berbeda yang biasa disebut sebagai variabel independen dan variavel dependen. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $y = mx + c$. Dalam hal ini m

adalah gradien garis dan c merupakan titik potong garis dengan sumbu y. Persamaan lain seperti x^3, $\sqrt{y}$ dan xy bukanlah merupakan persamaan linear.

Persamaan linear dua variabel tidaklah harus berupa variabel x dan y, namun bisa juga variabel lainnya seperti s dan t, m dan n atau yang lainnya. Sebagai contoh, $y = 2x - 1$ dapat diubah menjadi $2x - y - 1 = 0$, 2 disebut sebagai koefisien x, -1 disebut sebagai koefisien y, dan -1 disebut sebagai konstanta. Selanjutnya persamaan $2s + 5t = 3$, 2 disebut sebagai koefisien s, 5 disebut sebagai koefisien t dan 3 disebut sebagai konstanta.

Persamaan linear dua variabel dapat digambarkan dalam grafik pada koordinat kartesius. Misalnya persamaan $y = x + 1$, maka dapat didekripsikan seperti gambar dibawah ini.



Gambar 45 Grafik persamaan dua variabel

Sistem persamaan linear dua variabel, pada umumnya dibentuk oleh dua persamaan linear dua variabel yang memiliki variabel yang sama. Contoh, $2x + y = 5$ dan $x + y = 3$. Akar atau himpunan penyelesaian dari system persamaan linear dua variabel adalah pasangan terurut (x, y) yang memenuhi kedua persamaan yang membentuk system tersebut. Penyelesaian persamaan linear dua variable ini dapat diselesaikan dengan cara eliminasi, substitusi dan eliminasi-substitusi.

Contoh :

1. Tentukanlah penyelesaian dari persamaan berikut

   $x + y = 8$ dan $2x + 3y = 19$

   Jawab :

   Dengan menggunakan metode substitusi

   $x + y = 8$

   $x = 8 - y$ (1)

   $2x + 3y = 19$ (2)

   Substitusi (1) ke (2)

   $2(8 - y) + 3y = 19$

   $16 - 2y + 3y = 19$

   $16 + y = 19$

   $y = 19 - 16$

   $y = 3$ (3)

   Substitusi (3) ke (1) maka diperoleh

   $x = 8 - y = 8 - 3 = 5$

   Sehingga disimpulkan penyelesaian dari kedua persamaan diatas adalah $(5,3)$.

2. Tentukanlah penyelesaian dari persamaan berikut

   $4x - 2y = 14$ dan $x + 3y = 1$

   Jawab :

   Dengan menggunakan metode eliminasi

   $4x - 2y = 14$ (1)

   $x + 3y = 1$ (2)

   Elimiasi persamaan (1) dan (2) dengan cara seperti berikut ini

   $4x - 2y = 14$

$x + 3y = 1$ dikali 4

maka persamaan (2) berikut berubah menjadi

$4x + 12y = 4$ (3)

Selanjutnya dilakukan eliminasi persamaan (1) dan (3)

$4x - 2y = 14$

$\underline{4x + 12y = 4 -}$

$-14y = 10$

$y = \frac{10}{14}$

$y = \frac{5}{7}$

Selanjutnya untuk memperoleh penyelesaian variable x maka dilakukan eliminasi kedua

$4x - 2y = 14$ dikali 3

$x + 3y = 1$ dikali 2

menjadi

$12x - 6y = 42$ (4)

$2x + 6y = 2$ (5)

Eliminasi persamaan (4) dan (5)

$12x - 6y = 42$

$\underline{2x + 6y = 2 +}$

$14x = 44$

$x = \frac{44}{14}$

$x = \frac{22}{7}$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left(\frac{22}{7}, \frac{5}{7}\right)$

Persamaan linear dua variabel dapat digunakan sebagai suatu cara menyajikan persoalan sehari-hari secara matematika (model matematika).

Contoh :

1. Sebuah taman berbentuk segi empat mempunyai ukuran panjang 8 m lebih panjang dari lebarnya. Jika keliling taman tersebut adalah 44 m, tentukanlah luas taman tersebut!

   Jawab :

   Misalkan

   p : panjang taman

   l : lebar taman

   k : Keliling taman

   maka model matematika dari situasi yang ada diketahui

   $p = 8 + l$ (1)

   $k = 2p + 2l = 44$ (2)

   maka dengan substitusi (1) ke (2) diperoleh

$$44 = 2(8 + l) + 2l$$
$$44 = 16 + 2l + 2l$$
$$44 = 16 + 4l$$
$$4l = 44 - 16$$
$$4l = 28$$
$$l = \frac{28}{4} = 7$$

   maka dengan substitusi nilai $l = 7$ ke persamaan (1) diperoleh bahwa $p = 8 + l = 8 + 7 = 15$

3.7 Pertidaksamaan Linear dua variabel

Pertidaksamaan linear dua variable adalah kalimat terbuka matematika yang memuat dua variable, dengan masing-masing variable berderajat satu yang dihubungan dengan tanda ketaksamaan. Tanda ketaksamaan yang dimaksud diantaranya adalah $>, <, \geq,$ dan $\leq$.

Bentuk pertidaksamaan linear dua variable dapat dituliskan sebagai berikut :

$$ax + by > c$$

$$ax + by < c$$

$$ax + by \geq c$$

$$ax + by \leq c$$

Berbeda dengan penyelesaian pada persamaan linear dua variable yang berupa himpunan pasangan terurut dari titik atau jika digambar pada koordinat kartesius berupa garis lurus, penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variable berupa daerah penyelesaian.

Dalam aplikasinya penyelesian pertidaksamaan linear dua variable berupa daerah yang diarsir atau sebaliknya berupa daerah bersih.

Untuk menentukan daerah penyelesaiannya dapat dilakukan seperti langkah-langkah berikut:

1. Ubahlah tanda ketidaksamaan dari pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan, sehingga diperoleh persamaan linear dua variable.
2. Lukis grafik/garis dari persamaan linear dua variable tadi. Hal ini dapat dilakukan dengan menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y dari persamaan atau menggunakan dua titik sembarang yang dilalui oleh garis. Garis akan membagi dua bidang kartesius.
3. Lakukan uji titik yang tidak dilalui oleh garis (substitusi nilai x dan y ke pertidaksamaan). Jika menghasilkan penyataan yang benar, artinya daerah tersebut merupakan penyelesaiannya, namun apabila menghasilkan pernyataan yang salah maka bagian lainnyalah yang merupakan penyelesaiannya.

Selain langkah-langkah diatas, masih terdapat berbagai macam cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan linear yang disesuaikan dengan teknik pemikiran setiap individu yang menyelesaikannya. Tidak menutup keungkinan untuk setiap orang memiliki cara maupun langkah penyelsaian yang berbeda.

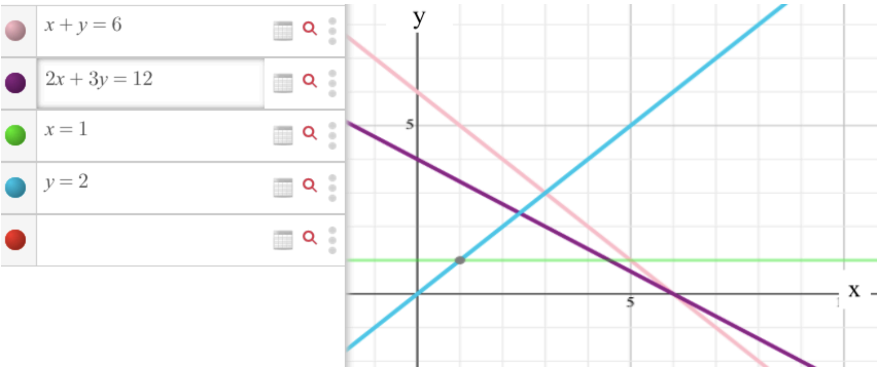
Contoh :

Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear berikut

$x + y \leq 6$, $2x + 3y \leq 12$, dan $x \geq 1$, $y \geq 2$

Jawab :

Langkah pertama adalah dengan menggambar garis $x + y = 6$, $2x + 3y = 12$, dan $x = 1$, $y = 2$.



Gambar 46 Contoh Grafik Pertidaksamaan

Untuk $x + y \leq 6$, kita pilih $(0{,}0)$, lalu substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh:

$0 + 0 \leq 6$

$0 \leq 6$ (benar), yang berarti dipenuhi.

Sehingga daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat $(0{,}0)$.

Untuk $2x + 3y \leq 12$, pilih $(0{,}0)$, lalu kita substitusikan ke pertidaksamaan sehingga diperoleh :

$2(0) + 3(0) \leq 12$

$0 \leq 12$ (benar), yang berarti dipenuhi.

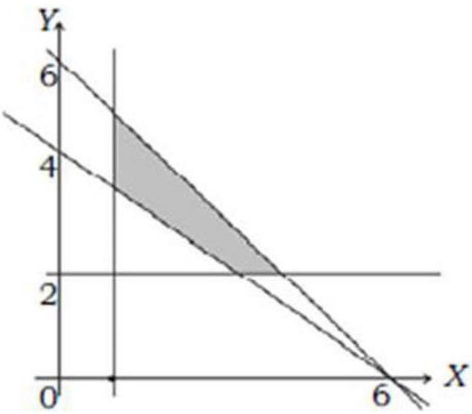
Sehingga dapat kita ketahui daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat $(0{,}0)$.

Untuk $x \geq 1$, pilih titik $(2,1)$ lalu kita substitusikan ke pertidaksamaan sehingga kita dapatkan $2 \geq 1$ (benar) yang berarti dipenuhi.

Sehinga, daerah penyelesaiannya yaitu daerah yang memuat titik $(2,1)$.

Untuk $y \geq 2$. Kita pilih titik $(1,3)$ lalu disubstitusikan ke pertidaksamaan sehingga akan kita peroleh $3 \geq 2$ (benar) yang berarti dipenuhi.

Sehingga dapat disimpulka bahwa penyelesaian berada di daerah yang memuat titik $(1,3)$. Daerah himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan tersebut adalah irisan dari ketiga daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan diatas. Seperti yang terlihat pada gambar berikut.



Gambar 47 Daerah penyelesaian

4. Rangkuman

1. Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu. Dinotasikan dengan $x = c$.
2. Prinsip penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a + c = b + c$

$a - c = b - c$

3. Prinsip perkalian

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a = b$ maka berlaku

   $a.c = b.c$

   $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, benar untuk $c \neq 0$.

4. Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut sebagai persamaan ekuivalen.

5. Prinsip Penjumlahan

   Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a + c < b + c$ atau $a + c > b + c$

   $a - c < b - c$ atau $a - c > b - c$

6. Prinsip Perkalian

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real positif. Jika $a < b$ atau $a > b$ maka berlaku

   $a.c < b.c$ atau $a.c > b.c$

   Untuk sebarang a, dan b bilangan real dan c bilangan real negatif. Jika $a < b$ maka $a.c \geq b.c$

   atau

   Jika $a > b$ maka $a.c \leq b.c$

7. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $y = mx + c$.

8. Bentuk pertidaksamaan linear dua variable dapat dituliskan sebagai berikut :

   $ax + by > c$

   $ax + by < c$

   $ax + by \geq c$

   $ax + by \leq c$

5. Latihan

1. Seorang tukang parkir mendapat uang sebesar Rp17.000,00 dari 3 buah mobil dan 5 buah motor, sedangkan dari 4 buah mobil dan 2 buah motor ia mendapat uang Rp18.000,00. Jika terdapat 20 mobil dan 30 motor, banyak uang parkir yang diperoleh adalah
2. Di dalam kandang terdapat kambing dan ayam sebanyak 13 ekor. Jika jumlah kaki hewan tersebut 32 2kor, maka jumlah kambing dan ayam masing-masing adalah
3. Tujuh tahun yang lalu umur Ani sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang 2 kali umur Ani sama dengan 5 kali umur Budi ditambah dengan 9 tahun. Umur Budi sekarang adalah....
4. Sebuah toko buku menjual 2 buku gambar dan 8 buku tulis seharga Rp.48.000,00, sedangkan untuk 3 buku gambar dan5 buku tulis seharga Rp.37.000,00. Jika Adi membeli 1 buku gambar dan 2 buku tulis di toko itu, ia harus membayar sebesar…
5. Kakak membeli 2 kg duku dan 1kg manggis dengan harga Rp.12.000,00. Adik membeli 3 kg duku dan 2 kg manggis dengan harga Rp.19.000,00. Jika ibu membeli 4 kg duku dan 5 kg manggis, maka ibu harus membayar ... rupiah

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Jika a dan b memenuhi

   $$\begin{cases} \frac{9}{a+2b} + \frac{1}{a-2b} = 2 \\ \frac{9}{a+2b} - \frac{2}{a-2b} = -1 \end{cases} \text{ maka } a - b^2 =$$

2. Diketahui sistem persamaan linear $x + 2y = a$ dan $2x - y = 3$. Jika a merupakan bilangan positif terkecil sehingga persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian bilangan bulat $x = x_0$ dan $y = y_0$, maka nilai $x_0 + y_0$ adalah...

3. Jika penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases}(a-2)x+y=0\\x+(a-2)y=0\end{cases}$ tidak hanya $x, y = (0,0)$ saja, maka nilai $a^2 - 4a + 3 =$
4. Pada tahun 2001 usia Bayu 7 tahun lebih tua dari usia Andi, sedangkan jumlah umur mereka pada tahun 2007 adalah 43 tahun. Pada tahun 2018 usia Bayu adalah...
5. Diketahui system persamaan $\begin{cases}4^x + 5^y = 6\\4^{\frac{x}{y}} = 5\end{cases}$ maka nilai $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$
6. Jika (x_1, y_1) merupakan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $2x + 5y = 12$ dan $x + 4y = 15$, nilai dari $5x_1 + 3y_1$ adalah...
7. Seorang peternak memelihara dua jenis hewan ternak yaitu kambing dan sapi. Jumlah semua hewan ternaknya adalah 150 ekor. Untuk memberi makan hewan-hewan tersebut setiap harinya, peternak membutuhkan biaya Rp.10.000,00 untuk setiap ekor kambing dan Rp.15.000,00 untuk setiap ekor sapi. Biaya yang dikeluarkan setiap hari untuk memberi makan ternak mencapai Rp.1.850.00,00. Jika x menyatakan banyak kambing dan y menyatakan banyak sapi, model matematika yang tepat untuk permasalahan tersebut adalah...

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 6: Mengusai Persamaan linear tiga variabel

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Persamaan linear tiga variabel. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Persamaan linear tiga variabel. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

   3.8 Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

   Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) merupakan bentuk perluasan dari system persamaan liner dua variabel (SPLDV). Yang mana, pada system persamaan linear tiga variabel terdiri dari tiga persamaan yang masing-masing persamaan memiliki tiga variabel (misal x, y dan z).

   Dengan begitu bentuk umum dari system persamaan linear tiga variabel dalam x, y dan z dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

   dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3 \neq 0$; $b_1, b_2, b_3 \neq 0$; $c_1, c_2, c_3 \neq 0$; $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.

   Keterangan :

   x, y, z : variabel

a_1, a_2, a_3 : koefisien variabel x

b_1, b_2, b_3 : koefisien variabel y

c_1, c_2, c_3 : koefisien variabel z

d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

Terdapat beberapa metode penyelesaian pada system persamaan linear tiga variabel, yaitu metode eliminasi, netode substitusi dan metode gabungan (eliminasi-substitusi).

1. Metode Eliminasi

   Metode eliminasi merupakan cara peyelesaian dengan mengeliminasi atau mengurangkan salah satu variabel. Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode eliminasi, yaitu sebagai berikut:

   1) Eliminasikan persamaan pertama dan kedua atau pertama dan ketiga atau kedua dan ketiga untuk menghilangkan salah satu variabelnya, yaitu x atau y atau z, sehingga menjadi persamaan linear dengan dua variabel.
   2) Ulangi sekali lagi tetapi variasi persamaannya tidak sama dengan langkah (1), sedangkan untuk menghilangkan salah satu variabelnya harus sama dengan langkah (1) sehingga menjadi persamaan linear dua variabel.
   3) Dari langkah (1) dan (2), eliminasikan salah satu variabel sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   4) Ulangi sekali lagi tetapi variasi variabel yang dieliminasi berbeda dengan langkah (3) sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
   5) Ulangi langkah (1) sampai langkah (4) tetapi variasi persamaannya tidak sama sehingga diperoleh hasil variabel yang lainnya.

6) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode eliminasi!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Langkah pertama, pilih dua persamaan yang ingin dieliminasi dan hilangkan salah satu variabelnya. Untuk mengeliminasi atau menghilangkan variabelnya, terlebih dahulu membuat koefisien pada variabel yang ingin dieliminasi sama pada kedua persamaan tersebut. Misalkan kita memilih persamaan (1) dan (2) untuk dieliminasi dan variabel z yang ingin dihilangkan. Koefisien pada variabel z pada persamaan (1) adalah 1, sedangkan pada persamaan (2) adalah 2. Untuk menyamakan koefisien pada kedua persamaan tersebut, cukup kita kalikan masing-masing persamaan dengan koefisien yang dimiliki oleh persamaan yang lainnya. Jadi persamaan (1) dikalikan dengan 2 dan persamaan (2) dikalikan dengan 1. Kemudian kita dapat mengurangkan kedua persamaan tersebut untuk memperoleh persamaan (4).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1 \quad \times 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \;\; \times 1 \qquad -}$

menjadi

$2x - 4y + 2z = 2$

$3x + y + 2z = 3$ -

$-\square - 5y = -1$ (4)

Langkah selanjanjutnya, perhatikan bahwa persamaan (4) terdiri atas variabel x dan y. Sekarang kita memerlukan persamaan lain yang mempunyai variabel yang sama dengan persamaan (4). Untuk memperoleh persamaan (5), kita ulangi dengan langkah pertama tetapi dengan variasi persamaan yang berbeda. Misalkan kita memilih persamaan (1) dan (3) untuk dieliminasi dan variabel z yang ingin dihilangkan. Koefisien pada variabel z pada persamaan (1) adalah 1, sedangkan pada persamaan (2) adalah -4. Untuk menyamakan koefisien pada kedua persamaan tersebut, cukup kita kalikan masing-masing persamaan dengan koefisien yang dimiliki oleh persamaan yang lainnya. Jadi persamaan (1) dikalikan dengan -4 dan persamaan (2) dikalikan dengan 1. Kemudian kita dapat mengurangkan kedua persamaan tersebut untuk memperoleh persamaan (5).

Eliminasi Persamaan (1) dan (3)

$x - 2y + z = 1$ $\times(-4)$

$3x + 6y - 4z = -2$ $\times 1$ -

menjadi

$-4x + 8y - 4z = -4$

$3x + 6y - 4z = -2$ -

$-7x + 2y = -2$ (5)

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel x.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1$ $\times(-7)$

$-7x + 2y = -2$ $\times(-1)$ -

menjadi

$7x + 35y = 7$

$\underline{7x - 2y = 2 \qquad\quad -}$

$37y = 5$

$y = \frac{5}{37}$

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel y.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1 \qquad\qquad \times 2$

$\underline{-7x + 2y = -2 \;\; \times(-5) -}$

menjadi

$-2x - 10y = -2$

$\underline{35x - 10y = 10 \quad -}$

$-37x = -12$

$x = \frac{-12}{-37} = \frac{12}{37}$

Ulangi langkah pertama tetapi variabel yang dihilangkan harus berbeda. Misalkan kita akan menghilangkan variabel x dengan menggunakan persamaan (1) dan (2), maka akan diperoleh persamaan (6).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1 \quad \times 2$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \;\; \times 1 \qquad -}$

menjadi

$3x - 6y + 3z = 3$

$\underline{3x + y + 2z = 3 \quad -}$

$7y + z = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (6)$

Perhatikan bahwa persamaan (6) terdiri atas variabel y dan z. Sekarang kita memerlukan persamaan lain yang mempunyai variabel yang sama dengan persamaan (6). Untuk memperoleh persamaan (7), kita ulangi dengan langkah sebelumnya tetapi dengan variasi persamaan yang berbeda. Misalkan kita akan menghilangkan variabel x dengan menggunakan persamaan (2) dan (3), maka akan diperoleh persamaan (7).

Eliminasi Persamaan (2) dan (3)

$3x + y + 2z = 3 \qquad \times 3$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \qquad \times 1 \quad -}$

menjadi

$3x + y + 2z = 3$

$\underline{3x + 6y - 4z = -2 \quad -}$

$-5y + 6z = 5 \qquad (7)$

Dari persamaan (6) dan (7), misalkan kita hilangkan variabel y

Eliminasi Persamaan (6) dan (7)

$-7y + z = 0 \qquad \times(-5)$

$\underline{-5y + 6z = 5 \qquad \times(-7) -}$

menjadi

$35y - 5z = 0$

$\underline{35x - 42z = -35 \quad -}$

$37z = 35$

$z = \frac{35}{37}$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$

2. Metode Substitusi

   Metode substitusi merupakan cara penyelesaian dengan cara memasukkan salah satu persamaan ke persamaan yang lainnya. Langkah- langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode substitusi, yaitu sebagai berikut:

1) Menyatakan salah satu persamaan dalam bentuk x sebagai fungsi y dan z atau y sebagai fungsi x dan z atau z sebagai fungsi x dan y (pilih yang paling sederhana).
2) Substitusikan langkah (1) ke dalam salah satu persamaan yang lainnya sehingga membentuk persamaan baru yang mengandung dua variabel.
3) Gunakan langkah (2) dengan menyatakan seperti pada langkah (1).
4) Substitusikan langkah ke (2) dan (3) ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai dari salah satu variabel.
5) Jika telah diperoleh nilai dari salah satu variabel maka substitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel yang kedua.
6) Ulangi lagi langkah (5) tetapi mensubstitusikan ke dalam persamaan yang berbeda untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.
7) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode substitusi!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Nyatakan salah satu persamaan ke dalam salah satu bentuk variabel. Misalkan kita ingin menyatakan ke dalam bentuk x sehingga yang memuat variabel y dan z pindahkan ruas ke sisi yang satunya.

$x - 2y + z = 1$ menjadi

$x = 1 + 2y - z$ (4)

Substitusi persamaan (4) ke salah satu persamaan lainnya. Misalkan kita substitusi ke dalam persamaan (2) untuk memperoleh persamaan (5).

$3x + y + 2z = 3$

$3(1 + 2y - z) + y + 2z = 3$

$3 + 6y - 3z + y + 2z = 3$

$3 + 7y - z = 3$

$-z = 3 - 3 - 7y$

$-z = -7y$

$z = 7y$ (5)

Substitusi persamaan (5) ke dalam persamaan (4) untuk memperoleh persamaan (6).

$x = 1 + 2y - z$

$x = 1 + 2y - 7y$

$x = 1 - 5y$ (6)

Substitusi persamaan (5) dan (6) ke salah satu persamaan pada soal. Misalkan kita menggunakan persamaan (3).

$3x + 6y - 4z = -2$

$3(1 - 5y) + 6y - 4(7y) = -2$

$3 - 15y + 6y - 28y = -2$

$3 - 37y = -2$

$-37y = -2 - 3$

$-37y = -5$

$y = -\frac{5}{-37} = \frac{5}{37}$

Substitusi nilai variabel y ke salah satu persamaan, misalkan ke dalam persamaan (6).

$x = 1 - 5y$

$x = 1 - 5\left(\frac{5}{37}\right)$

$x = 1 - \frac{25}{37}$

$x = \frac{37 - 25}{37} = \frac{12}{37}$

Substitusikan nilai variabel x dan y ke salah satu persamaan yang ada pada soal. Misalkan kita menggunakan persamaan (1).

$x - 2y + z = 1$

$\frac{12}{37} - 2\left(\frac{5}{37}\right) + z = 1$

$\frac{12}{37} - \frac{10}{37} + z = 1$

$\frac{2}{37} + z = 1$

$z = 1 - \frac{2}{37}$

$z = \frac{37 - 2}{37} = \frac{35}{37}$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, z = \frac{35}{37}\right\}$

3. Metode Gabungan (Eliminasi Substitusi)

Metode gabungan merupakan cara penyelesaian dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan substitusi dengan secara bersamaan. Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode gabungan, yaitu sebagai berikut:

1) Dibuat dua kelompok persamaan yang memungkinkan elimiasi dua persamaan menjadi lebih mudah dan sederhana.

2) Salah satu variabel dari masing-masing kelompok dieliminasikan.

3) Nilai variabel yang diperoleh, disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai-nilai variabel yang lain.

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode gabungan!

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 4z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$x - 2y + z = 1$ (1)

$3x + y + 2z = 3$ (2)

$3x + 6y - 4z = -2$ (3)

Misalkan eliminasi persamaan (1) dan (2) untuk memperoleh persamaan (4).

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$x - 2y + z = 1$ $\times 2$

$3x + y + 2z = 3$ $\times 1$ -

menjadi

$2x - 4y + 2z = 2$

$3x + y + 2z = 3$ -

$-x - 5y = -1$ (4)

Misalkan eliminasi persamaan (1) dan (3) untuk memperoleh persamaan (5).

Eliminasi Persamaan (1) dan (3)

$x - 2y + z = 1$ $\times(-4)$

$3x + 6y - 4z = -2$ $\times 1$ -

menjadi

$\underline{\begin{aligned}-4x + 8y - 4z &= -4 \\ 3x + 6y - 4z &= -2 \quad -\end{aligned}}$

$-7x + 2y = -2$ (5)

Dari persamaan (4) dan (5), misalkan kita hilangkan variabel y.

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$-x - 5y = -1 \qquad \times 2$

$\underline{-7x + 2y = -2 \quad \times(-5)} -$

menjadi

$-2x - 10y = -2$

$\underline{35x - 10y = 10 \quad -}$

$-37x = -12$

$x = -\frac{12}{-37} = \frac{12}{37}$

Misalkan substitusi nilai variabel x ke dalam persamaan (4)

$-x - 5y = -1$

$-\frac{12}{37} - 5y = -1$

$$-5y = -1 + \frac{12}{37}$$

$$-5y = \frac{-37 + 12}{37}$$

$$-5y = -\frac{25}{37}$$

$$y = -\frac{25}{37(-5)}$$

$$y = \frac{5}{37}$$

Misalkan substitusi nilai variabel x dan y ke dalam persamaan (1)

$x - 2y + z = 1$

$$\frac{12}{37} - 2\left(\frac{5}{37}\right) + z = 1$$

$$\frac{12}{37} - \frac{10}{37} + z = 1$$

$$\frac{2}{37} + z = 1$$

$$z = 1 - \frac{2}{37}$$

$$z = \frac{37 - 2}{37} = \frac{35}{37}$$

Jadi himpunan penyelesaian yang diperoleh adalah

$\left\{x = \frac{12}{37}, y = \frac{5}{37}, \square = \frac{35}{37}\right\}$

4. Rangkuman

1) bentuk umum dari system persamaan linear tiga variabel dalam x, y dan z dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3 \neq 0$; $b_1, b_2, b_3 \neq 0$; $c_1, c_2, c_3 \neq 0$; $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.

2) Metode penyelesaian pada system persamaan linear tiga variabel, yaitu metode eliminasi, netode substitusi dan metode gabungan (eliminasi-substitusi).

a. Metode eliminasi merupakan cara peyelesaian dengan mengeliminasi atau mengurangkan salah satu variabel. Langkah-langkahnya :

1) Eliminasikan persamaan pertama dan kedua atau pertama dan ketiga atau kedua dan ketiga untuk menghilangkan salah satu variabelnya, yaitu x atau y atau z, sehingga menjadi persamaan linear dengan dua variabel.

2) Ulangi sekali lagi tetapi variasi persamaannya tidak sama dengan langkah (1), sedangkan untuk menghilangkan salah satu variabelnya harus sama dengan langkah (1) sehingga menjadi persamaan linear dua variabel.
3) Dari langkah (1) dan (2), eliminasikan salah satu variabel sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
4) Ulangi sekali lagi tetapi variasi variabel yang dieliminasi berbeda dengan langkah (3) sehingga diperoleh hasil dari variabel yang lainnya.
5) Ulangi langkah (1) sampai langkah (4) tetapi variasi persamaannya tidak sama sehingga diperoleh hasil variabel yang lainnya.
6) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

b. Metode Substitusi merupakan cara penyelesaian dengan cara memasukkan salah satu persamaan ke persamaan yang lainnya. Langkah- langkahnya :
1) Menyatakan salah satu persamaan dalam bentuk x sebagai fungsi y dan z atau y sebagai fungsi x dan z atau z sebagai fungsi x dan y (pilih yang paling sederhana).
2) Substitusikan langkah (1) ke dalam salah satu persamaan yang lainnya sehingga membentuk persamaan baru yang mengandung dua variabel.
3) Gunakan langkah (2) dengan menyatakan seperti pada langkah (1).
4) Substitusikan langkah ke (2) dan (3) ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai dari salah satu variabel.
5) Jika telah diperoleh nilai dari salah satu variabel maka substitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel yang kedua.

6) Ulangi lagi langkah (5) tetapi mensubstitusikan ke dalam persamaan yang berbeda untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.
7) Himpunan penyelesaiannya adalah (x, y, z).

c. Metode Gabungan (Eliminasi Substitusi) merupakan cara penyelesaian dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan substitusi dengan secara bersamaan. Langkah-langkahnya:
1) Dibuat dua kelompok persamaan yang memungkinkan elimiasi dua persamaan menjadi lebih mudah dan sederhana.
2) Salah satu variabel dari masing-masing kelompok dieliminasikan.
3) Nilai variabel yang diperoleh, disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai-nilai variabel yang lain.

5. Latihan

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$2x + 5y - 3z = 3$$
$$6x + 8y - 5z = 7$$
$$-3x + 3y + 4z = 15$$

2. Cari tahulah penyelesaian SPLTV dengan menggunakan Matriks! Tentukanlan Penyelesaian persamaan berikut dengan metode matriks.

$$5x - 3y + 2z = 3$$
$$8x - 5y + 6z = 7$$
$$3x + 4y - 3z = 15$$

3. Toko alat tulis Pak Rudi menjual alat tulis berisi buku, spidol, dan tinta dalam 3 jenis paket sebagai berikut.

   Paket A: 3 buku, 1 spidol, 2 tinta seharga Rp 17.200

   Paket B: 2 buku, 2 spidol, 3 tinta seharga Rp19.700

   Paket C: 1 buku, 2 spidol, 2 tinta seharga Rp14.000

   Hitunglah harga 1 buah masing-masing item !

4. 3 bersaudara Lia, Ria, dan, Via berbelanja di toko buah. Mereka membeli Apel, Jambu, dan Mangga dengan hasil masing-masing sebagai berikut:

   Lia membeli dua buah Apel, satu buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp47.000

   Ria membeli satu buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp43.000

   Via membelli tiga buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp71.000

   Berapa harga 1 buah Apel, 1 buah Jambu, dan 1 buah Mangga?

5. Pak budi memiliki toko kelontong yang menjual campuran beras A, beras B dan beras C yang dijual dengan klasifikasi berikut :

   i. Campuran 3 kg beras A, 2 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual seharga Rp19.700,00.

   ii. Campuran 2 kg beras A, 1 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual Rp14.000.

   iii. Campuran 2 kg beras A, 3 kg beras B, dan 1 kg beras C dijual seharga Rp17.200,00.

   Hitunglah harga tiap kg beras A, B, dan C ?

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Selesaikan persamaan di bawah ini dengan metode eliminasi dan substitusi ? Kemudian tentukanlah nilai dari $x + y + z$

$$x + y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 7$$

$$2x + y + z = 4$$

2. Diketahui sistem persamaan linear

$$3x - 2y - 3z = 5$$

$$x + y - 2z = 3$$

$$x - y + z = -4$$

jika $\{(x_0, y_0, z_0)\}$ memenuhi persamaan diatas, maka nilai $z_0 =$

3. Perhatikan system persamaan linear tiga variabel berikut

$$x + 5y + 2z = -a - b - c$$

$$3x - y + 4\square = 5a + b$$

$$2x + y + 5z = 6a + 1$$

jika himpunan penyelesaian system persamaan tersebut adalah $\{(-2. -3.4)\}$ maka nilai $2a + b + 3c =$

4. Perhatikan system persamaan linear berikut

$$ax + y + 2z = 5$$

$$bx - y + 3z = 3$$

$$cx - y + z = -1$$

jika $a + b = 7$ dan $a + c = 5$ maka nilai $12x + 8z =$

5. Pada suatu hari, tiga sahabat yang bernama Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Mereka membeli buku tulis, pensil dan penghapus. Hasil belanja mereka di toko buku adalah sebagai berikut :

   i. Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.700

ii. Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.300

iii. Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp7.100

Berapa harga untuk sebuah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus ?

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul tiga ini menuntun mahasiswa memahami materi Persamaan dan pertidaksamaan linear dari satu variabel, dua variabel dan tiga variabel secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari yang sesuai dengan soal-soal pada latihan dan evaluasi pembelajaran diatas.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

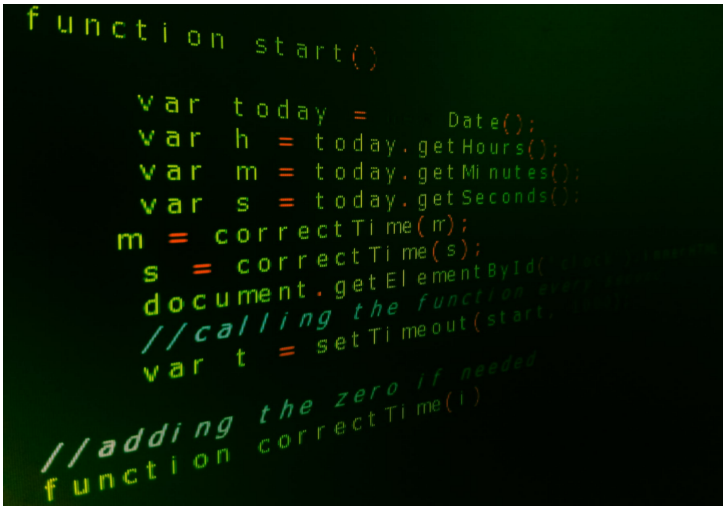
   Persamaan linear variabel substitusi Eliminasi

4. Referensi

   Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson

   Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 4 FUNGSI



Wake up and face the world with an optimist mind

_SCP

Pendidikan Fisika

FKIP UKI

MODUL 4 FUNGSI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Salah satu konsep dalam matematika yang paling penting adalah konsep fungsi. Dengan konsep fungsi, para matematikawan maupun para ahli di bidang yang lain dengan jelas dapat mengetahui apakah suatu struktur identik dengan struktur yang lain. Dan hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi dalam pengembangannya.

   Fungsi linear dan fungsi kuadrat merupakan salah satu fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan. Banyak masalah sehari-hari menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat.

   Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang diba- yarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari-jarinya dan se- bagainya.

   Pada modul ini akan dibahas terkait dengan fungsi, jenis-jenisnya dan berbagai macam bentuk penyelesaiannya.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Empat

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran 131isika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep dasar perkalian berulang dan penjumlahan berulang. Selain itu juga diperlukan pemahaman tentang persamaan dan pertidaksamaan linear yang telah dibahas di modul sebelumnya.

5. Kegunaan Modul Empat

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi fungsi dan berbagai bentuk persamaan fungsi. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada fungsi untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian fungsi, sifat fungsi yaitu surjektif, injektif dan bijektif, Grafik fungsi, Jenis-jenis fungsi seperti fungsi konstan, fungsi linear, fungsi identitas, fungsi kuadrat, fungsi tangga, fungsi mutlak, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi naik dan fungsi turun, fungsi berpangkat, fungsi polynomial, fungsi rasional, fungsi aljabar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma. Selanjutnya juga memuat tentang operasi pada fungsi dan fungsi komposisi, dan pergeseran grafik fungsi.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 7 : Menguasai konsep Fungsi dan jenis-jenisnya.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Fungsi dan jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan

Materi Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

4.1 Pengertian

Fungsi adalah sebuah alat untuk menggambarkan fakta yang ada dalam ben- tuk matematika. sebuah fungsi dapat direpresentasikan dengan persamaan, grafik, tabel, atau penjelasan verbal; dimana keempat representasi tersebut kita gunakan pada bab ini.

Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang diba- yarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari-jarinya dan se- bagainya. Dalam hal ini, nilai dari satu variabel misalkan y bergantung pada nilai dari variabel lainnya yang bisa disebut sebagai x. Biasanya kita baca "y adalah sebuah fungsi dari x" yang dinotasikan dengan

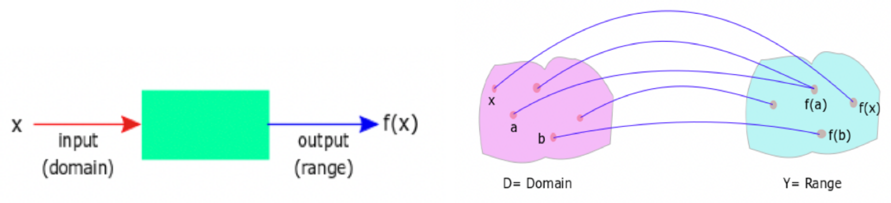
$$y = f(x)$$

notasi diatas menunjukkan y sebagai sebuah fungsi dengan x sebagai vari- abel bebas ($Independent\ variable$) yang merepresentasikan nilai masukan ke f dan y adalah variabel terikat ($dependent\ variable$) yang merepresentasikan nilai keluaran dari f di x.

Definisi 1.

Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.

Himpunan D disebut sebagai daerah asal atau domain dan setiap nilai $f(x)$ pada himpunan Y disebut sebagai daerah hasil atau range. Dalam hal ini daerah hasil mungkin tidka semua elemen pada himpunan Y . Sebuah fungsi dapat direpresentasikan seperti dua gambar berikut ini.



(a) Fungsi seperti sebuah mesin (b) Fungsi sebagai Pemetaan dari D ke Y

Gambar 48 Representasi sebuah fungsi

Berikut ini contoh fungsi beserta dengan domain dan range nya

Fungsi	**Domain**	**Range**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1,1]$	$[0,1)$

Dari tabel diatas dapat kita ketahui bahwa

1. Fungsi $y = x^2$ menunjukkan bahwa pemetaan dari $x \in R$ adalah $y \in R$ sehingga domainnya adalah $(-\infty, \infty)$. Daerah hasil dari fungsi $y = x^2$ adalah $[0, \infty)$ karena pangkat dari bilangan riil adalah bilangan positif dan setiap bilangan positif adalah kuadrat dari akarnya sendiri ditulis dengan $y = (y)^2$ untuk $y \geq 0$.
2. Fungsi $y = \frac{1}{x}$ menggambarkan nilai $y \in R$ kecuali pada $x = 0$. Berdasarkan x konsistensi formula pada aritmatika, kita tidak bisa

membagi bilangan dengan nol. Sehingga domain dari $y = \frac{1}{x}$ adalah semua bilangan riil kecuali nol dituliskan dengan $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Selanjutnya daerah hasil dari $y = \frac{1}{x}$ adalah semua bilangan riil bukan nol juga karena $y = \frac{1}{x}$. Dengan demikian Rangenya adalah $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

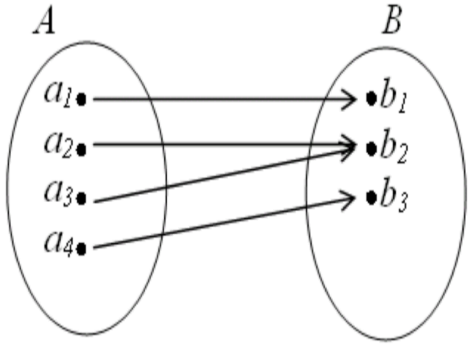
3. Fungsi $y = \sqrt{x}$ memberikan nilai $y \in R$ jika $x \geq 0$. Selanjutnya range dari $y = \sqrt{x}$ adalah $[0, \infty)$karena setiap bilangan positif merupakan beberapa akar dari bilangan (akar dari pangkat bilangan itu sendiri).
4. Pada fungsi $y = \sqrt{4 - x}$, nilai $4 - x$ tidak boleh bernilai negatif. Sehingga $4 - x \geq 0$ atau $x \leq 4$, dimana $y \in R$ untuk semua $x \leq 4$. Range dari $\sqrt{4 - x}$ adalah semua himpunan bilangan positif dituliskan dengan $[0, \infty)$.
5. Fungsi $y = \sqrt{1 - x^2}$ memberikan nilai $y \in R$ untuk x diantara -1 sampai 1. Selain itu maka nilai $1 - x^2$ akan bernilai imajiner. Sehingga daerah hasil atau range dari $\sqrt{1 - x^2}$ adalah $[0,1)$.

4.2 Sifat Fungsi

Secara umum fungsi mempunyai beberap a sifat yang berguna untuk menentukan syarat pada komposisi fungsi dan invers fungsi. Setidaknya ada tiga sifat fungsi dalam matematika antara lain yaitu fungsi pada atau surjektif (onto), fungsi satu-satu atau injektif dan fungsi satu-satu pada atau bijektif (koresponden).

1. Fungsi Surjektif (Pada)

   Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.



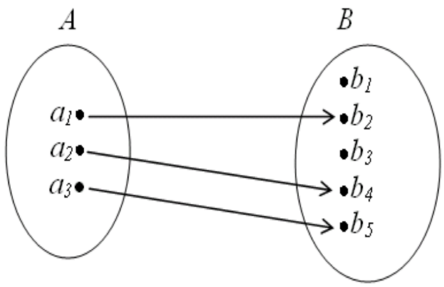
Gambar 49 Fungsi Surjektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan hasil pemetaan $f(A) = \{(1, c), (2, b), (3, a), (4, a)\}$. Sehingga dapat diperoleh bahwa daerah hasil atau range dari fungsi f adalah $R_f = \{a, b, c\}$ dan $R_f = B$. Jadi fungsi ini termasuk fungsi surjektif atau fungsi onto atau disebut juga dengan fungsi pada.

2. Fugsi Injektif (satu-satu)

   Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.



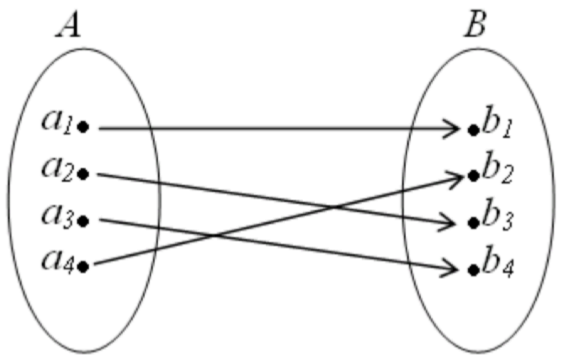
Gambar 50 Fungsi Injektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, a), (2, d), (3, b)\}$. Dapat diketahui bahwa setiap anggota A yang berbeda memiliki peta yang berbeda, atau pasangan yang berbeda. Jadi fungsi f ini termasuk fungsi injektif atau fungsi satu-satu.

3. Fungsi Bijektif (Saru-satu Pada)

   Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.



Gambar 51 Fungsi Bijektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$. Dapat diketahui bahwa fungsi f termasuk fungsi surjektif dan fungsi injektif. Fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

4.3 Grafik Fungsi

Grafik sebuah fungsi adalah sebuah representasi visual dari sifat sebuah fungsi pada diagram x- y. Grafik bisa membantu kita memahami aspek-aspek berbeda dari sebuah fungsi, yang bisa jadi sulit dipahami dengan hanya melihat fungsi itu sendiri.

Berikut ini langkah-langkah menggambar grafik fungsi:

1. Langkah pertama

   Buatlah terlebih dahulu analisis pendahuluan yang meliputi:

   - Menentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu-sumbu koordinat (jika koordinat itu gampang ditentukan)
     - i. Titik potong dengan sumbu x, dengan mengambil syarat $y = 0$.
     - ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil syarat $x = 0$.
   - Tentukan interval-interval saat fungsi itu nait dan saat fungsi itu turun.
   - Tentukan titik-titik stationer serta jenisnya : titik balik maksimum, titik balik minimum, atatu titik belok horizontal.
   - Tentukan nilai-nilai fungsi pada ujung-ujung interval. Jika kurva itu akan digambarkan untuk semua bilangan real, maka perlu ditentukan nilai-nilai y untuk nilai x yang besar positif dan untuk nilai x yang besar negative.
   - Tentukanlah beberapa titik tertentu untuk memperhalus denah kurva.

2. Langkah kedua

   Dari langkah pertama, titik-titik yang didapat kita sajikan dalam bidang kartesius.

3. Langkah ketiga

   Titik-titik yang telah disajikan dalam bidang kartesius pada langkah kedua, lalu kita hubungkan dengan mempertimbangkan naik atau turunnya fungsi. Dengan demikian kita akan mendapat kurva $y = f(x)$.

Contoh :

Gambarlah denah kurva dari fungsi $f(x) = 4x - x^3$

Jawab :

Langkah pertama

1. Koordinat titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat.

   i. Titik potong dengan sumbu x, dengan engambil $y = 0$.

   $$4x - x^3 = 0$$

   $$x(4 - x^2) = 0$$

   $$x(2 + x)(2 - x) = 0$$

   $x_1 = 0$, atau $x_2 = -2$ atau $x_3 = 2$

   titik-titik potong dengan sumbu x adalah $(-2{,}0)$, $(0{,}0)$ dan $(2{,}0)$.

   ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil $x = 0$ diperoleh :

   $$y = 4(0) - (0)^3 = 0$$

   titik potong sumbu y adalah $(0{,}0)$

2. Dari $f(x) = 4x - x^3$ maka turunan pertamanya adalah $f'(x) = 4 - 3x^2$ (Materi turunan dapat dilihat pada modul turunan)

   $f(x)$ naik bila $f'(x) > 0$

   $4 - 3x^2 > 0$

   $3x^2 < 4$

   $-\dfrac{2}{3}\sqrt{3} < x < \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

   $f(x)$ turun bila $f'(x) < 0$

   $4 - 3x^2 < 0$

   $3x^2 > 4$

   $x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ atau $x > \frac{2}{3}\sqrt{3}$

3. Nilai-nilai stationernya :

   Untuk $x_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$. Dalam hal ini $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik minimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif saat melewati $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Untuk $x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = \frac{16}{9}\sqrt{3}$.

Dalam hal ini $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik maksimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif saat melewati $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Sehingga titik balik maksimumnya $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimumnya $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$.

4. Untuk x besar maka $y = f(x) = 4x - x^3$ akrab dengan $-x^3$

   Jika x besar positif, maka y besar negatif

   Jika y besar negative, maka x besar positif

5. Ambil beberapa titik tertentu untuk memperbaiki denah kurva

   $x = -3$ maka $y = f(-3) = 4(-3) - (-3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-3,15)$.

   $x = -1$ maka $y = f(-1) = 4(-1) - (-1)^3 = -3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-1, -3)$.

   $x = 1$ maka $y = f(1) = 4(1) - (1)^3 = 3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(1,3)$.

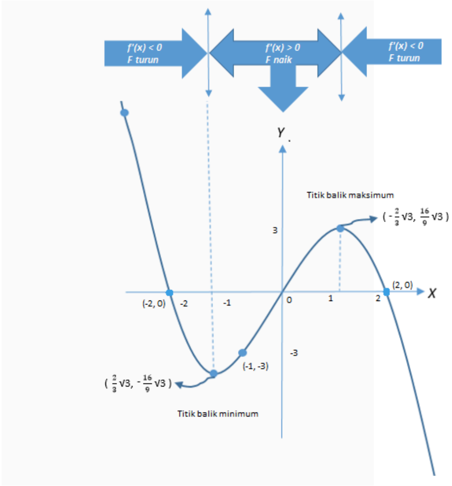
   $x = 3$ maka $y = f(3) = 4(3) - (3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(3,15)$.

Langkah kedua

Beberapa titik yang diperoleh pada langkah pertama diletakkan pada bidang kartesius.

Langkah ketiga

Titik-titik yang telah disajikan pada bidang kartesius itu dihubungkan untuk memperoleh denah kurva yang mulus ibarat pada gambar dibawah ini.



Gambar 52 Grafik Fungsi

untuk memudahkan kita dalam menggambar grafik dari berbagai bentuk fungsi, maka dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa aplikasi yaitu seperti MathLab, Maple, Symbolab dan lain sebagainya.

Beberapa bentuk fungsi yang digambar menggunakan symbolab dapat kita lihat pada jenis-jenis fungsi berikut.

4.4 Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi Konstan (Fungsi Tetap)

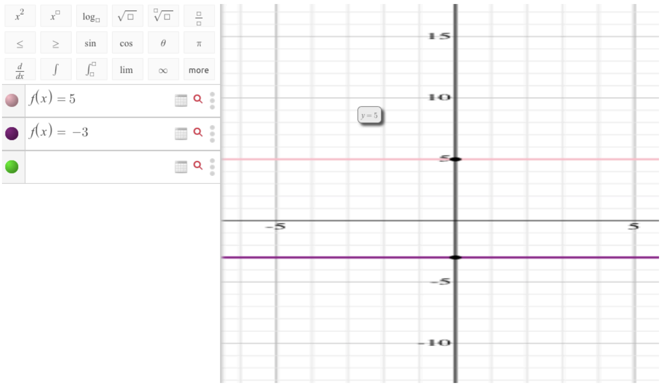
   Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.

   Contoh :

   $f(x) = 5$

   $f(x) = -3$

   yang direpresentasikan seperti pada gambar berikut.



Gambar 53 Fungsi Konstan

2. Fungsi Linear

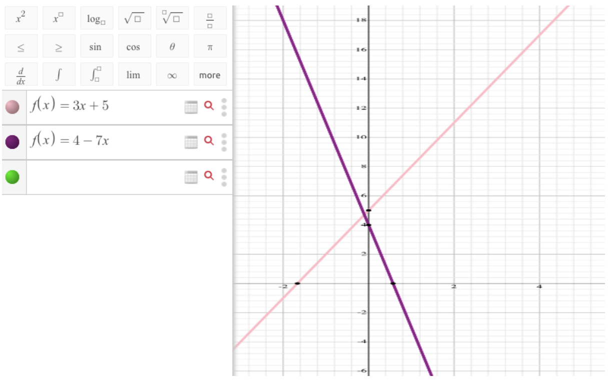
   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.

   Contoh :

   $f(x) = 3x + 5$

   $f(x) = 4 - 7x$

   yang digambarkan seperti pada grafik berikut ini



Gambar 54 Fungsi Linear

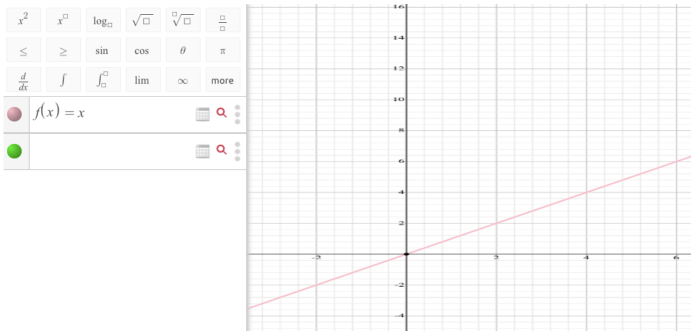
3. Fungsi Identitas

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama.

Contoh :

$$f(x) = x$$

yang dapat digambarkan seperti grafik berikut ini.



Gambar 55 Fungsi Identitas

4. Fungsi Kuadrat

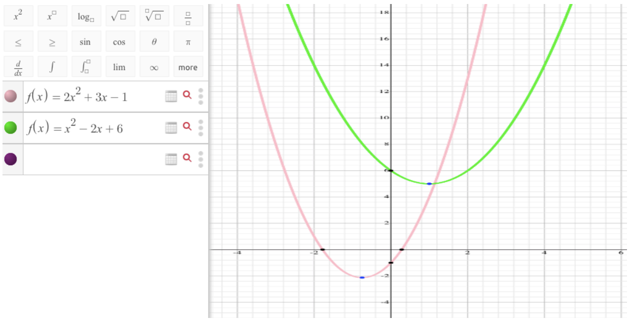
Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.

Contoh :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 6$$

yang dapat dilukiskan seperti grafik berikut ini.



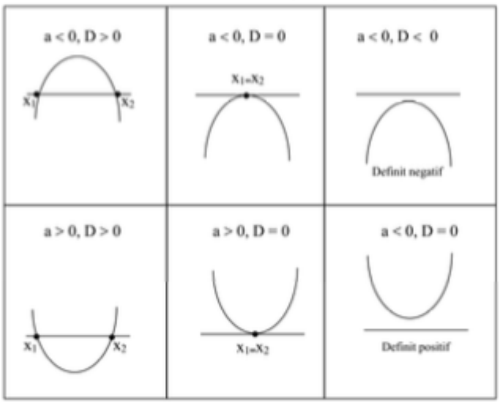
Gambar 56 Fungsi Kuadrat

Pada fungsi kuadrat biasanya disebut dengan persamaan kuadrat ini dapat dilakukan perhitungan pada beberapa titik penting yaitu pada sumbu simetri fungsi yaitu dirumuskan dengan $x = -\frac{b}{2a}$.

Selanjutnya untuk menentukan titik puncak nya dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut:

$x = -\frac{b}{2a}$ dan $y = -\frac{D}{4a}$ dimana $D = b^2 - 4ac$.

jika ditinjau dari nilai a dan D maka grafik parabola yang terbentuk seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 57 Grafik Parabola

5. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah)

   Suatu fungsi disebut sebagai fungsi tangga apabila grafik fungsi $f(x)$

berbentuk interval-interval yang sejajar. Fungsi batas bawah adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan kebawah yang dinotasikan dengan $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

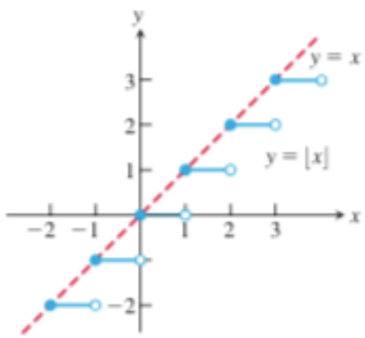
Fungsi batas atas adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan atas yang dinotasikan dengan $f(x) = \lceil x \rceil$.

Contoh :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

$$f(x) = \lceil x \rceil$$

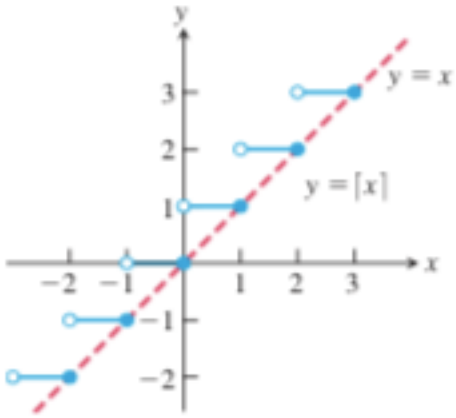
seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 58 Fungsi batas bawah

$\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$ $\lfloor 0.2 \rfloor = 2$

$\lfloor -1.2 \rfloor = -2$ $\lfloor -0.3 \rfloor = -1$ $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ $\lceil -2 \rceil = -2$



Gambar 59 Fungsi batas atas

$\lceil 2.4 \rceil = 3$ $\lceil 1.9 \rceil = 2$ $\lceil 0.2 \rceil = 1$

$\lceil -1.2 \rceil = -1$ $\lceil -0.3 \rceil = 0$ $\lceil 3.6 \rceil = 4$ $\lceil -2 \rceil = -2$

6. Fungsi Mutlak (modulus)

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi modulus (mutlak) apabila fungsi ini memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur harga mutlaknya.

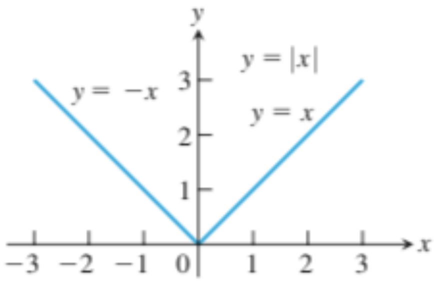
   $f: x \to |x|$ atau $f: x \to |ax + b|$

   $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.

   Contoh :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

   yang tampak seperti pada grafik berikut.



Gambar 60 Fungsi mutlak

7. Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.

Biasannya grafik fungsi genap adalah simetri pada sumbu y. Sedangkan grafik fungsi ganjil adalah simetri pada titik normal (0,0).

Contoh :

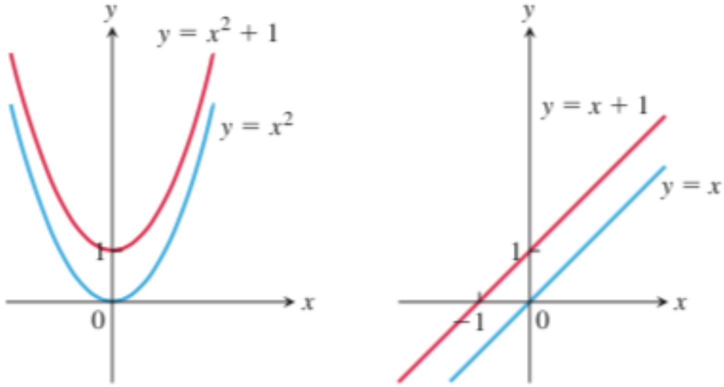
$f(x) = x^2$ adalah Fungsi genap karena $(-x)^2 = x^2$ untuk semua x, yaitu simetri disumbu y.

$f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi genap $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ untuk semua x, yaitu simetri di sumbu y.

$f(x) = x$ adalah fungsi ganjil $(-x) = -x$ untuk semua x, yaitu simetri di titik normal.

$f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Ganjil karena $f(-x) = -x + 1$ namun $-f(x) = -x - 1$. Sehingga $f(-x) \neq -f(x)$.

$f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Genap karena $(-x) + 1 \neq x + 1$ untuk semua x.



Gambar 61 Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

8. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

   Jika sebuah grafik fungsi menanjak atau naik dari kiri kekanan, kita sebut sebagai fungsi naik (increasing). Jika sebuah grafik dari fungsi menurun dari kiri ke kanan disebut fungsi turun (decreasing).

   Misalnya f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval I dan diketahui x_1 dan x_2 berada pada interval I. Maka

   i. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.

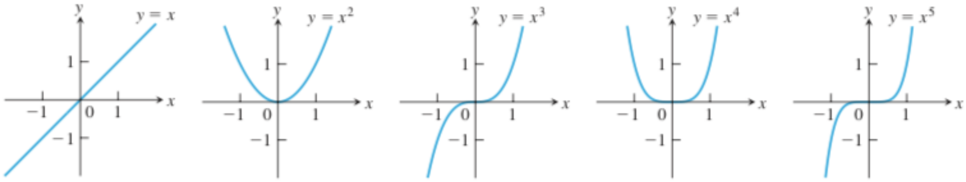
   ii. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.

9. Fungsi Berpangkat

   Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat. Berikut beberapa kasus fungsi berpangkat.

   i. $a = n$, bilangan bulat positif

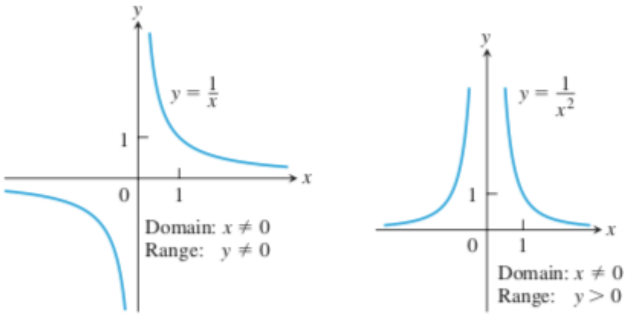
      Grafik fungsi $f(x) = x^n$, untuk $n = 1,2,3,4,5$, dapat dilihat seperti pada gambar dibawah. Untuk semua fungsi yang didefinisikan, dapat kita perhatikan pola grafik yang terbentuk yaitu kurva yang terbentuk melandai mendekati sumbu x.



Gambar 62 Fungsi berpangkat n

ii. $a = -1$ atau $a = -2$

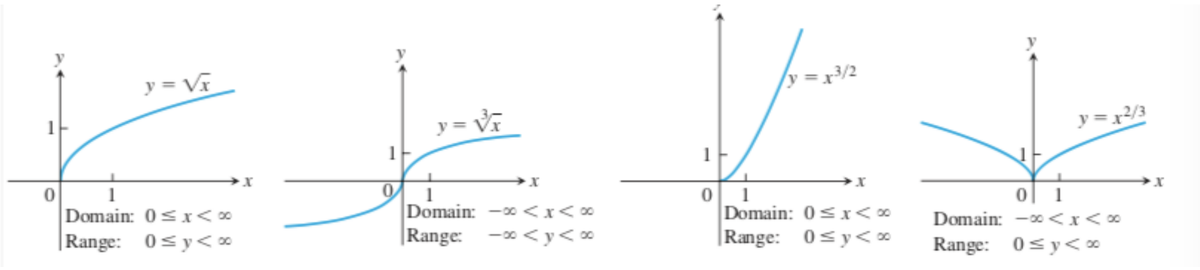
Grafik fungsi $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ dapat direpresentasikan seperti gambar berikut. Fungsi ini didefinisikan untuk semua $x \neq 0$



Gambar 63 fungsi berpangkat -1 dan -2

iii. $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$, dan $\frac{2}{3}$

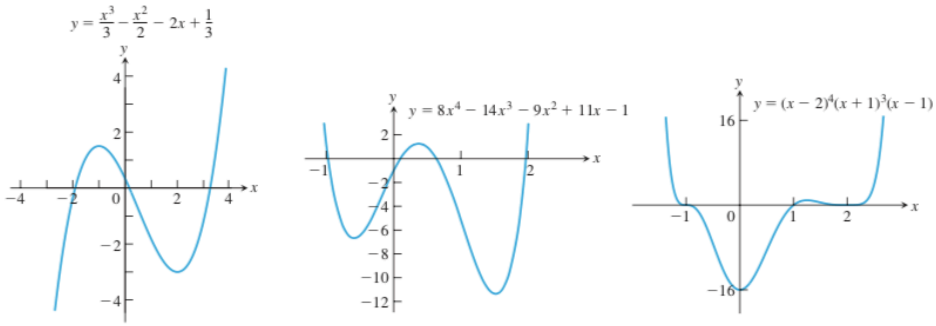
Fungsi $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ merupakan fungsi akar dan fungsi akar kubik.



Gambar 64 Fungsi berpangkat pecahan

10. Fungsi Polinomial (Suku Banyak)

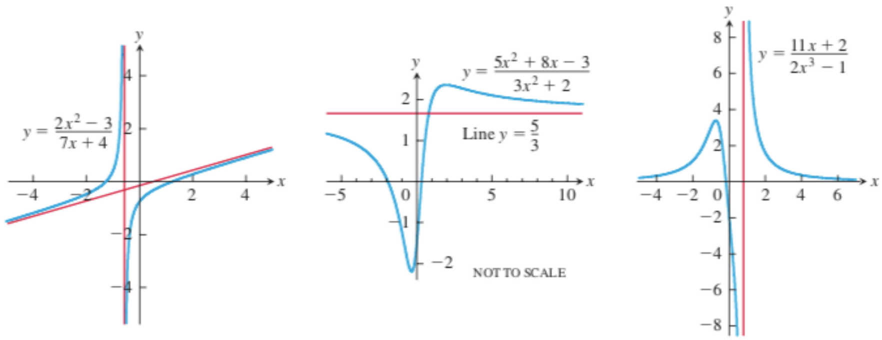
Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta. Jika $a_n \neq 0$ dan $n > 0$, maka n disebut sebagai derajat polynomial. Fungsi linear dengan $m \neq 0$ disebut sebagai polynomial dengan derajat 1. Derajat dua disebut sebagai fungsi kuadrat dan derajat tiga disebut sabagai fungsi kubik.



Gambar 65 Fungsi Polinomial

11. Fungsi Rasional

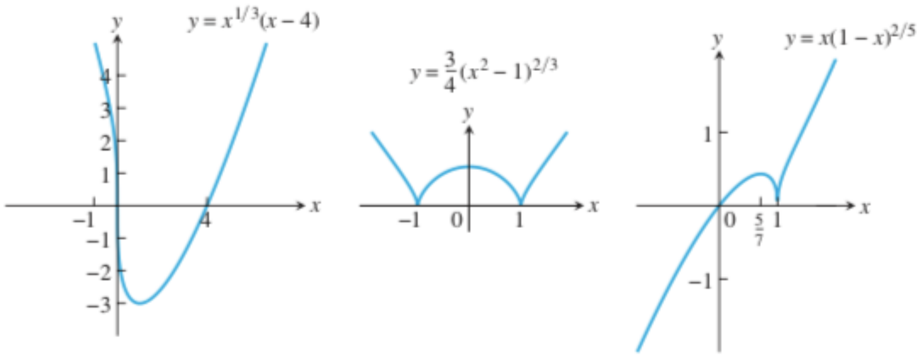
Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Domain dari fungsi rasional adalah himpunan bilangan riil x dimana $q(x) \neq 0$. Berikut beberapa grafik fungsi rasional.



Gambar 66 Fungsi Rasional

12. Fungsi Aljabar

    Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, pengurangan dan akar. Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi aljabar.



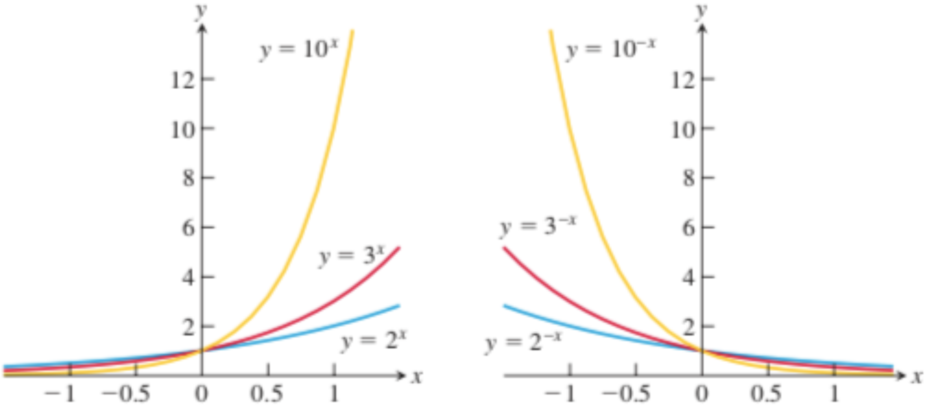
Gambar 67 Fungsi Aljabar

13. Fungsi Eksponensial

    Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.

    Fungsi eksponensial memiliki domain $(-\infty, \infty)$ dan range $(0, \infty)$ sehingga fungsi eksponensial tidak pernah diasumsikan bernilai 0.

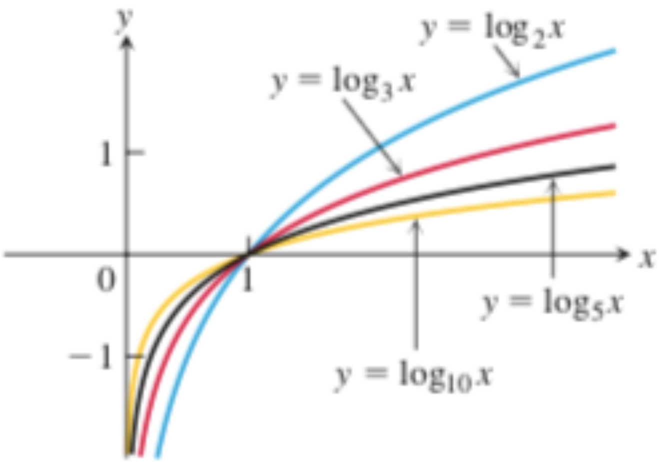
Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi eksponensial.



Gambar 68 Fungsi eksponensial

14. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif. Berikut ini beberapa grafik fungsi logaritma



Gambar 69 Fungsi logaritma

4. Rangkuman

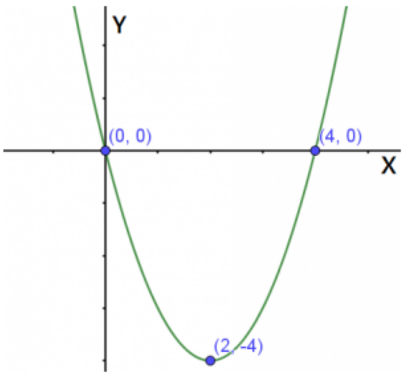
1. Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.
2. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.
3. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.
4. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.
5. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.
6. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.
7. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.
8. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.
9. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah), $f(x) = \lfloor x \rfloor$ dan $f(x) = \lceil x \rceil$.
10. Fungsi Mutlak (modulus), $f: x \rightarrow |x|$ atau $f: x \rightarrow |ax + b|$ dimana $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.
11. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) =$

$-f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.

12. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.
13. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.
14. Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat.
15. Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta.
16. Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
17. Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar.
18. Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.
19. Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif.

5. Latihan

1. Diantara diagram panah fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif dan bijektif? Jelaskan!
2. Suatu fungsi $f: R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 2$
   a. Tentukan $f(-1)$, $f(a)$ dan $f(1)$
   b. Tentukan a jika $f(a) = 23$
   c. Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 34?
3. Tentukanlah persamaan garis yang melalui
   a. Titik $M(1,2)$ dan $N(-1,6)$
   b. Titik $(-2,3)$ dan membentuk sudut $45°$ terhadap sumbu x positif.
4. Tentukan persamaan garis I yang melalui $R(3,1)$ dan tegak lurus garis AB dimana titik $A(2,3)$ dan $B(6,5)$.
5. Koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 + 2kx + k + 5$ adalah (m, m). Nilai $k + m =$
6. Persamaan grafik parabola dibawah ini adalah



7. Jika f adalah fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(1,0)$, $(4,0)$, dan $(0,-4)$ maka nilai dari $f(7) =$
8. Diketahui fungsi $f(x) = (a+1)x^2 - 2ax + (a-2)$ definit negatif. Nilai a yang memenuhi adalah

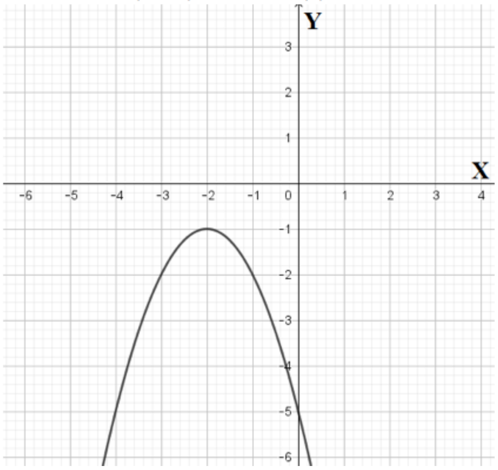
9. Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + 6x + a$ mempunyai sumbu simetri $x = 3$, maka nilai maksimum fungsi tersebut adalah
10. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 7x + 2 = 0$ adalah r dan s. Tentukan hasil dari $\frac{r}{(r^2+1)^2} + \frac{s}{(s^2+1)^2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah domain dan range dari fungsi berikut
   a. $f(x) = x^3$
   b. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$
   c. $f(x) = \tan x$
   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

2. Fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(-1,3)$ dan titik baliknya sama dengan titik balik dari grafik $f(x) = x^2 + 4x + 3$ adalah
3. Jika grafik $f(x) = ax^2 + (2a + 6)x + 2a - 2$ menyinggung sumbu x, maka koordinat titik balik maksimumnya adalah
4. Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + x + p$ menyinggung garis $3x + y = 1$ dengan $p > 0$, maka nilai p yang memenuhi adalah
5. Garfik fungsi $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + m + 3$ seluruhnya diatas sumbu x. interval nilai m yang memenuhi adalah
6. Jika p dan q merupakan akar-akar persamaan $x^2 - x + 1 = 0$, nilai dari $p^{2017} + q^{2017}$ adalah
7. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$, maka hasil dari $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 + x_2$ adalah
8. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$, carilah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{x_1^2-1}{2x_1}$ dan $\frac{2x_2}{x_2^2-1}$.

9. Bila m dan n merupakan akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 2x + 1 = 0$, carilah nilai dari $(1 + m^2 + m^3 + \cdots)(1 + n^2 + n^3 + \cdots)$
10. Jika gambar dibawah ini merupakan grafik fungsi kuadrat f dengan titik puncak $(-2, -1)$ dan melalui titik $(0, -5)$, maka nilai $f(2)$ adalah



7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 8 : Menguasai Konsep Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

4.5 Operasi Pada Fungsi

Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f+g$, $f-g$ dan fg seperti

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Contoh :

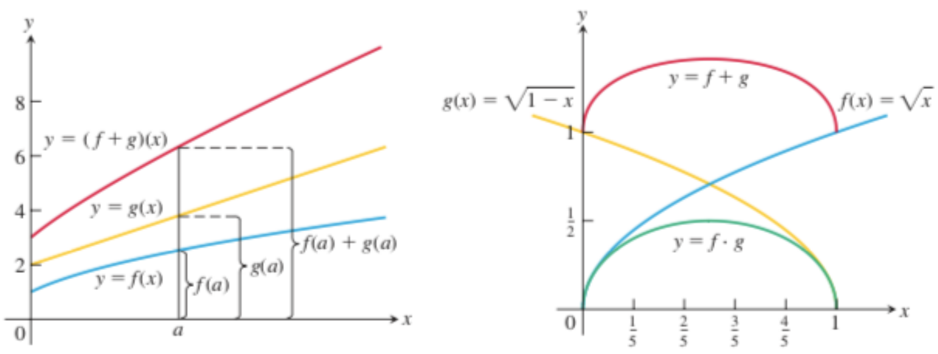
Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \sqrt{1-x}$ dengan $D(f) = [0, \infty)$ dan

$D(g) = (-\infty, 1]$. Maka Domain dari fungsi tersebut dapat diperoleh secara umum $[0, \infty) \cap (-\infty, 1]$

Fungsi yang terbentuk dengan menggunakan operasi aljabar adalah sebagai berikut

Fungsi	Rumus	Domain
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$	$[0,1]$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}$	$[0,1]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt{x}$	$[0,1]$
$f . g$	$(f . g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1 - x)}$	$[0,1]$
f/g	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}$	$[0,1)$ kecuali $x = 1$
g/f	$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$	$(0,1]$ kecuali $x = 0$

Grafik pada operasi fungsi tersebut dapat digambarkan seperti pada grafik berikut ini.



Gambar 70 Operasi pada fungsi

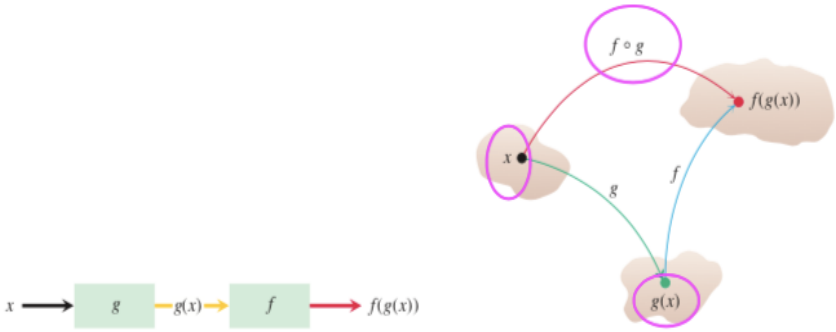
4.5 Fungsi Komposisi

Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.

Berdasarkan definisi diatas diperoleh bahwa $f \circ g$ dapat dibentuk ketika range dari g berada di domain f. Untuk menentukan $(f \circ g)(x)$, maka pertama ditentukan $g(x)$ dan kemudian menentukan $f\big(g(x)\big)$. Fungsi komposisi ini dapat di ilustrasikan seperti tampak pada diagram mesin berikut.



Gambar 71 Fungsi komposisi

Contoh :

Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x + 1$, maka

a. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$ dengan domain $[-1, \infty)$

b. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$ dengan domain $[0, \infty)$

c. $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$ dengan domain $[0, \infty)$

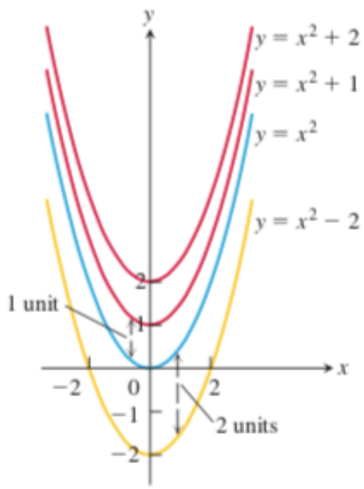
d. $(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$ dengan domain $[-\infty, \infty)$

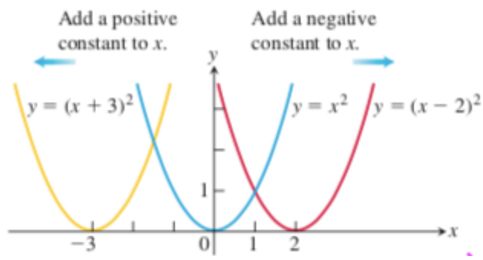
4.6 Pergeseran Grafik Fungsi

Pergeseran grafik sebuah fungsi dapat diperoleh dengan memasukkan beberapa variabel tertentu ke dalam fungsi yang ada. Pergeseran yang ada dibedakan menjadi dua yaitu pergeseran vertical dan pergeseran horizontal. Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.

Contoh :

Diketahui $f(x) = x^2$ maka diperoleh pergeseran grafik ini untuk $y = x^2 + 1$ bergeser keatas 1 unit, $y = x^2 - 2$ bergeser kebawah 2 unit, $y = (x + 3)^2$ bergeser ke kiri 3 unit dan $y = (x - 2)^2$ seperti tampak pada gambar berikut





Gambar 72 Pergeseran vertikal dan Horizontal

Selain pergeseran Vertikal dan Horizontal, ada juga penskalaan pada grafik yang disebut dnegan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.

ii. $y = \frac{1}{c}f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.

iii. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

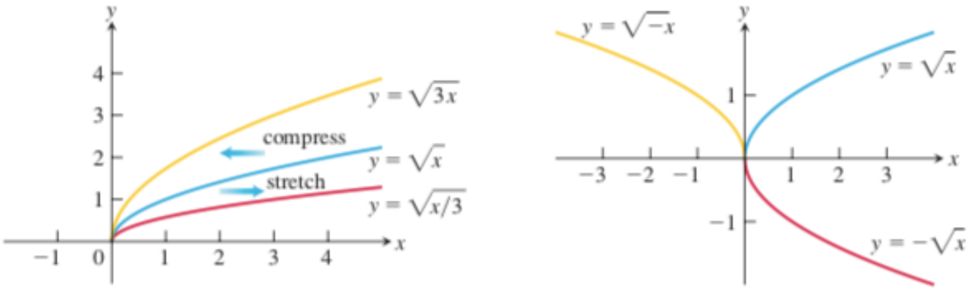
Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.

ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

Contoh :

Diketahui $y = \sqrt{x}$, maka diperoleh peregangan sebesar 3 secara vertikal jika dikalikan 3 yaitu $y = 3\sqrt{x}$ dan mengecil (terkompress) jika dikalikan dengan $\frac{1}{3}$ yaitu $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$. Selanjutnya akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebanyak 3 jika $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$. Kemudian disebut refleksi terhadap sumbu x jika grafik $y = -\sqrt{x}$ dan refleksi terhadap sumbu y jika $y = \sqrt{-x}$. Hal ini tampak pada gambar berikut ini.



Gambar 73 Kompres, Stretch dan Refleksi

4. Rangkuman

1. Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f + g$, $f - g$ dan fg seperti
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
2. Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.
3. Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$

dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.

4. Penskalaan pada grafik yang disebut dengan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

   Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.

   ii. $y = \frac{1}{c} f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.

   iii. $y = f(c\square)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

   iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

   Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.

   ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

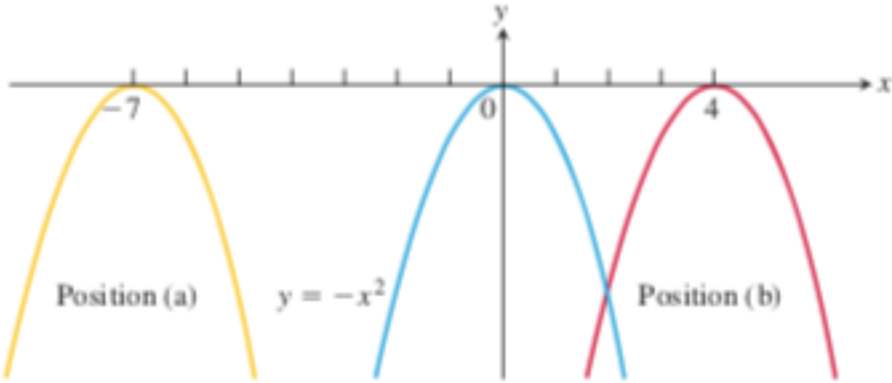
5. Latihan

1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $f + g$, dan $f \cdot g$
   a. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
   b. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
2. Jika $f(x) = x + 5$ dan $g(x) = x^2 - 3$, tentukanlah
   a. $f(g(0))$
   b. $g(f(0))$
   c. $f(g(x))$
   d. $g(f(x))$
   e. $f(f(-5))$
   f. $g(g(2))$
   g. $f(f(x))$
   h. $g(g(x))$
3. Misalkan $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x$
4. Perhatikanlah tabel berikut

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

   Tentukanlah nilai dari
   a. $f(g(-1))$
   b. $g(f(0))$
   c. $f(f(-1))$
   d. $g(g(2))$
   e. $g(f(-2))$
   f. $f(g(1))$

5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = -x^2$ yang bergeser secara horizontal. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b)



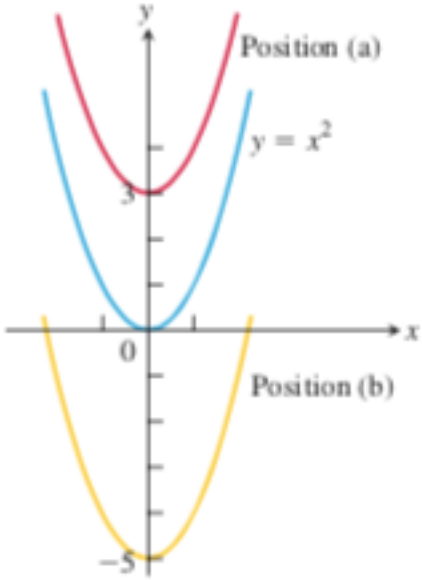
6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $\frac{f}{g}$, dan $\frac{g}{f}$
   a. $f(x) = 2, g(x) = x^2 + 1$
   b. $f(x) = 1, g(x) = 1 + \sqrt{x}$
2. Diketahui fungsi berikut

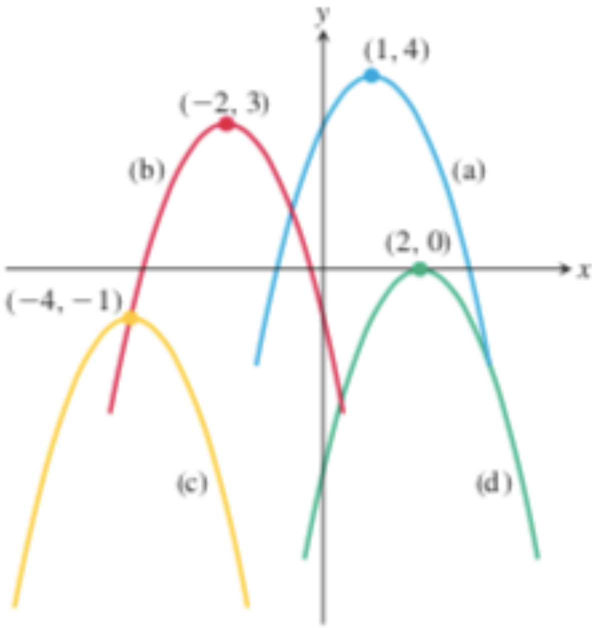
$$f(x) = x^2 + 2$$
$$g(x) = x - 2$$
$$h(x) = 2x - 5$$

   Tentukanlah
   a. $fogoh\ (x)$
   b. $gofoh\ (x)$
   c. $gohof\ (x)$
   d. $gogof\ (x)$
   e. $hohof\ (x)$
3. Misalkan $f(x) = 2x^3 - 4$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x + 2$

4. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b).



5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a), (b), (c) dan (d).



7. **Umpan Balik**

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul empat ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Fungsi. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari seperti pada soal latihan dan evaluasi pembelajaran.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Identitas	Kuadrat	Linear	Mutlak	Modulus
Polinomial	Eksponensial	Domain	Range	

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

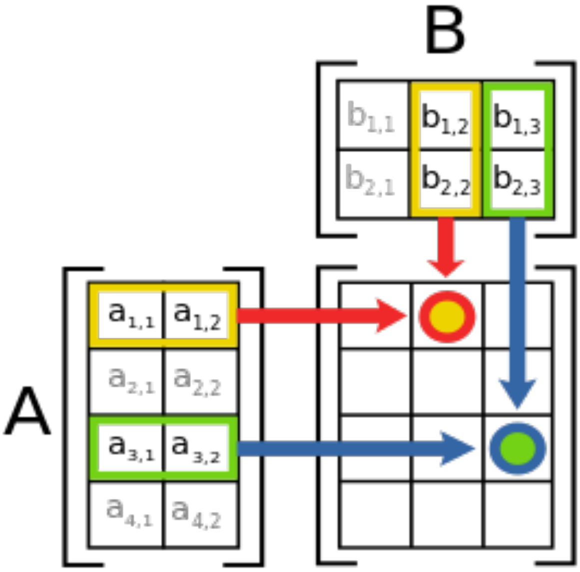
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 5

MATRIKS

You did the ringht thing, stand up and keep yor face up even who have a big problem to show the world that you are strong

-SCP



Pendidikan Fisika

FKIP UKI

MODUL 5 MATRIKS

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Matriks dalam matematika digunakan untuk menyatakan bilangan-bilangan ke dalam jajaran empat persegipanjang, terbentuknya suatu matriks dapat diperoleh melalui suatu sistem persamaan linier, demikian pula sebaliknya bahwa suatu sistem persamaan linier dapat diperoleh melalui suatu matriks. Dalam kehidupan sehari-hari penggunaan matriks dapat mempermudah penyajian suatu data dari tabel sekaligus operasi-operasi bilangan yang terkandung di dalamnya. Oleh karena itu, pemahaman mengenai matriks ini sangat penting untuk diperoleh.

   Modul ini memuat berbagai penjabaran tentang materi matriks dan juga latihan dan evaluasi pencapaian materi matriks.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul lima

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

   S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

   S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran 171isika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharapkan memahami pengertian matriks, jenis- jenis matriks, operasi dan sifat-sifat matriks, determinan, dan invers, serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan sistem persamaan linear. Memahami konsep dasar bilangan dan mampu mengoperasikannya.

5. Kegunaan Modul Lima

   Kegunaan modul lima ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi Matriks dan operasinya, determinan dan Invers matriks. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi pada matriks, sifat-sifat matriks, determinan matriks dan invers matriks.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 10 : Menguasai Matriks, Operasi dan sifat-sifatnya

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Matriks, Operasi dan sifat-sifatnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Matriks, Operasi dan sifat-sifatnya. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

6.1 Apa itu Matriks?

Matriks umumnya digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier pada mata kuliah aljabar linear yang telah dipelajari sejak dibangku sekolah.

Pada matematika diskrit, Matriks digunakan untuk merepresentasikan struktur diskrit diantaranya adalah relasi, graf dan pohon. Pokok bahasan Matriks merupakan topik yang umum bagi mahasiswa yang telah mempelajarinya dari tingkat SMA.

Untuk mempelajari materi matriks, berikut kita definisikan bentuk matriks sebagai berikut.

Definisi :

Matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran yang berbentuk persegi atau persegi panjang dalam bentuk baris dan kolom. Matriks M yang berukuran *m* baris dan *n* kolom atau sering disebut matriks berukuran (berordo) *mxn* ditulis dengan M_{mxn} atau M_{mn} adalah

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Catatan :

a_{ij} disebut anggota bilangan atau elemen atau komponen dari matriks M pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

Jika jumlah baris sama dengan jumlah kolom (m=n) matriks tersebut dinamakan Matriks bujur sangkar (*square matrix*).

6.2 Jenis-Jenis Matriks

1. Matriks Identitas

   Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen diagonalnya adalah bilangan 1 dan elemen lainnya adalah 0, dilambangkan dengan I.

   Berikut ini contoh matriks Identitas 3x3 dan 5x5 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya adalah bilangan nol. Berikut contoh matriks nol yang biasanya disimbolkan dengan O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Matriks Skalar

   Matriks skalar adalah matriks yang elemen diagonal utamanya sama sedangkan bilangan skalar dan elemen yang lain adalah nol. Berikut contoh matriks skalar, dengan skalar sama dengan 3.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Matriks Diagonal

   Matriks yang diagonal utamanya bukan nol sedangkan elemen yang lain adalah nol. Berikut contoh matriks diagonal.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Segitiga Atas/Bawah

   a. Matriks segitiga atas

      Matriks segitiga atas adalah matriks jika elemen-elemen diatas diagonal bernilai nol, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i < j$. Berikut contoh matriks segitiga atas

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

   b. Matriks segitiga bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks jika elemen-elemen di bawah diagonal bernilai nol, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i > j$. Berikut contoh matriks segitiga bawah

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Matriks Simetri (*symmetry*)

   M adalah matriks setangkup atau simetri jika $M^T = M$, yaitu jika setiap elemen di atas diagonal adalah pencerminan dari elemen di bawah diagonal terhadap sumbu diagonal matriks. Berikut contoh matriks simetri:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

7. Matriks 0/1 ($zero - one$)

   Matriks 0/1 adalah matriks yang setiap elemennya 0 atau 1. Berikut ini adalah matriks 0/1 dengan ukuran $4x4$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selain jenis matriks di atas, berikut ini beberapa jenis-jenis matriks lainnya yang diklasifikasikan berdasarkan baris dan kolomnya yaitu:

1. Matriks Baris adalah matriks yang terdiri dari satu baris.

   Contoh :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Kolom adalah matriks yang terdiri dari satu kolom.

   Contoh:

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Matriks Mendatar adalah matriks yang jumlah kolom lebih banyak daripada jumlah barisnya. Secara umum disebut matriks persegi panjang.

   Contoh:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Matriks Tegak adalah matriks yang jumlah baris lebih banyak dari jumlah kolomnya. Secara umum juga disebut sebagai matriks persegi panjang.

   Contoh :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6.3 Operasi-operasi Pada Matriks

Sama halnya dengan operasi pada bilangan bulat secara umum, Matriks memiliki beberapa operasi yaitu

1. Penjumlahan Matriks

   Dua buah Matriks atau lebih dapat dijumlahkan jika ukuran kedua atau lebih matriks tersebut berukuran sama. Misalnya matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m \, x \, n$. Maka penjumlahan $A + B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}$, dimana C berukuran $m \, x \, n$.

   Misalkan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

   maka

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh :

Penjumlahan dua buah matriks berukuran 5x5 :

Diketahui

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Hasil penjumlahan pada matriks A dan B adalah

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+1 & 4+2 & 3+3 & 1+5 & -1+7 \\ 3+2 & 5+3 & 4+4 & 1+1 & -2+6 \\ 5+4 & 1+1 & 7+2 & 2+5 & -2+2 \\ 1+5 & 3+3 & 8+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+2 & 1+1 & 4+0 & 0+3 & -3+3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & 8 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 9 & 7 & 0 \\ 6 & 6 & 10 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Sama halnya dengan penjumlahan, dua buah matriks dapat dioperasikan pada pengurangan jika kedua matriks tersebut berukuran atau berordo sama. Misalnya matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\ x\ n$. Maka penjumlahan $A-B=C$, dengan $c_{mn}=a_{mn}-b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

Misalkan :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

maka

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh :

Operasi pengurangan pada dua buah matriks 3x3 :

Diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasil pengurangan matriks A terhadap B adalah

$$A - B = \begin{pmatrix} -3-(-4) & 2-1 & 5-2 \\ 4-5 & 7-2 & 1-6 \\ 1-2 & -2-3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks yang pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua. Misalkan matriks pertama A berukuran mxn dan matriks kedua B berukuran nxs, maka perkalian matriks A dan B dilambangkan dengan $AXB = C$ akan berukuran atau berordo mxs. Dalam hal ini

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

untuk setiap $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ dan $c_{ij} \in C$.

Contoh :

Misalkan dua matriks A dan B adalah sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

hasil perkalian matriks A dan B adalah

$$A \: x \: B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(1) + 1(2) + (-3)(3) & 2(4) + 1(0) + (-3)(6) \\ 4(1) + 1(2) + (-5)(3) & 4(4) + 1(0) + (-5)(6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$$

4. Perkalian Matriks dengan Skalar

   Misalkan k adalah bilang skalar. Maka perkalian matriks M dengan bilangan skalar k adalah sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$kM = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

   Contoh :

   Perkalian skalar k dengan matriks M sebagai berikut :

   $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $k = 2$

   maka,

$$kM = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Pembagian pada Matriks

   Pembagian pada Matriks memiliki syarat yang sama dengan perkalian matriks. Namun berbeda dengan pembagian biasa, dua matriks dapat di dioperasikan pada pembagian dengan rumus :

   Misalkan matriks A membagi matriks B, dituliskan dengan

$$\frac{A}{B} = A\left(\frac{1}{B}\right) = AB^{-1}$$

   B^{-1} adalah invers dari matriks B, yang akan dibahas pada pokok bahasan berikutnya.

6. Transpose Matriks

   Transpose dari matriks M diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris pada matriks menjadi kolom matriks. Misalkan matriks M berukuran mxn maka matriks transpos dari M juga berukuran mxn yang dalam hal ini dituliskan dengan M^T, sebagai berikut :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   maka

$$M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   Contoh :

   Misalkan $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ maka diperoleh transpose dari M adalah

$$M^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

6.4 Sifat-sifat Matriks

1. Perkalian Matriks tidak komutatif

   Perkalian pada Matriks tidak bersifat komutatif yaitu

   Misalkan :

   $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{pmatrix}$

   diperoleh perkalian matriks

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak + bm + co & al + bn + cp \\ dk + em + fo & dl + en + fp \end{pmatrix}$$

   dan

$$BA = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \\ o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka + ld & kb + le & kc + lf \\ ma + nd & mb + ne & mc + nf \\ oa + pd & ob + pe & oc + pf \end{pmatrix}$$

disimpulkan bahwa

$$AB \neq BA$$

2. Bersifat Asosiatif

   a. Asosiatif pada Penjumlahan

   Matriks bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan yaitu,

   Misalkan :

   $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

   untuk semua $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{R}$

   diperoleh penjumlahan matriks

   $$(A + B) + C = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} a + k & b + l & c + m \\ d + n & e + o & f + p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} a + k + r & b + l + s & c + m + t \\ d + n + u & e + o + v & f + p + w \end{pmatrix}$$

   $$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} \right)$$

   $$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k + r & l + s & m + t \\ n + u & o + v & p + w \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} a + k + r & b + l + s & c + m + t \\ d + n + u & e + o + v & f + p + w \end{pmatrix}$$

   Jadi disimpulkan bahwa Matriks bersifat asosiatif pada operasi penjumlahan.

   b. Asosiatif pada perkalian

   Hukum asosiatif berlaku pada operasi matriks yaitu $(AB)C = A(BC)$.

   Berikut akan kita buktikan bahwa $(AB)C = A(BC)$.

Mis:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}$

diperoleh perkalian matriks seperti

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_r a_{1r} b_{r1} & \sum_r a_{1r} b_{r2} & \dots & \sum_r a_{1r} b_{rk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r a_{mr} b_{r1} & \sum_r a_{mr} b_{r2} & \dots & \sum_r a_{mr} b_{rk} \end{pmatrix}$$

$$(AB) = \begin{pmatrix} \sum_r a_{1r} b_{r1} & \sum_r a_{1r} b_{r2} & \dots & \sum_r a_{1r} b_{rk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r a_{mr} b_{r1} & \sum_r a_{mr} b_{r2} & \dots & \sum_r a_{mr} b_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{matrix} \sum_r a_{1r} b_{r1} c_{11} + \sum_r a_{1r} b_{r2} c_{21} + \cdots + \sum_r a_{1r} b_{rk} c_{k1} & \dots & \sum_r a_{1r} b_{rk} c_{1n} + \sum_r a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \\ \sum_r a_{\square r} b_{r1} c_{11} + \sum_r a_{mr} b_{r2} c_{21} + \cdots + \sum_r a_{mr} b_{rk} c_{k1} & \dots & \sum_r a_{mr} b_{rk}\, c_{1n} + \sum_r a_{mr} \end{matrix} \right.$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k2} & \dots & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k2} & \dots & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{kn} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari bentuk dari $A(BC)$

$$BC = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k b_{1k}c_{k1} & \sum_k b_{1k}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{1k}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_k b_{1k}c_{k1} & \sum_k b_{1k}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{1k}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_k b_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\sum_k b_{1k}c_{k1} + a_{12}\sum_k b_{1k}c_{k1} + \cdots + a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \dots & a_{11}\sum_k b_{1k}c_{kn} + a_{12}\sum \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1}\sum_k b_{1k}c_{k1} + a_{m2}\sum_k b_{2k}c_{k1} + \cdots + a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \dots & a_{m1}\sum_k b_{1k}c_{kn} + a_{m2}\sum \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k a_{11}b_{1k}c_{k1} + \sum_k a_{12}b_{1k}c_{k1} + \cdots + \sum_k a_{1r}b_{1k}c_{k1} & \dots & \sum_k a_{11}b_{1k}c_{kn} + \sum a_{1} \\ \vdots & \ddots & \\ \sum_k a_{m1}b_{1k}c_{k1} + \sum_k a_{m2}b_{2k}c_{k1} + \cdots + \sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k1} & \dots & \sum_k a_{m1}b_{1k}c_{kn} + \sum_k a_{m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k2} & \dots & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k2} & \cdots & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k2} & \cdots & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{kn} \end{pmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa $(AB)C = A(BC)$.

3. Bersifat Distributif

Matriks bersifat distributif jika ukuran matriks dapat dioperasikan pada penjumlahan dan perkalian matriks.

a. Distributif kiri

Hukum distributif kiri berlaku pada matriks, yaitu $A(B + C) = AB + AC$

Misalkan :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ untuk semua $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e + k & f + l \\ g + m & h + \square \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} ae + ak + bg + bm & af + al + bh + bn \\ ce + ck + dg + dm & cf + cl + dh + dn \end{matrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ak + bm & al + bn \\ ck + dm & cl + dn \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg + ak + bm & af + bh + al + bn \\ ce + dg + ck + dm & cf + dh + cl + dn \end{pmatrix}$$

disimpulkan bahwa $A(B + C) = AB + AC$

b. Distributif kanan

Hukum distributif kanan berlaku pada matriks, yaitu $(B+C)A = BA + CA$

Misalnya :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$, untuk semua $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$(B+C)A = \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e+k & f+l \\ g+m & h+n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} ea+ka+fc+lc & eb+kb+fd+ld \\ ga+ma+hc+nc & \square b+mb+hd+nd \end{matrix}$$

$$BA + CA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ka+lc & kb+ld \\ ma+nc & mb+nd \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ea+fc+ka+lc & eb+fd+kb+ld \\ ga+hc+ma+nc & gb+hd+mb+nd \end{pmatrix}$$

disimpulkan bahwa $(B+C)A = BA + CA$

4. Perkalian dengan Matriks Identitas tidak mengubah Matriks yang dikalikan

   Matriks identitas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tidak akan mengubah matriks yang dioperasikan terhadapnya, yaitu

$$IA = AI = A$$

   Misalnya $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diperoleh

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AI = A$$

5. Perkalian berulang matriks atau Pemangkatan matriks

Sama halnya dengan perkalian berulang pada bilangan, perkalian atau pemangkatan matriks dapat ditulis dengan :

$A^k = AAA \ldots A$ untuk k kali perkalian berulang matriks A dan $A^0 = I$

6. Matriks Ortogonal

   Matriks ortogonal adalah matriks bujur sangkar dimana $AA^T = A^T A = I = AA^{-1}$. Dengan kata lain $A^T = A^{-1}$.

   Contoh :

   Diketahui Matriks Ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

   Karena Matriks A adalah matriks ortogonal, akan dibuktikan bahwa $A^T A = I$, diperoleh :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Terbukti bahwa matriks A adalah matriks ortogonal.

4 . Rangkuman

1) Matriks M yang berukuran *m* baris dan *n* kolom atau sering disebut matriks berukuran (berordo) *mxn* ditulis dengan M_{mxn} atau M_{mn} adalah

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) Matriks Identitas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Matriks Nol

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Matriks Skalar

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Matriks Diagonal

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6) Matriks Segitiga Atas/Bawah

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7) Matriks Simetri (*symmetry*), $M^T = M$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

8) Matriks 0/1 ($zero - one$)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) Matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\ x\ n$. Maka penjumlahan $A + B = \square$, dengan $c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

10) Matriks A dan B yang masing-masing berukuran $m\,x\,n$. Maka penjumlahan $A - B = C$, dengan $c_{mn} = a_{mn} - b_{mn}$, dimana C berukuran $m\ x\ n$.

11) Matriks pertama A berukuran mxn dan matriks kedua B berukuran nxs, maka perkalian matriks A dan B dilambangkan dengan $AXB = C$ akan berukuran atau berordo mxs. Dalam hal ini

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

untuk setiap $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ dan $c_{ij} \in C$.

12) Matriks M dengan bilangan skalar k adalah sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{maka } kM = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

13) Misalkan matriks A membagi matriks B, dituliskan dengan

$$\frac{A}{B} = A\left(\frac{1}{B}\right) = AB^{-1}$$

B^{-1} adalah invers dari matriks B

14) Matriks M berukuran mxn maka matriks transpos dari M juga berukuran mxn yang dalam hal ini dituliskan dengan M^T, sebagai berikut :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ maka } M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

15) Sifat-sifat Matriks :

   1) Perkalian Matriks tidak komutatif, $AB \neq BA$
   2) Bersifat Asosiatif, $(AB)C = A(BC)$.

3) Bersifat Distributif, $A(B+C) = AB + AC$ dan $(B+C)A = BA + CA$

4) Perkalian dengan Matriks Identitas tidak mengubah Matriks yang dikalikan.

5) Perkalian berulang matriks atau Pemangkatan matriks, $A^k = AAA \ldots A$ untuk k kali perkalian berulang matriks A dan $A^0 = I$

6) Matriks Ortogonal, $AA^T = A^TA = I = AA^{-1}$. Dengan kata lain $A^T = A^{-1}$.

5. Latihan

1. Diberikan matriks berikut ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah

a. AD
b. BE
c. F+E
d. E-F
e. -4B
f. $2D+C^2$
g. B^T-A^2
h. (BE)F

2. Diketahui sebuah matriks $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & a \\ b & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & c \end{pmatrix}$ adalah matriks ortogonal.

Tentukanlah nilai dari $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 9 & 3y+5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Jika matriks AB=A+C, maka nilai $2x - y = \cdots$
4. Dengan menggunakan skalar $s = 2$ dan matriks-matriks pada nomor 1 diatas, tunjukkan hubungan-hubungan berikut
   a. $(kD)^t = kD^t$
   b. $(E + F)^t = E^t + F^t$
   c. $(CD)^t = D^t C^t$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah nilai dari $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{2018}$
2) Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ y & 9 \end{pmatrix}$. Jika $A + B - C = \begin{pmatrix} 8 & 5x \\ -x & -4 \end{pmatrix}$, maka nilai $x + 2xy + y$ adalah
3) Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ serta B^tadalah transpos dari matriks B. Hasil dari $A^2 \times B^t = \cdots$
4) Jika $A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ memenuhi $(A + B)^2 = A^2 + AB + B^2$, maka nilai k yang memenuhi adalah
5) Sistem persamaan linear $5x - 4y = -1$ dan $3x + 2y = 17$ memiliki penyelesaian $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \end{pmatrix}$. Nilai dari $ab + cd = \cdots$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 11 : Menguasai Determinan dan Invers pada matriks

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Determinan dan Invers pada matriks. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Determinan dan Invers pada matriks. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

6.5 Determinan Matriks

Dalam bidang aljabar linear, determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi atau bujur sangkar. Determinan matriks A ditulis dengan $det\ (A)$ atau $det\ A$ atau $|A|$. Untuk menentukan determinan matriks dari setiap matriks bujur sangkar berbeda-beda, yaitu diklasifikasikan dengan :

1. **Determinan Matriks 2x2**

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh :

Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - (-6) = 11$$

2. Determinan Matriks 3x3

Untuk menentukan determinan matriks 3x3 terdapat dua cara, yaitu dengan metode Sarrus dan dengan metode penjumlahan dari perkalian komponen matriks 3x3 dengan kofaktornya.

a. Metode Sarrus

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

b. Penjumlahan dari perkalian komponen dengan Kofaktor

Untuk menentukan determinan dengan menggunakan metode kofaktor, perlu diketahui setiap minor dari anggota setiap matriks. Minor dari a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} yang didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A dengan elemen selain baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A. Dan $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$ dinyatakan sebagai kofaktor dari a_{ij} dinotasikan dengan C_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$$

Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dapat dituliskan dengan

$det\ (A) = |A| = aC_{11} + bC_{12} + cC_{13}$

$$det\ (A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\left(-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukanlah determinan dari matriks A dengan metode Sarrus dan Kofaktor.

Jawab :

Metode Sarrus

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{matrix}$$

$$= (30 + (-6) + 0) - (0 + (-3) + (-40))$$

$$= 67$$

Metode Kofaktor

Kofaktor dari setiap komponen a_{ij} yaitu

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 33$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -30$$

maka, dengan rumus determinan menggunakan metode kofaktor dengan $a = 1$, $b = -2$, dan $c = 0$ diperoleh

$$det\ (A) = 1(33) + (-2)(-17) + 0(30)$$

$$det\ (A) = 67$$

3. Determinan Matriks 4x4

Untuk menentukan determinan matriks 4x4 dapat diselesaikan dengan metode kofaktor, seperti pada matriks 3x3. Berikut contoh untuk menentukan determinan matriks 4x4.

Contoh :

Diketahui Matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, Tentukan determinan dari matriks A.

Jawab :

$$det\,(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan salah satu metode untuk menentukan determinan matriks 3x3 diperoleh

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 91$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -25$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

sehingga diperoleh $\det(A) = 200$

4. Determinan matriks 5x5

Untuk menentukan determinan dari matriks 5x5 dapat menggunakan metode kofaktor. Selain itu, berikut ini adalah metode lain untuk menentukan determinan matriks 5x5 dengan mereduksi matriks tersebut ke matriks 4x4 yang disebut dengan metode *Chio*. Selanjutnya, kita menggunakan metode-metode sebelumnya untuk menentukan determinan 4x4 dan seterusnya. Persamaan untuk menentukan determinan matriks nxn dengan menggunakan metode Chio adalah

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, Tentukanlah determinan dari matriks tersebut.

Jawab :

$$\det(A) = \frac{1}{(2)^3} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{1}{(2)^3} \begin{vmatrix} 6 & 14 & 4 & 6 \\ -2 & -20 & -4 & 6 \\ 11 & 14 & 4 & 3 \\ 7 & 24 & 6 & 17 \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan metode Kofaktor maupun *Chio* diperoleh bahwa determinan matriks 4x4 yaitu sub matriks A adalah

$$\begin{vmatrix} 6 & 14 & 4 & 6 \\ -2 & -20 & -4 & 6 \\ 11 & 14 & 4 & 3 \\ 7 & 24 & 6 & 17 \end{vmatrix} = 1680$$

sehingga diperoleh bahwa

$$\det(A) = \frac{1}{(2)^3} 1680 = 210$$

Berdasarkan metode kofaktor diatas dapat disimpulkan dalam bentuk teorema sebagai berikut.

Teorema 1:

Determinan matriks A yang berukuran nxn dapat dihitung dengan mengalikan komponen-komponen dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali setiap komponen entri terhadap kofaktornya untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

untuk ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i

atau

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

untuk ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j

dimana C_{iJ} adalah kofaktor komponen a_{ij} dengan $C_{iJ} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ untuk setiap M_{ij} minor dari komponen a_{ij}.

Berikut ini beberapa sifat determinan:

a. $|AB| = |A||B|$

b. $|A^T| = |A|$

c. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

6.6 Invers Matriks

Sebelum membahas invers dari setiap matriks bujur sangkar, berikut kita definisikan adjoin dari suatu matriks.

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

adalah sembarang matriks berukuran nxn dan C_{ij} adalah **kofaktor dari A** untuk $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, maka matriks

$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$

dinamakan matriks kofaktor dan transpos dari matriks kofaktor disebut **adjoin** A dari matriks A, yaitu

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Jika dilakukan operasi perkalian pada matriks A dengan adjoinnya, diperoleh

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Misalkan perkalian A dengan adjoinnya disebut matriks B, maka elemen-elemen dari matriks B adalah

$b_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$

sehingga $b_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $b_{ii} = \det A$.

Diperoleh ,

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

$$= \det A\ x\ I$$

Jadi, $A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \det A\ x\ I$ jika dan hanya jika $\frac{A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = I$

dengan kata lain, kita dapat simpulkan bahwa

$$A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = \frac{1}{|A|}\ \boldsymbol{Adj}\ (\boldsymbol{A})$$

Catatan :

Jika determinan dari sebuah matriks tersebut tidak nol, maka invers dari matriks tersebut ada.

Selain metode di atas, berikut ini adalah metode lain untuk menentukan invers sebuah matriks dengan reduksi baris disebut metode Eliminasi Gauss-Jordan. Jika diketahui matriks A, maka proses Eliminasi baris elementer dilakukan untuk mengubah matriks $(A|I)$ menjadi matriks $(I|A^{-1})$. Dinotasikan dengan

$$(A\,\big|\,I) \Rightarrow (I\,\big|\,A^{-1}\,)$$

Untuk menjelaskan metode Eliminasi Gauss Jordan, diberikan contoh untuk matriks 3x3, sebagai berikut:

Contoh :

Diketahui matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan invers dari matriks A tersebut, dilakukan Reduksi elementer seperti

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kemudian kita mereduksi setiap baris demi baris matriks diatas seperti

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 4 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 4 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{63}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{21} & \frac{2}{63} & \frac{11}{63} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{21} & -\frac{10}{63} & \frac{8}{63} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{21} & \frac{2}{63} & \frac{11}{63} \end{array}\right)$$

jadi diperoleh invers dari matriks A adalah matriks yang di sebelah kanan, yaitu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{21} & -\frac{10}{63} & \frac{8}{63} \\ -\frac{1}{21} & \frac{2}{63} & \frac{11}{63} \end{pmatrix}$$

Berikut beberapa contoh untuk menentukan invers matriks bujur sangkar.

1. Invers matriks 2x2

Jika diketahui matriks A sebagai berikut

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

maka, Invers dari matriks A adalah

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)$

$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Berdasarkan contoh di atas, jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka Invers matriks 2x2 dapat dituliskan juga sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Invers Matriks 3x3

Contoh :

Tentukanlah invers dari matriks berikut ini $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Jawab:

Kita menggunakan ekspansi kofaktor untuk menentukan adjoin dari matriks diatas yaitu

$Adj\ A = \begin{pmatrix} 33 & 10 & -2 \\ -17 & 5 & -1 \\ -30 & -3 & 14 \end{pmatrix}$ dan $|A| = 67$

sehingga diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 33 & 10 & -2 \\ -17 & 5 & -1 \\ -30 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{33}{67} & \frac{10}{67} & -\frac{2}{67} \\ -\frac{17}{67} & \frac{5}{67} & -\frac{1}{67} \\ -\frac{30}{67} & -\frac{3}{67} & \frac{14}{67} \end{pmatrix}$$

3. Invers Matriks 4X4

Contoh :

Tentukanlah invers matriks berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Dengan menggunakan Eliminasi Gauss-Jordan , kita lakukan dengan mereduksi kolom dan baris seperti berikut ini :

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 14 & 18 & -8 & -6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{20} & -\frac{18}{20} & \frac{8}{20} & \frac{6}{20} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{20} & \frac{6}{20} & \frac{4}{20} & -\frac{2}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{36}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{12}{20} & -\frac{4}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{20} & \frac{8}{20} & -\frac{8}{20} & \frac{4}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{20} & -\frac{18}{20} & \frac{8}{20} & \frac{6}{20} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Jadi Inversi matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

4. Invers Matriks 5X5

Contoh :

Tentukanlah Invers dari

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dengan menggunakan Adjoin matriks

b. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dengan menggunakan Eliminasi Gauss Jordan

Jawab :

a. Berikut kofaktor dari matriks A dengan menggunakan rumus $C_{ij} = (-1)^{1+j} M_{ij}$.

$C_{11} = 12$ $C_{12} = 2$ $C_{13} = -6$ $C_{14} = -4$ $C_{15} = -1$

$C_{21} = 24$ $C_{22} = -5$ $C_{23} = -12$ $C_{24} = 10$ $C_{25} = -11$

$C_{31} = 39$ $C_{32} = -16$ $C_{33} = -33$ $C_{34} = -5$ $C_{35} = 8$

$C_{41} = 84$ $C_{42} = 13$ $C_{43} = 69$ $C_{44} = -26$ $C_{45} = 7$

$C_{51} = 3$ $C_{52} = 4$ $C_{53} = 15$ $C_{54} = 8$ $C_{55} = 2$

Determinan dari matriks $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -27$

Sehingga diperoleh adjoin A adalah matriks transpos dari kofaktor matriks A. Disimpulkan

$$A^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 12 & 24 & 39 & 84 & 3 \\ 2 & -5 & -16 & 13 & 4 \\ -6 & -12 & -33 & 69 & 15 \\ -4 & 10 & -5 & -26 & 8 \\ -1 & -11 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Kita menggunakan Gauss-jordan untuk menentukan Invers dari matriks B dengan mereduksi baris matriks sebagai berikut

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -13 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&1&-1&0&0&2&0\\0&1&0&14&30&0&7&-4&2&0\\0&0&1&-6&-13&0&-3&2&-1&0\\0&0&0&-6&-18&2&-4&2&-4&0\\0&0&0&-7&-13&0&-2&2&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&1&-1&0&0&2&0\\0&1&0&14&30&0&7&-4&2&0\\0&0&1&-6&-13&0&-3&2&-1&0\\0&0&0&1&-5&2&-2&0&-3&1\\0&0&0&-7&-13&0&-2&2&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&1&-1&0&0&2&0\\0&1&0&0&100&-28&35&-4&44&-14\\0&0&1&0&-43&12&-15&2&-19&6\\0&0&0&1&-5&2&-2&0&-3&1\\0&0&0&0&-48&14&-16&2&-22&6\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&1&-1&0&0&2&0\\0&1&0&0&100&-28&35&-4&44&-14\\0&0&1&0&-43&12&-15&2&-19&6\\0&0&0&1&-5&2&-2&0&-3&1\\0&0&0&0&1&-\frac{14}{48}&\frac{16}{48}&-\frac{2}{48}&\frac{22}{48}&-\frac{6}{48}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&-\frac{34}{48}&-\frac{16}{48}&\frac{2}{48}&\frac{74}{48}&\frac{6}{48}\\0&1&0&0&0&\frac{56}{48}&\frac{80}{48}&\frac{8}{48}&-\frac{88}{48}&-\frac{72}{48}\\0&0&1&0&0&-\frac{26}{48}&-\frac{32}{48}&\frac{10}{48}&\frac{34}{48}&\frac{30}{48}\\0&0&0&1&0&\frac{26}{48}&-\frac{16}{48}&-\frac{10}{48}&-\frac{34}{48}&\frac{18}{48}\\0&0&0&0&1&-\frac{14}{48}&\frac{16}{48}&-\frac{2}{48}&\frac{22}{48}&-\frac{6}{48}\end{array}\right)$$

sehingga diperoleh

$$(I|B^{-1})=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&-\frac{17}{24}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{24}&\frac{37}{24}&\frac{1}{8}\\0&1&0&0&0&\frac{7}{6}&\frac{5}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{11}{6}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&0&0&-\frac{13}{24}&-\frac{2}{3}&\frac{5}{24}&\frac{17}{24}&\frac{5}{8}\\0&0&0&1&0&\frac{13}{24}&-\frac{1}{3}&-\frac{5}{24}&-\frac{17}{24}&\frac{3}{8}\\0&0&0&0&1&-\frac{7}{24}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{24}&\frac{11}{24}&-\frac{1}{8}\end{array}\right)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa invers matriks B adalah

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{24} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{24} & \frac{37}{24} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{6} & \frac{5}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{13}{24} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{24} & \frac{17}{24} & \frac{5}{8} \\ \frac{13}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{24} & -\frac{17}{24} & \frac{3}{8} \\ -\frac{7}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

4. Rangkuman

1. Determinan Matriks 2x2

   Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Determinan Matriks 3x3

   Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|\mathrm{A}| = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

3. Determinan Matriks 4x4

   Determinan Matriks 4x4 dapat ditentukan dengan metode kofaktor seperti pada matriks 3x3 berikut. Minor dari a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} yang didefinisikan sebagai determinan dari submatriks A dengan elemen selain baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks A. Dan

$(-1)^{i+j}\, M_{ij}$ dinyatakan sebagai kofaktor dari a_{ij} dinotasikan dengan C_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

Determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dapat dituliskan dengan

$$det\ (A) = |A| = aC_{11} + bC_{12} + cC_{13}$$

$$det\ (A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\left(-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

4. Determinan Matriks 5x5 hingga nxn

   Persamaan untuk menentukan determinan matriks nxn dengan menggunakan metode Chio adalah

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

5. Invers Matriks

   Jika dilakukan operasi perkalian pada matriks A dengan adjoinnya, diperoleh

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

   Misalkan perkalian A dengan adjoinnya disebut matriks B, maka elemen-elemen dari matriks B adalah

   $b_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$

   sehingga $b_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $b_{ii} = \det A$.

   Diperoleh ,

$$A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A\ x\ I$$

Jadi, $A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A} = \det A\ x\ I$ jika dan hanya jika $\frac{A\ x\ \boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = I$

dengan kata lain, kita dapat simpulkan bahwa

$$A^{-1} = \frac{\boldsymbol{adjoin\ A}}{\det A} = \frac{1}{|A|}\ \boldsymbol{Adj\ (A)}$$

5. Latihan

1. Tentukanlah nilai determinan dan invers dari matriks-matriks berikut ini:

a. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 7 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix}$ dan $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   Apabila $B - A = C^T$, maka nilai $det\ B = \cdots$

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & x \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & x & 1 \end{pmatrix}$ dengan

   $|B|$=83. Tentukanlah nilai $|A|$.

4. Tentukanlah invers matriks A jika $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ 5 & 4 & a \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $det\ A = -56$.

5. Jika $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ dengan $\alpha^2 \neq 1 \neq \beta^2$, maka $det\ (A) = \cdots$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah nilai p dan q dari matriks-matriks berikut ini jika $|A| = 1$ dan $|B^T| = 0$.

   $A = \begin{pmatrix} 2p & q+1 \\ 3 & p+\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 2q & -3 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Tentukanlah x, y, z dan θ dari persamaan berikut

   $$\begin{pmatrix} x+y & 1 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \\ 1 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin 3\theta° & 0 \\ 0 & \sin\theta° & 1 \\ 1 & \tan\theta° & x-y \end{pmatrix}$$

3. Diketahui A, B, C dan D adalah matriks berukuran 2×2 yang memenuhi $A + CB^t = CD$. Jika matriks A memiliki invers, $\det(B^t - D) = m$, dan $\det(C) = n$, maka $\det(2A^{-1}) = \cdots$

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dan B^t adalah transpos matriks B. Jika $\det(2AB) = k \det(AB)^{-1}$, maka $k = \cdots$

5. Perhatikan matriks berikut

   $$P = \begin{pmatrix} \log_{\sqrt{3}} 2 & \log_{1/2} 3 \\ \log_{1/9} 4 & \log_{2\sqrt{2}} 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log_4 3 & \log_{1/2} 3\sqrt{3} \\ \log_{1/3} 8 & \log_9 \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

   nilai det P adalah ...

7. **Umpan Balik**

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul lima ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi matrik, jenis, operasi, determinan dan inversnya. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari sesuai dengan soal latihan dan evaluasi pembelajaran yang ada.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Matriks	Identitas	Ortogonal	Determinan	Invers
Transpos	Skalar	Distributif	Asosiatif	Komutatif

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

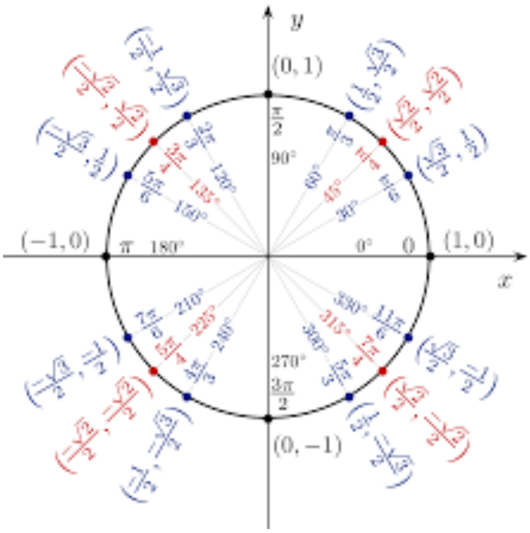
Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 6

TRIGONOMETRI

Mengalah bukan berarti kalah. Berserah bukan berarti menyerah.

-SCP



Pendidikan Fisika

FKIP UKI

MODUL 6 TRIGONOMETRI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Trigonometri merupakan salah satu cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga, contohnya seperti sinus, kosinus, dan tangen. Trigonometri sangat banyak digunakan dibidang industri, teknik, astronomi, pelacakan signal, alat0alat medis dan lain sebagainya.

   Pada modul ini akan dibahas berbagai teori dan konsep trigonometri seperti rumus dasar trigonometri, identitas trigonometri, sudut-sudt berelasi dan berbagai pengembangan rumus-rumus trigonometri hingga aplikasi trigonometri.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul enam

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

   S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

   S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

   S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran 216isika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul Enam

   Kegunaan modul enam ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi trigonometri dan aplikasinya. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian Trigonometri, ukuran sudut, perbandingan trigonometri, koordinat kutub, identitas trigonometri, grafik fungsi trigonometri, aturan sinus, aturan kosinus, luas segitiga, rumus-rumus trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan trigonometri dan aplikasi trigonometri.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 12: Menguasai konsep trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga.

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

6.1 Pengertian

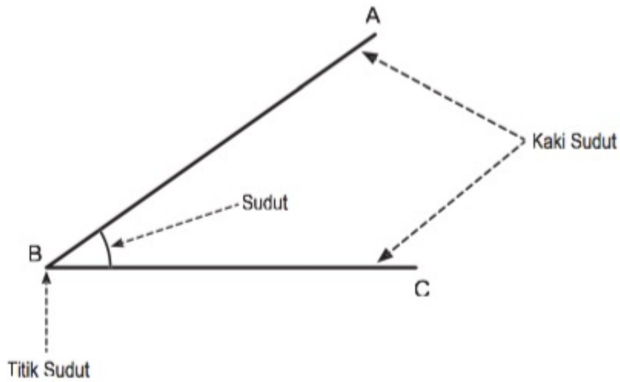
Kata trigonometri berasal dari bahasa yunani “trigonon” yang berarti tiga sudut dan “metron” yang berarti mengukur. Sehingga Trigonometri dapat disimpulkan sebagai cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga yang menggunakan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

Pada abad ketiga Masehi, astronom pertama ali mencatat panjang sisi-sisi dan sudut-sudut dari segitiga siku-siku antara masing-masing sisi yang memiliki hubungan. Perhitungan ini didefinisikan menjadi fungsi trigonometri yang saat ini menjadi bagian dari matematika murni dan terapan. Contohnya untuk menganalisis metode dasar seperti transformasi fourier atau gelombang persamaan, menggunakan fungsi trigonometri untuk memahami fenomena yang berhubungan dengan lingkaran melalui banyak penggunaan dibidang yang berbeda seperti fisika, teknik mesin dan listrik, music dan akustik, astronomi dan biologi.

Awalnya trigonometri dapat dilacak hingga zaman Mesir Kuno, Babilonia, dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun lalu. Matematikawan India menjadi perintis perhitungan variabel aljaar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.

6.2 Ukuran Sudut

Sudut dapat dibentuk oleh dua garis yang memiliki titik pangkal yang sama (berimpit). Berikut ini gambar sudut dengan melakukan rotasi sinar garis yang membentuk sudut, biasanya disebut sebagai sudut :

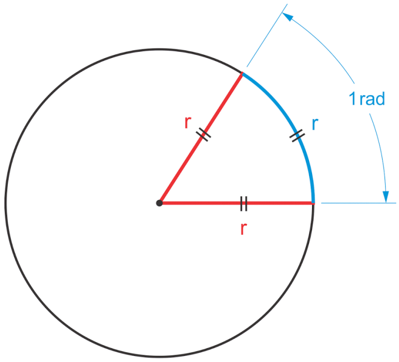


Gambar 74 Ukuran sudut

Dalam trigonometri, ada dua macam ukuran sudut yang sering digunakan yaitu ukuran sudut dalam derajat dan ukuran sudut dalam radian, yang dilambangkan dengan ° dibaca derajat dan *rad* dibaca radian. Adapun hubungan antara keduanya adalah

$$1\,rad = 57{,}2958\ldots°$$

$$1° = 0{,}0174\ldots rad$$



Gambar 75 Hubungan radian dan derajat

Satu derajat (1°) didefinisikan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh $\frac{1}{360}$ putaran atau dapat ditulis dengan $1° = \frac{1}{360}$ putaran.

Sehingga untuk membuktikan hubungan radian dan derajat diatas dapat menggunakan konsep perbandingan sudut pusat dan panjang busur.

$$\frac{sudut\ pusat}{360°} = \frac{panjang\ busur}{keliling}$$

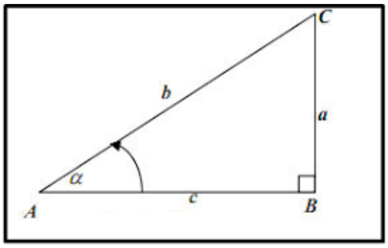
ingat bahwa sudut pusat sebesar 1 radian, panjang busur adalah jari-jari r dan keliling adalah $2\pi r$. Sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{1\,rad}{360°} = \frac{r}{2\pi r}$$

atau dapat disederhanakan mendekati $1° = \frac{\pi}{180}$

6.3 Perbandingan Trigonometri

Perbandingan pada trigonometri dapat diartikan sebagai perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Perhatikan segitia ABC dibawah ini.



Gambar 76 Perbandingan Trigonometri

Sudut B merupakan sudut siku-siku yang besarnya 90°, sisi AC atau sisi yang berada didepan sudut siku-siku disebut sebagai sisi miring (hipotebusa).

Perbandingan sisi-sisi segitiga dapat mendefinisikan bentuk dasar trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

atau

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$

Lebih lanjut Perbandingan dari beberap bentuk trigonometri ini menghasilkan bentuk trigonometri yang lain yaitu

$$cesec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c}$$

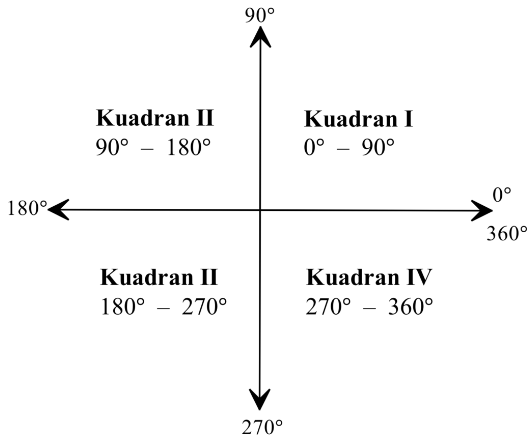
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

atau

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a}$$

Perbandingan trigonometri pada sudut-sudut yang berelasi dapat digunakan untuk menentukan nilai sinus, cosinus dan tangennya. Sudut-sudut berelasi ini dapat dibentuk pada sudut-sudut tertentu, yaitu pada sudut $90°, 180°, 270°$ dan $360°$.

Sudut-sudt berelasi pada trigonometri yaitu dengan memperhatikan kuadran sudut dan sudut istimewa yang ada.



Gambar 77 Kuadran

Pada kuadran I, semua bentuk trigonometri bernilai positif.

Pada kuadran II, hanya nilai sinus dan kosekan yang bernilai positif.

Pada kuadra III, hanya nilai Tangen dan Cotangen yang bernilai positif.

Pada kuadran IV, hanya nilai Kosinus dan Sekan yang bernilai positif.

Berdasarkan sifat ini, maka dapat diperoleh bahwa nilai-nilai trigonometri pada sudut-sudt yang berelasi sebagai berikut:

1. Kuadran I

$$\cos(90 - \alpha)° = \sin \alpha°$$

$$\tan(90 - \alpha)° = \cot \alpha°$$

$$\cot(90 - \alpha)° = \tan \alpha°$$

$$\sec\,(90 - \alpha)° = \csc \alpha°$$

$$\csc(90-\alpha)^\circ = \sec\alpha^\circ$$

2. Kuadran II

$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$

$$\tan(180-\alpha)^\circ = -\tan\alpha^\circ$$

$$\cos(180-\alpha)^\circ = -\cot\alpha^\circ$$

$$\sec(180-\alpha)^\circ = -\sec\alpha^\circ$$

3. Kuadran III

$$\sin(180+\alpha)^\circ = -\sin\alpha^\circ$$

$$\cos(180+\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$

$$\tan(180+\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

4. Kuadran IV

$$\sin(360-\alpha)^\circ = \sin\,(-\theta^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$

$$\cos(360-\alpha)^\circ = \cos\,(-\theta^\circ) = \cos\alpha^\circ$$

$$\tan(360-\alpha)^\circ = \tan\,(-\theta^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$

Selain itu untuk bilangan bulat n berlaku

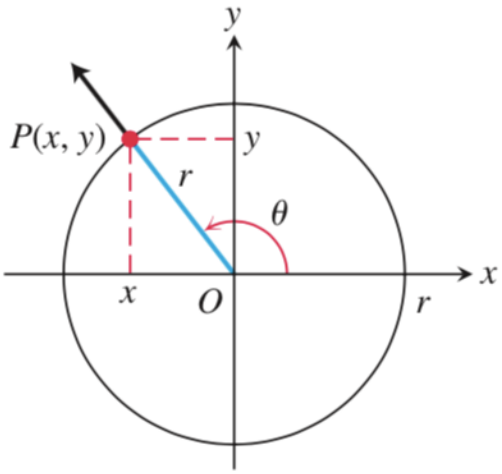
$$\sin(\alpha+n.360)^\circ = \sin\alpha^\circ$$

$$\cos(\alpha+n.360)^\circ = \cos\alpha^\circ$$

$$\tan(\alpha+n.360)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

6.4 Koordinat Kutub (Koordinat Polar)

Pada umumnya letak suatu titik pada suatu bidang $x-y$ dapat disajikan dengan menggunakan koordinat kartesius dan koordinat kutub. Perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 78 Koordinat kutub

Jika pada koordinat kartesius diketahui titik $P(x, y)$ maka dapat kita ubah dalam bentuk trigonometri dengan menggunakan perbandingan sisi segitiga siku-siku seperti berikut

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $cosec\ \theta = \frac{r}{y}$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$

$\cot\theta = \frac{x}{y}$

Berdasarkan persamaan ini, maka titik P pada koordinat kartesius diata dapat kita ubah menjadi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ sehingaa titik P menjadi $(r\cos\theta\,, r\,sin\,\theta)$. Pada koordinat polar atau kutub, titik P biasanya dituliskan dengan $P(r, \theta)$.

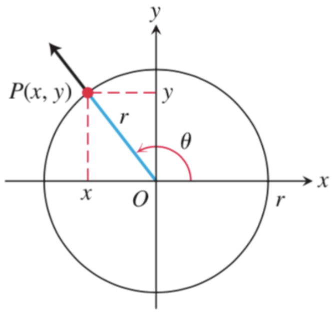
Berikut ini nilai sin, cos dan tan pada sudut-sudut istimewa

Derajat	**-135**	**-90**	**-45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**
Radian	$-\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
Sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Tan	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$

6.5 Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri dapat diperoleh dari hubungan phytagoras yang ditinjau secara geometri. Perhatikan bahwa trigonometri dikembangkan dari segitiga siku-siku. Lebih lanjut, dapat kita gunakan untuk menemukan identitas trigonometri.



Gambar 79 Identitas Trigonometri

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ingat bahwa $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, maka

$$r^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2$$

$$r^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$r^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

atau biasanya ditulis dengan

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

(1)

selanjutnya jika persamaan ini diubah dengan membagikannya dengan $\sin^2\theta$ diperoleh

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\cot^2\theta+1=cosec^2\theta$$

atau

$$\cot^2\theta-cosec^2\theta=1$$

Jika persamaan (1) dibagikan dengan $\cos^2\theta$ diperoleh

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

atau

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$$

6.6 Grafik Fungsi Trigonometri

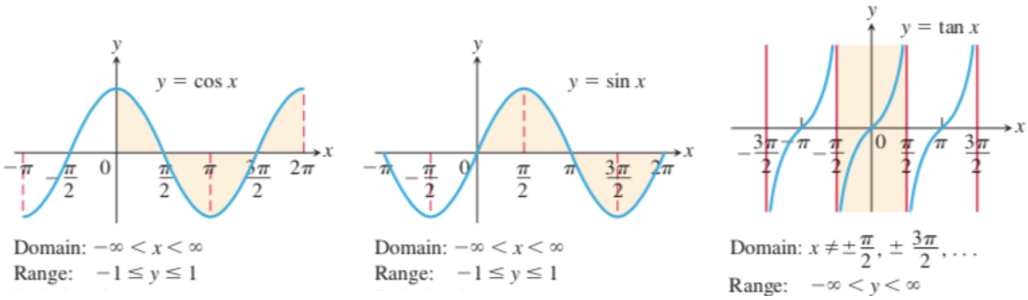
Fungsi yang memetakan himpunan sudut x° ke himpunan bilangan riil $\sin x°$, $\cos x°$, dan $\tan x°$ disebut sebagai fungsi sinus, fungsi kosinus dan fungsi tangen, yang dilambangkan dengan:

$f: x \to \sin x°$ atau $f(x) = \cos x°$

$f: x \to \cos x°$ atau $f(x) = \cos x°$

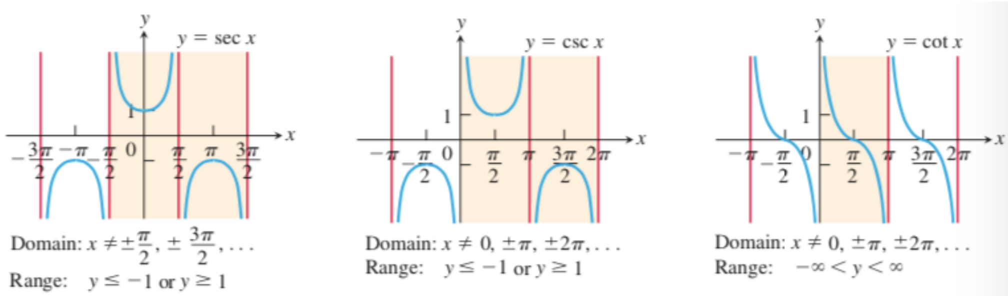
$f: x \to \tan x°$ atau $f(x) = \tan x°$

fungsi-fungsi trigonometri tersebut dapat digambarkan seperti pada grafik berikut ini.



Gambar 80 Grafik sinus, cosinus dan tangen

Lebih lanjut digambarkan beberapa fungsi trigonometri yang lain yaitu untuk sekan, kosekan dan kotangen, seperti tampak pada gambar berikut ini.

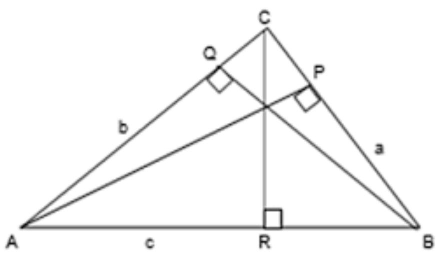


Gambar 81 Grafik sekan, kosekan dan tangen

6.7 Dalil-Dalil dalam Segitiga

1. Aturan Sinus

Aturan sinus diperoleh dengan memperhatikan segitiga lancip. Perhatikanlah segitiga lancip berikut ini.



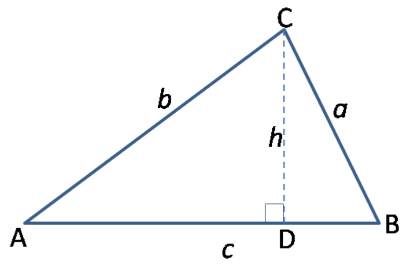
Gambar 82 Aturan sinus

Maka aturan sinus adalah

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. **Aturan Kosinus**

Aturan kosinus dapat diperoleh dengan memperhatikan berbagai bentuk segitiga. Sebagai contohnya perhatikan segitiga beriku ini.



Gambar 83 aturan Kosinus

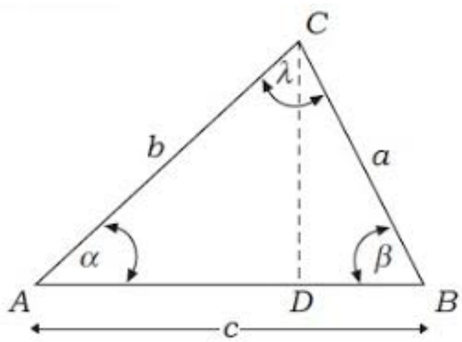
Maka aturan kosinus yang terbentuk adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

3. **Luas Segitiga**

Menentukan luas segitiga dapat dilakukan dengan menggunakan trigonometri.

Perhatikan segitiga berikut.



Gambar 84 Luas segitiga

Berdasarkan gambar diatas, maka luas segitiga dapat dirumuskan dengan

$$L = \frac{1}{2}ab\sin\lambda$$
$$L = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$
$$L = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

4. Rangkuman

1. Hubungan antara radian dan derajat

$$1\,rad = 57{,}2958\ldots°$$
$$1° = 0{,}0174\ldots rad$$
$$\frac{1\,rad}{360°} = \frac{r}{2\pi r}$$

2. Perbandingan sisi-sisi segitiga dapat mendefinisikan bentuk dasar trigonometri seperti sinus, cosinus dan tangen.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$
$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

atau

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{c}$$
$$cesec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

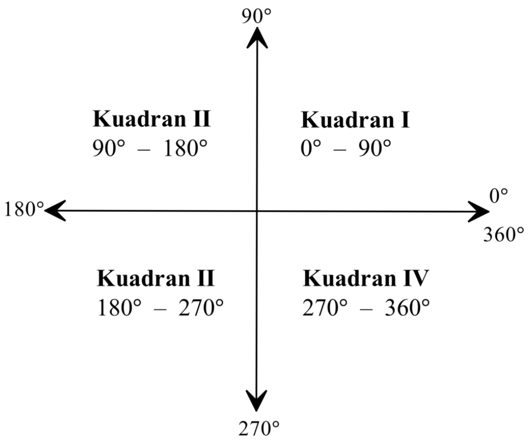
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

atau

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a}$$

3. Sudut-sudut berelasi pada trigonometri yaitu dengan memperhatikan kuadran sudut dan sudut istimewa yang ada.



a. Kuadran I

$$\cos(90-\alpha)° = \sin \alpha°$$
$$\tan(90-\alpha)° = \cot \alpha°$$
$$\cot(90-\alpha)° = \tan \alpha°$$
$$\sec\,(90-\alpha)° = \csc \alpha°$$
$$\csc(90-\alpha)° = \sec \alpha°$$

b. Kuadran II

$$\cos(180-\alpha)° = -\cos \alpha°$$
$$\tan(180-\alpha)° = -\tan \alpha°$$
$$\cos(180-\alpha)° = -\cot \alpha°$$
$$\sec(180-\alpha)° = -\sec \alpha°$$

c. Kuadran III

$$\sin(180+\alpha)^\circ = -\sin\alpha^\circ$$

$$\cos(180+\alpha)^\circ = -\cos\alpha^\circ$$

$$\tan(180+\alpha)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

d. Kuadran IV

$$\sin(360-\alpha)^\circ = \sin(-\theta^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$

$$\cos(360-\alpha)^\circ = \cos(-\theta^\circ) = \cos\alpha^\circ$$

$$\tan(360-\alpha)^\circ = \tan(-\theta^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$

Selain itu untuk bilangan bulat n berlaku

$$\sin(\alpha+n.360)^\circ = \sin\alpha^\circ$$

$$\cos(\alpha+n.360)^\circ = \cos\alpha^\circ$$

$$\tan(\alpha+n.360)^\circ = \tan\alpha^\circ$$

4. Berikut ini nilai sin, cos dan tan pada sudut-sudut istimewa

Derajat	**-135**	**-90**	**-45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**
Radian	$-\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
Sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tan	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$

5. Identitas trigonometri

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta$$

atau

$$\cot^2\theta - cosec^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

6. Aturan sinus adalah

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

7. Aturan kosinus yang terbentuk adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

8. Luas segitiga dapat dirumuskan dengan

$$L = \frac{1}{2} ab \sin \lambda$$

$$L = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

$$L = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

5. Latihan

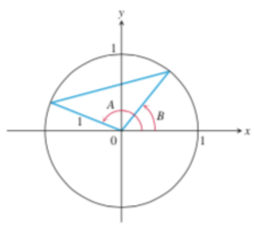
1. Uraikanlah bentuk berikut dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan kosinus, kemudian sederhanakan
   a. $\cos(x - 60)°$
   b. $\cos(x + 45)°$
   c. $\sin(x - 120)°$
   d. $\sin(x + 30)°$
2. Buktikanlah bahwa
   a. $\sin(90 - x)° = \cos x$
   b. $\cos(270 + x)° = \sin x$
   c. $\sin(270 + x) = -\sin x$
   d. $\cos(180 - x) = -\cos x$
3. Jika $\tan A = 1$ dan $\tan B = \sqrt{3}$, tentukanlah :
   a. $\tan(A + B)$
   b. $\tan(A - B)$
4. buktikanlah bahwa

$$\tan(\alpha + 45) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

5. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi $c = 2$ dan sudut $A = \frac{\pi}{4}$ dan $B = \frac{\pi}{3}$. Tentukanlah panjang a, b dan besar sudut C.

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut
   a. $\sin 2x = \sin 3x + \sin x$
   b. $6\cos 2x - 11\cos x + 8 = 0$
   c. $3\cos 2x - 10\cos x + 7 = 0$
   d. $\cos^2 2x - 5\sin 4x - 6\sin^2 2x = 0$
2. Gunakanlah rumus penjumlahan trigonometri untuk menyelesaiakan persamaan berikut
   a. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
   b. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
   c. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
   d. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
3. Buktikanlah bahwa $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
4. Perhatikanlah gambar dibawah ini. Gunakanlah aturan kosinus untuk membuktikan $\cos(A - B)$



5. Gunakanlah rumus $\cos(A - B)$ untuk mengidentifikasi $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ untuk memperoleh $\sin(A + B)$.
6. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi $a = 2$ dan $b = 3$ dan $C = 60°$. Tentukanlah panjang dari c. Kemudian tentukanlah besar sudut B dengan menggunakan aturan sinus.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

Minggu ke- 13 : Menguasai Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

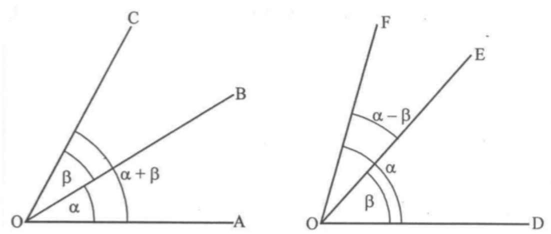
Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Rumus-rumus trigonometri dan Aplikasinya. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

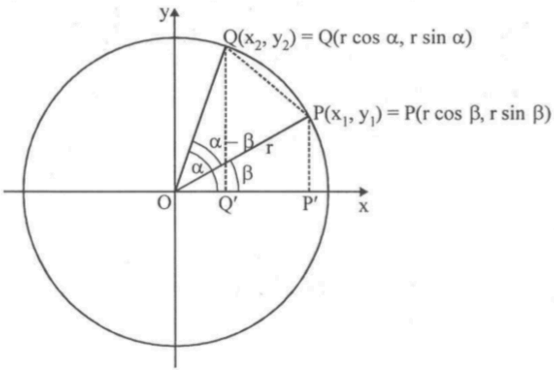
6.8 Rumus-Rumus Trigonometri

Misalnya α dan β adalah sudut-sudut sembarang. Maka jumlah α dan β atau $(\alpha + \beta)$ dan selisih α dan β atau $(\alpha - \beta)$ dapat diilustrasikan dengan gambar berikut.



Gambar 85 Jumlah dan selisih sudut

Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut diantaranya adalah



Gambar 86 Jumlah dan selisih sudut koordinat polar

1. Rumus untuk $cos\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$cos\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Bukti :

2. Rumus untuk $sin\ (\alpha + \beta)$ dan $sin\ (\alpha - \beta)$

$$sin\ (\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$sin\ (\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

3. Rumus untuk $tan\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Rumus trigonometri untuk sudut rangkap diantaranya adalah

1. Rumus untuk $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Bukti :

Untuk membuktikan rumus ini, dapat kita gunakan rumus jumlah dua sudut yaitu

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$

$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2. Rumus untuk $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Bukti :

Untuk membuktikan rumus ini, dapat kita gunakan rumus jumlah dua sudut yaitu

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$

$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3. Rumus untuk $\tan 2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Bukti :

Dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \beta)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

atau pembuktian lainnya dapat dilakukan dengan

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{(1 - \tan\alpha)(1 + \tan\alpha)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Rumus trigonometri untuk sudut pertengahan diantaranya adalah

1. Rumus untuk $\sin\frac{1}{2}\alpha$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

2. Rumus untuk $\cos\frac{1}{2}\alpha$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}}$$

3. Rumus untuk $\tan\frac{1}{2}\alpha$

   $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ untuk $\cos\alpha \neq -1$

   $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ untuk $\sin\alpha \neq 0$

   atau

$$\tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

6.9 Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri dituliskan dengan $\sin x = \sin \alpha$ dimana $\alpha \in R$. Untuk meyelesaiakn persamaan trigonometri dapat dilakukan dengan menggunakan hubungan perbandingan trigonometri pada sudut berelasi seperti

$$\sin(180° - \alpha°) = \sin \alpha°$$

$$\sin(\alpha° + k.360°) = \sin \alpha°$$

dengan menggunakan hubungan-hubungan diatas, maka penyelesaian persamaan trigonometri $\sin x° = \sin \alpha°$ dapat ditetapkan sebagai berikut

1. Jika $\sin x° = \sin \alpha°$ dimana $x \in R$, maka $x = \alpha° + k.360°$ atau $x = (180° - \alpha°) + k.360°$ dengan $k \in R$. (x dalam derajat)
2. Jika $\sin x° = \sin A$ dimana $x \in R$, maka $x = A + k.2\pi$ atau $x = (x - A) + k.2\pi$ dengan $k \in R$. (x dalam radian)

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari tiap persamaan berikut ini

6.10 $\sin 2x° = \sin 40°$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360°$

6.11 $\sin 3x° = \sin 45°$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360°$

Jawab :

a. $\sin 2x° = \sin 40°$, maka diperoleh

$2x = 40° + k.360$ atau $2x = (180° - 40°) + k.360$

$x = 20° + k.180$ atau $2x = 140° + k.360$

$x = 70° + k.180°$

untuk $k = 0$ maka $x = 20°$ atau $x = 70°$

untuk $k = 1$ maka $x = 200°$ atau $x = 250°$

Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah $\{20°, 70°, 200°, 250°\}$

b. $\sin 3x° = \sin 45°$, maka diperoleh

$3x = 45° + k.360$ atau $3x = (180° - 45°) + k.360$

$x = 15° + k.120$ atau $3x = 135° + k.360$

$x = 45° + k.120°$

untuk $k = 0$ maka $x = 15°$ atau $x = 45°$

untuk $k = 1$ maka $x = 135°$ atau $x = 165°$

untuk $k = 2$ maka $x = 255°$ atau $x = 285°$

Jadi Himpunan penyelesaiannya adalah $\{15°, 45°, 135°, 165°, 255°, 285°\}$

Selanjutnya persamaan trigonometri untuk kosinus dan tangen dapat juga diselesaikan seperti pada $\sin x = \sin \alpha$ dimana $\alpha \in R$. Untuk meyelesaiakn persamaan trigonometri $\cos x = \cos \alpha$ dan $\tan x = \tan \alpha$ dapat dilakukan dengan menggunakan hubungan perbandingan trigonometri pada sudut berelasi, yaitu

$$\cos x = \cos \alpha$$

Nilai cosinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 4 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° \\ -\alpha° + k.360° \end{cases}$$

Sedangkan untuk

$$\tan x = \tan \alpha$$

Nilai tangen suatu sudut positif di kuadran 1 dan 3 sehingga untuk persamaan $\tan x = \tan \alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \alpha° + k.180°$$

Persamaan trigonometri lainnya dapat berebtuk persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ maupun berbentuk polynomial. Jika persamaan trigonometri kita berbentuk persamaan kuadrat, maka bentuk penyelsaiannya dapat menggunakan aturan dalam persamaan kuadrat, yaitu dengan pemfaktoran maupun dengan melengkapkan kuadrat sempurna. Untuk menyelesaikan bentuk persamaan kuadrat diperlukan wawasan tentang identitas trigonometri seperti

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

perlu diperhatikan bahwa rentang untuk nilai sinus dan kosinus adalah

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Contoh :

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari

a. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ untuk interval $0° \leq x \leq 360°$

b. $2 - 2\cos^2 x = \sin x$ untuk interval $0° \leq x \leq 360°$

Jawab :

a. Misalnya $p = \cos x$ maka $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ dapat diubah menjadi

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p - 2)(p + 1) = 0$$

Jadi $p_1 = 2$ atau $p_1 = 1$

$\cos x = 2$ atau $\cos x = 1$, dengan $\cos x = 2$ tidak memenuhi penyelesaian. Sehingga $\cos x = -1$

$$x = 180° + k.360°$$

diperoleh nilai $x = 180°$ atau himpunan penyelesaiannya adalah $\{180°\}$

b. $2 - 2\cos^2 x = \sin x$ dapat diubah menjadi

$$2(1 - \cos^2 x) = \sin x$$

$$2(\sin^2 x) = \sin x$$

$$2\sin^2 x = \sin x$$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = 0$ atau $\sin x = \frac{1}{2}$

i. $\sin x = 0$

$$x = 0° + k.360°$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 0°$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 360°$

$$x = 180° + k.360°$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_3 = 180°$

ii. $\sin x = \frac{1}{2}$

kuadran I

$x = 30° + k.360°$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_4 = 30°$

Kuadran II

$x = (180° - 30°) + k.360°$

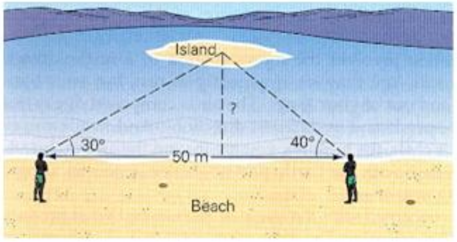
$x = 150° + k.360°$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_5 = 150°$

Himpunan penyelesaian dari persamaan diatas adalah $\{0°, 30°, 150°, 180°\}$

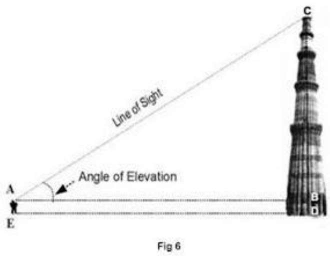
7.10 Aplikasi Trigonometri

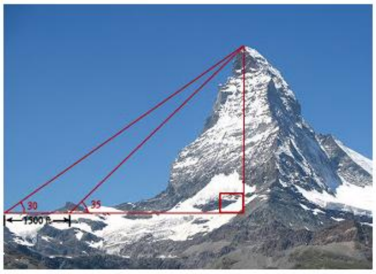
Dalam kehidupan sehari – hari kita sering melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki ataupun gedung bertingkat yang sedang dibangun. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri. Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas. Itu baru sebagian kecil dari manfaat trigonometri, perlu alasan lain untuk menemukan rumus-rumus trgonometri membantu hidup kita. Berikut beberapa contoh penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, misalya dalam navigasi untuk menemukan jarak dari pantai ke suatu titik di laut.



Gambar 87 Titik sudut laut

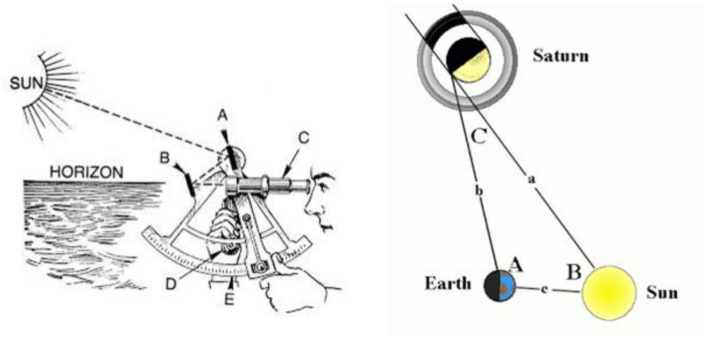
Trigonometri umumnya juga digunakan dalam mencari ketinggian menara dan pegunungan, pohon dan sebagainya.





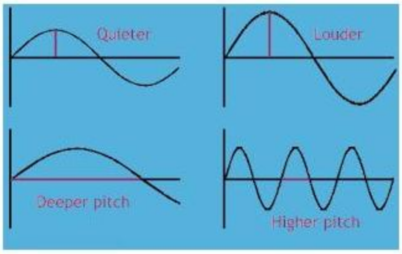
Gambar 88 Tinggi gunung dan menara

Trigonometri juga digunakan dalam oseanografi dalam menghitung ketinggian gelombang air laut dan digunakan astronomi dalam menentukan jarak antara benda-benda angkasa.



Gambar 89 Bumi dan Planet lain

Fungsi sinus dan cosinus merupakan dasar bagi teori fungsi periodik seperti pada gelombang suara dan cahaya.



Gambar 90 Gelombang suara dan cahaya

Arsitek menggunakan trigonometri untuk menghitung beban struktural, kemiringan atap, permukaan tanah dan banyak aspek lain, termasuk bayangan matahari dan sudut cahaya.

4. Rangkuman

1. Rumus untuk $cos\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$cos\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

2. Rumus untuk $sin\ (\alpha + \beta)$ dan $sin\ (\alpha - \beta)$

$$sin\ (\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$sin\ (\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

3. Rumus untuk $tan\ (\alpha - \beta)$ dan $cos\ (\alpha + \beta)$

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

4. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
5. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
6. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
7. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
8. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$
9. $\tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
10. $\sin(180° - \alpha°) = \sin\alpha°$
11. $\sin(\alpha° + k.360°) = \sin\alpha°$
12. Jika $\sin x° = \sin\alpha°$ dimana $x \in R$, maka $x = \alpha° + k.360°$ atau $x = (180° - \alpha°) + k.360°$ dengan $k \in R$. (x dalam derajat)
13. Jika $\sin x° = \sin A$ dimana $x \in R$, maka $x = A + k.2\pi$ atau $x = (x - A) + k.2\pi$ dengan $k \in R$. (x dalam radian)
14. Untuk persamaan $\cos x = \cos\alpha$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° \\ -\alpha° + k.360° \end{cases}$$

15. Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas.

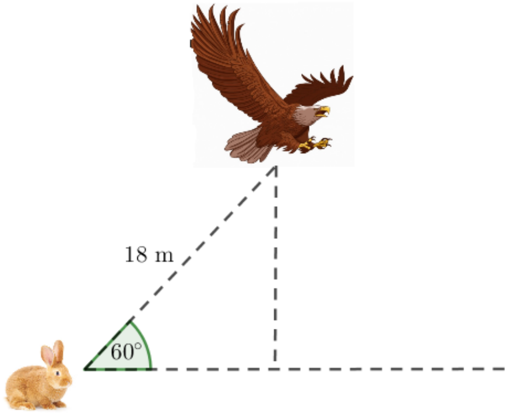
5. Latihan

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Jika titik P di tengah-tengah AB dan titik Q di tengah-tengah BC, maka jarak titik H dengan garis PQ adalah … .
2. Jika $sin\ \alpha, cos\ \alpha, \frac{3}{2}$ membentuk barisan geometri, maka jumlah 8 suku pertamanya adalah … .
3. Jika $\cos x = 2 \sin x$, maka nilai $\sin x \cos x$ adalah
4. Jika $3 \sin x + 4 \cos y = 5$, maka nilai maksimum $3 \cos x + 4 \sin y$ adalah
5. Diketahui $1 + \log_3(\tan x) + (\log_3(\tan x))^2 + (\log_3(\tan x))^3 + \cdots = \frac{2}{3}$, dengan $0 \le x \le \pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}$, nilai $\sin 2x$ adalah

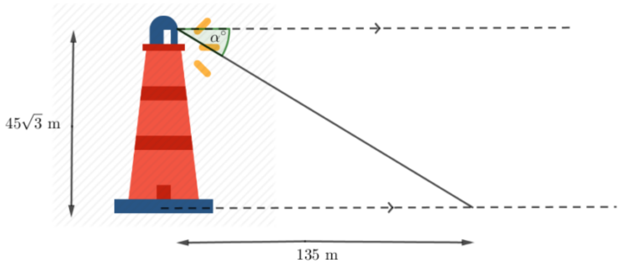
6. Evaluasi Pembelajaran

1. Jika $\sin x + \cos x = a$, maka $\sin^4 x + \cos^4 x = \cdots$
2. Jika sudut α memnuhi $\cos^2 \alpha + 2 \sin(\pi - \alpha) = \sin^2(\pi + \alpha) + 1\frac{1}{2}$ maka $\sin \alpha = \cdots$
3. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle A = \alpha$, $\angle B = 90°$ dan $\angle C = \gamma$. Jika $\cos \alpha = x$, maka $\cos(\alpha + 2\,\gamma) = \cdots$
4. Jika $\sin \alpha + \sin \beta = 2\sqrt{A}$ dan $\cos \alpha + \cos \beta = 2\sqrt{B}$, maka $\cos(\alpha - \beta) = \cdots$
5. Misalkan ABC adalah segitiga siku-siku pda titik C. Jika panjang sisi dihadapan A, B dan C berturut-turut adalah a, b, c maka $\cos 2A = \cdots$
6. Seekor kelinci yang berada di lubang tanah tempat persembunyiannya melihat seekor elang yang sedang terbang dengan sudut 60◦ (lihat gambar). Jika jarak antara kelinci dan

elang adalah 18 meter, maka tinggi elang dari atas tanah adalah ···· meter.



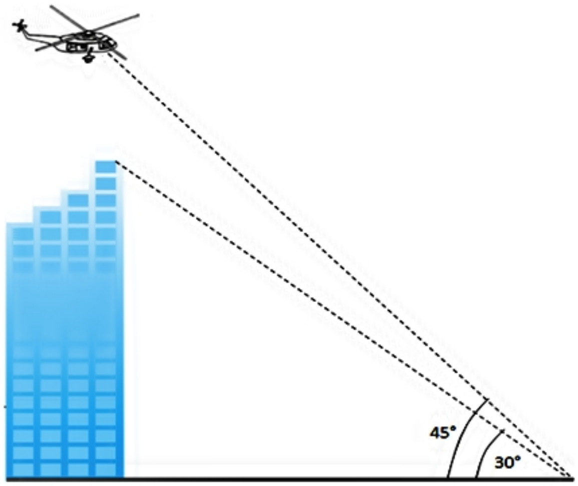
7. Perhatikan gambar di bawah ini.



Diketahui seseorang yang berada di atas mercusuar dengan tinggi 453 meter sedang mengamati sebuah objek di bawahnya dengan jarak antara objek dan mercusuar sejauh 135 meter. Sudut depresi yang terbentuk adalah

8. Dari suatu titik pada bukit, tampak ujung-ujung suatu landasan pacu Bandara Kuala Namu yang sedang dibangun horizontal dengan sudut depresi $53°$ dan $14°$. Jarak ujung landasan yang lebih dekat sepanjang lereng bukit adalah 870 meter. Jika $sin\, 53° = 0{,}8$ dan $\tan 14° = 0{,}25$, maka panjang landasan pacu tersebut adalah ··· meter.

9. Sebuah mobil melaju dari tempat A sejauh 16 km dengan arah $40°$, kemudian berbelok sejauh 24 km ke tempat B dengan arah $160°$. Jarak A dan B adalah…km.
10. Perhatikan gambar berikut.



Gambar di atas menunjukkan seorang anak yang berada pada jarak 32 meter dari kaki sebuah gedung. Ia mengamati puncak gedung dan helikopter di atasnya dengan sudut elevasi masing-masing $30°$ dan $45°$. Hitunglah tinggi helikopter tersebut dari atas gedung.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul enam ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Trigonometri dan Aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Trigonometri	Identitas	Rangkap	Sinus
Kosinus	Tangen	Sekan	Kosekan
Kotangen	Radian	Derajat	

4. Referensi

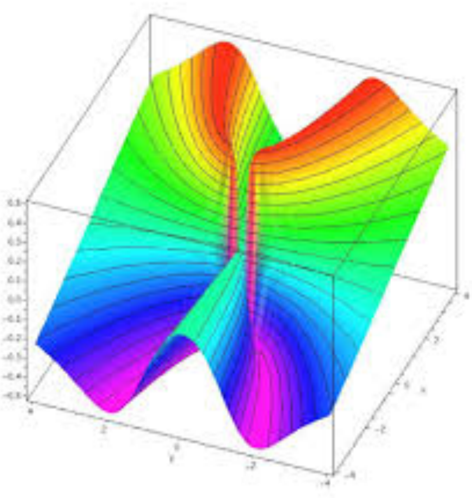
Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

Modul 7 LIMIT DAN KEKONTINUAN

Hidup adalah perjuangan. Perjuangan untuk berdampak dan memberikan pengaruhi positif bagi penghuni bumi.

-SCP



Pendidikan Fisika

FKIP UKI

MODUL 7 LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Limit merupakan suatu materi dasar yang digunakan dalam menentukan batas suatu fungsi tertentu. Limit banyak digunakan dalam menyelesaiakn berbagai permasalahan sehari-hari seperti dalam perusahaan memproduksi barang tertentu dan bagian kesehatan. Sering sekali limit menjadi materi yang sulit dimengerti oleh peserta didik, namun dengan adanya penjebaaran yang rinci melalui modul ini, diharapkan mahasiswa dapat menguasai materi yang ada hingga akhirnya dapat mengaplikasikannya dikemudian hari bahkan menyelesaikan berbagai permasalahan yang ada. Dalam modul ini akan membuat materi limit dari yang sangat dasar sekali dan modul ini dapat digunakan secara mandiri maupun berkelompok.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul tujuh

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

   S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

   S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran 252isika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul Tujuh

   Kegunaan modul tujuh ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi limit dan kekontinuan beserta aplikasinya. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertianlimit, definisi limit dengan epsilon delta, operasi limit, limit tak hingga dan asimtot limit.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 14: Menguasai konsep dasar limit dan kekontinuan beserta operasinya

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

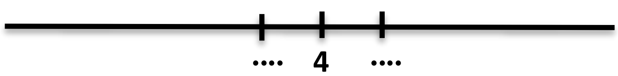
Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan limit dan kekontinuan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

7.1 Apa itu Limit?

Secara etimologi, limit berarti batas. Didalam matematika, limit merupakan konsep dasar di dalam analisis dan kalkulus tentang kelakuan suatu fungsi mendekati titik masukan tertentu.

Misalkan kita memiliki garis bilangan berikut :



Gambar 91 Garis bilangan

Pastinya terdapat bilangan yang tak terhingga banyaknya yang mendekati nilai 4 baik dari arah kiri maupun kanan.

Matematikawan abad ketujuh belas sangat tertarik mempelajari gerak benda-benda di dekat bumi, gerak planet dan bintang. Studi ini melibatkan kecepatan benda dana rah geraknya setiap saat, dan mereka mengetahui arah pada saat tertentu sepanjang garis yang bersinggungan dengan jalur gerak. Konsep batas adalah dasar untuk menemukan kecepatan benda yang bergerak dan garis singgung kurva. Dalam modul ini kita akan mengembangkan limit secara intuitif dan formal. Hal ini dilakukan dengan menggunakan batas untuk menggambarkan cara suatu fungsi bervariasi. Beberapa fungsi bervariasi. Fungsi dapat digambarkan yaitu dengan fungsi yang kontinu maupun fungsi yang tidak kontinu atau biasa disebut dengan fungsi yang melompat. Fungsi-fungsi yang akan dibahas bervariasi dan tidak menentu, atau cenderung meningkat atau cenderung menurun.

Limit muncul ketika menemukan laju perubahan sesaat dari suatu fungsi atau garis singgung kurva. Ini merupakan definisi informal limit yang menunjukkan bagaimana kita menghitung nilai limit.

7.2 Limit Fungsi

Suatu fungsi $f(x)$ dapat kita tentukan nilainya dengan mensubstitusikan nilai domainnya kepada fungsi yang ada. Namun pada beberapa fungsi tertentu, ada kondisi dimana kita tertarik untuk mengetahui nilai dari fungsi didekat titik tertentu c, namun tidak di c. Misalnya kita memiliki fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Maka kita dapat melihat bagaimana kondisi fungsi $f(x)$ tersebut disekitar $x = 1$, karena penyelesaian dari fungsi tersebut adalah $x \neq 1$ (karena penyebut tidak boleh bernilai 0). Maka untuk menyelesaikannya dapat kita sederhanakan terlebih dahulu menjadi

$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ untuk $x \neq 1$.

Dalam hal ini maka kita simpulkan bahwa fungsi $f(x)$ dapat terdefinisi kecuali di titik $x = 1$, sehingga biasa disebut dengan terdefinisi pada interval terbuka. Sehingga fungsi tersebut tidak kontinu di titik $x = 1$. Namun jika sembarang nilai $f(x)$ berada didekat L untuk semua nilai x yang mendekati nilai c, kita katakan bahwa nilai $f(x)$ pada batas L ketika x mendekati c, dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Sehingga pada fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dapat kita simpulkan bahwa

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ atau $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

7.3 Aturan Limit

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$
4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, *c* dan *k* adalah bilangan riil dan

$\lim_{x \to c} f(x) = L$, $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

a. Aturan penjumlahan

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

b. Aturan selisih

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

c. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\lim_{x \to c} \big(k.f(x)\big) = k.L$$

d. Aturan pembagian

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L.M$$

e. Aturan pangkat

$\lim_{x \to c} \big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

f. Aturan akar

$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

g. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

h. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

i. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

j. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

Contoh :

1. $\lim_{x \to c}(x^3 + 4x - 3) = \lim_{x \to c} x^3 + \lim_{x \to c} 4x - \lim_{x \to c} 3 = c^3 + 4c - 3$
2. $\lim_{x \to c} \frac{x^4+x^2-1}{x^2+5} = \frac{\lim_{x \to c}(x^4+x^2-1)}{\lim_{x \to c}(x^2+5)}$

$$= \frac{\lim_{x \to c} x^4 + \lim_{x \to c} x^2 - \lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2 + \lim_{x \to c} 5}$$

$$= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

3. $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x \to -2} (4x^2 - 3)}$

$$= \sqrt{\lim_{x \to -2} 4x^2 - \lim_{x \to -2} 3}$$

$$= \sqrt{4(-2)^2} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{16 - 3}$$

$$= \sqrt{13}$$

7.4 Definisi Limit

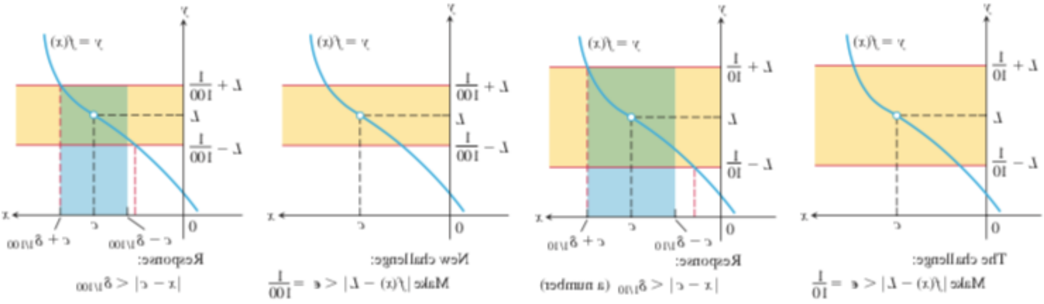
Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval terbuka c, kecuali di titik c. Maka nilai limit dari $f(x)$ dimana x mendekati c adalah L, yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat sembarang bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku,

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Definisi ini dapat kita lihat representasinya pada grafik berikut ini



Gambar 92 Definisi limit epsilon dan delta

Contoh :

Buktikanlah bahwa

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$$

Jawab :

Dari bentuk limit yang ada diketahui bahwa $c = 1$, $f(x) = 5x - 3$ dan $L = 2$. Misalkan $\epsilon > 0$, maka kita harus menemukan $\delta > 0$ sehingga jika $x \neq 1$ dan x berada disekitar δ dari $c = 1$, yaitu ketika

$$0 < |x - 1| < \delta$$

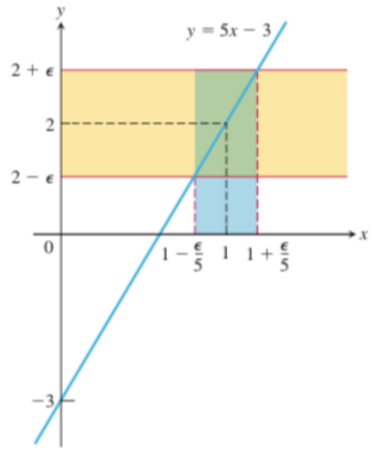
adalah benar bahwa $f(x)$ sekitar ϵ dari $L = 2$, seingga

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

Sebaliknya kita akan menemukan nilai δ melalui pertidaksamaan ϵ:

$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| &= |5x - 5| \\ &< \epsilon \\ 5|x - 1| &< \epsilon \\ |x - 1| &< \frac{\epsilon}{5} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita ambil $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, (seperti tampak pada gambar dibawah ini).



Gambar 93 Contoh limit yang terdefinisi epsilon dan delta

Jika $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$, maka

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

sehingga terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to 1}(5x - 3) = 2$.

Untuk menemukan δ dimana diketahui f, L, c dan $\epsilon > 0$, dapat ditentukan dengan dua langkah berikut:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a, b) yang memuat c dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq c$.
2. Menentukan nilai $\delta > 0$ padainterval $(c - \delta, c + \delta)$ yang berpusat pada c di dalam interval (a, b). Pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq c$ pada interval δ.

Contoh:

Buktikanlah bahwa $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ jika

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

Jawab:

Untuk menyelesaikannya, dapat kita ikuti langkah-langkah diatas seperti:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x) - 4| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a, b) yang memuat $x = 2$ dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq 2$.

   Untuk $x \neq c = 2$, kita mempunyai $f(x) = x^2$, dan pertidaksamaan untuk menemukan penyelesaiannya adalah $|x^2 - 4| < \epsilon$.

$$|x^2 - 4| < \epsilon$$
$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$
$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$
$$\sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon}$$

   jadi pertidaksamaan $|f(x) - 4| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq 2$ di interval terbuka $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$

2. Menentukan nilai $\delta > 0$ yang berpusat pada interval $(2 - \delta, 2 + \delta)$ di dalam interval $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$.

   Kita ambil δ sebagai jarak dari $x = 2$ yang mendekati titik akhir $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$. Dengan kata lain, ambil $\delta = \min\left\{\left(2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\right)\right\}$. Jika δ memiliki bilangan tersebut atau yang lebih kecil dan bernilai positif, pertidaksamaan $0 < |x - 2| < \delta$ akan otomatis berada pada x diantara $\sqrt{4 - \epsilon}$ dan $\sqrt{4 + \epsilon}$ untuk membuat $|f(x) - 4| < \epsilon$. Untuk semua x,

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

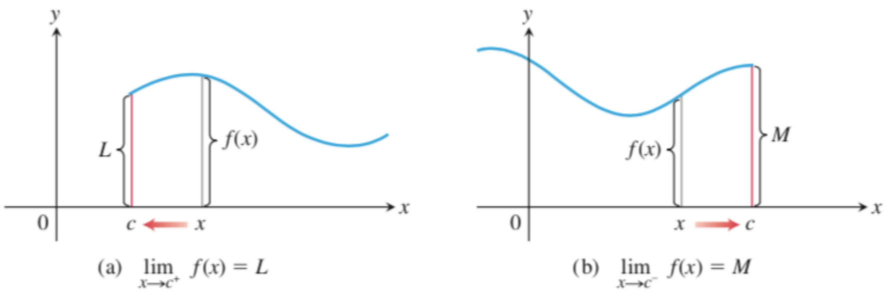
   sehingga pembuktian kita sudah lengkap untuk $\epsilon < 4$.

7.5 Limit Satu Sisi

Untuk memiliki sebuah limit L diman x mendekati c, sebuah fungsi f haruslah terdefinisi dari dua arah c dan nilai dari $f(x)$ dari keuda arah tersebut haruslah L, f haruslah terdefinisi di beberapa interval terbuka disekitar c, tapi tidak tepat di c. Hal ini menyatakan bahwa limit adalah dua arah.

Jika f tidak memenuhi pada duarah di c, maka dapat dimungkinkan limit satu arah. Jika limit dari arah kanan maka disebut dengan limit kanan dan jika dari arah kiri disebut sebagai limit kiri.

Limit kanan biasanya dituliskan dengan $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (c, b), x mendekati c dan $c < b$. Sedangkan limit kiri dituliskan dengan $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (a, c), x mendekati c dan $a < c$. Ilustrasi dari definisi limit satu arah diatas dapat digambarkan seperti berikut:



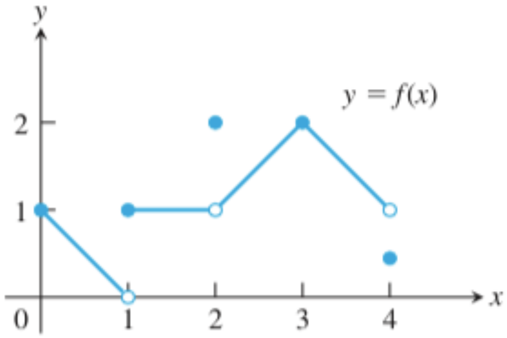
Gambar 94 Limit satu arah

Teorema 1

Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Perhatikan grafik berikut



Gambar 95 Ketidakkontinuan

Dari gambar diatas dapat kita peroleh bahwa :

1. Di titik $x = 0$

   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$dan $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada. Fungsi ini tidak terdefinisi dari arah kiri $x = 0$.

2. Di titik $x = 1$

   $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ walaupun $f(1) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada karena limit kanan dan limit kiri tidak sama.

3. Di titik $x = 2$

   $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ walaupuan $f(2) = 2$.

4. Di titik $x = 3$

   $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 2$.

5. Di titik $x = 4$

   $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, walaupun $f(4) \neq 1$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ dan $\lim_{x \to 4} f(x)$ tidak ada. Fungsinya tidak terdefinisi dari arah kanan $x = 4$.

Berdasarkan hal diatas maka limit satu arah dapat didefinisikan dengan:

Fungsi $f(x)$ memiliki limit kanan di c dan dituliskan dengan $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c < x < c + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Selanjutnya fungsi $f(x)$ memiliki limit kiri di c dan dituliskan dengan $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c - \delta < x < c \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Jawab:

Misalkan $\epsilon > 0$ dimana diketahui $c = 0$ dan $L = 0$, maka kita akan menentukan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku

$0 < x < \delta \;\Longrightarrow \left|\sqrt{x} - 0\right| < \epsilon$ atau $0 < x < \delta \;\Longrightarrow \sqrt{x} < \epsilon$. Dengan menguadratkan kedua sisi dari pertidaksamaan diatas maka $x^2 < \epsilon$ jika $0 < x < \delta$.

Jika kita memilih $\delta = \epsilon^2$ maka diperoleh,

$0 < x < \delta = \epsilon^2 \;\Longrightarrow \sqrt{x} < \epsilon$ atau $0 < x < \epsilon^2 \;\Longrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$

sehingga berdasarkan definisi, makan di simpulkan terbukti untuk $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

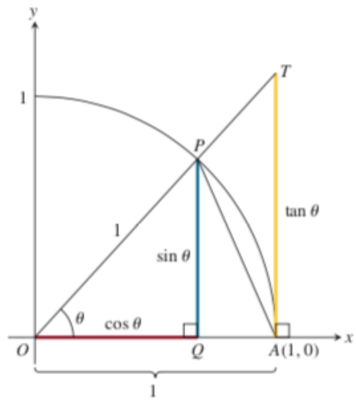
Teorema 2

Limit dari $\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini, maka kita perlu membuktikan bahwa nilai limit kiri dan kanannya bernilai 1.

1. Untuk membuktikan limit kanannya bernilai 1, kita mulai dengan nilai positif dari $\theta < \frac{\pi}{2}$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 96 Limit bernilai 1

Dari gambar diatas diperoleh

$$\text{Luas } \Delta OAP < Luas\ Juring\ OAP < Luas\ \Delta OAT$$

Hal ini dapat dinyatakan dengan

$$\text{Luas } \Delta OAP = \frac{1}{2}\ alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{Luas juring } \Delta OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Luas } \Delta OAT = \frac{1}{2}alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Sehingga,

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

Jika pertidaksamaan ini kita bagi dengan $\frac{1}{2}\sin\theta$ akan bernilai positif karena $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, yaitu:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

dengan mengambil kebaikan dari pertidaksamaan ini diperoleh bahwa

$$1 > \frac{\theta}{\sin\theta} > \frac{1}{\cos\theta}$$

Karena $\lim_{x\to 0^+} \cos\theta = 1$ maka dengan menggunakan Teorema Sandwhich diperoleh

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

2. Untuk membuktikan limit kirinya kita akan menggunakan fungsi ganjil yaitu $\sin\theta$ dan θ. Sehingga, $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ adalah fungsi genap yaitu grafik yang simetrik pada sumbu y. Kesimetrian ini mengakibatkan limit kiri di 0 ada dan nilainya sama dengan limit kanan.

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta}$$

Jadi berdasarkan pembuktian limit kiri dan limit kanan diatas, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Contoh :

1. Tentukanlah nilai limit dari :

   a. $\lim_{p\to 0} \frac{coh\, p-1}{p} = 0$

   b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

   Jawab :

   a. $\lim_{p\to 0} \frac{coh\, p-1}{p} = \lim_{p\to 0} -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p}$

      misalkan $\theta = \frac{p}{2}$, maka

      $$\lim_{p\to 0} -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p} = -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \sin\theta = -(1)(0) = 0$$

   b. untuk menyelesaiakn persamaan ini, maka kita kalikan dengan $\frac{2}{5}$ yaitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{5}\right).\ \sin 2x}{\left(\frac{2}{5}\right).\ 5x} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

misalkan $\theta = 2x$ maka dengan menggunakan teorema 2 diatas diperoleh hasilnya adalah $\frac{2}{5}$.

2. Tentukanlah nilai limit dari :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t}$$

Jawab:

Dengan menggunakan definisi dari $\tan t$ dan $\sec 2t$, kita memiliki

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos 2t}$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos 2t} = \frac{1}{3}(1)(1)(1) = \frac{1}{3}$$

7.6 Kekontinuan

Misalkan c adalah bilangan riil di sumbu x. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kanan di titik c jika $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kiri di c jika $\lim_{c\to c^-} f(x) = f(c)$.

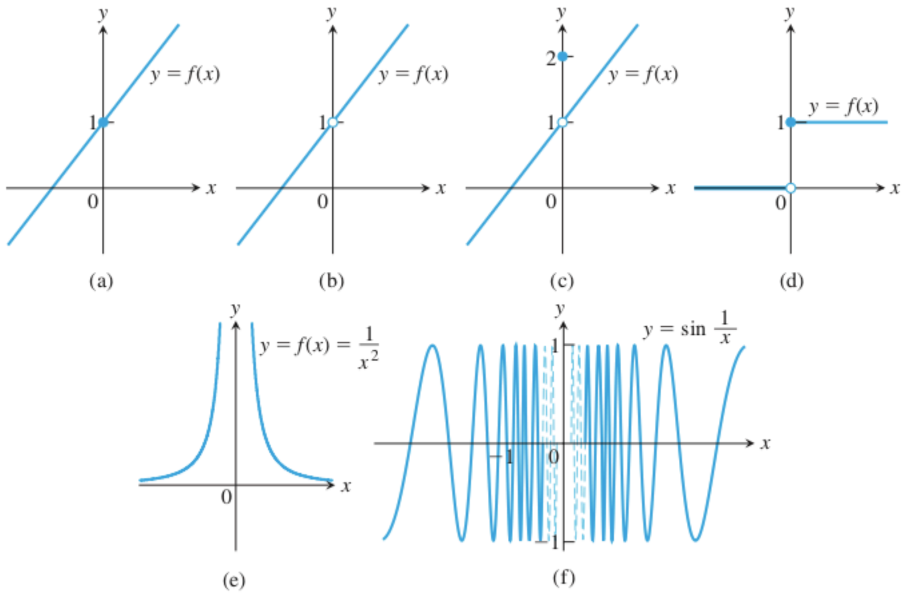
Dengan menggunakan teorema 7.1 secara langsung didapat bahwa fungsi f adalah kontinu di titik c dari domainnya jika dan hanya jika kontinu di kiri dan dikanan. Kita sebut sebuah fungsi adalah kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ jika kontinu kanan di a, kontinu kiri di b dan kontinu di seluruh titik interior dari intervalnya. Jika sebuah fungsi tidak kontinu di titik interior c dari domainnya, maka kita sebut f tidak kontinu di c, dan c adalah sebuah titik yang tidak kontinu dari fungsi f. Ingatlah bahwa fungsi f dapat dikatakan kontinu, kontinu kanan, kontinu kiri hanya di titik c dengan syarat $f(c)$ terdefinisi.

Dapat kita simpulkan kekontinuan di titik interior dengan menggunakan bentuk tes kontinu berikut:

Sebuah fungsi $f(x)$ adalah kontinu di titik $x = c$ jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi berikut:

1. $f(c)$ ada (c berada di domain f)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada (f memiliki sebuah limit ketika $x \to c$)
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya)

Perhatikan grafik berikut ini:



Gambar 97 Kekontinuan

Dari gambar diatas terdapat beberapa tipe dari ketidakkontinuan. Pada gambar (a) merupakan kontinu di $x = 0$, gambar (b) seharusnya kontinu jika $f(0) = 1$. Selanjutnya gambar (c) harusnya kontinu jika $f(0)$ bernilai 1 bukan 2. Ketidakkontinuan pada gambar (c) ini ditolak atau *removable*. Fungsi seperti ini memiliki nilai limit ketika $x \to 0$ dan kita dapat menghilangkan ketidakkontinuan dengan mengatur $f(0)$ sama dengan nilai limitnya.

Lebih jauh lagi pada gambar (d) melalui f sangat kompleks, yaitu $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada dan tidak ada kemungkinan mengubah nilai f menjadi 0. Sehingga pada kondisi ini disebut sebagai ketidakkontinuan yang lompat (*jump discontinuity*), yaitu limit satu sisinya ada tapi memiliki nilai yang berbeda. Fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pada gambar (e) memiliki ketidakkontinuan yang tak terbatas (*infinite discontinuity*). Fungsi di gambar (f) memiliki ketidakkontinuan yang berisolasi (*oscillating discontinuity*), yaitu pergerakan yang kesana kemari sangat banyak untuk memiliki nilai limit ketika $x \to 0$.

Sebuah fungsi dikatakan fungsi yang kontinu jika kontinu di setiap tidak dari domainnya. Hal ini kita sebut sebagai sifat dari fungsi. Sebuah fungsi selalu memiliki domain yang spesifik. Jika kita mengubah domain, maka kita mengubah fungsinya yang berarti juga memungkinkan untuk mengubah sifatnya.

Misalkan fungsi $y = \frac{1}{x}$ adalah fungsi yang kontinu karena kondisinya adalah kontinu disetiap titik dari domainnya. Fungsi ini tidak kontinu pada titik $x = 0$, karena tidak terdefinisi pada titik tersebut. Sehingga fungsi ini tidak kontinu di setiap titik yang mengandung $x = 0$.

Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

1. Operasi Penjumlahan
$$f + g$$
2. Operasi Pengurangan (Selisih)
$$f - g$$
3. Perkalian dengan konstanta
$$k \cdot f \qquad \text{untuk setiap nilai } k$$
4. Operasi Perkalian
$$f \cdot g$$

5. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

6. Perpangkatan

f^n untuk n adalah bilangan bulat positif

7. Bentuk Akar

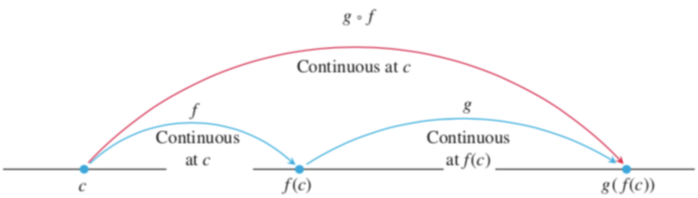
$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

Sifat-sifat ini dapat kita gunakan untuk membuktikan rumus limit. Salah satunya asalah sifat penjumlahan pada limit yaitu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c)+g(c)\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan ini, dapat kita simpulkan bahwa $f + g$ adalah kontinu.

Semua komposisi dari fungsi-fungsi yang kontinu adalah kontinu. Jika $f(x)$ adalah kontinu di $x = c$ dan $g(x)$ adalah kontinu di $x = f(c)$, maka $g \circ f$ adalah kontinu di $x = c$. Kondisi ini menyatakan nilai limitnya ketika $c \to c$ adalah $g\big(f(c)\big)$. Hal ini dapat digambarkan seperti pada gambar berikut ini



Gambar 98 Limit fungsi komposisi

Secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk teorema berikut:

Teorema 3

Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x \to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

Bukti :

Misalkan $\epsilon > 0$. Karena g adalah kontinu di b, maka terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga

$|g(y) - g(b)| < \epsilon$ dimana $0 < |y - b| < \delta_1$.

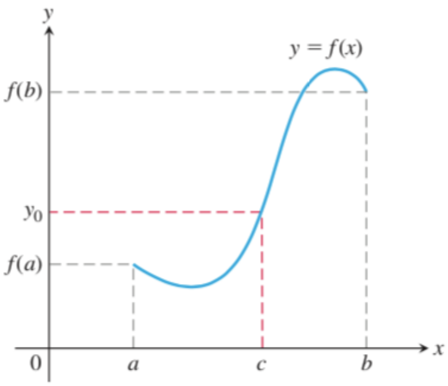
Karena $\lim_{x \to c} f(x) = b$, terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$.

Jika kita misalkan $y = f(x)$, maka kita memperoleh

$|y - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$

dimana hal ini mengakibatkan $|g(y) - g(b)| = |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$ ketika $0 < |x - c| < \delta$. Sehingga berdasarkan definisi limit terbuktilah $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b)$.

Jika f adalah sebuah fungsi yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, dan jika $y_0$adalah nilai diantara $f(a)$ dan $f(b)$, maka $y_0 = f(c)$ untuk c di $[a, b]$. Seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 99 Kontinu pada interval tertutup

4. Rangkuman

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, *c* dan *k* adalah bilangan riil dan $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

   a. Aturan penjumlahan

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

   b. Aturan selisih

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

   c. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\lim_{x \to c}\big(k.f(x)\big) = k.L$$

   d. Aturan pembagian

$$\lim_{x \to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L.M$$

   e. Aturan pangkat

   $\lim_{x \to c}\big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

   f. Aturan akar

   $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

   g. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

h. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

i. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

j. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

5. Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

6. Limit dari $\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

7. Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

   i. Operasi Penjumlahan

$$f + g$$

   ii. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f - g$$

   iii. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \text{ untuk setiap nilai } k$$

   iv. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

v. Operasi pembagian

$\frac{f}{g}$ untuk $g(c) \neq 0$

vi. Perpangkatan

f^n untuk n adalah bilangan bulat positif

vii. Bentuk Akar

$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

8. Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x\to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$$

5. Latihan

1. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada
   a. $lim \frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to 2$
   b. $lim \frac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to -1$
   c. $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$
2. Tentukanlah limit dari $g(x)$ ketika x mendekati nilai yang diketahui
   a. $\lim_{x\to 0^+} \big(4g(x)\big)^{\frac{1}{3}} = 2$
   b. $\lim_{x\to\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x+g(x)}\right) = 2$
3. Tentukanlah limit dari
   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x+7}$
   b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$

4. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

   a. $f(x) = x + 1, L = 5, c = 4, \epsilon = 0.01$

   b. $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, c = 0, \epsilon = 0.1$

   c. $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, c = 4, \epsilon = 0.05$

5. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.

   a. $\lim_{x\to 3}(3x - 7) = 2$

   b. $\lim_{x\to 9}\sqrt{x-5} = 2$

6. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

   a. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

   b. $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

   c. $\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

7. Gunakanlah $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini

   a. $\lim_{x\to 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$

   b. $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$

   c. $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

8. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu

   a. $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

   b. $y = \frac{x+3}{\boldsymbol{x^2-3x-10}}$

c. $y = \frac{\cos x}{x}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada
   a. $\lim_{x\to 64} \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$
   b. $\lim_{x\to \pi} \sin\left(\frac{x}{2} + \sin x\right)$
   c. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-1}{\sin x}$
2. Tentukanlah limit dari $g(x)$ ketika x mendekati nilai yang diketahui
   a. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{3x^2+1}{g(x)}\right) = \infty$
   b. $\lim_{x\to -2} \left(\frac{5-x^2}{\sqrt{g(x)}}\right) = 0$
3. Tentukanlah limit dari
   a. $\lim_{x\to \infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$
   b. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$
4. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.
   a. $f(x) = x^2 - 5, L = 11, c = 4, \epsilon = 1$
   b. $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, c = 1, \epsilon = 0.05$
5. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.
   a. $\lim_{x\to -2} f(x) = 1, jika\ f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

6. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

   a. $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$

   b. $\lim\limits_{h \to -2^+} (x + 3) \frac{|x+2|}{x+2}$

   c. $\lim\limits_{h \to -2^-} (x + 3) \frac{|x+2|}{x+2}$

7. Gunakanlah $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini

   a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

   b. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

   c. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

8. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu

   a. $y = \frac{x \tan x}{\boldsymbol{x^2 + 1}}$

   b. $y = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x^4 + 1}}}{\boldsymbol{1 + sin^2 x}}$

   c. $y = (2 - x)^{\boldsymbol{1/5}}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetulnya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa yang menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-15 : Menguasai Limit Tak Hingga

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan himpunan beserta jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi limit tak hingga. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skills.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

7.7 Limit Tak Hingga

1. **Limit berhingga dimana $x \to \pm\infty$**

   Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

   jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

   $$x > M \;\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

   Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

   jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

   $$x < N \;\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Contoh :

1. Buktikanlah bahwa

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Jawab :

a. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = \frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan bulat positif yang lebih besar. Jadi terbukti $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

b. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = -\frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan yang lebih kecil dari $-\frac{1}{\epsilon}$. Jadi terbukti $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. Tentukanlah nilai dari

a. $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$

Jawab:

a. $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

$$= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

2. Limit Tak Hingga Fungsi Rasional

Untuk menentukan limit dari fungsi rasional ketika $x \to \pm\infty$, terlebih dahulu kita membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi x. Hasil yang ada tergantung kepada derajat pada persamaan yang ada.

Contoh :

Tentukanlah limit dari

a. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1}$

Jawab :

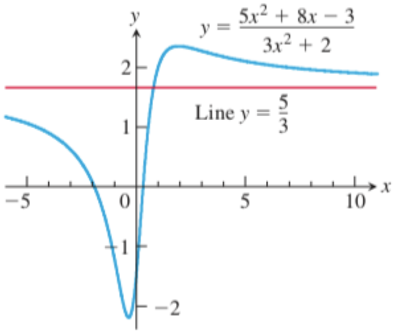
a. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$

b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$

3. Asimtot Horizontal

Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Misalkan $f(x) = \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ memiliki garis $y = \frac{5}{3}$ sebagai asimtot horizontal di kiri dan dikanan, karena $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{5}{3}$ dan $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{5}{3}$. Hal ini terihat seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 100 Asimtot Horizontal

Contoh :

1. Tentukanlah asimtot horizontal dari

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$$

Jawab :

Kita menentukan limit ketika $x \to \pm\infty$.

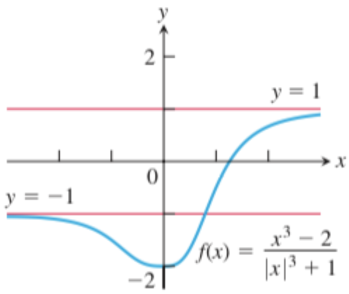
Untuk $x \geq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 1$$

Untuk $x < 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{(-x)^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{-1 + \frac{1}{x^3}} = -1$$

jadi asimtot horizontalnya adalah $y = -1$ dan $y = 1$, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 101 Contoh asimtot horizontal

2. Dengan menggunakan Teorema Sandwhich, tentukanlah asimtot horizontal dari

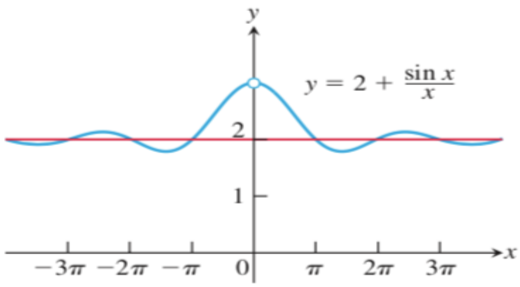
$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

Jawab:

Kita akan menentukannya dengan $x \to \pm\infty$. Karena $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ dan $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$, kita mempunyai $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ dengan menggunakan teorema sandwhich. Sehingga,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 + 0 = 2$$

dengan garis $y = 2$ adalah asimtot horizontal dari kurva kanan dan kiri. Contoh ini mengilustrasikan bahwa kurva yang ada mungkin berpotongan dengan salah satu asimtot horizontalnya beberapa kali.



Gambar 102 asimtot horizontal berpotongan di beberapa titik

4. Asimtot Miring

Jika derajat pangkat pembilang fungsi rasional adalah lebih besar 1 dari derat pangkat penyebutnya, maka grafiknya memiliki asimtot miring. Untuk menemukan persamaannya kita membagikan pembilang dengan penyebutnya untuk mengekspresikan fungsi f seperti fungsi linear ditambah sisa pembagian dimana mendekati 0 ketika $x \to \pm\infty$.

Contoh :

Tentukanlah asimtot miring dari :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

Jawab :

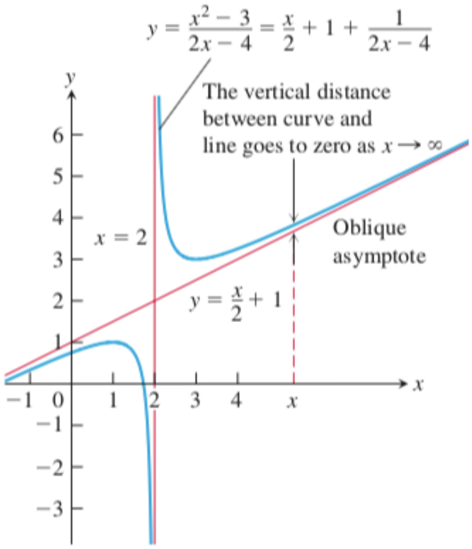
Kita akan menyelesaikannya dengan $x \to \pm\infty$. Kita melakukan pembagian biasa yaitu $x^2 - 3$ membagi $2x - 4$ diperoleh:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2x - 4}\right)$$

$\frac{x}{2} + 1$ adalah sebagai linear $g(x)$ dan $\frac{1}{2x-4}$ sebagai sisa pembagian. Ketika $x \to \pm\infty$, sisa pembagian membuat jarak vertikal antara f dan g, menuju nol, yang membuat garis miring

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

sebagai asimtot dari grafik f. Garis $y = g(x)$ adalah asimtot kiri dan kanan.



Gambar 103 Asimtot miring

7.8 Limit Tak Hingga

Ingat kembali tentang fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$. Ketika $x \to 0^+$, nilai f meningkat tanpa batas di setiap bilangan riil positif. Misalkan diberikan bilangan riil positif B, bagaimanapun besarnya, nilai dari f menjadi semakin besar. Jadi, f tidak memiliki limit ketika $x \to 0^+$. Berdasarkan hal ini dapat kita deskripsikan kebiasaan dari f dengan menyatakan $f(x)$ mendekati ∞ ketika $x \to 0^+$. Dituliskan dengan

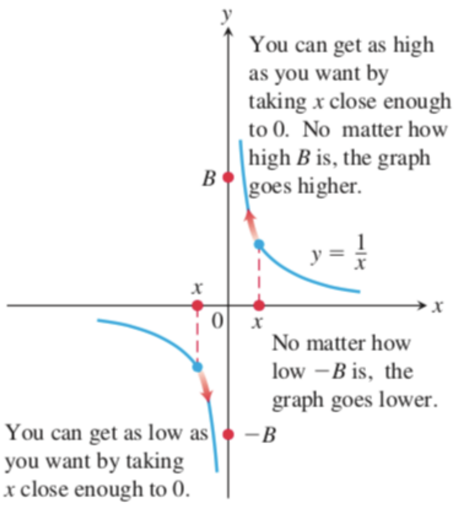
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil ∞, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan positif ketika $x \to 0^+$.

Selanjutnya, ketika $x \to 0^-$, nilai dari $f(x) = \frac{1}{x}$ menjadi besar dan negatif. Misalkan diberikan bilangan riil negatif $-B$, nilai dari f akan berada dibawah $-B$. Kita tuliskan dengan

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil $-\infty$, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan negatif ketika $x \to 0^-$.



Gambar 104 Limit Tak hingga

Contoh:

Tentukanlah nilai dari limit fungsi berikut:

a. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$

b. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$

c. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7}$

Jawab:

a. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

b. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$

c. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-6x^2+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2(x-3)+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} = -\infty$

7.9 Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \implies f(x) > B$.

Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \implies f(x) < -B$

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Jawab:

Misalkan $B > 0$, kita akan mencari $\delta > 0$ sehingga diperoleh

$$0 < |x-0| < \delta$$

yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > B$.

Sekarang dimiliki

$$\frac{1}{x^2} > B \text{ jika dan hanya jika } x^2 < \frac{1}{B}$$

persamaan ini ekuivalen dengan

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$$

kita memilih $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ atau sebarang bilangan bulat negatif yang lebih kecil, sehingga kita peroleh bahwa

$|x| < \delta$ yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B$

Sehingga melalui definisi terbukti bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

7.10 Asimtot Vertikal

Sebuah garis $x = a$ adalah vertikal asimtot dari grafik fungsi jika

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ atau $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

Contoh :

Tentukanlah asimtot horizontal dan asimtot vertikal dari

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

Jawab:

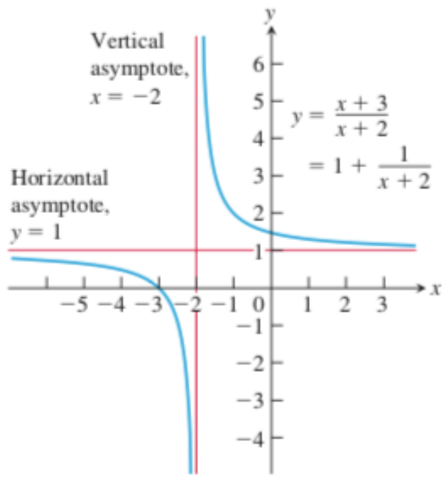
Dalam menyelesaikan ini kita akan menggunakan $x \to \pm\infty$ dan $x \to -2$ dimana penyebut akan menjadi nol.

Persamaan dari fungsi yang ada dapat kita ubah dengan membagikan pembilang dan penyebut sehingga menghasilkan siswa pembagian yaitu

$x + 3$ membagi $x + 2$ yaitu sama dengan

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

ketika $x \to \pm\infty$, kurva mendekati asimtot horizontal $y = 1$; ketika $x \to -2$ kurva mendekati asimtot vertikal $x = -2$. Kita dapat melihat bahwa persamaan ini adalah berasal dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ yaitu naik 1 unit secara vertikal dan bergeser ke kiri sebesar 2 unit, seperti tampak pada gambar dibawah ini. Sehingga asimtotnya seperti garis koordinat yaitu $y = 1$ dan $x = -2$.



Gambar 105 Asimtot Horizontal dan Vertikal

4. Rangkuman

1) Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

2) Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

3) Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

a. Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > B.$

b. Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < -B$

5. Latihan

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

   b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3}$

   c. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$

   d. $\lim_{x \to \infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   e. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$

   b. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$

   c. $y = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

   b. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

   c. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$

   d. $y = \sqrt{\frac{x^2+9}{9x^2+1}}$

4. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{-5x-3}{2x+5}$

   b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-7x}{x+1}$

   c. $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\theta-1}{\theta}$

   d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

   e. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{12x^3+128}$

   f. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   g. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

   b. $f(x) = \frac{\cos 2x-1}{\sin x}$

   c. $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut
   a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$
   b. $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$
   c. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$
4. Tentukanlah asimtot miring dengan menggunakan limit dari persamaan berikut
   a. $y = x + x\sin\frac{1}{x}$
   b. $y = \sqrt{x^2+1}$
   c. $y = \sqrt{x^2+2x}$
   d. $y = \frac{2x^{5/2}+2x-3}{\sqrt{x}+1}$

5. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaikan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Kontinu	Limit	Asimtot	Epsilon	Delta
Diskontinu	Komposisi			

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

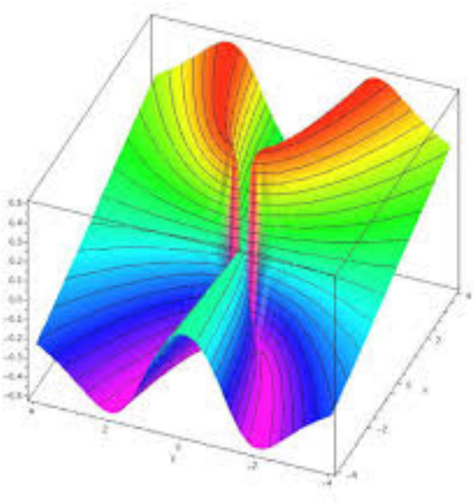
Modul 8 TURUNAN

Think before talk

then make an action

to realize it.

-SCP



Pendidikan Fisika

FKIP UKI

MODUL 8 TURUNAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Turunan merupakan sebuah materi yang digunakan dalam menentukan berbagai perubahan suatu fungsi. Konsep ini banyak dimanfaatkan didalam produksi maupun dalam menentukan nilai maksimum maupun minimum sebauh grafik fungsi yangtersedia. Turunan ini dipelajari untuk meningkatkan kemampuan matematis mahasiswa dalam menyelesaikan berbagai persoalan nyata yang membutuhkan penyelesaian dengan turunan. Turunan ini juga banyak dibutuhkan oleh fisikawan dan berbagai lini kehidupan baik diperbankan maupun di perusahaan bagian produksi barag.

   Dalam modul ini mahasiswa akan mempelajari berbagai terori dan permasalahan yang ada pada turunan yaitu turunan dasar, turunan komposisi, turunan sebagai suatu perubahan, turunan fungsi trigonometri, turunan dengan menggunakan rumus chain dan turunan implisit baik turuan tingkat satu maupun hingga turunan tingkat tinggi yaitu turunan hingga penurunan ke-n.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul delapan

   Sikap

   S1: Bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.

   S2: Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S3: Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila.

S4: Berperan sebagai warga negara yang bangga dan cinta tanah air, memiliki nasionalisme serta rasa tanggungjawab pada negara dan bangsa.

S5: Menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, agama, dan kepercayaan, serta pendapat atau temuan orisinal orang lain.

S6: Bekerja sama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S7: Taat hukum dan disiplin dalam kehidupan bermasyarakat dan bernegara.

S8: Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.

S10: Menginternalisasi semangat kemandirian, kejuangan, dan kewirausahaan.

S11: Memiliki budi pekerti yang berlandaskan nilai-nilai kristiani: rendah hati, berbagi dan peduli, disiplin, professional dan bertanggung jawab dalam melaksanakan tugas yang dipercayakan.

S12: Mempunyai ketulusan, komitmen, kesungguhan hati untuk mengembangkan sikap, nilai dan kemampuan peserta didik dengan dilandasi oleh nilai-nilai kearifan lokal dan akhlak mulia serta memiliki motivasi untuk berbuat bagi kemaslahatan peserta didik dan masyarakat pada umumnya.

Keterampilan Umum

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Keterampilan Khusus

KK3: Mampu menganalisis masalah, menemukan sumber masalah, dan menyelesaikan masalah instrumentasi fisika dalam proses pembelajaran 296isika dan masalah manajemen laboratorium fisika sesuai dengan kaidah keilmuan fisika.

KK4: Mampu menganalisis dan mengusulkan berbagai solusi alternatif yang ada terhadap permasalahan media belajar fisika dan masalah manajemen laboratorium fisika, serta menyimpulkannya untuk pengambilan keputusan yang tepat.

KK7: Mampu melaksanakan pembelajaran fisika sekolah menengah dengan pendekatan saintifik sesuai dengan karakteristik materi dan karakteristik siswa agar mampu mengembangkan kemampuan berfikir dan sikap ilmiah.

Pengetahuan

P2: Konsep umum, prinsip, dan aplikasi matematika, komputasi, dan fisika instrumentasi

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul Delapan

   Kegunaan modul delapan ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup: Pengertian Turunan, Rumus Dasar turunan, turunan sebagai suatu perubahan, Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain, fungsi implisit dan aplikasi turunan

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke-16 : Menguasai konsep dasar turunan, turunan fungsi sebagai sebuah tingkat perubahan

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Matriks, Trigonometri, Limit dan Kekontinuan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skills.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

8.1 Pengertian

Pada modul sebelumnya kita sudah membahas tentang limit. Pada modul ini kita akan mempelajari tentang turunan dari sebuah fungsi $y = f(x)$ di titik $x = x_0$ yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hal ini terpenuhi jika nilai limitnya ada.

Jika kita tuliskan $z = x + h$ maka $h = z - x$ dan h mendekati 0 jika dan hanya jika z mendekati x. Maka definisi turunan diatas ekuivalen dengan rumus alternative berikut ini:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

proses dari perhitungan turunan ini disebut sebagai differensiasi. Notasi dari differensiasi ini biasanya dituliskan dengan

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

ini juga merupakan salah satu bentuk lain dalam menuliskan turunan $f'(x)$.

Contoh :

Tentukanlah turunan dari $f(x) = \sqrt{x}$ untuk $x > 0$ dan tentukanlah garis tangennya di titik $x = 4$.

Jawab:

Pertama kita menggunakan rumus alternatif untuk menghitung f':

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Selanjutnya untuk menentukan gradien kurva di titik $x = 4$ adalah

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Tangen adalah sebuah garis yang melalui (4,2) dengan gradien $\frac{1}{4}$, diperoleh:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

Penulisan turunan dapat dinotasikan dalam berbagai bentuk turunan dari fungsi $y = f(x)$, dimana variabel independen adalah x dan variabel dependen adalah y. Berikut ini beberapa notasi umum yang biasa digunakan dalam penulisan turunan:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

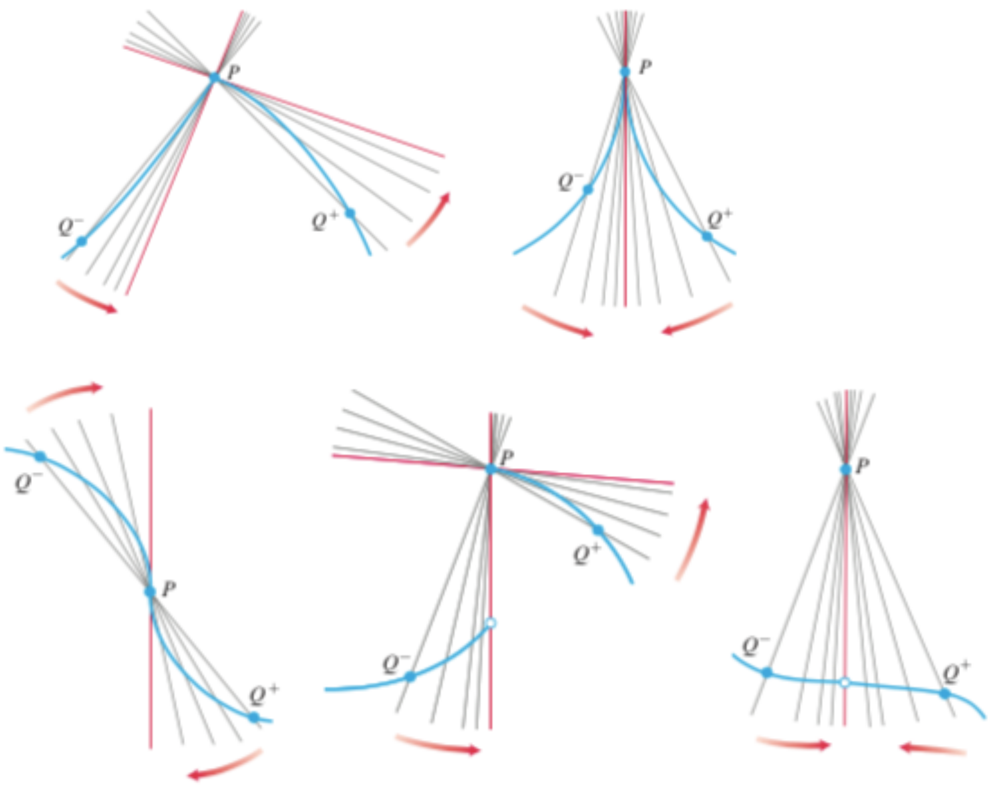
Sebuah fungsi $y = f(x)$ adalah terdifferensiasi pada interval terbuka (hingga atau tak hingga) jika memiliki turunan di setiap titik pada interval. Selanjutnya fungsi tersebut terdifferensiasi pada interval tertutup $[a, b]$ jika dapat diturunkan pada titik interior (a, b) dan jika memiliki limit kiri dan kanan seperti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(b)}{h}$$

adalah ada di setiap titik akhirnya.

Suatu fungsi memiliki turunan di titik x_0 jika gradien garis potong yang melalui $P(x_0, (x_0))$ dan titik terdekat Q pada grafik mendekati batas hingga saat Q mendekati P. Setiap kali garis potong gagal mengambil posisi pembatas atau menjadi vertikal saat Q mendekati P, turunannya tidak ada. Dengan demikian diferensiasi adalah kondisi "kelancaran" pada grafik . Suatu fungsi dapat gagal memiliki turunan di suatu titik karena berbagai alasan, termasuk keberadaan titik-titik di mana grafik memiliki :



Gambar 106 Arah turunan

Sebuah fungsi yang terdifferensiasi adalah fungsi yang kontinu. Hal ini disimpulkan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika f memiliki turunan di titik $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.

Bukti :

Diberikan $f'(c)$ ada, kita harus menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, atau ekuivalen dengan $\lim_{h \to 0} f(c+h) = f(c)$. Jika $h \neq 0$, maka

$$f(c+h) = f(c) + \big(f(c+h) - f(c)\big)$$
$$= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h$$

Sekarang ambil limit untuk $h \to 0$. Dengan teorema pada limit dan kekontinuan, maka

$$\lim_{h \to 0} f(c+h) = \lim_{h \to 0} f(c) + \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h$$
$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$
$$= f(c) + 0$$
$$= f(c)$$

8.2 Rumus Turunan

Rumus-rumus pada turunan dapat kita temukan dan peroleh yaitu dengan menggunakan operasi aljabar pada setiap fungsi yang terdifferensiasi yaitu

1. Turunan dari fungsi konstanta adalah nol

   Jika f memiliki nilai konstanta $f(x) = c$, maka

   $$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

   Bukti :

   Kita gunakan definisi dari turunan untuk $f(x) = c$, dimana output dari fungsi tersebut adalah nilai konstanta c. Di setiap titik dari x, kita temukan bahwa:

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

   Contoh :

   Tentukanlah turunan dari $f(x) = 4$, dan $f(x) = 1$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

2. Turunan pada fungsi berpangkat positif

   Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

   Bukti:

   Rumus $z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$

   Dapat diverifikasi dengan mengalikasn sisi kanannya. Maka dari rumus alternative untuk definisi dari turunan, diperoleh :

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z - x}$$
$$= \lim_{z \to x}(z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$
$$= nx^{n-1}$$

   Contoh :

   Tentukanlah turunan dari

   a. x^5

   b. $x^{\frac{2}{3}}$

   Jawab :

   a. $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$

   b. $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

3. Turunan pada fungsi berpangkat bilangan riil

   Jika n adalah bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

untuk semua x dimana pangkat x^n dan x^{n-1} terdefinisi.

Contoh :

Tentukanlah turunan dari:

a. $x^{\sqrt{2}}$

b. $\frac{1}{x^4}$

c. $\sqrt{x^{2+\pi}}$

Jawab:

a. $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

c. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{2+\pi}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1+\frac{\pi}{2}}\right) = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)x^{1+\frac{\pi}{2}-1} = \frac{1}{2}(2+\pi)\sqrt{x^{\pi}}$

4. Turunan fungsi dengan perkalian konstanta

Jika dengan u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, dan c adalah sebuah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h}$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$= c\frac{du}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari :

a. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$

b. $5\sqrt{x}+2x$

Jawab:

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}}$

b. $\frac{d}{dx}\left(5\sqrt{x} + 2x\right) = \frac{d}{dx}5\sqrt{x} + \frac{d}{dx}2x$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5x^{\frac{1}{2}-1} + 1 \cdot 2x^{1-1}$$

$$= \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2$$

5. Penjumlahan pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi terhadap x, maka penjumlahan $u + v$ adalah terdifferensiasi di setiap titik dimana u dan v keduanya terdifferensiasi. Untuk titik-titik tersebut berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Bukti:

Kita dapat menggunakan definisi dari turunan untuk $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x + h) + v(x + h)] - [u(x) + v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \frac{v(x + h) - v(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h}$$

$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari :

$$y = x^5 + 4x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 + 4x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}x\right) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$= 5x^4 + 8x - \frac{3}{2}$$

6. Perkalian pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka perkalian u dan v adalah

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Bukti :

$$\frac{d}{dx}(uv)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[u(x+h)\ \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)$$

$$\cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

ketika h mendekati nol, $u(x+h)$ mendekati $u(x)$ karena u terdifferensiasi di x dan kontinu di x. Sehinga,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan berikut ini:

a. $\left(\frac{1}{2}x-5\right)(2x+3x^2)$

b. $\left(\sqrt{x}-2x^2\right)\left(2x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}}-\sqrt{x}\right)$

Jawab :

a. Misalkan $u=\frac{1}{2}x-5$ dan $v=2x+3x^2$, maka $\frac{dv}{dx}=2+6x$ dan $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{2}x-5\right)(2x+3x^2)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-5\right)(2+6x)+(2x+3x^2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=x+3x-10-30x+x+\frac{3}{2}x^2$$

$$=\frac{3}{2}x^2-27x-10$$

b. Misalkan $u=\sqrt{x}-2x^2$ dan $v=2x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}}-\sqrt{x}$, maka $\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x$ dan $\frac{du}{dx}=2+\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{2}x-5\right)(2x+3x^2)\right)$$

$$=\left(\sqrt{x}-2x^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x\right)$$

$$+\left(2x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}}-\sqrt{x}\right)\left(2+\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-4x\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}+8x^3+4x+\frac{6}{5}x^{\frac{2}{5}}-\sqrt{x}+3x^{\frac{2}{5}}+\frac{9}{10}x^{-\frac{1}{5}}$$

$$-\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{10}}-2\sqrt{x}-\frac{9}{10}x^{-\frac{1}{10}}+\frac{1}{2}$$

7. Pembagian pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x dan jika $v(x)\neq 0$, maka pembagian u dan v adalah terdifferensiasi di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

atau dapat juga dinotasikan dengan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

ketika h mendekati nol, $u(x+h)$ mendekati $u(x)$ karena u terdifferensiasi di x dan kontinu di x. Sehinga,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari $y=\frac{x^2-1}{x^3+1}$

Jawab:

Misalkan $u=x^2-1$ dan $v=x^3+1$ maka $\frac{du}{dx}=2x$ dan $\frac{dv}{dx}=3x^2$, sehingga

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^3+1)(2x)-(x^2-1)(3x^2)}{(x^3+1\ )^2}$$

$$=\frac{2t^4+2t-3t^4+3t^2}{(x^3+1\ )^2}$$

$$= \frac{-t^4 + 3t^2 + 2t}{(x^3 + 1\,)^2}$$

8. Turunan kedua atau turunan tingkat tinggi

   Jika $y = f(x)$ adalah fungsi terdifferensiasi, maka turunan $f'(x)$ adalah juga sebuah fungsi. Jika f' juga terdifferensiasi,maka f' dapat kita turunkan lagi menjadi f''. Jadi $f'' = (f')'$. f'' kita sebut sebagai turunan kedua dari f karena ini adalah bentuk turunan dari turunan pertama. Turunan kedua ini dapat dituliskan dengan menggunakan beberapa bentuk yaitu:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)$$

   demikian juga untuk turunan ketika, keempat dan seterusnya dapat dituliskan dengan

   $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, y'''' = y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}, \dots , y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^n y$

   Contoh :

   Tentukanlah turunan pertama hingga turunan kelima dari:

   a. $y = x^6 - 2x^3 + 5x - 1$
   b. $y = x^5 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$

   Jawab :

   a. Turunan tingkat dari $y = x^6 - 2x^3 + 5x - 1$ adalah

      Turunan pertama

$$y' = 6x^5 - 6x^2 + 5$$

      Turunan kedua

$$y'' = 30x^4 - 12x$$

      Turunan ketiga

$$y''' = 120x^3 - 12$$

      Turunan keempat

$$y^{(4)} = 360x^2$$

Turunan kelima

$$y^{(5)} = 720x$$

b. Turunan tingkat dari $y = x^5 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ adalah

Turunan pertama

$$y' = 5x^4 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

Turunan kedua

$$y'' = 20x^3 - \frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}} = 20x^3 - \frac{3}{8x^{\frac{3}{2}}}$$

Turunan ketiga

$$y''' = 60x^2 + \frac{9}{16}x^{-\frac{5}{2}}$$

Turunan keempat

$$y^{(4)} = 120x - \frac{45}{32}x^{-\frac{7}{2}}$$

Turunan kelima

$$y^{(5)} = 120 + \frac{315}{64}x^{-\frac{9}{2}}$$

8.3 Turunan Sebagai Tingkat Perubahan

Jika kita menginterpretasikan hasil bagi selisih $\frac{f(x+h)-(x)}{h}$ sebagai laju rata-rata perubahan dalam f selama interval dari x ke $x+h$, kita dapat menginterpretasikan limit ketika $h \to 0$ sebagai perubahan yang mana f berubah pada titik x.

Tingkat perubahan sesaat dari f terhadap x pada x_0 adalah turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dimana limitnya haruslah ada.

Kecepatan (kecepatan sesaat) adalah turunan dari posisi terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka kecepatan di waktu t adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{h}$$

Kecepatan ini dapat juga dituliskan dengan kelajuan yaitu

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Percepatan adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka percepatan di waktu t adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Loncatan adalah turunan dari percepatan terhadap waktu

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Contoh :

Ledakan sebuah dinamit menghempaskan batu berat tegak lurus dengan kecepatan $160\ kaki/detik$ (sekitar 109 mph), Mencapai ketinggian $s = 160t - 16t^2 kaki$ setelah t detik.

a. Berapa tinggi batu tersebut?
b. Berapakah kecepatan dan kelajuan batu ketika 256 kaki berada di atas permukaan tanah saat naik? Dalam perjalanan turun?
c. Berapa percepatan batu pada setiap waktu t selama penerbangannya (setelah ledakan)?
d. Kapan batu itu menyentuh tanah lagi?

Jawab:

a. Untuk setia t waktu selama pergerakan batu, kecepatannya adalah

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) \\ &= 160 - 32t \text{ kaki/detik} \end{aligned}$$

kecepatan bernilai 0 ketika

$160 - 32t = 0$ atau $t = 5$ detik

tinggi batu ketika $t = 5$ detik adalah

$$s_{max} = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ kaki}$$

b. Untuk menentukan kecepatan batu di 256 kaki keatas dan turun kembali, maka kita pertama menentukan dua nilai dari t untuk

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$

$$16(t^2 - 10t + 16) = 0$$

$$(t-2)(t-8) = 0$$

$$t = 2 \text{ detik}, t = 8 \text{ detik}$$

batu berada 256 kaki diatas tanah ketika 2 detik setelah ledakan dan lagi 8 detik setelah ledakan. Kecepatan batu pada waktu yang sama adalah

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ kaki/detik}$$

$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ kaki/detik}$$

Jadi kelajuan baju adalah 96 kaki/detik. Karena $v(2) > 0$, batu bergerak keatas di $t = 2$ detik, lalu bergerak kebawah di $t = 8$ detik karena $v(8) < 0$.

c. Pada waktu selama ledakan, percepatan batu adalah konstan, yaitu

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ kaki/detik}^2$$

d. Batu akan menyentuh tanah di eaktu t positif yaitu untuk $s = 0$. Faktor persamaan $160t - 16t^2 = 0$ memberikan bahwa $16t(10 - t) = 0$, sehingga memiliki solusi $t = 0$ dan $t = 10$. Di titik $t = 0$, ledakan terjadi dan batu terlempar keatas. Batu kembali ke tanah setelah 10 detik kemudian.

4. Rangkuman

1) Turunan dari sebuah fungsi $y = f(x)$ di titik $x = x_0$ yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hal ini terpenuhi jika nilai limitnya ada.

2) Fungsi yang terdifferensiasi pada interval tertutup $[a, b]$ jika dapat diturunkan pada titik interior (a, b) dan jika memiliki limit kiri dan kanan seperti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(b)}{h}$$

adalah ada di setiap titik akhirnya.

3) Jika f memiliki turunan di titik $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.

4) Jika f memiliki nilai konstanta $f(x) = c$, maka

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

5) Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

6) Jika n adalah bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

untuk semua x dimana pangkat x^n dan x^{n-1} terdefinisi

7) Jika dengan u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, dan c adalah sebuah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

8) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi terhadap x, maka penjumlahan $u + v$ adalah terdifferensiasi di setiap titik dimana u dan v keduanya terdifferensiasi. Untuk titik-titik tersebut berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

9) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka perkalian u dan v adalah

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

10) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x dan jika $v(x) \neq 0$, maka pembagian u dan v adalah terdifferensiasi di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

11) Jika $y = f(x)$ adalah fungsi terdifferensiasi, maka turunan $f'(x)$ adalah juga sebuah fungsi. Jika f' juga terdifferensiasi,maka f' dapat kita turunkan lagi menjadi f''. Jadi $f'' = (f')'$. f'' kita sebut sebagai turunan kedua dari f karena ini adalah bentuk turunan dari turunan pertama.

12) Tingkat erubahan sesaat dari f terhadap x pada x_0 adalah turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dimana limitnya haruslah ada.

Kecepatan (kecepatan sesaat) adalah turunan dari posisi terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka kecepatan di waktu t adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{h}$$

Kecepatan ini dapat juga dituliskan dengan kelajuan yaitu

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Percepatan adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka percepatan di waktu t adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Loncatan adalah turunan dari percepatan terhadap waktu

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

5. Latihan

1) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari
   a. $f(x) = x^2 - 5x + 1$
   b. $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x$
   c. $y = \sqrt{x} - 3x + 6$
   d. $y = \sqrt{x} + x^2 - x^5$
2) Tentukanlah turunan kedua dari fungsi berikut ini
   a. $f(x) = (\sqrt{x} - 5)\left(\frac{1}{2}x - 3x^2\right)$
   b. $g(x) = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^5\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)$
   c. $y = \frac{3}{x+7}$
   b. $y = \frac{(2x+3x^2)}{(x^2-5x)}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari
   a. $y = 5\sqrt{x} - 3x^2 + 9$
   b. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 6x^{\frac{2}{5}}$
   c. $y = x^2 - x + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

d. $f(t) = t^2 - \frac{1}{5}t + \sqrt{t}$

e. $g(t) = \left(x^2 - 5x + \sqrt{x}\right)^5$

2) Tentukanlah turunan kedua dari fungsi berikut ini

a. $y = (2x^2 - 3x)\left(\frac{1}{2}x + 6\right)$

b. $y = \frac{\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$

c. $f(x) = \left(\sqrt{x} + 3x\right)^3\left(\sqrt{x} - 5x^2\right)$

d. $y = \left(\frac{1}{x+2}\right)^{2x}(2x^3 - 5x)^3$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 6: Menguasai konsep Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain, fungsi implisit dan aplikasi turunan

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan turunan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Turunan Fungsi. Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

8.4 Turunan Fungsi Trigonometri

1. Turunan dari fungsi sinus

   Untuk menentukan turunan dari $f(x) = \sin x$, untuk x adalah radian, maka dapat digunakan limit dengan penjumlahan isudut rangkap seperti:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

jika $f(x) = \sin x$, maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

2. Turunan dari fungsi Kosinus

   Untuk menentukan turunan dari $f(x) = \cos x$, untuk x adalah radian, maka dapat digunakan limit dengan penjumlahan isudut rangkap seperti:

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

   jika $f(x) = \cos x$, maka

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\,(x + h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\,(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} \right) - \lim_{h\to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

3. Turunan dari Fungsi dasar Trigonometri

   Ingat bahwa $\sin x$ dan $\cos x$ adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, maka fungsi ini juga dapat dituliskan dengan rumus dasar trigonometri yaitu:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Dari rumus dasar trigonometri ini dituliskan setiap turunannya sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc x$$
$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Contoh:

1. $y = \sin x \cos x$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$

   dengan menggunakan rumus perkalian pada turunan, maka diperoleh:

   $$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= \sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(\cos x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

2. $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right)$$

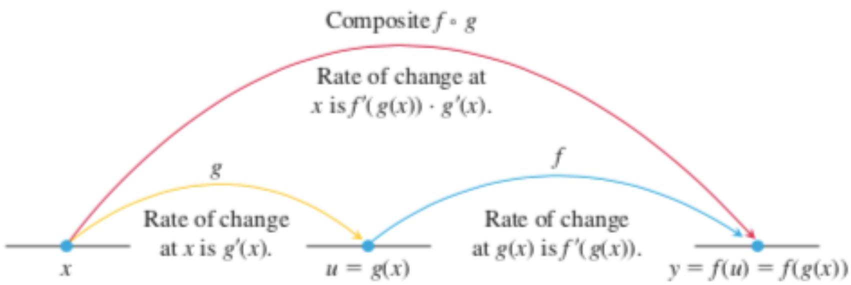
   Dengan menggunakan rumus pembagian pada turunan diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x\,(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{1}{1-\sin x}
\end{aligned}
$$

8.5 Rumus Chain

1. Turunan Fungsi Komposisi

   Turunan dari fungsi komposisi $f\big(g(x)\big)$ di x adalah turunan dari f terhadap $g(x)$ dikalikan dengan turunan dari g terhadap x. Hal ini disebut dengan rumus Chain, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 107 Rumus Chain untuk turunan

Rumus Chain dapat dituliskan dengan:

Jika $f(u)$ adalah terdifferensiasi di titik $u = g(x)$ dan $g(x)$ adalah terdifferensiasi di x, maka fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ adalah terdifferensiasi di x, dan

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Pada notasi Leibniz dengan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka Rumus Chain dituliskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

diman $\frac{dy}{du}$ di evaluasi di $u = g(x)$.

Contoh :

Tentukanlah turunan dari

a. $y = (3x^2 + 1)^2$

b. $x(t) = \cos(t^2 + 1)$

Jawab:

a. Misalkan $y = f(u) = u^2$ dan $u = g(x) = 3x^2 + 1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = 2u$$

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

b. Misalkan $x = \cos u$, dan $u = t^2 + 1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dx}{du} = -sin\, u$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\sin u \cdot 2t \\ &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1) \end{aligned}$$

2. Rumus Chain untuk Fungsi Berpangkat

Jika f terdifferensiasi dari u dan jika u adalah terdifferensiasi dari x, maka dengan mensubstitusi $y = f(u)$ ke rumus Chain, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

menjadi

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \frac{du}{dx}$$

jika n adalah bilanga riil dan f adalah fungsi berpangkat, $f(u) = u^n$, maka turunan berpagkat menunjukkan bahwa $f'(u) = nu^{n-1}$. Jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, maka dengan menggunakan rumus Chain yang disebut dengan Rumus Chain berpangkat berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Contoh:

1) Tentukanlah turunan dari:
   a. $y = (5x^3 - x^4)^7$
   b. $y = \frac{1}{3x-2}$
   c. $y = \sin^5 x$
   d. $y = \cos^7 x$

Jawab:

a. Misalkan $u = 5x^3 - x^4$ dan $n = 7$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du} u^7 = 7u^6 = 7(5x^3 - x^4)^6$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(15x^2 - 4x^4)$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 = 7(5x^3 - x^4)^6 \frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)$$

$$= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^2)$$

$$= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^2)$$

b. Misalkan $u = 3x - 2$ dan $n = -1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^{-1} = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(3x-2)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x - 2) = 3$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{d}{dx}(3x - 2)^{-1}$$

$$= -1(3x-2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x - 2)$$

$$= -1(3x-2)^{-2}(3)$$

$$= -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

c. Misalkan $u = \sin x$ dan $n = 5$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^5 = 5u^4 = 5\sin^4 x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(\sin^5 x) = 5\sin^4 x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= 5\sin^4 x \cos x$$

d. Misalkan $u = \cos x$ dan $n = 7$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^7 = 7u^6 = 7\cos^6 x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(\sin^5 x) \ = 7\cos^6 x \frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= 7\cos^6 x\,(-\sin x)$$
$$= -7\sin x\cos^6 x$$

2) Tentukanlah turunan dari fungsi trigonometri berikut:

a. $y = \ -10x + 3\cos x$

b. $f(x) = sinx\ tanx$

c. $y = \ \frac{\cot x}{1+\cot x}$

Jawab:

a. $y = \ -10x + 3\cos x$

$y' = \ -10.1\, x^{1-1} + 3\,(-\sin x)$

$y' = \ -10\, x^0 - 3\sin x$

$y' = \ -10 - 3\sin x$

b. $f(x) = sinx\ tanx$

Misalkan,

u $= \sin x\,, u' = \cos x$

$v = \tan x\,, v' = sec^2 x$

$f'(x) = u'v + v'u$

$f'(x) = \cos x\tan x + sec^2 xsin\ x$

$$f'(x) = \cos x\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{cos^2 x}\sin x$$

$$f'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x}$$

$f'(x) = \sin x + \tan x\sec x$

c. $y = \ \frac{\cot x}{1+\cot x}$

$$y = \ \frac{\cot x}{1+\cot x} = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Misalkan

$u = \cot x$ maka $u' = -\csc^2 x$

$v = 1 + \cot x$ maka $v' = -\csc^2 x$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-\csc^2 x(1 + \cot x) - (-\csc^2 x)\cot x}{(1 + \cot x)^2}$$

$$y' = \frac{-\csc^2 x - \cot x . \csc^2 x + \csc^2 x \cot x}{(1 + \cot x)^2} = \frac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$$

8.6 Turunan Implisit

1. Definisi Fungsi Implisit dan Turunannya

   Fungsi yang biasa kita sering gunakan adalah fungsi implisit yang biasa dituliskan dengan $y = f(x)$ yaitu bahwa variabel y di ekspresikan oleh x.

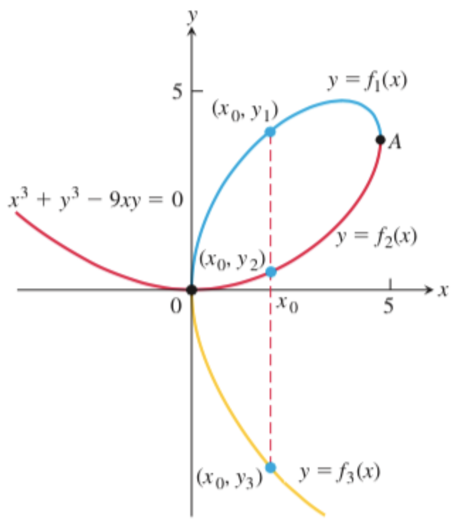
   Bentuk lain dari fungsi diekspresikan dengan fungsi implisit.

   Beberapa bentuk fungsi implisit yaitu:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^3 + xy + y^3 - 10 = 0$$

   Berikut ini bentuk grafik dari fungsi implisit:



Gambar 108 Fungsi implisit

Turunan dari fungsi-fungsi berikut ini dapat dilakukan dengan menentukan $\frac{dy}{dx}$ yaitu dengan turunan implisit.

Turunan dari fungsi implisit ini dapat digunakan untuk menentukan gradien dan garis tangennya.

Contoh :

1) Tentukanlah turunan dari $y^2 = x$

   Jawab :

   Persamaan $y^2 = x$ mendefiniskan dua fungsi terdifferensiasi dari x, yaitu $y_1 = \sqrt{x}$ dan $y_2 = \sqrt{x}$. Dari persamaan ini dapat menentukan setiap turunannya untuk $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   dan

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   misalnya kita hanya memiliki fungsi $y^2 = x$, selanjutnya tentukan nilai $\frac{dy}{dx}$.

   Untuk menentukannya, kita perlu menyederhanakan $y^2 = x$ terhadap x, misalkan $y = f(x)$ sebagai fungsi yang terdifferensiasi dari x:

$$y^2 = x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

   rumus ini memberikan turunan dari kedua solusi eksplisit $y_1 = \sqrt{x}$ dan $y_2 = -\sqrt{x}$.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dan

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Tentukanlah turunan dari

a. $x^2y + xy^2 = 6$

b. $2xy + y^2 = x + y$

c. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

Jawab :

a. $x^2y + xy^2 = 6$

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}(6)$$

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0$$

$$y' = \frac{-2xy - y^2}{2xy + x^2}$$

$$= \frac{-xy - y^2}{xy + x^2}$$

b. $2xy + y^2 = x + y$

$$\frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y)$$

$$2(y + xy') + 2yy' = 1 + y'$$

$$2y + 2xy' + 2yy' = 1 + y'$$

$$2xy' + 2yy' - y' = 1 - 2y$$

$$y'(2x + 2y - 1) = 1 - 2y$$

$$y' = \frac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$$

c. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$2yy' = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$2yy' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

2. Turunan Bertingkat Fungsi Implisit

   Turunan bertingkat hingga turunan ke-n dapat ditentukan dengan menurunkan fungsi yang sudah diturunkan ke $n-1$ kali penurunan. Konsep penurunan dapat dilakukan dengan menggunakan rumus pada turunan pertama secara umum baik dalam operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

   Contoh:

   Tentukanlah turunan kedua dari:

   a. $x^2 + y^2 = 1$

   b. $y^2 = x^2 + 2x$

   Jawab:

   a. $x^2 + y^2 = 1$

   $$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

   $$2x + 2yy' = 0$$

   $$y' = \frac{d}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

   $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = \frac{-y - xy'}{(y)^2}$$

   $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{(y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + \frac{x^2}{y}}{(y)^2} = \frac{-\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

b. $y^2 = x^2 + 2x$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2x)$$

$$2yy' = 2x + 2$$

$$y' = \frac{2x + 2}{2y} = \frac{2(x + 1)}{2y} = \frac{x + 1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x + 1}{y}\right) = \frac{y - y'(x + 1)}{(y)^2} = \frac{y - xy' - y'}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - x\left(\frac{x + 1}{y}\right) - \left(\frac{x + 1}{y}\right)}{y^2} = \frac{y - \frac{x + x}{y} - \frac{x + 1}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\frac{y - x^2 - x - x - 1}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - x^2 - 2x - 1}{y} \times \frac{1}{y^2} = \frac{y - x^2 - 2x - 1}{y^3}$$

3. Garis Tangen dan Garis Normal

Garis tangen merupakan persamaan garis linear sisi miring dari fungsi implisit yang kita miliki. Sedangkan garis normal adalah garis linear yang tegak lurus dengan garis tangen. Untuk menentukan garis tangen dan garis normal pada fungsi implisit, dapat kita tentukan dengan menggunakan turunan pertamanya. Setiap fungsi implisit yang diturunkan sekali, yaitu $\frac{dy}{dx}$ menjadi kunci untuk menentukan persamaan garis tangen maupun garis normal pada titik tertentu dari fungsi implisit yang kita miliki.

Contoh:

1) Tentukan garis kemiringan dan garis normal pada kurva $x^2 + xy - y^2 = 1$, pada titik (2,3) !

Jawab:

$x^2 + xy - y^2 = 1$

$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy - \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1$

$2x + y + \frac{dy}{dx}x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx}x - 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y}$

Masukkan titik (2,3) pada $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y} = \frac{-2.2 - 3}{2 - 2.3} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4} = m = gradien$

Persamaan garis kemiringan dicari menggunakan persamaan:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{7}{4}(x - 2)$

$y - 3 = \left(\frac{7}{4}x - \frac{7}{2}\right)$

$y - 3 = \frac{7}{4}x - \frac{7}{2} + 3$

$y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$

Persamaan garis normal dicari menggunakan persamaan:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Dimana $m\ x\ m_1 = -1$, jadi $\frac{7}{4}\ x\ m_1 = -1 \rightarrow m_1 = -\frac{4}{7}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -\frac{4}{7}(x - 2)$$

$$y - 3 = \left(-\frac{4}{7}x + \frac{8}{7}\right)$$

$$y - 3 = -\frac{4}{7}x + \frac{8}{7} + 3$$

$$y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$$

2) Tentukan Paralel tangents 2 point dari curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ memotong sumbu X

Jawab:

Memotong sumbu x, maka y = 0

$x^2 + xy + y^2 = 7$

$x^2 + x(0) + 0^2 = 7$

$x^2 = 7$

$x = \pm\sqrt{7}$

Point 1 = $\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$

Point 2 = $\left(\sqrt{7},\ 0\right)$

$x^2 + xy + y^2 = 7$

$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}7$

$2x + y + \frac{dy}{dx}x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx}(x + 2y) + 2x + y = 0$

$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$

Point 1 = $\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = \frac{-2x\left(-\sqrt{7}\right) - 0}{\sqrt{7} + 0} = -2$

Point 2 = $(\sqrt{7},\ 0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = \frac{-2x(\sqrt{7}) - 0}{\sqrt{7} + 0} = -2$$

Terbukti bahwa titik-titik tersebut sejajar, dimana nilai kemiringannya sama.

3) Tentukan nilai kemiringan, jika diketahui kurva $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ pada 4 titik yaitu (-3,2), (3,2), (-3,-2), (3,-2) !

Jawab:

$$y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$$

$$\frac{d}{dx}y^4 - \frac{d}{dx}4y^2 = \frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}9x^2$$

$$\frac{dy}{dx}4y^3 - \frac{dy}{dx}8y = 4x^3 - 18x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 18x}{4y^3 - 8y} = \frac{2(2x^3 - 9x)}{2(2y^3 - 4y)} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)}$$

Titik (-3,2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(-3)^3 - 9(-3))}{(2.2^3 - 4.2)} = \frac{-27}{8}$$

Titik (3,2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(3)^3 - 9(3))}{(2.2^3 - 4.2)} = \frac{27}{8}$$

Titik (-3,-2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(-3)^3 - 9(-3))}{(2.(-2)^3 - 4.(-2))} = \frac{-27}{-8} = \frac{27}{8}$$

Titik (3,-2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(3)^3 - 9(3))}{(2.(-2)^3 - 4.(-2))} = \frac{27}{-8}$$

Jadi, Titik (-3,2) & (3,-2) memiliki kemiringan yang sama sehingga garisnya sejajar

Titik (3,2) & (-3,-2) memiliki kemiringan yang sama sehingga garisnya sejajar

4) Tentukanlah garis normal ke kurva $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ di titik (1, 1) dan titik lain yang berpotongan dengan kurva tersebut?

Jawab:

- Fungsi tangen dari kurvanya

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}0$$

$$2x + 2\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = -2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x - 6y) = -2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+y)}{-2(-x+3y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)}{(-x+3y)}$$

- Nilai tangen di titik (1, 1)

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{(x+y)}{(-x+3y)} = \frac{1+1}{-1+3(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

- nilai normal yang berpotongan

$$m \times m_t = -1$$

$$1 \times m_t = -1$$

$$m_t = -1$$

garis normal di titik (1, 1)

$y - y_1 = m_t(x - x_1)$

$y - 1 = -1(x - 1)$

$y - 1 = -x + 1$

$y = -x + 2$

- menentukan fungsi kuadrat dengan mensubstitusi garis normal

  $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$

  $x^2 + 2x(-x + 2) - 3(-x + 2)^2 = 0$

  $x^2 - 2x^2 + 4x - 3(x^2 - 4x + 4) = 0$

  $x^2 - 2x^2 + 4x - 3x^2 + 12x - 12 = 0$

  $-4x^2 + 16x - 12 = 0$

  dibagi dengan -4

  $x^2 - 4x + 3 = 0$

  $(x - 3)(x - 1) = 0$

  akar-akar fungsi kuadrat

  $x - 3 = 0$

  $x = 3$

  dan

  $x - 1 = 0$

  $x = 1$

- Substitusi $x = 3$ ke garis normal $y = -x + 2$ untuk menemukan titik potong lainnya

  $y = -x + 2$

  $y = -3 + 2$

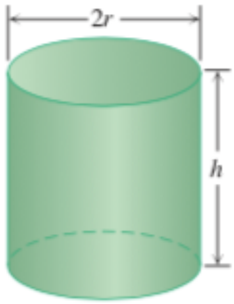
  $y = -1$

Jadi, titik potong lainnya adalah $(3, -1)$

8.7 Aplikasi Turunan: Optimalisasi

Dalam bagian ini, kita akan mempelajari berbagai aplikasi dari turunan diberbagai bidang baik itu di fisika, matematika, ekonomi dan lainnya. Berikut ini conntoh-contoh yang dapat kita pelajari:

1. Anda diminta untuk merancang kaleng satu liter yang berbentuk seperti silinder melingkar siku-siku (Seperti gambar dibawah). Berapakah tinggi dan jari-jarinya yang akan menggunakan bahan paling sedikit?



Gambar 109 Optimalisasi

Jawab:

Volume yang memungkinkan alah satu liter. Jika r dan h dalam ukuran centimeter, maka volumenya dalam bentuk centimeter kubik yaitu:

$$\pi r^2 h = 1000$$

Luas permukaan yang memungkinkan adalah $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Untuk menginterpretasikan bahan yang paling sedikit digunakan, pertama kita sebaiknya menghiraukan ketebalan dari bahannya. Selanjutnya kita hanya menghitung nilai r dan h untuk membuat luas permukaan yang memungkinkan untuk memuat $\pi r^2 h = 1000 cm^3$. Untuk menentukan nilainya maka bentuk volume ini dapat kita ubah menjadi:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

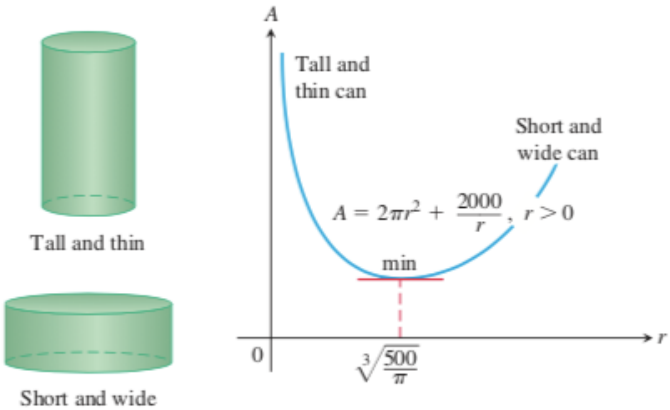
sehingga

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Tujuan kita adalah untuk menemukan nilai $r > 0$ yang meminimalisir nilai A. Gambar berikut ini memberikan beberapa bentuk pilihan yaitu:



Gambar 110 Optimalisasi tabung

Karena A adalah terdifferensiasi di $r > 0$, pada interval tanpa titik akhir, hal ini dapat menunjukkan bahwa nilai minimum yang ada hanya ketika turunan pertama bernilai 0:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$4\pi r^3 = 2000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$$

Selanjutnya turunan kedua menunjukkan

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

adalah bernilai positif melalui domain dari A. Grafik yang ada melengkung ke atas dan nilai dari A di $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ adalah minimum absolut.

Jadi nilai yang memenuhi untuk h adalah

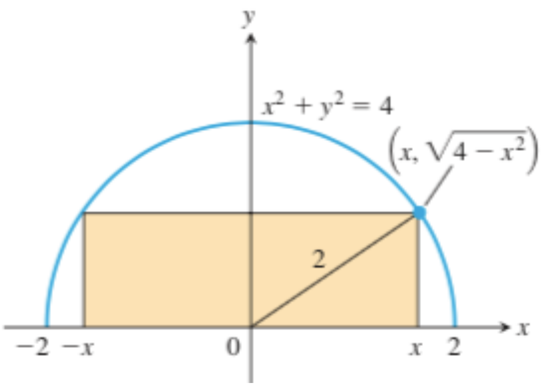
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa satu liter yang ada dapat menggunakan bahan paling sedikit dengan tinggi silinder dua kali jari-jari, yaitu $r = 5{,}42\ cm$ dan $h = 10{,}84\ cm$.

2. Sebuah persegi panjang harus dibuat dalam setengah lingkaran dengan jari-jari 2. Berapakah luas terluas yang dapat dimiliki persegi panjang itu?

   Jawab:

   Misalkan $\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right)$ merupakan titik perpotongan sisi persegi panjang dengan lingkaran seperti pada gambar dibawah ini:



Gambar 111 Grafik fungsi optimalisasi

panjang sisi, tinggi dan luas daerah persegi panjang dapat dituliskan dengan persamaan variabel x yaitu

Panjang : $2x$

Tinggi : $\sqrt{4-x^2}$

Luas : $2x\sqrt{4-x^2}$

Nilai x yang memenuhi adalah di interval $0 \leq x \leq 2$, dimana posisi yang memungkinkan untuk persegi panjang.

Tujuan kita adalah untuk menemukan maksimum absolut dari fungsi yaitu:

$$A(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

pada domain [0,2].

Turunannya adalah

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

ini tidak terdefinisi ketika $x = 2$ dan sama dengan 0 ketika

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4-x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $x = \sqrt{2}$ dan $x = -\sqrt{2}$, hanya $x = \sqrt{2}$ yang berada di dalam domain A dan membuat titik kritis. Jadi nilai A di titik akhir dan di titik kritis adalah

Di titik kritis : $A\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$

Di titik akhir : $A(0) = 0, A(2) = 0$

Jadi luas maksimum adalah 4 ketika persegi panjang memiliki tinggi $\sqrt{2}$ dan panjang $2\sqrt{2}$.

Selanjutnya akan dijabarkan contoh aplikasi turunan di bidang ekonomi. Namun dalam bidang ekonomi ini, perlu kita memisalkan beberapa hal yaitu

$r(x)$: Pendapatan dari penjualan x barang

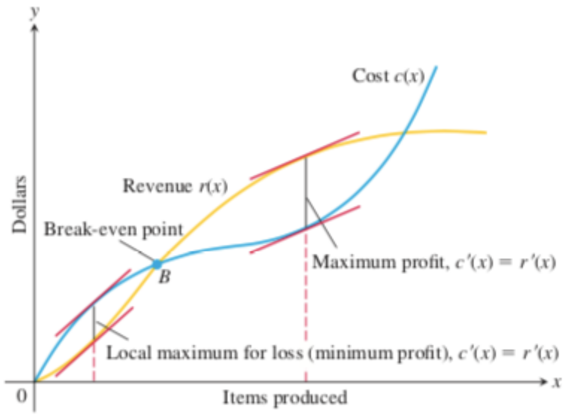
$c(x)$: biaya produksi barang x

$p(x) = r(x) - c(x)$: keuntungan dari memproduksi dan menjual x barang.

Dalam bidang ekonomi biasa disebut dengan marginal pendapatan, marginal pengeluaran dan marginal untung untuk menyebutkan $r'(x)$, $c'(x)$ dan $p'(x)$ secara berturut-turut dari setiap fungsinya.

Jika $r(x)$ dan $c(x)$ terdifferensiasi untuk x dalam selang waktu kemungkinan produksi tertentu, dan jika $p(x) = r(x) - c(x)$ mempunyai nilai maksimum disana, maka ini terjadi pada titik kritis dari $p(x)$ atau titik akhir interval. Jika terjadi pada titik kritis, maka $p'(x) = r'^{(x)} - c'(x) = 0$ dan kita lihat bahwa $r'^{(x)} = c'(x)$. Dalam istilah ekonomi, persamaan ini berarti:

Pada tigkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimal, marginal pendapatan sama dengan marginal pengeluaran. Hal ini dapat digambarkan pada contoh berikut:



Gambar 112 Tingkat produksi

Contoh :

Misalkan $r(x) = 9x$ dan $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ dimana x merepresentasikan setiap produksi satu juta MP3 Players. Adakah level produksi untuk menghasilkan keuntungan maksimu? Jika ya, apakah itu?

Jawab:

Jika $r(x) = 9x$ dan $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ maka $r'(x) = 9$ dan $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$

Mislakan $r'(x) = c'(x)$

$$3x^2 - 12x + 15 = 9$$

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Nilai x yang memenuhi untuk persamaan kuadrat ini adalah

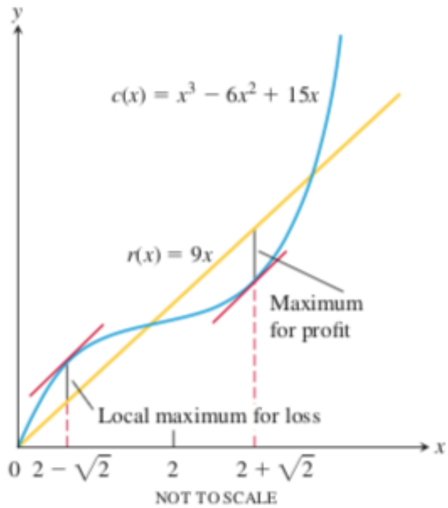
$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$$

jadi produksi yang memungkinkan untuk keuntungan maksimum adalah $x \approx 0.586$ juta MP3 players atau $x \approx 3.414$ juta.

Dengan memperhatikan turunan kedua dari $p(x) = r(x) - c(x)$ adalah $p''(x) = -c''(x)$ karena $r''(x)$ adalah 0 dimanapun. Jadi, $p''(x) = 6(2 - x)$, yang adalah negatif di $x = 2 + \sqrt{2}$ dan positif di $x = 2 - \sqrt{2}$.

Berdasarkan tes turunan kedua, keuntungan maksimum berada pada $x = 3{,}414$ dan kerukian maksimum ketika $x = 0.586$.



Gambar 113 Maksimum Fungsi

4. Rangkuman

1. Turunan dari $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$
2. Turunan dari $f(x) = \cos x$ adalah $f'^{(x)} = -\sin x$
3. Rumus dasar trigonometri ini dituliskan setiap turunannya sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

4. Rumus Chain dapat dituliskan dengan:

Jika $f(u)$ adalah terdifferensiasi di titik $u = g(x)$ dan $g(x)$ adalah terdifferensiasi di x, maka fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ adalah terdifferensiasi di x, dan

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Pada notasi Leibniz dengan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka Rumus Chain dituliskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

diman $\frac{dy}{du}$ di evaluasi di $u = g(x)$.

5. Latihan

1) Tentukanlah Turunan dari fungsi berikut ini:
   a) $\mathrm{y} = x^5 - 0{,}5x^2 + 0{,}25x$
   b) $y = \sqrt{x} + x^5 - \frac{1}{x+1}$
   c) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
   d) $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$
   e) $f(x) = 3\tan^3 x - \sec^3 x$
   f) $s = \cot^3\left(\frac{2}{t}\right)$
2) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari fungsi implisit berikut
   a) $\frac{1}{3}x^2 + 5x^2y - 6y + 3 = 0$
   b) $x^3 - 5xy + 6y^2 - 6 = 0$
   c) $\frac{x^3}{2} + xy^{\frac{2}{3}} + 6x + 5y = 0$
   d) $x^2 - \sqrt{xy} + 5y = 30$
   e) $\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 5x^2y^3 + 5\sqrt{xy} = 0$
3) Tentukanlah Garis tangen dan garis normal dari fungsi berikut

a) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-5} + 6$ pada titik $\left(1, \frac{41}{6}\right)$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$ pada titik $(0{,}30)$

4) Tentukanlah titik yang memenuhi dari fungsi $2x^3 - 3x^2 - 12x - y + 20 = 0$, garis tangennya adalah parallel dengan sumbu x.

5) Tentukanlah titik pada kurva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ dimana tangennya memenuhi:

a) Tegak lurus dengan $y = 1 - \left(\frac{x}{24}\right)$

b) Parallel dengan garis $y = \sqrt{2} - 12x$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah Turunan dari fungsi berikut ini:

a) $s = \left(\frac{4t^3}{t+1}\right)^{-2}$

b) $r = \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$

c) $r = \left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^2$

d) $y = \frac{5}{(5x^2 + \sin 2x^2)^{3/2}}$

e) $y = \left(\sqrt{x} + 5x\right)\left(x^{2/3} + 5x^2\right)^3$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{x^3}{5}\right)^2 \left(x + \sqrt{x}\right)^3$

g) $g(x) = (1 + 2x^2)^{\frac{3}{2}}\left(x - 5\sqrt{x}\right)^3$

2) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari fungsi implisit berikut

a) $x + y^2 + xy = 5$

b) $x^2 + y^2 = 49$

c) $\sqrt{x} + xy - y^2 = 20$

d) $x^2 - 5xy + \sqrt{y} - 10 = 0$

e) $x - y + 10x^2 + xy = 0$

3) Tentukanlah persamaan garis tangen dan garis normal dari kurva $y = 1 + \cos x$ di titik $\left(\frac{\pi}{2,1}\right)$.
4) Tentukanlah persamaan garis tangen dan garis normal pada kurva $x^2 + y^2 = 9$ pada titik $(1,2)$.
5) Buktikanlah bahwa setiap garis normal di setiap garis lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ melewati titik $(0,0)$.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran ini. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.
2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Kontinu Limit Asimtot Epsilon Delta
   Diskontinu Komposisi

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

BIOGRAFI PENULIS

Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc. adalah seorang dosen di Universitas Kristen Indonesia pada program studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Ia menyelesaikan pendidikan sarjananya di Universitas tempat ia bekerja sekarang dan menuntaskan studi magisternya di National Chung Cheng University.

Penulis lahir di tanjung saribu pada tanggal 30 Maret 1994. Buku ini merupakan buku pertama yang ditulisnya dengan bentuk Buku Materi Pembelajaran (BMP) pada mata kuliah Matematika Dasar untuk Program Studi Pendidikan Fisika.

Penulis juga sudah menerbitkan dan menulis beberapa artikel yang terbit di jurnal internasional maupun nasional. Semangat menulis dilakoni sejak duduk di bangku kuliah dengan menulis di blog pribadi.

Dengan adanya karya tulisan seperti ini, diharpkan para pembaca dan memahaminya dan juga dapat mendukung perkembangan ilmu pengetahuan. Setiap karya yang dituliskan dapat diakses di blog penulis maupun di web jurnal yang tersedia. Kegigihan penulis juga dapat dilihat dengan keaktifannya dapat berbagai komunitas untuk meningkatkan kemampuan dan karakter yang berdampak.