BMP.UKI: SCP-01-KL-PMAT-II-2022

BUKU MATERI PEMBELAJARAN
KALKULUS LANJUT

Disusun oleh:

Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

JAKARTA

2021

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan pertolonganNya penulisan Buku Materi Pembelajaran (BMP) Kalkulus Lanjut ini dapat diselesaikan. Terima kasih untuk seluruh dosen dan segenap rekan kerja di Prodi pendidikan Matematika FKIP UKI yang turut membantu dan mendukung proses penulisan buku ini.

Buku ini ditulis untuk membantu proses pembelajaran pada mata kuliah Kalkulus Lanjut yang dapat digunakan oleh seluruh mahasiswa untuk belajar secara mandiri. Selain itu, buku ini dapat juga digunakan di dalam kelas dalam proses tatap muka dengan dosen pengampu dengan menggunakan model pembelajaran berpusat pada mahasiswa atau yang biasa disebut dengan *Student Centered Learning (SCL)*. Kiranya buku ini dapat digunakan dan membantu memaksimalkan proses pembelajaran untuk mencapai kompetensi lulusan yang kreatif, inovatif unggul dan kompeten.

Setiap kritik dan saran yang membangun dapat disampaikan kepada penulis untuk meningkatkan kualitas BMP ini. Kiranya Tuhan memberkati kita semua.

Jakarta, Agustus 2021

Penulis

Santri Chintia Purba

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PETUNJUK PENGGUNA BMP

Bagian ini memuat cara penggunaaan modul supaya peserta didik dapat mencapai tujuan yang diinginkan. Bagian ini juga memuat tentang peran dosen mengenai tata belajar dengan menggunakan modul. Berikut ini dijabarkan petunjuk penggunaan BMP Matematik Dasar yaitu:

a. Petunjuk bagi mahasiswa

   Mahasiswa mengikuti langkah-langkah kegiatan pembelajaran yang sudah ada di dalam modul yaitu dengan memahami materi yang dijabarkan didalam modul baik secara mandiri maupun kelompok. Mahasiswa harus mempersiapkan alat tulis dan alat hitung yang dibutuhkan.

   Waktu pembelajaran yang dibutuhkan disetiap modul adaah sebanyak 2 kali pertemuan, yaitu 4 sks dikali dengan 2. Sehingga total waktu yang dibutuhkan adalah 400 menit per modul.

   Mahasiswa dapat memahami materi dan menyelesaikan soal-soal latihan maupun tugas yang diberikan sesuai dengan waktu yang ditentukan.

   Evaluasi akan dilakukan disetiap akhir satu modul dengan melakukan quis yang diberikan oleh dosen.

   Soal latihan yang dimuat didalam modul ini dapat digunakan untuk evaluasi *self assessment* mahasiswa, untuk melihat sejauh mana pemahaman mahasiswa akan materi yang ada.

   Soal-soal yang tersedia beragam yang terdiri dari soal latihan yang mudah, sedang dan sukar. Sehingga mahasiswa dapat meningkatkn pemahamannya dan kemampuan berpikirnya akan materi dan permasalahan yang ada.

b. Peran dosen

   Dosen sebagai fasilitator pembelajaran mengarahkan peserta didik melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan strategi pembelajaran yang digunakan yaitu *Teacher Centered Learning* (SCL). Dosen menjelaskan tata cara menggunakan modul dan menjelaskan kegiatan pembelajran yang akan dilakukan. Pembelajaran dilakukan dengan kooperatif learning, yaitu mahasiswa membentuk kelompok-kelompok kecil yang terdiri dari 3-4 orang. Anggota kelompok dipilih secara acak dan disesuaikan dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Dosen menjelaskan beberapa materi dan mendiskusikannya bersama mahasiswa, selanjutnya mahasiswa akan melakukan diskusi kelompok sesuai dengan topik dan bahan diskusi yang diberikan.

Dosen akan memperhatikan kondisi diskusi peserta didik dan peserta didik dapat bertanya kepada dosen jika ada materi yang sulit untuk dipahami.

Selanjutnya dosen uga berperan mengevaluasi proses pembelajaran yang dilakukan dengan menggunakan isntrumen yang disusun yaitu dengan melakukan quiss di setiap akhir topik yang diselesaikan.

CAPAIAN PEMBELAJARAN LULUSAN

Sikap

1 S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

2 S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

3 S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

4 S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

5 S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

6 S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

7 S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

1. KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
2. KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
3. KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
4. KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

1. KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
2. KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
3. KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
4. KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

1. P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.
2. P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari
3. P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

	UNIVERSITAS KRISTEN Indonesia FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA				
RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER					
MATA KULIAH	KODE	Rumpun MK	BOBOT (sks)	SEMESTER	Tgl Penyusunan
KALKULUS LANJUT	131534910	MATEMATIKA.	4	III	13 Agustus 2021
OTORISASI	Pengembang RPS		Koordinator RMK		Ka. PRODI
	Tim Penyusun RPS: Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.		Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.		Stevi Natalia, M.Pd.
Capaian Pembelajaran (CP)	CPL				
	Sikap 8 S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius 9 S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.				

		10 S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan. 11 S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik. 12 S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri; 13 S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas. 14 S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah Keterampilan Umum 5. KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya 6. KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur 7. KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya

berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

8. KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

5. KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
6. KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.
7. KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika
8. KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

4. P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika,

		program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri. 5. P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari 6. P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.
	CPMK	
		1. Mahasiswa mampu memahami kompetensi yang akan dicapai pada matakuliah Kalkulus Dasar, menganalisis bahan/materi, jadwal perkuliahan, mentaati kontrak kuliah dan menyelesaikan tugas tepat waktu serta membuat rencana program belajar mandiri maupun kelompok berdasarkan hasil analisis, serta mampu menunjukkan penghayatan dan pengamalan nilai-nilai kristiani. 2. Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Tekni Pengintegralan, Persamaan Differensial orde pertama dan kedua, Barisan dan Deret tak Hingga, Persamaan Parametrik dan Koordinat Polar, Vectors and the geometry of space, Vector-valued functions and Motion in space, Turunan Parsial, Integral Lipat dua dan lipat tiga.

Deskripsi Singkat MK	Mata kuliah ini dimaksudkan untuk memberi kemampuan pada mahasiswa tentang konsep-konsep matematika mengenai Teknik integral, Persamaan Differensial orde pertama dan kedua, Barisan dan Deret tak Hingga, Persamaan Parametrik dan Koordinat Polar, Vectors and the geometry of space, Vector-valued functions and Motion in space, Turunan Parsial, Integral Lipat dua dan lipat tiga, dan Integral pada Vektor	
Bahan Kajian	Teknik integral, Persamaan Differensial orde pertama dan kedua, Barisan dan Deret tak Hingga, Persamaan Parametrik dan Koordinat Polar, Vectors and the geometry of space, Vector-valued functions and Motion in space, Turunan Parsial, Integral Lipat dua dan lipat tiga, dan Integral pada Vektor.	
Pustaka	Utama:	
	a. Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.	
	Pendukung: 1. Varberg, Rurcell, Rigdon. *Kalkulus.* Jakarta: Erlangga.	
Media Pembelajaran	Perangkat lunak:	Perangkat keras:
	Microsoft Teams	Laptop Spidol board marker Whiteboard

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="7">Poster
LCD</td></tr>
<tr><td colspan="2">Team Teaching</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Matakuliah syarat</td><td colspan="8">KALKULUS DASAR (113241011)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mg Ke-</td><td rowspan="2">Sub-CP-MK (Kemampuan Akhir yang Direncanakan)</td><td rowspan="2">Bahan Kajian (Materi Pembelajaran)</td><td rowspan="2">Bentuk dan Metode Pembelajaran (Media & Sumber Belajar)</td><td rowspan="2">Estimasi Waktu</td><td rowspan="2">Pengalaman Belajar Mahasiswa</td><td colspan="3">Penilaian</td></tr>
<tr><td>Kriteria</td><td>Indikator</td><td>Bobot</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(3)</td><td>(4)</td><td>(5)</td><td>(6)</td><td>(7)</td><td>(8)</td><td>(9)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Mahasiswa mampu memahami kompetensi yang akan dicapai pada matakuliah Kalkulus Dasar, menganalisis bahan/materi, jadwal</td><td>1. Perkenalan
2. Kontrak kuliah/aturan kesepakatan</td><td>Lecture (ceramah)
Ekspositori
Brainstorming</td><td>200’</td><td>Interaksi akrab dosen dengan mahasiswa dan sesama mahasiswa.</td><td>Kognitif
Afektif</td><td>Partisipatif
Motivasi belajar</td><td>%</td></tr>
</table>

	perkuliahan, mentaati kontrak kuliah dan menyelesaikan tugas tepat waktu serta membuat rencana program belajar mandiri maupun kelompok berdasarkan hasil analisis, serta mampu menunjukkan penghayatan dan pengamalan nilai-nilai kristiani.	3. Hak dan Kewajiban Mahasiswa 4. Motivasi dan Rencana Belajar 5. Penjelasan RPS 6. Review Kalkulus Dasar	Tanya-jawab Diskusi Pemberian contoh		Mahasiswa termotivasi untuk belajar mandiri. Mahasiswa siap bekomitmen. Mahasiswa dapat memper siapkan materi materi selanjutnya		Kesediaan berkomitmen Tanggungjawab	
2-3	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang	1. Integration by parts 2. Trigonometric integrals	Ekspositori Problem Based	200’	Mahasiswa mampu melakukan pengintegralan	Kognitif Afektif Psikomotor	Partisipatif Diskusi	5%

	mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Teknik Pengintegralan	3. Trigonometric substitutions 4. Integration of rational functions by partial fractions 5. Integral tables and computer algebra systems 6. Numerical ntegration 7. Improper integrals	Learning Diskusi Project		dengan dengan teknik integral seperti integral parsial dan substitusi pada fungsi umum dan trigonometri Mahasiswa mampu menggunakan teknik pengintegralan pada fungsi rasional maupun fungsi umum dengan	(Unjuk kerja)	Penugasan Quiz 1	

					menggunakan aplikasi komputer maupun berbasis website Tugas : Exercises 8.1-8.7			
4-5	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi	1. First-Order linear equations 2. Applications 3. Graphical Solutions of Autonomous Equations	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami Persamaan differesial berorde satu beserta aplikasinya	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis 2	5%

	dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Persamaan Differensial orde pertama	4. Systems of equations and phase planes			Mahasiswa mampu memanfaatkan dan menggunakan teknologi untuk menggambar grafik untuk solusi dari persamaan *autonomous* Tugas : Exercises 9.2, 9.3 9.4 and 9.5			
6-7	Mahasiswa mampu menguasai konsep,	8. Sequences 9. Infinite series	Ekspositori Problem	2x200’	Mahasiswa memahami	Kognitif Afektif	Partisipatif	7%

	prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Barisan dan Deret tak hingga	10. The integral test 11. Comparison test 12. The rasio and Root tests 13. Alternating series, absolute and conditional convergence 14. Power series 15. Taylor and Maclaurin Series 16. Convergence of Taylor series 17. The binomial series and applications of Taylor series	Based Learning Diskusi Project		barisan dan sifat-sifatnya Mahasiswa menentukan deret tak hingga Mahasiswa dapat menganalisis dan menggunakan tes integral, tes komparasi, tes perbandingan dan akar Mahasiswa membuktikan	Psikomotor (Unjuk kerja)	Penguasaan konsep Penugasan Quis 3	

					dan menggunakan alternating series, absolute dan kondisi kekonvergenan Mahasiswa mampu membedakan, menganalisis dan menggunakan power series, Taylor and Maclaurin			

					series Menentukan dan menganalisis Kekonvergenan dari Taylor series, Binomial series dan aplikasi dari Taylor series. Tugas : Exercises 10.1-10.10			
8	UTS/Project 1							

9-10	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada Persamaan Parametrik dan Koordinat Polar	1. Parametrizations of plane curves 2. Calculus with parametric curves 3. Polar coordinates 4. Graphing in polar coordinates 5. Areas and lengths in polar coordinates 6. Conic sections	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	2x200’	Mahasiswa dapat menentukan nilai tangen atau kemirungan sebuah dungsi dengan menentukan turunan fungsi Mahasiswa mampu menggunakan aturan-aturan dalam penurunan fungsi	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quis 4	7%

		7. Conics in polar coordinates			Mahasiswa mengaplikasikan turunan Mahasiswa menguasai konsep turunan dalam fungsi trigonometri Exercises : 11.1-11.7			
11-12	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan	1. Three-Dimensional coordinate systems 2. Vectors 3. The dot product	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi	2x200’	Mahasiswa memahami dan menganalisis sistem koordinat dimensi 3	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penugasan Diskusi Quis 5	5%

	masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada *Vectors and the geometry space*	4. The cross product 5. Lines and planes in space 6. Cylinders and Quadric Surfaces	Project		Mahasiswa menguasai konsep vektor, perkalian titik dan perkalian silang Mahasiswa memahami konsep vektor garis dan bidang di dalam ruang. Mahasiswa memahami Permukaan Silinder dan		**Project 1**	**25%**

					kuadrik Tugas : Exercises 12.1-12.6			
13-14	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi	1. Curves in space and their tangents 2. Integrals of vector functions ; Projectile motion 3. Arc Length in space 4. Curvature and normal vectors	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	2x200’	Mahasiswa memahami grafik dalam ruang dan nilai kemiringannya Mahasiswa menentukan integral dari fungsi vektor Mhasiswa menentukan panjang busur	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasn Quis 6	7%

	Fungsi Nilai vektor dan gerak dalam ruang	of a curve 5. Tangential and normal components of acceleration 6. Velocity and acceleration in polar coordinates.			di dalam ruang Mahasiswa menentukan vektor kelengkungan dan normal dari kurva, nilai tangen dan komponen normalnya pada percepatan serta menentukan kecepatan dan percepatan pada koordinat			

					polar. Tugas : Exercises 13.1-13.6			
15	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan,	1. Functions of several variables 2. Limits and continuity in higher dimension 3. Partial derivatives	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa mampu mengkonstruksikan pemahamannya tekait dengan turunan, limit dan kekontinuan pada dimensi yang tinggi.	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quiz 7	7%

	menganalisis konsep-konsep pada materi Turunan Parsial	4. The chain rule 5. Directional derivatives and gradient vectors 6. Tangents planes and differentials 7. Extreme values and saddle points 8. Lagrange multipliers 9. Taylors formula for			Mahasiswa mampu menganalisis dan menggunakan teorema dan formula pada turunan parsial beserta aplikasinya. Tugas : Exercises 14.1-14.10			

		two variables 10. Partial derivatives with constrained variables						
16	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan,	1. Double and iterated integrals over rectangles 2. Double integrals over general regions 3. Area by double integration 4. Double integral in polar form	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	2x200’	Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan perhitungan pada integral lipat dua dan lipat tiga Mahasiswa mampu	Kognitif Afektif Psikomo tor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penugasan Diskusi **Project 2 (Final Project)**	% 25%

	menganalisis konsep-konsep pada materi Integral Lipat	5. Triple integral in rectangular coordinates 6. Moments and centers of mass 7. Triple integrals in cylindrical and spherical coordinates 8. Substitutions in multiple integrals			menggunakan konsep pada integral lipat beserta teknik penggunaannya (aplikasinya) Tugas : Exercises 15.1-15.8			

PENILAIAN : Tugas : 20%, Quis : 20%, Project 1: 25%, Final Project : 25%, Afektif : 10%

CONTOH RANCANGAN TUGAS MAHASISWA

<table>
<tr><td>MATA KULIAH</td><td>:...</td></tr>
<tr><td>SEMESTER</td><td>:…………………….. ………… sks   : ………</td></tr>
<tr><td>MINGGU KE</td><td>:………………………………… Tugas ke :</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tujuan Tugas:

Uraian Tugas:

a. Objek Garapan
b. Yang harus dikerjakan dan batasan-batasan
c. Metode/cara pengerjaan, acuan yang digunakan
d. Deskripsi luaran tugas yang dikerjakan

Kriteri Penilaian:</td></tr>
</table>

PENILAIAN

Penilaian capaian pembelajaran dilakukan pada ranah sikap, pengetahuan dan keterampilan secara rinci dijelaskan sebagai berikut:

1. Penilaian ranah sikap dilakukan melalui observasi berdasarkan kedisiplinan mengumpulkan tugas dan hadir dikelas , penilaian diri, penilaian antar mahasiswa (mahasiswa menilai kinerja rekannya dalam satu bidang atau kelompok), dan penilaian aspek pribadi yang menekankan pada aspek beriman, berakhlak mulia, percaya diri, disiplin dan bertanggung jawab dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial, alam sekitar, serta dunia dan peradabannya.
2. Penilaian ranah pengetahuan melalui berbagai bentuk tes tulis dan tes lisan yang secara teknis dapat dilaksanakan secara langsung maupun tidak langsung. Secara langsung maksudnya adalah keaktifan langsung dikelas ketika tatap muka. Sedangkan secara tidak langsung, misalnya menggunakan lembar-lembar soal ujian tulis.
3. Penilaian ranah keterampilan melalui penilaian kinerja yang dapat diselenggarakan melalui projek yang memungkinkan mahasiswa untuk dapat meningkatkan kemampuan keterampilannya.

Contoh penilaian project mahasiswa yaitu berdasarkan Capaian belajar yang diukur:

- ✓ Kemampuan memilih artikel jurnal bereputasi dan mutakhir sesuai dengan tema dampak polusi industri;
- ✓ Kemampuan meringkas artikel jurnal dengan tepat dan benar.

Tabel 1. Penilaian Project

No	Aspek Penilaian Skor	Artikel-1		Artikel-2		Artikel-3	
		Tinggi (6-10)	Rendah (1-5)	Tinggi (6-10)	Rendah (1-5)	Tinggi (6-10)	Rendah (1-5)
1	Artikel berasal dari journal terindek dalam kurun waktu 3 tahun tarakhir.						
2	Artikel berkaitan dengan materi mata kuliah						
3	Ketepatan meringkas isi bagian-bagian penting dari abstrak artikel						
5	Ketepatan meringkas konsep pemikiran penting dalam artikel						
6	Ketepatan meringkas pembahasan hasil penelitian dalam artikel						
7	Ketepatan menggunakan simpulan hasil penelitian dalam artikel						

10	Ketepatan menuliskan project berupa tulisan baru berdasarkan artikel yang ada.						
Jumlah skortiap ringkasan artikel							
Rata-rata skor yang diperoleh							

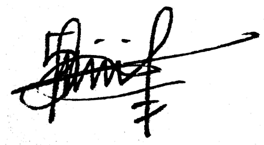
PELAPORAN PENILAIAN

Pelaporan penilaian berupa kualifikasi keberhasilan mahasiswa dalam menempuh suatu mata kuliah yang dinyatakan dalam kisaran seperti pada table berikut.

Tabel 2. Kategori Penilaian

Rentang Skor	80,0-100	75,0-79,9	70,0-74,9	65,0-69,9	60,0-64,9	55,0- 59,9	50,0-54,9	45,0-49,9	<49,9
Nilai Huruf	A	A-	B+	B	B-	C+	C	D	E
Nilai Angka	4	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,0	0

Jakarta, 13 Agustus 2021

Mengetahui,	Disusun oleh,
Ketua Program Studi	Dosen Pengampu
	
Stevi Natalia, M.Pd.	Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

KONTRAK PERKULIAHAN

Kontrak perkuliahan merupakan kesepakatan antara dosen pengampu mata kuliah dengan mahasiswa yang ditanda tangani oleh ketua kelas. Adapun kontrak perkuliahan di dalam mata kuliah Matematika Dasar Prodi pendidikan Matematika Semester Gasal TA 2021/2022 yaitu :

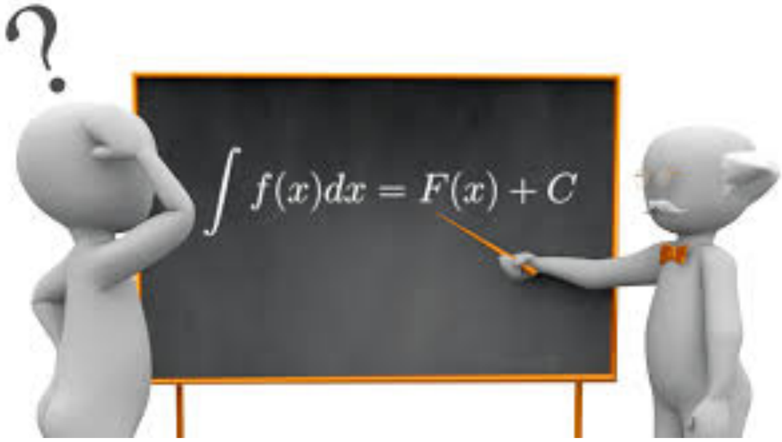
1. Setiap Mahasiswa memiliki BMP
2. Keterlambatan paling lama 10 menit.
3. Setiap tugas dikumpulkan ontime sesuai dengan deadline yang disepakati, konsekuensi telat pengurangan nilai -5 dihari yang sama, -10 lebih dari sehari.
4. Perkuliahan diawali dengan Doa yang dipimpin secara bergantian.
5. Setiap mahasiswa bersedia ditempatkan dikelompok yang disusun oleh dosen.
6. Evaluasi Pembelajaran dilakukan dengan Quis, Penugasan dan Project.
7. Perkuliahan online dilakukan dengan 2 sks dosen menjelaskan, 2 sks mahasiswa mandiri atau diskusi melalui BMP yang sudah disediakan.

Demikianlah kontak perkuliahan ini disusun untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya. Untuk hal-hal kesepakatan lainnya dapat diatur kemudian sesuai dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Disepakati oleh,

Dosen Pengampu Mata Kuliah	**Ketua Kelas**
Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc.	**Jefry Samuel**
NIP/NIDN : 191660/0330039402	**2013150008**

MODUL 1 TEKNIK PENGINTEGRALAN



MODUL 1 TEKNIK PENGINTEGRALAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Modul ini memuat berbagi teknik pengintegralan yang dapat digunakan untuk mengevaluasi berbagai bentuk integral. Teknik pengintegralan yang dijabarkan dapat dipahami oleh mahasiswa untuk memecahkan berbagai macam persoalan dengan tingkat kesulitan yang bervariasi. Materi teknik pengintegralan yang dimuat didalam modul ini diantaranya rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi, integral fungsi rasional, integral tabel, integral numerik dan peluang.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Satu

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral.

5. Kegunaan Modul Satu

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan teknik pengintegralan. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai teknik integral untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi, integral fungsi rasional, integral tabel, integral numerik dan peluang.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 1 : Menguasai konsep rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

1.1 Penggunaan Rumus Integrasi Dasar

Tabel 1.1 merangkum bentuk-bentuk integral tak-tentu untuk beberapa fungsi yang sudah dipelajari, dan metode subtitusi membantu kita untuk menggunakan table tersebut dalam penghitungan fungsi-fungsi yang lebih rumit yang melibatkan fungsi-fungsi dasar tersebut. Dalam bagian ini, kita menggabungkan aturan subtitusi dengan metode – metode aljabar dan identitas – identitas trigonometri untuk membantu kita menggunakan table 1.1. Adapun tabel 1.1 dibawah ini:

TABEL 1.1 Rumus integrasi dasar
1. $\int k\ dx = kx + C$ (Sembarang bilangan K)
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (n $\neq -1$)
3. $\int \frac{dx}{x}$ = ln |x| + C
4. $\int e^x\ \ dx = e^x + C$
5. $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a}$ + C (a > 0, a≠ 1)
6. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$
8. $\int sec^2 dx = \tan x + C$
9. $\int csc^2\ x\ dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\ dx = \ln \| \sec x \|$ + C
13. $\int \cot x\ dx = \ln \| \sin x\| + C$
14. $\int \sec x\ dx = \ln \| \sec x + \tan x\| + C$
15. $\int \csc x\ dx = -\ln \| \csc x + \cot x\| + C$
16. $\int \sinh x\ dx = \cosh x + C$
17. $\int \cosh x\ dx = \sinh x + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (a > 0)
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (x > a > 0)

Contoh 1:

Lengkapi bentuk kuadrat untuk menghitung $\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}$

Penyelesaian: kita melengkapi bentuk kuadrat untuk menyederhanakan penyebut:

$8 - x^{\,2} = -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16)$

$= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x - 4)^2$

kemudian,

$\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}}$

$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ a = 4, u = (x – 4), du = dx

$= sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + \text{C}$ (Tabel 8.1. Rumus 18)

$= sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C$

Contoh 2:

Carilah $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\sin x}$

Penyelesaian: kita mengalikan pembilang dan penyebut dari integran dengan 1 + sin x, yang secara sederhana merupakan perkalian dengan suatu pecahan yang senilai dengan bilangan satu.

Prosedur ini mengubah integral semula menjadi suatu integral yang dapat kita hitung, yaitu:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\sin x} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\, \mathrm{dx}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{1-sin^2 x}\, \mathrm{dx}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{cos^2 x}\, \mathrm{dx}$$

$$= \int_0^{\pi/4} (sec^2\, x + \sec x \tan x)\, dx \quad \text{(gunakan tabel 1.1 rumus 8 dan 10)}$$

$$= [\tan x + \sec x]_0^{\pi/4} = (1 + \sqrt{2} - (0 + 1) = \sqrt{2}$$

Contoh 3:

Hitunglah $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \cos x\, dx$

Penyelesaian: Tidak ada subtitusi dan manipulasi aljabar yang dapat digunakan di sini. Akan tetapi, kita melihat bahwa interval integrasi berupa interval simetris $[-\pi/2, \pi/2]$. Lebih jauh, faktor x^3 adalah fungsi ganjil, dan cos x adalah fungsi genap sehingga hasil kali kedua fungsi tersebut berupa fungsi ganjil. Dengan demikian, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \cos x\, dx = 0$.

1.2 Integrasi Parsial

Integrasi Parsial merupakan suatu teknik untuk menyederhanakan integral berbentuk $\int f(x)g(x)dx$. Integrasi ini berguna ketika *f* dapat didiferensiasikan berkali-kali dan *g* dapat diintegrasikan berkali-kali tanpa kesulitan. Integral

$\int x \cos x \, dx$ dan $\int x^2 e^x \, dx$ merupakan contoh integral yang demikian karena *f* (x) = x atau *f* (x) = x^2 dapat didiferensiasikan berkali-kali sampai turunannya bernilai nol, sedangkan *g*(x) = cos x atau *g*(x) = e^xdapat diintegrasikan berkali-kali tanpa kesulitan. Integrasi parsial juga dapat digunakan pada intergral seperti $\int \ln x \, dx$ dan $\int e^x \cos x \, dx$.

Pada kasus pertama *f* (x) = ln x mudah didiferensiasikan dan *g*(x) = 1 mudah diintegrasikan terhadap x. Pada kasus kedua, setiap bagian dari integran terlihat kembali setelah didiferensiasikan atau diintegrasikan berulang-ulang.

a. Aturan Hasil Kali pada Bentuk Integral

Jika *f* dan *g* fungsi yangterdiferensiasikan terhadap *x*, maka Aturan Hasil Kali mengatakan bahwa $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$= *f'*(x)g(x) + *f* (x)*g'*(x).

Dalam bentuk Integral tak-tentu, persamaan ini menjadi $\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int [f'(x)g(x) + (x)g'(x)]dx$

atau

$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx$=$\int [f'(x)g(x)]dx$ +$\int f(x)g'(x)dx$. Dengan menyusun ulang suku-suku pada persamaan terakhir ini, kita dapatkan

$\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx - \int f'(x)g(x)dx,$ yang mengarahkan kita kepada rumus **Integrasi Parsial**

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Terkadang rumus tersebut lebih mudah diingat jika rumus dituliskan dalam bentuk diferensial. Misalkan u = *f* (x) dan *v*= g(x), maka du = *f'*(x) *dx* dan *dy* = *g'*(x) *dx*. Dengan menggunakan Aturan subtitusi, rumus untuk integrasi parsial menjadi:

Rumus Integrasi Parsial:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad (2)$$

Contoh 1:

Carilah $\int x \cos x \, dx$

Penyelesaian: kita menggunakan rumus $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ dengan *u* = *x*, *dv* = cos *x dx*, *du* = *dx*, *v* = sin *x*.

Jadi: $\int x \cos x \, dx$ = $x \sin x - \int \sin x \, dx$ = $x \sin x + \cos x + c.$

Ada empat pilihan yang tampak jelas untuk *u* dan *dv* dalam contoh 1.

a. Misalkan *u* = 1 dan *dv* = *x* cos *x dx*

b. Misalkan *u* = *x* dan *dv* = cos *x dx* (Ini yang digunakan pada contoh 1)

c. Misalkan *u* = *x* cos *x* dan *dv* = *dx*

d. Misalkan *u* = cos *x* dan *dv* = *x dx*

Pilihan a, c dan d membawa kita ke integrasi yang tidak diketahui cara mengintegrasikannya. Contohnya, *du* = (cos $x - x \sin x)\, dx$ mengarahkan kita kepada integral $\int (x \cos x - x^2 \sin x)\, dx$.

Tujuan integrasi adalah untuk membawa integral $\int u\, dv$ yang semula tidak diketahui cara penghitungannya ke integral $\int v\, du$ yang dapat kita hitung. Secara umum, Anda terlebih dahulu memilih *dv* dari integran, dengan memasukkan *dx*, yang dapat dengan mudah diintegrasikan; sedangkan u adalah bagian yang tersisa pada integran. Sembarang anti turunan dapat digunakan untuk mencari *v* dari *dv*, tetapi biasanya kita mengambil yang paling sederhana; dan pada *v* tidak diperlukan konstanta integrasi karena konstanta integrasi akan dihapuskan pada ruas kanan persamaan (2).

Contoh 2:

Carilah $\int \ln x \, dx$

Penyelesaian: Karena $\int \ln x \, dx$ dapat ditulis sebagai $\int \ln x.1 \, dx$, kita menggunakan rumus $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ dengan *u* = ln *x*, du = $\frac{1}{x}$ dx, *dv* = *dx* dan *v* = *x*

Kemudian, dari Persamaan (2) diperoleh

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x.\frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

Terkadang kita harus menggunakan integrasi parsial lebih dari satu kali.

b. Perhitungan Integral Tentu menggunakan Integrasi Parsial

Untuk menghitung integral tentu menggunakan integral parsial, rumus intergrasi tak-tentu dalam persamaan (1) dapat dikombinasikan dengan bagian 2 teorema dasar. Dengan mengasumsikan bahwa *f'* dan g*'* kontinu pada interval [a,b], Bagian 2 Teorema dasar memberikan

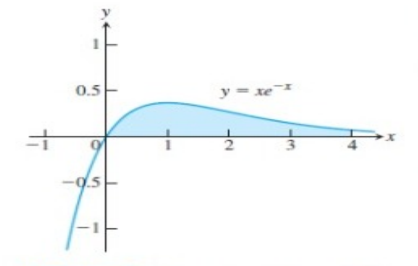
Rumus Integrasi Parsial Untuk Integral Tentu

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \qquad (3)$$

Contoh 3:

Carilah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = xe^{-x} dan sumbu-x dari x = 0 ke x = 4

Penyelesaian: Daerah termasuk diarsir pada gambar dibawah ini



Gambar 1 Luas daerah contoh

Luasnya adalah $\int_0^4 xe^{-x}\,dx$

Misalkan u = x, dv = $e^{-x}\,dx, v = -e^{-x}, dan\ du = dx.$ Maka,

$\int_0^4 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}|_0^4 - \int_0^4(-e^{-x})dx$

$= [-4e^{-4} - (-0e^{-0})] + \int_0^4 e^{-x}\ dx$

$= -4e^{-4} - e^{x}|_0^4$

$= -4e^{-4} - (e^{-4} - e^{-0}) = 1 - 5e^{-4} \approx 0{,}91$

c. Integrasi yang Tersusun dalam Tabel untuk Menyederhanakan Integrasi Berulang

Kita telah melihat bahwa integral berbentuk $\int f(x)g(x)dx$, di mana f dapat didiferensiasikan berkali- kali hingga menjadi nol dan 9 dapat diintegrasikan berkali- kali tanpa kesulitan, merupakan kandidat alami untuk integrasi parsial. Akan tetapi, jika diperlukan banyak pengulangan integrasi, maka lambing dan perhitunganna menjadi tidak praktis atau anda memilih subtitusi untuk integrasi parsial berulang yang hasilnya adalah integral yang semula anda cari. Dalam situasi seperti ini, terdapat cara yang bagus untuk mengorganisasikan perhitungan guna mencegah kesulitan dan menyederhanakan pekerjaan. Cara ini disebut integrasi yang tersusun dalam tabel (tabular integration).

Contoh 4:

Hitunglah $\int x^2 e^x \, dx$.

Penyelesaian: dengan *f(x)* = x^2 dan g(x) = e^x, kita tuliskan daftar berikut

$f(x) dan\ turunannya$		$g(x)$ dan integralnya
x^2	(+)	e^x
2x	$(-)$	e^x
2	(+)	e^x
0	$(-)$	e^x

Kita menggabungkan hasil kali fungsi yang dihubungkan dengan tanda panah sesuai dengan tanda operasi di atas panah untuk mendapatkan

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

1.3 Integral Fungsi Trigonometri

Integral fungsi Trigonometri melibatkan kombinasi aljabar dari enam Fungsi trigonometri dasar. Pada Prinsipnya, Kita selalu dapat menyatakan integral tersebut dalam sinus dan kosinus, tetapi sering kalilebih sederhana apabila dikerjakan menggunakan fungsi lain, seperti pada integral

$$\int sec^2 x \, dx = tan\, x + C$$

Gagasan umumnya adalah menggunakn identitas trigonometri untuk mengubah integral yang harus dicari menjadi integral yang lebih mudah dikerjakan.

a. Hasil Kali dari Pemangkatan Sinus dan Kosinus

Kita mulai dari integral berbentuk $\int sin^m x\, cos^n x\, dx$, dengan m dan n adalah bilangan bulat tak-negatif (Positif atau nol). Kita dapat membagi subtitusi yang sesuai menjadi tiga kasus dengan memperhatikan apakah m dan n berupa bilangan ganjil atau genap.

Kasus 1 Jika m ganjil, kita menuliskan m sebagai 2k + 1 dan menggunakan identitas $sin^2 x$ = 1 $- cos^2$ untuk memperoleh:

$$sin^m x = sin^{2k+1} x = (sin^2 x)^k \sin x = (1 - cos^2 x)^k \sin x. \quad (1)$$

Kemudian, kita gabungkan $\sin x$ yang tunggal dengan dx pada integral dan menetapkan $\sin x\, dx$ sama dengan $-d(\cos x)$

Kasus 2 Jika m genap dan n ganjil pada $\int sin^m\, x\, cos^n\, x\, dx$, kita menuliskan n sebagai 2k + 1 dan menggunakan $cos^2\, x = 1 - sin^2 x$ untuk memperoleh

$$cos^n\, x = cos^{2k+1} x = (cos^2 x)^k \cos x = 1 - sin^2 x)^k \cos x.$$

Kemudian Kita gabungkan cos x yang tunggal dengan dx dan menetapkan $\cos x\, dx$ sama dengan $d(\sin x)$

Kasus 3 Jika m dan n keduanya genap pada $\int sin^m\, x\, cos^n\, x\, dx$,

kita substitusikan

$$sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},\ cos^2\, x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Untuk mereduksi integran menjadi fungsi dalam cos 2x yang pangkatnya lebih rendah dari pangkat semula.

Contoh 1:

Hitunglah $\int sin^3\ x\ cos^2\ x\ dx$

Penyelesaian: integral ini merupakan contoh untuk kasus

$\int sin^3\ x\ cos^2\ x\ dx\ = \int sin^2\ x\ cos^2\ x \sin x\ \ dx$ m ganjil

$= \int (1 - cos^2\ x)\ (cos^2 x)\ (-d(\cos x))$

$= \int (1 - u^2)(u^2)(-du)$ u = cos x

$= \int (u^4 -\ u^2)\ du$ kalikan suku-sukunya

$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{cos^5 x}{5} - \frac{cos^3 x}{3} + C.$

Contoh 2:

Hitunglah $\int cos^5 x\ dx.$

Penyelesaian: Integral ini merupakan contoh untuk kasus 2, di mana m = 0 adalah genap dan n = 5 adalah ganjil.

$\int cos^5 x\ dx = \int cos^4 x\ \ \cos x\ dx = \int (1 -\ sin^2 x)^2\ d(sinx)$ → *cos x dx =d(sin x)*

$= \int (1 -\ u^2)^2 du$ → *u = sin x*

$= \int (1 -\ 2u^2 +\ u^4 du$ →kuadratkan 1 $-u^2$

$= u - \frac{2}{3}\ u^3 + \frac{1}{5}\ u^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\ sin^3 x + \frac{1}{5}\ sin^5 x + C$

Contoh 3:

Hitunglah $\int sin^2\ xcos^4\ x\ dx$

Penyelesaian: Integral ini merupakan contoh dari Kasus 3.

$\int sin^2 x\ cos^4 x\ dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$ → m dan n keduanya genap

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x + cos^2 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - cos^2 2x - cos^3 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int (cos^2 2x + cos^3 2x)\ dx\right]$$

Untuk suku yang melibatkan $cos^2 2x,$ kita gunakan

$\int cos^2\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\ dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$ → dengan mengabaikan konstanta integrasi sampai hasil terakhir.

Untuk suku $cos^3 2x$, kita dapatkan

$\int cos^3\ 2x\ dx = \int (1 - sin^2 2x)\ \cos 2x\ dx$ → $u = \sin 2x$, $du = 2\cos 2x\ dx$

$= \frac{1}{2}\int (1-u^2)\ du = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\ sin^3\ 2x\right)$ → dengan mengabaikan konstanta C lagi.

Dengan menggabungkan semuanya dan menyederhanakan, didapatkan

$$\int sin^2 x\ cos^4 x\ dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\ sin^3\ 2x\right) + C$$

b. Menghilangkan Akar Kuadrat

Dalam contoh berikut, digunakan identitas $cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ untuk menghilangkan akar kuadrat.

Contoh 4

Hitunglah $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + cos\ 4x}\ dx$

Penyelesaian untuk menghilangkan akar kuadrat, kita gunakan identitas

$cos^2\theta = \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2}$ atau 1 + cos θ = 2 $cos^2\theta$.

Dengan $\theta = 2x$, persamaan terakhir menjadi 1 + cos $4x$ = 2 $cos^2 2x$. Oleh karena itu,

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + cos\ 4x}\ \ dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\ cos^2 2x}\ \ dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{cos^2 2x}\ \ dx$$

$$= \sqrt{2}\ \int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\ dx = \sqrt{2}\ \ \int_0^{\pi/4} \cos 2x\ dx$$

$$= \sqrt{2}\,2\left[\frac{\sin 2x}{\quad}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ [1 - 0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c. Integral dari pemangkatan tan x tan sec x

Kita tahu cara mngintegrasikan fungsi tangen, fungsi secan beserta kuadratnya. Untuk mengintegrasikan kedua fungsi tersebut dengan pangkat yang lebih tinggi, kita gunakan identitas $tan^2x = sec^2x - 1$ dan $sec^2x = tan^2x + 1$ dan kita gunakan integrasi parsial jika kita perlu mereduksi pangkat yang lebih tinggi menjadi pangkat yang paling rendah.

Contoh 5:

Hitunglah $\int tan^4\ x\ dx$

Penyelesaian:

$$\int tan^4\ x\ dx = \int tan^2\ x\,.\,tan^2x\ dx = \int tan^2x\,.\,(sec^2\ x - 1)\ dx$$

$$= \int tan^2\ x\ sec^2x\ dx - \int tan^2x\ dx$$

$$= \int tan^2\ x\ sec^2x\ dx - \int (sec^2x - 1)\ dx$$

$$= \int tan^2\ x\ sec^2x\ dx - \int (sec^2x\ dx + \int dx$$

Pada integral yang pertama, misalkan:

u = *tan x, du* $sec^2 x\ dx$ dan didapatkan $\int u^2\ du = \frac{1}{3} u^3$ + C

integral yang tersisa berbentuk standar sehingga

$$\int tan^4\ x\ dx = \frac{1}{3}\ tan^3 x - \tan x + x + C.$$

d. Hasil kali sinus dan kosinus.

$\int \sin mx \sin nx\ dx,\ \ \int \sin mx \cos nx\ dx,$ dan $\int \cos mx \cos nx\ dx$ Muncul di banyak penerapan yang melibatkan fungsi periodik. Integral-intgral tersebut dapat dihitung menggunakan integrasi parsial, tetapi masing – masing kasus memerlukan dua integrasi parsial.

sin mx sin nx = $\frac{1}{2}\ [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$ (3)

$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$ (4)

$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos\ (m+n)x]$ (5)

Identitas ini berasal dari rumus jumlah sudut untuk fungsi sinus dan kosinus. Identitas ini menghasilkan fungsi antiturunannya mudah dicari.

Contoh 6:

Hitunglah $\int \sin 3x \cos 5x\ dx$

Penyelesaian: Dari persamaan (4) dengan m = 3 dan n = 5, diperoleh

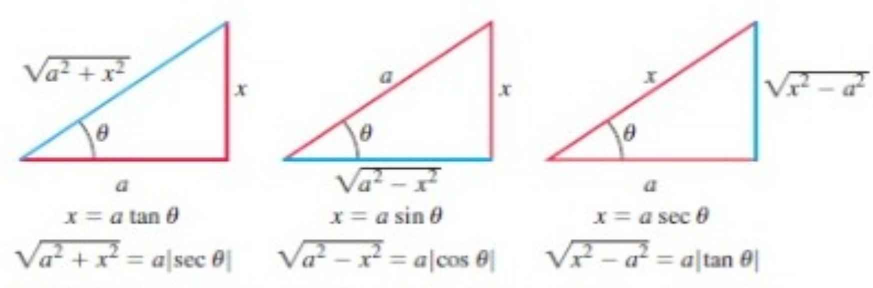
$$\int \sin 3x \cos 5x\ dx = \frac{1}{2}\int[\sin(-2x) + \sin 8x]\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 8x - \sin 2x)\ dx$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

1.4 Substitusi Trigonometri

Substitusi Trigonometri terjadi ketika kita mengganti variabel integrasi dengan fungsi trigonometri. Substitusi yang paling umum adalah $x = a \tan \theta$, $x = a \sin \theta$, dan $x = a \sec \theta$. Substitusi ini efektif untuk mentransformasikan integral yang memuat $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$ menjadi integral yang dapat dihitung secara langsung karena substitusi ini berasal dari segitiga siku-siku acuan pada gambar 8.2



Gambar 2 Segitiga siku-siku untuk trigonometri

Dengan $x = a \tan \theta$,

$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 tan^2\theta = a^2(1 + tan^2\theta) = a^2\ sec^2\theta$

Dengan $x = a \sin \theta$

$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 sin^2\theta = a^2(1 - sin^2\theta) = a^2\ cos^2\theta$

Dengan $x = a \sec \theta$

$x^2 - a^2 = a^2\ sec^2\theta - a^2 = = a^2(sec^2\theta - 1) = a^2\ tan^2\theta$

Kita ingin sembarang substitusi yang digunakan dalam integrasi memiliki invers sehingga sesudah integrasi dilakukan kita dapat mengubah hasilnya kembali ke variabel semula. Sebagai contoh, Jika $x = a \tan \theta$, maka kita ingin menetapkan $\theta = \ tan^{-1}\ (x/a)$ setelah integrasi dilakukan. Jika x = a sin θ, maka kita ingin menetapkan $\theta = tan^{-1}(x/a)$ setelah integrasi dilakukan, dan demilian juga halnya dengan $x = sec\ \theta$

Seperti yang kita ketahui, fungsi pada substitusi- substitusi tersebut mempunyai invers hanya untuk nilai θ yang dipilih agar mempunyai invers,

$x = a \tan \theta$ memerlukan $\theta = tan^{-1}\ \left(\frac{x}{a}\right)$ dengan $-\frac{\pi}{2} < \ \theta < \frac{\pi}{2}$

$x = a \sin \theta$ memerlukan $\theta = sin^{-1}\ \left(\frac{x}{a}\right)$ dengan $-\ \frac{\pi}{2} \leq \ \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$x = a \sec \theta$ memerlukan $\theta = sec^{-1}\ \left(\frac{x}{a}\right)$ dengan $\begin{cases} 0\ \leq \theta < \frac{\pi}{2}\ jika\ \frac{x}{a} \geq 1 \\ \frac{\pi}{2} < \theta\ \leq \pi \text{ jika } \frac{x}{a} \leq\ -1 \end{cases}$

Untuk menyederhanakan perhitungan dengan substitusi x = a se θ, kita akan membatasi penggunaan integral dengan ${}^{x}/_{a} \geq 1$. Hal ini akan membuat θ berada pada interval [0, ${}^{\pi}/_{2}$) dan membuat tan $\theta \geq 0$. Dengan demikian, kita mempunyai $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 tan^2 \theta} = |\ a \tan \theta| = a \tan \theta,$ tanpa nilai mutlak, asalkan a > 0.

Prosedur Untuk Substitusi Trigonometri
1. Tuliskan substitusi untuk x, hitunglah diferensial *dx*, dan tentukan nilai θ yang dipilih untuk substitusi.
2. Substitusikan ekspresi trigonometri dan diferensial yang telah dihitung menjadi integran, kemudian sederhanakan hasilnya secara aljabar.
3. Integrasikan integral trigonometri, dengan mengingat batasan untuk θ agar fungsi trigonometri yang disubstitusikan mempunyai invers.

4. Gambarlah segitiga siku – siku acuan yang sesuai untuk membalik substitusi pada hasil integrasi dan mengembalikannya kevariabel awal x.

Contoh:

Di sini kita mencari ekspresi untuk fungsi sinus hiperbolik dalam bentuk fungsi logaritma natural. Dengan mengikuti prosedur, kita mendapatlan bahwa

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \sec\theta \, d\theta \quad \rightarrow x = a \tan\theta, dx = a\, sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C \rightarrow \text{Gambar 8.2}$$

$sinh^{-1}\,(x/a)$ juga merupakan anti turunan dari $1/\sqrt{a^2+x^2}$ sehingga kedua anti turunan hanya berbeda konstantanya. Dengan demikian, diperoleh:

$$sinh^{-1}\frac{x}{a} = \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C$$

Dengan menetapkan x = 0 pada persamaan terakhir, kita peroleh 0 = ln |1| + C, sehingga C = 0. Karena $\sqrt{a^2+x^2}$ > |x|, maka disimpulkan bahwa

$$\boxed{sinh^{-1}\frac{x}{a} = \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right|}$$

4. Rangkuman

1) Rumus dasar integral

Rumus integrasi dasar
1. $\int k\ dx = kx + C$ (Sembarang bilangan K)
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$
4. $\int e^x\ dx = e^x + C$
5. $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
6. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$
8. $\int sec^2 dx = \tan x + C$
9. $\int csc^2\ x\ dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\ dx = \ln \lvert \sec x \rvert + C$
13. $\int \cot x\ dx = \ln \lvert \sin x \rvert + C$
14. $\int \sec x\ dx = \ln \lvert \sec x + \tan x \rvert + C$
15. $\int \csc x\ dx = -\ln \lvert \csc x + \cot x \rvert + C$
16. $\int \sinh x\ dx = \cosh x + C$

17. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} sec^{-1}\left\|\frac{x}{a}\right\| + C$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (a > 0)
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (x > a > 0)

2) Integral Parsial

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

3) Integral parsial pada integral tentu

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

4) Integral trigonometri:

Kasus 1 Jika m ganjil, kita menuliskan m sebagai 2k + 1 dan menggunakan identitas $sin^2 x$ = 1 $- cos^2$ untuk memperoleh: $sin^m x = sin^{2k+1} x = (sin^2 x)^k \sin x = (1 - cos^2 x)^k \sin x.$ (1)   Kemudian, kita gabungkan $\sin x$ yang tunggal dengan dx pada integral dan menetapkan sin $x\ dx$ sama dengan $-d(\cos x)$ **Kasus 2 Jika m genap dan n ganjil** pada $\int sin^m\ x\ cos^n\ x\ dx,$ kita menuliskan n sebagai 2k + 1 dan menggunakan $cos^2\ x = 1 - sin^2 x$ untuk memperoleh

$cos^n x = cos^{2k+1} x = (cos^2 x)^k \cos x = 1 - sin^2 x)^k \cos x.$

Kemudian Kita gabungkan cos x yang tunggal dengan dx dan menetapkan $\cos x\ dx$ sama dengan $d(\sin x)$

Kasus 3 Jika m dan n keduanya genap pada $\int sin^m x\ cos^n x\ dx,$

kita substitusikan

$$sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Untuk mereduksi integran menjadi fungsi dalam cos 2x yang pangkatnya lebih rendah dari pangkat semula.

5. Latihan

1) Hitunglah integral dari $\int \frac{x^2}{x^2+1}$
2) Hitunglah integral dari $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$
3) Hitunglah integral dari $\int x \cos x^2$
4) Hitunglah integral dari $\int \theta \cos \pi\theta\ d\theta$
5) Hitunglah integral dari $\int t^2\ e^{4t} dt$
6) Gunakan tabel integral untuk menghitung integral

$$\int \frac{x\ dx}{(2x+3)^{3/2}}$$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Hitunglah integral dari $\int z(\ln z)^2$
2) Hitunglah integral dari $\int sin^5 x\ dx$
3) Hitunglah integral dari $\int sin^2 x cos^4 x\ dx$

4) Hitunglah integral dari $\int tan^5 x\, dx$

5) Hitunglah integral dari $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

6) Hitunglah integral dari $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 4},\ x\ \geq 2, y(2) = 0$

7) Hitunglah integral dari $\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

8) lakukan ekspansi menggunaka pecahan parsial pada hasil bagi

$$\frac{5x - 13}{(x-3)(x-2)}$$

9) (Faktor Linear tak- berulang) nyatakan integran sebagai jumlah pecahan parsial dan hitung integralnya

$$\int \frac{dx}{1-\ x^2}$$

10) (Faktor kuadrat yang tidak dapat direduksi) nyatakan integran sebagai jumlah pecahan parsial dan hitunglah inetgralnya

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 2 : Menguasai Konsep integral fungsi rasional, integral tabel, integral numerik dan peluang.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan integral fungsi rasional, integral tabel, integral numerik dan peluang. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan integral fungsi rasional, integral tabel, integral numerik dan peluang.. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

1.5 Integran Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial

a. Deskripsi Umum Metode Pecahan Parsial

Keberhasilan dalam menuliskan suatu fungsi rasional *f(x)/g(x)* menjadi jumlah pecahan parsial bergantung pada dua hal:

- Pangkat *f(x)* harus lebih kecil dari pangkat *g(x)*. Ini berarti bahwa pecahan harus berupa pecahan sejati. Jika tidak demikian, bagilah *f(x)* dengan *g(x)* dan kerjakan suku sisanya.
- Kita harus mengetahui faktor dari *g(x).* dalam teori, sembarang polynomial dengan koefisien bilangan real dapat ditulis sebagai hasil kali faktor - faktor linear real dan faktor – faktor kuadrat real. Dalam praktik, faktor – faktor tersebut kemungkinan sulit untuk dicari.

Suatu polynomial kuadrat (atau faktor) tidak dapat direduksi jika kita tidak dapat menuliskan polynomial tersebut menjadi hasil kali dua faktor linear dengan koefisien real. Artinya, polynomial tersebut tidak mempunyai akar real.

Metode Pecahan Parsial untuk *f(x)/g(x)* Pecahan Sejati

1. Misalkan x- r adalah faktor linear dari *g(x)*. Andaikan $(x-r)^m$ adalah x – r dengan pangkat tertinggi yang membagi *g(x)*, maka untuk faktor x – r tersebut ditetapkan penjumlahan dari m pecahan parsial:

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

kerjakan hal ini untuk setiap faktor linear yang berbeda dari *g(x)*.

2. Misalkan $x^2 + px + q$ adalah faktor kuadrat dari *g(x)* yang tidak dapat direduksi sehingga $x^2 + px + q$ tidak mempunyai akar real. Andaikan $(x^2 + px + q)^n$ adalah faktor kuadrat dengan pangkat tertinggi yang membagi *g(x)*, maka untuk faktor $x^2 + px + q$ tersebut ditetapkan penjumlahan dari *n* pecahan parsial:

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q\ )} + \frac{B_2x + c_2}{(x^2 + px + q\ )^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q\ )^n}$$

Kerjakan hal ini untuk faktor faktor kuadrat yang berbeda dari *g(x)*.

3. Tetapkanlah pecahan mula-mula *f(x)/g(x)* sama dengan jumlah seluruh pecahan parsial tersebut di atas. Hilangkan bentuk pecahan dari persamaan yang diperoleh dan susunlah suku-sukunya mulai dari *x* dengan pangkat tertinggi sampai x dengan pangkat terendah.

4. Samakan koefisien dari *x* dengan pangkat yang bersesuaian dan selesaikan persamaan yang diperoleh untuk mendapatkan koefisien tak-tentu.

Contoh:

Gunakan pecahan parsial untuk menghitung $\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\ dx$

Penyelesaian: pertama-tama kita membagi pembilang dengan penyebut untuk mendapatkan polynomial ditambah pecahan sejati. Hasilnya $2x$ dan sisanya $5x$ – 3.

Kemudian, kita tuliskan pecahan tak sejati tersebut menjadi polynomial ditambah pecahan sejati $\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$

Kita mendapatkan dekomposisi pecahan parsial untuk pecahan sejati di ruas kanan. Jadi,

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\ dx = \int 2x\ dx + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\ dx$$

$$= \int 2x\ dx + \int \frac{2}{x+1}\ dx + \int \frac{3}{x-3}\ dx$$

$$= x^2 + 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x + 3| + C.$$

b. Metode "Menutup" Heaviside untuk faktor Linear

Ketika pangkat polynomial *f(x)* kurang dari pangkat polynomial *g(x)* dan

g(x) $=(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$ merupakan hasil kali faktor linear yang berbeda, yang masing-masing berpangkat satu, maka ada sebuah cara tepat untuk mengekspansi *f(x)/g(x)* menggunakan pecahan parsial.

Metode Heaviside
1. Tuliskan hasil bagi dengan *g(x)* yang difaktorkan:
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)}$

2. Tutup faktor ($x - r_i$) dari *g(x)* secara bergantian (satu per satu), dan masing-masing menggantikan seluruh x yang tidak ditutupi dengan bilangan r_i. Ini memberikan bilangan A_i untuk masing- masing akar r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1\ )}{(r_1 - r_2)\dots(r_1 - r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\dots(r_2 - r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n - r_1)(r_n - r_2)\dots(r_n - r_{n-1})}$$

3. Tuliskan ekspansi pecahan parsial dari *f(x)/g(x)* sebagai

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}$$

Contoh:

Gunakan Metode Heaviside untul menghitung $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} dx$

Penyelesaian: Pangkat dari *f(x)* = x + 4 lebih kecil dari pangkat polinomilal kubrik *g(x)=* $x^3 + 3x^2 - 10x$, dan dengan *g(x)* yang difaktorkan, $\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}$. Akar dari *g(x)* adalah r_1= 0, r_2= 2, r_3= -5. Kita peroleh

$A_1 = \frac{0+4}{x(0-2)(0+5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$ → x sebagai penutup

$A_2 = \frac{2+4}{2(x-2)(2+5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$ → $x - 2$ sebagai penutup

$A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2)(x+5)} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}$ → $x + 5$ sebagai penutup.

Dengan demikian, $\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}$ dan $\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}\, dx =$ $-\frac{2}{5} \ln |x| + \frac{3}{7} \ln |x - 2| - \frac{1}{35} \ln|x+5| + C.$

1.6 Tabel Integral dan sistem Aljabar Komputer

a. Tabel Integral

Tabel Singkat Integral disajikan di belakang buku Thomas. Rumus Integrasi dinyatakan dalam konstanta a, b, c, m, n, dan sebagainya. Konstanta – konstanta tersebut biasanya berupa sembarang bilangan real dan tidak perlu berupa bilangan bulat.

Contoh: Carilah $\int x(2x+5)^{-1}\, dx$

Penyelesaian: dengan rumus 24 yaitu

$\int x(ax+b)^{-1}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|ax+b| + C.$

Dengan a = 2 dan b = 5, diperoleh

$$\int x(2x+5)^{-1}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \ln|2x+5| + C$$

b. Rumus Reduksi

Waktu yang diperlukan untuk integrasi parsial berulang terkadang dapat dipersingkat dengan menetapkan rumus reduksi seperti

$\int tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1} tan^{n-1} x - \int tan^{n-2} x\, dx$ (1)

$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$ (2)

$\int sin^n x cos^m x\, dx = -\frac{sin^{n-1} x\, cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} - \int sin^{n-2} x\, cos^m x\, dx$ (n $\neq -m$)

Contoh: Carilah $\int tan^5 x\ dx$

Penyelesaian: Kita menerapkan persamaan (1) dengan n = 5 untuk mendapatkan $\int tan^5 x\ dx = \frac{1}{4} tan^4 x - \int tan^3 x\ dx$. Kemudian, kita menerapkan persamaan (1) lagi, dengan n = 3, untuk menghitung integral yang tersisa:

$$\int tan^3 x\ dx = \frac{1}{2}\ tan^2\ x - \int \tan x\ dx = \frac{1}{2} tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

Dengan menggabungkan hasil yang diperoleh,

$$\int tan^5 x\ dx = \frac{1}{4} tan^4 x - \frac{1}{2} tan^2 x - \ln|\cos x| + \mathrm{C}$$

c. Integrasi Menggunakan CAS

Kemampuan yang ampuh dari sistem aljabar komputer (CAS) adalah kesanggupannya untuk mengintergasikan secara simbolik. Hal ini dilakukan dengan perintah integrasi (integrate command) yang dispesifikasikan menggunakan sistem tertentu (misalnya, int dalam maple, Integrate dalam Mathematica)

Contoh:

Gunakan CAS untuk mencari $\int sin^2 x\ cos^3\ x\ dx$

Penyelesaian: dengan Maple, kita mempunyai entri > int ((sin^2)(x) * (cos^3)(x),x);

dan hasil yang diberikan adalah

$$-\frac{1}{5}\sin\ (x)\ \cos(x)^4\ \frac{1}{15}\ \cos(x)^2\sin(x) + \frac{2}{15}\sin(x)$$

Meskipun CAS sangat ampuh dan dapat membantu kita menyelesaikan masalah yang sulit, namun setiap CAS mempunyai keterbatasan. Bahkan, ada kemungkinan CAS mengarahkan kita kepada masalah yang lebih sulit lagi (dalam arti CAS memberikan jawaban yang sangat sulit digunakan atau diinterpretasikan).

d. Integral Non- Elementer

Perkembangan komputer dan kalkulator untuk mencari anti turunan menggunakan manipulasi simbolik telah memperbarui minat untuk memilah anti turunan yang dapat dan tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi dari fungsi dasar. Fungsi – fungsi yang tidak mempunyai anti turunan dasar disebut integral non-elementer. Contoh integral non-elementer adalah fungsi galat (error function),

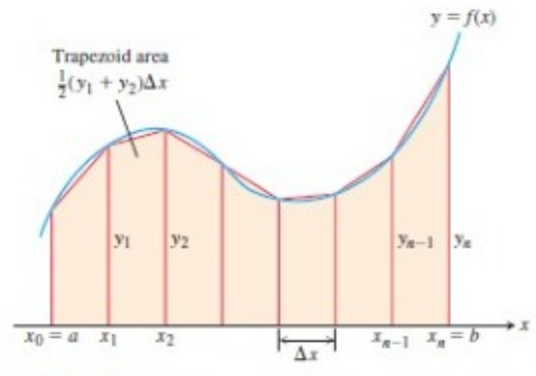
erf $(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-r}\, dt$, yang mengukur peluang dari galat acak, dan integral seperti $\int \sin x^2\, dx$ dan $\int \sqrt{1+\ x^4}\ dx$, yang ditemui di bidang teknik dan fisika. Integral tersebut beserta dengan sejumlah integral lainnya, seperti $\int \frac{e^x}{x}\, dx, \int e^{(e)^x}\, dx, \int \frac{1}{\ln x}\, dx,\ \int \ln(\ln x)\, dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\, dx,\ \int \sqrt{1-\ k^2 sin^2 x}\ dx$, 0 < k < 1.

1.7 Integrasi Numerik

Anti turunan dari beberapa fungsi, seperti sin $(x)^2$, 1/ln x, dan $\sqrt{1+\ x^4}$, tidak mempunyai rumus dasar. ketika kita tidak dapat mencari anti turunan yang dapat dikerjakan untuk fungsi *f* yang harus diintegrasikan, maka kita dapat mempartisi interval integrasi, menggantikan *f* dengan polynomial yang paling sesuai pada subinterval, mengintegrasikan polynomial – polynomial tersebut dan menjumlahkan hasilnya untuk mengaproksimasikan integral tak tentu dari *f*. Prosedur ini merupakan contoh integrasi numeric. Pada subab ini kita mempelajari dua metode integrasi numeric, yaitu Aturan Trapesium dan Aturan Simpson.

a. Aproksimasi Trapesium

Aturan Trapesium untuk nilai integral tentu didasarkan pada aproksimasi daerah di antara kurva dan sumbu-x menggunakan trapezium ketimbang pesergi panjang, seperti yang disajikan pada gambar 8.7. Titik – titik pembagi $x_{0,}x_{1,}x_{2,\dots,}x_n$ dalam gambar tidak perlu berjarak sama, tetapi rumus yang dihasilkan (jika ada) akan lebih sederhana jika demikian. Dengan demikian, panjang setiap subinterval adalah $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



Gambar 3 Trapezoid

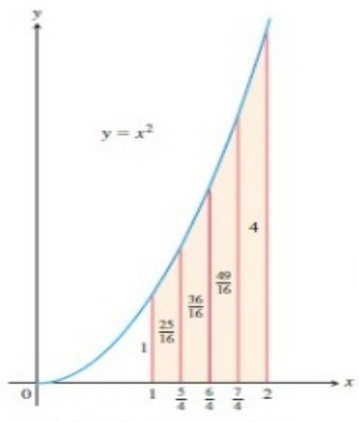
Aturan Trapesium

Untuk mengaproksimasikan $\int_b^a f(x)dx$, gunakan T = $\frac{\Delta X}{2}$ $(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$. Disini, y adalah nilai *f* di titik partisi

$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, \dots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b,$ dimana $\Delta x = (b-a)/n$

Contoh: Gunakan Aturan Trapesium dengan n = 4 untuk mengestimasi $\int_1^2 x^2 \ dx$. Bandingkan estimasi tersebut dengan nilai eksaknya.

Penyelesaian: Patikan [1,2] menjadi empat subinterval sama lebar (Gambar 8.8). Kemudian, hitunglah y = x^2 di setiap titik partisi (tabel 8.2



Gambar 4 Aproksimasi Trapezoid

Dengan menggunakan nilai-y tersebut, n = 4, dan $\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ dalam aturan trapezium diperoleh

T = $\frac{\Delta x}{2}\ (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4)$

$= \frac{1}{8}\ (\ 1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\ \left(\frac{36}{16}\right) + 2\ \left(\frac{49}{16}\right) + 4)$

$= \frac{75}{32} = 2{,}34375$

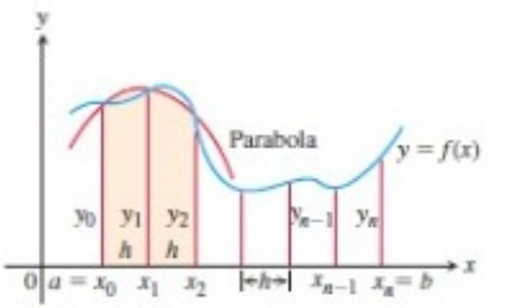
Karena parabola cekung ke atas, maka ruas garis yang digunakan dalam aproksimasi terletak di atas kurva, yang mengakibatkan setiap trapezium mempunyai luas yang sedikit melebihi luas sebenarnya dari daerah di bawah kurva. Nilai eksak integral adalah $\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Aproksimasi T melebihi nilai integral kira-kira setengah persen dari 7/3. Persentase galat adalah$\frac{\left(2{,}34375-\frac{7}{3}\right)}{7/3} \approx 0{,}00446, atau\ 0{,}446\%$

b. Aturan Simpson: Aproksimasi Menggunakan Parabola

Aturan lain yang digunakan untuk mengaproksimasi integral tentu dari fungsi kontinu adalah aturan yang menggunakan parabola alih-alih ruas garis lurus seperti dalam aturan trapezium. Seperti sebelumnya, kita mempartisi interval [a,b] menjadi n subinterval sama lebar $h = \Delta x = (b-a)/n$, tetapi kali ini kita memerlukan n berupa bilangan genap. Pada setiap pasangan intevral yang berturutan, kita mengaproksimasikan kurva y = f(x) ≥ 0 menggunakan parabola, seperti yang ditunjukkan gambar 8.9. sebuah parabola tipikal melalu tiga titik berurutan $(x_{i-1,}\ y_{i-1})$, (x_i, y_i), dan (x_{i+1}, y_{i+1}) pada kurva.

Parabola mempunyai persamaan berbentuk $y = Ax^2 + Bx + C$.



Gambar 5 Aturan Simpson

Aturan Simpson
Untuk mengaproksimasikan $\int_b^a f(x)dx$, gunakan S = $\frac{\Delta X}{3}$ $(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + \ 4y_{n-1} + y_n)$. Disini, y adalah nilai *f* di titik partisi

$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b,$ bilangan n genap $\Delta x = (b-a)/n$

Perhatikan bahwa pola dari koefisien dalam aturan diatas adalah: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, …, 4, 1.

Contoh:

Gunakan Aturan Simpson untuk mengaproksimasikan $\int_0^2 5x^4\, dx$.

Penyelesaian: Pastikan [0,2] menjadi empat subinterval dan hitunglah y =$5x^4$ pada setiap titik partisi (tabel 8.3). Kemudian terapkan aturan simpson dengan n = 4 dan $\Delta x = 1/2$.

S = $\frac{\Delta X}{3}$ $(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4$

= $\frac{1}{6}$ $(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80)$

= $32\frac{1}{12}$

Estimasi ini hanya berbeda ½ dari nilai eksaknya (yaitu 32), persentase galat kurang dari tiga per sepuluh dari satu persen, dan ini diperoleh hanya dengan menggunakan empat subinterval

c. Analisis Galat

Ketika kita menggunakan teknik aproksimasi, isu yang muncul adalah seberapa besar kemungkinan keakuratan dari aproksimasi yang diperoleh. Teorema berikut menyajikan rumus untuk mengestimasi galat dari penggunaan aturan trapezium dan aturan simpson. Galat ini adalah beda antara aproksimasi yang diperoleh menggunakan aturan tersebut dan nilai sebenarnya dari integral tentu $\int_b^a f(x)dx$.

Teorema 1 – Estimasi Galat dalam Aturan Trapesium dan Aturan Simpson.

Jika *f''* kotinu dan M adalah batas atas dari nilai |*f''*| pada [a,b], maka aproksimasi trapezium untuk integral *f* dari a sampai b menggunakan n langkah mempunyai galat E_T yang memenuhi pertidaksamaan

$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ Aturan Trapezium

Jika $f^{(4)}$ kontinu dan M adalah batas atas dari nilai $\left|f^{(4)}\right|$ pada [a,b], maka aproksimasi dengan aturan simpson untuk integral *f* dari a sampai b menggunakan n langkah mempunyai galat E_s yang memenuhi pertidaksamaan

$|E_s| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$. Aturan Simpson

Contoh: Carilah batas atas galat dalam mengestimasi $\int_0^2 5x^4\ dx$ menggunakan aturan Simpson dengan n = 4

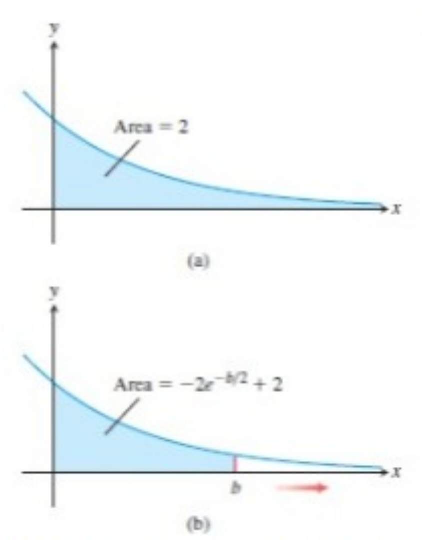
Penyelesain: untuk mengestimasi galat, pertama-tama kita mencari batas atas untuk besarnya turunan keempat dari *f(x)* = $5x^4$ pada interval 0≤ x ≤ 2. Karena turunan keempat mempunyai nilai konstan $f^{(4)}(x) = 120$, maka kita mengambil M = 120. Dengan $b - a = 2$ dan $n = 4$, estimasi galat untuk Aturan Simpson diberikan oleh $|E_s| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180.4^4} = \frac{1}{12}$. Estimasi ini konsisten dengan contoh diatas.

1.8 Integral Tak-Wajar

a. Batas Tak-Berhingga dari Integrasi

Perhatikan daerah tak-berhingga (daerah yang bagian kanannya tidak terbatas) yang terletak di bawah kurva y = $e^{-x/2}$ pada kuadran pertama (Gambar 13.a).

Anda mungkin berfikir bahwa daerah tersebut mempunyai luas tak-berhingga tetapi kita akan melihat bahwa luas daerah tersebut memilki nilai berhingga. Kita mendapatkan nilai tersebut dengan cara berikut. Pertama, carilah luas A(b) dari bagian daerah yang sebelah kanannya dibatasi x = b (Gambar 8.13b)



Gambar 6 Leas daerah kuadran 1

A(b) = $\int_0^b e^{-x/2}\, dx = -2e^{-x/2}|_0^b = -2e^{-b/2} + 2$. Kemudian cari limit dari A(b) ketika b →∞, yaitu:

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty}(-2e^{-b/2} + 2) = 2$$

Nilai yang diperoleh untuk luas di bawah kurva dari 0 sampai ∞ adalah $\int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x/2} dx = 2.$

Definisi Integral dengan batas integrasi yang tak-berhingga merupakan integral tak-wajar Jenis I.

1. Jika *f(x)* kontinu pada [a,∞], maka

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Jika *f(x)* kontinu pada [-∞, b], maka

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

3. Jika *f(x)* kontinu pada [-∞, b], maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Di mana c adalah sembarang bilangan real.

Pada setiap kasus, jika nilai limit tersebut berhingga, maka integral tak-wajar dikatakan konvergen dan nilai limit tersebut merupakan nilai integral tak-wajar. Jika nilai limit tidak ada, maka integral tak-wajar dikatakan divergen.

Contoh:

Hitunglah $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Penyelesaian: menurut definisi bagian 3, kita dapat memilih c = 0 dan menulis $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Selanjutnya, kita menghitung masing-masing integral tak wajar pada ruas kanan persamaan di atas.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} tan^{-1}x\Big]_{a}^{0}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (tan^{-1}0 - tan^{-1}a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

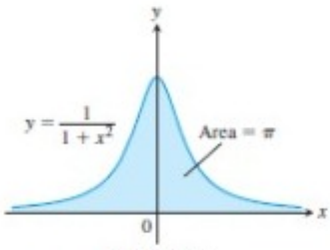
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{b \to \infty} tan^{-1} x \Big]_0^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (tan^{-1} b - tan^{-1} 0) = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Jadi, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Karena $1/(1 + x^2) > 0$, maka integral tak-wajar dapat diinterpretasikan sebagai luas(berhingga) di bawah kurva dan di atas sumbu-x (Gambar 8.15)



Gambar 7 Luas daerah kurva

Integral $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ fungsi y =1/x merupakan batas antara integral tak-wajar yang konvergen dan divergen untuk integran berbentuk y = $1/x^p$.

b. Integran dengan Asimtot vertical

Jenis lain integran tak-wajar terjadi ketika integran mempunyai asimtot vertical-ketakkontinuan tak berhingga- pada batas integrasi atau pada suatu titik di antara batas integrasi. Jika integran *f* positif pada suatu interval integrasi, maka kita dapat menginterpretasikan integral tak-wajar tersebut sebagai luas di bawah graifk *f* dan di atas sumbu –*x* di antara batas integrasi.

Definisi Integral dari fungsi bernilai tak-berhingga pada suatu titik dalam interval integrasi disebut Integral tak-wajar Jenis II. 1. Jika *f(x)* kontinu pada (a,b] dan tak-kontinu di a, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

2. Jika *f(x)* kontinu pada [a,b) dan tak-kontinu di b, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

3. . Jika *f(x)* tak-kontinu di c, di mana a < c < b, dan kontinu pada [a, c) ∪ (c, b], maka

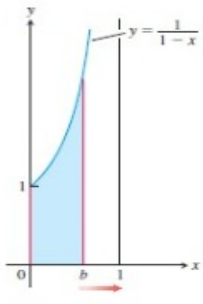
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Pada setiap kasus, jika limitnya berhingga, maka integral tak-wajar dikatakan konvergen dan limit tersebut merupakan nilai integral tak-wajar. Jika limitnya tidak ada, maka integral tak-wajar dikatakan divergen.

Contoh:

Selidiki konvergensi dari $\int_1^0 \frac{1}{1-x} dx$

Penyelesauan: Integren f(x) = 1/$(1-x)$ kontinu pada [0,1), tetapi tak-kontinu di x = 1 dan menjadi tak-berhingga apabila x→1^- (gambar 8.17). kita menghitung integran tersebut sebagai



Gambar 8 LuasKurva pada contoh

$$\lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx = \lim_{b \to 1^-} [-\ln|1-x|]_0^b$$

$$= \lim_{b \to 1^-} [-\ln|1-b| + 0] = \infty$$

Limit bernilai tak-berhingga sehingga integral disebut divergen.

c. Pengujian Konvergensi dan Divergensi

Ketika kita tidak dapat menghitung integral tak-wajar secara langsung, maka kita mencoba untuk menentukan apakah integral tersebut konvergen atau divergen. Jika integral tersebut divergen, maka pekerjaan kita selesai. Jika integral tersebut konvergen, maka kita dapat menggunakan metode numeric untuk mengaproksimasikan nilai integralnya. Pengujian utama untuk konvergensi atau divergensi adalah Uji Banding Langsung dan Uji Banding limit.

Teorema 2 – Uji Banding Langsung Misalkan *f* dan *g* kontinu pada [a, ∞)   Dengan $0 \leq f(x) \leq g(x)$ untuk semua $x \geq a$, maka   1. $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergen jika $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergen.   2. $\int_a^\infty g(x)dx$ divergen jika $\int_a^\infty f(x)dx$ divergen

Teorema 3 – Uji Banding limit Jika fungsi positif f dan g kotinu pada $[a, \infty)$ dan jika $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $0 < L < \infty$

Maka $\int_a^\infty f(x)dx$ dan $\int_a^\infty g(x)dx$

Keduanya konvergen atau keduanya divergen.

1.9 Peluang

Hasil (outcame) dari suatu kejadian (event), seperti batu berat yang jatuh dari tempat yang sangat tinggi, dapat dimodelkan sehingga kita dapat memprediksi dengan sangat akurat apa yang akan terjadi. Di lain pihak, banyak kejadian yang mempunyai lebih dari satu hasil yang mungkin dan tidak ada kepastian kejadian mana yang akan terjadi. Jika kita melempar koin, maka hasil yang diperoleh dapat berupa gambar dan angka, dan kedua hasil tersebut mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi meskipun kita tidak tahu hasil yang mana yang akan terjadi. Jika kita secara acak memilih seseorang dari suatu populasi yang besar dan kemudian menimbang berat badannya, maka kita mendapatkan banyak kemungkinan mengenai berat badan, dan kita tidak pasti apakah berat badan orang tersebut antara 180 dan 190 lb.

a. Variabel Acak

Kita mulai diskusi kita dengan beberapa contoh kejadian tak-pasti yang umun di mana himpunan dari semua hasil yang mungkin merupakan himpunan berhingga.

Contoh 1:

- Jika kita melempar koin satu kali, maka ada dua hasil yang mungkin yaitu {G,A}, dengan G menyatakan bahwa pada saat koin jatuh yang muncul adalah sisi gambar dan A menyatakan yang muncul adalah sisi angka. Jika kita melempar koin sebanyak tiga kali, maka terdapat delapan hasil yang mungkin apabila urutan terjadinya gambar atau angka. Himpunan hasil tersebut adalah {GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA}

Biasanya himpunan dari seluruh hasil yang mungkin disebut ruang sampel untuk suatu kejadian. Untuk kejadian yang tak-pasti, kita biasanya tertarik pada suatu hasil, jika ada, yang lebih mungkin terjadi dari hasil lainnya, dan sampai seberapa banyak hasil tersebut. Pada pelemparan koin sebanyak tiga kali , manakah hasil yang lebih mungkin terjadi, dua gambar atau satu gambar? Untuk menjawab pertanyaan seperti ini, kita memerlukan cara untuk mengukur hasil tersebut.

DEFINISI **Variabel acak** adalah fungsi X yang memberikan nilai numeric pada setiap hasil di ruang sampel.

Variabel acak hanya mempunyai berhingga banyak nilai disebut variabel acak diskret. Variabel acak kontinu dapat mempunyai nilai diseluruh interval, dan hal ini dikaitkan dengan fungsi distribusi.

Contoh :

- Sebuah mata uang logam yang dilemparkan sebanyak tiga kali memberikan hasil yang mungkin {GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA}. Di definisikan variabel acak X sebagai banyaknya sisi gambar yang tampak. Jadi X(GGA) = 2, X(AGA) = 1, dan sebagainya. Karena X hanya dapat bernilai 0, 1, 2, atau 3, maka X merupakan variabel acak diskret.
- Berat seseorang yang dipilih secara acak dari suatu populasi merupakan variabel acak kontinu W. Tingkat kolestrol dari seseorang yang dipilih

secara acak dan waktu tunggu seseorang dalam suatu antrian di bank juga merupakan variabel acak kontinu.

b. Distribusi Peluang

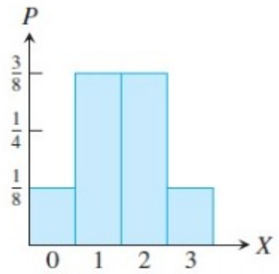
Distribusi peluang menggambarkan perilaku probabilistic dari variabel acak. Perhatian utama kita adalah distribusi peluang untuk variabel acak kontinu. Akan tetapi, untuk mendapatkan suatu gambaran terlebih dahulu akan ditunjukkan distribusi peluang untuk variabel acak diskret.

Andaikan sebuah mata uang logam dilemparkan tiga kali, maka masing – masing sisi G atau A akan tampak dengan kemungkinan yang sama. Didefinisikan variabel acak diskret X sebagai banyakanya sisi gambar yang tampak. Ini memberikan {GGG} = 3, {GGA} = 2, {GAG} = 2, {GAA} =1, {AGG} = 2, {AGA} = 1, {AAG} = 1, DAN {AAA}= 0.

Selanjutnya, dihitung frekuensi atau seringnya suatu nilai X terjadi. Karena setiap hasil mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi. Kita dapat menghitung peluang variabel acak X dengan acak membagi frekuensi dari setiap nilai dengan banyakanya keseluruhan hasil. hal ini diringkaskan sebagai berikut:

Nilai X	0	1	2	3
Frekuensi	1	3	3	1
P(X)	1/8	3/8	3/8	1/8

Kita mendapatkan informasi yang kit perlukan mengenai peluang dari X sebagai fungsi yang grafiknya berperilaku hampir sama dengan grafik dalam gambar 8.21. Hal ini berarti kita mengambil fungsi tak-negatif f yang terdefinisi pada daerah hasil variabel acak dengan property bahwa luas total daerah di bawah grafik f adalah 1. Maka, peluang bahwa nilai variabel acak X yang terletak dalam suatu interval [c, d] adalah luas daerah di bawah grafik *f* pada interval tersebut. Definisi berikut mengamsumsikan bahwa daerah hasil variabel acak kontinu X adalah sembarang bilangan real, tetapi definisi ini cukup umum untuk menjelaskan variabel acak yang daerah hasilnya berupa interval dengan panjang berhingga.



Gambar 9 Grafik peluang

DEFINISI **Fungsi kepadatan peluang** untuk variabel acak kontinu adalah fungsi f yang terdefinisi pada interval $(-\infty, \infty)$ dan mempunyai property berikut:

1. f kontinu, kecuali mungkin di sejumlah berhingga titik,

2. *f* tak-negatif sehingga $f \geq 0$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Jika X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang *f*, maka peluang bahwa X mempunyai nilai pada interval di antara X = c dan X = d adalah integral luas.

$$P\ (c\ \leq X\ \leq d) = \int_{c}^{d} f(X)\ dX.$$

Contoh: Tunjukkan bahwa f(x) =$\frac{4}{27}x^2(3-x)dx$ merupakan fungsi kepadatan peluang pada interval [0,3].

Penyelesaian: Fungsi f kontinu dan tak-negatif pada interval [0, 3]. Selain itu

$$\int_0^3 \frac{4}{27}x^2(3-x)dx = \frac{4}{27}\left[x^3 - \frac{1}{4}\,x^4\right]_0^3 = \frac{4}{27}\left(27 - \frac{81}{4}\right) = 1$$

Kita simpulkan bahwa f merupakan fungsi kepadatan peluang pada [0, 3].

c. Distribusi yang Turun Secara Eksponensial

fungsi kepadatan peluang yang turun secara eksponensial selalu berbentul

$$f(x) = \begin{cases} 0, & jika\ x < 0 \\ ce^{-cx}, & jika\ x \geq 0 \end{cases}$$

Variabel acak dengan distribusi eksponensial bersifat tanpa memori (memoryless). Jika kita menganggap X sebagai masa hidup suatu objek, maka peluang bahwa objek tersebut bertahan hidup paling sediit s + t jam, apabila objek tersebut telah bertahan hidup sampai t jam, sama dengan peluang awal bahwa objek tersebut bertahan hidup paling sedikit s jam.

Contoh: sebuah perusahaan elektronik memodelkan masa hidup T (dalam tahun) dari sebuah chip yang diproduksinya dengan fungsi kepadatan eksponensial

$$f(T) = \begin{cases} 0, & Jika\ T < 0 \\ x, & Jika\ T \geq 0 \end{cases}$$

Dengan menggunakan model ini,

(a) Carilah peluang P(T > 2) bahwa sebuah chip akan bertahan sampai lebih dari dua tahun.

(b) Carilah peluang P(4 $\leq T \leq$ 5 bahwa sebuah chip akan rusak pada tahun kelima

(c) Jika terdapat 1000 chip yang dikirimkan kepada pembeli, berapa chip yang diperkirakan rusak dalam waktu tiga tahun?

Penyelesaian:

(a) Peluang bahwa sebuah chip akan bertahan lebih dari dua tahun

$$P(T > 2) = \int_2^{\infty} 0{,}1e^{-0{,}1T}\ dT = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} 0{,}1e^{-0{,}1T} dT$$

$$= \lim_{b\to\infty} [e^{-0{,}2} - e^{-0{,}1b}] = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$$

Artinya, kira-kira 82% chip akan bertahan lebih dari dua tahun.

(b) peluangnya adalah $P(4 \leq T \leq 5) = \int_4^5 0{,}1e^{-0{,}1T} dT = -e^{-0{,}1T}]_4^5 = e^{-0{,}4} - e^{-0{,}5} \approx 0{,}064$

Artinya, kira-kira 6% chip akan rusak pada tahun kelima.

c. Kita ingin peluang $P(0 \leq T \leq 3) = \int_0^3 0{,}1e^{-0{,}1T}\, dT = -e^{-0{,}1T}]_0^3 = 1 - e^{-0{,}3} \approx 0{,}259$.

Kita dapat memperkirakan bahwa kira-kira 259 chip dari 1000 chip akan rusak dalam waktu tiga tahun.

d. Nilai Harapan, Mean, dan Median

DEFINISI Nilai harapan atau mean dari variabel acak kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang f adalah bilangan

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X\, f(X) dx$$

Nilai harapan E(X) dapat dianggap sebagai rata-rata terbobot dari variabel acak X, dengan masing-masing nilai X diboboti dengan *f*(X). Mean dapat juga diinterpretasikan sebagai nilai rata-rata jangka panjang dari variabel acak X, dan mean merupakan salah satu ukuran dari pemutasan variabel acak X.

Contoh:

Carilah mean dari variabel acak X yang mempunyai fungsi kepadatan peluang eksponensial

$$f(x) = \begin{cases} 0, & jika\ x < 0 \\ ce^{-cx}, & jika\ x \geq 0 \end{cases}$$

Penyelesaian: Dari definisi, kita mempunyai

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X\, f(X)dx = \mu = E(X) = \int_{0}^{\infty} Xce^{-cX}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b Xce^{-cX}dX = \lim_{b\to\infty} (-Xe^{-cX})\Big]_0^b + \int_0^b e^{-cX}dX)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-be^{-cb} - \frac{1}{c}\, e^{-cb} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}.$$

Dengan demikian, diperoleh mean $\mu = 1/c$.

Dari hasil dalam contoh 6, dengan mengetahui mean atau nilai harapan μ dari variabel acak X yang mempunyai fungsi kepadatan peluang eksponensial, kita dapat menuliskan keseluruhan rumus dari fungsi kepadatan eksponensial.

Fungsi kepadatan Peluang untuk Varibabel Acak X dengan Mean $\boldsymbol{\mu}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & jika\ x < 0 \\ \mu^{-1}e^{-X/\mu}, & jika\ x \geq 0 \end{cases}$$

DEFINISI Median dari variabel acak kontinu X yang mempunyai fungsi kepadatan peluang f adalah bilangan m dengan

$$\int_{-\infty}^{m} f(X)dX = \frac{1}{2} \quad dan \int_{m}^{\infty} f(X)dX = \frac{1}{2}.$$

e. Variansi dan Simpangan Baku

variabel acak yang mempunyai mean μ sama tetapi distribusinya berbeda. Variansi dari variabel acak X mengukur penyebaran nilai X terhadap mean, dan kita mengukur penyebaran ini menggunakan nilai yang diharapkan dari (X $-\mu)^2$. Karena variansi mengukur nilai harapan dari kuadrat beda nilai variabel acak terhadap mean, maka kita lebih sering bekerja menggunakan akar kuadrat dari variansi.

Definisi Variansi dari variabel acak X yang mempunyai fungsi kepadatan peluang f adalah nilai yang diharapkan dari (X$-\ \mu)^2$. Yaitu

Var (X) = $\int_{-\infty}^{\infty}(X - \ \mu)^2 \ f(X)dX$

Simpangan baku dari X adalah

$\sigma X = \ \sqrt{Var\ (x)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(X - \ \mu)^2\, f(x)\ dX.}$

d. Distribusi Seragam

Distribusi seragam merupakan distribusi yang sangat sederhana, namun sering terjadi dalam penerapan. Fungsi kepadatan peluang untuk distribusi tersebut terdapat pada interval [a,b] adalah

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \ \leq b$$

Jika setiap hasil dalam ruang sampel mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi, maka variabel acak X terdistribusi seragam. Karena f konstan pada [a, b], maka variabel acak berdistribusi seragam yang berada dalam suatu subinterval dengan panjang tertentu kemungkinan besar juga berada dalam interval lain yang mempunyai panjang sama. Peluang bahwa X terletak pada suatu subinterval tersebut dibagi dengan (b – a).

e. Distribusi Normal

Banyak sekali penerapan yang menggunakan distribusi normal. Distribusi ini didefinisikan dengan fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2\,/\,2a^2}.$$

Variabel acak X dengan fungsi kepadatan peluang ini dapat ditunjukkan mempunyai mean μ dan simpangan baku σ. Dalam penerapa, nilai μ dan σ sering destimasi menggunakan data dalam jumlah banyak.

Fungsi kepadatan peluang normal tidak mempunyai anti turunan yang dapat diekspresikan menggunakan fungsi-fungsi yang dikenal. Akan tetapi, apabila μ dan σ dibuat bernilai konstan, maka interval yang memuat fungsi kepadatan peluang normal dapat diitung menggunakan metode integrasi numeric. Biasanya kita menggunakan kemampuan integrasi numeric dari komputer atau kalkulator untuk mengestimasi nilai integral tersebut. perhitungan ini menunjukkan bahwa untuk sembarang ditribusi normal, kita mendapatkan nilai peluang bahwa variabel acak X berada dalam interval k = 1, 2, 3, atau 4 simpangan baku dari mean, yaitu:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}68269$

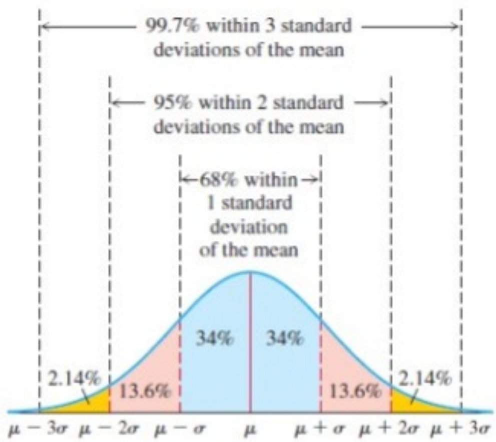
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95450$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}99730$

$P(\mu - 4\sigma < X < \mu + 4\sigma) \approx 0{,}99994$

Ini berarti bahwa, misalnya, nilai variabel acak X akan terletak dalam interval dua simpangan baku dari mean kira-kira sebanyak 95% kali. Kira-kira sebanyak 68%

kali, nilai X akan terletak dalam interval satu simpangan baku dari mean (lihat gambar 8.27)



Gambar 10 Probabilitas Distribusi normal

4. Rangkuman

1) Metode integral parsial pada pecahan rasional

Metode Pecahan Parsial untuk *f(x)/g(x)* Pecahan Sejati
1. Misalkan *x*- *r* adalah faktor linear dari *g(x)*. Andaikan $(x-r)^m$ adalah *x* – *r* dengan pangkat tertinggi yang membagi *g(x)*, maka untuk faktor *x* – *r* tersebut ditetapkan penjumlahan dari m pecahan parsial: $\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$ kerjakan hal ini untuk setiap faktor linear yang berbeda dari *g(x)*.
2. Misalkan $x^2 + px + q$ adalah faktor kuadrat dari *g(x)* yang tidak dapat direduksi sehingga $x^2 + px + q$ tidak mempunyai akar real. Andaikan $(x^2 + px + q)^n$ adalah faktor kuadrat dengan pangkat tertinggi yang membagi *g(x)*,

maka untuk faktor $x^2 + px + q$ tersebut ditetapkan penjumlahan dari *n* pecahan parsial:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q\ )} + \frac{B_2 x + c_2}{(x^2 + px + q\ )^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q\ )^n}$$

Kerjakan hal ini untuk faktor faktor kuadrat yang berbeda dari *g(x)*.

3. Tetapkanlah pecahan mula-mula *f(x)/g(x)* sama dengan jumlah seluruh pecahan parsial tersebut di atas. Hilangkan bentuk pecahan dari persamaan yang diperoleh dan susunlah suku-sukunya mulai dari *x* dengan pangkat tertinggi sampai x dengan pangkat terendah.

4. Samakan koefisien dari *x* dengan pangkat yang bersesuaian dan selesaikan persamaan yang diperoleh untuk mendapatkan koefisien tak-tentu.

2) Metode Heaviside

1. Tuliskan hasil bagi dengan *g(x)* yang difaktorkan:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)}$$

2. Tutup faktor $(x - r_i)$ dari *g(x)* secara bergantian (satu per satu), dan masing-masing menggantikan seluruh *x* yang tidak ditutupi dengan bilangan r_i. Ini memberikan bilangan A_i untuk masing- masing akar r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1\ )}{(r_1 - r_2)\ldots(r_1 - r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\ldots(r_2 - r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n - r_1)(r_n - r_2)\ldots(r_n - r_{n-1})}$$

3. Tuliskan ekspansi pecahan parsial dari *f(x)/g(x)* sebagai

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}$$

3) Aturan trapesium : Untuk mengaproksimasikan $\int_b^a f(x)dx$, gunakan $T = \frac{\Delta X}{2}\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$. Disini, y adalah nilai *f* di titik partisi $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b$, dimana $\Delta x = (b-a)/n$.

4) Aturan Simpson : Untuk mengaproksimasikan $\int_b^a f(x)dx$, gunakan $S = \frac{\Delta X}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$. Disini, y adalah nilai *f* di titik partisi $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b$, bilangan n genap $\Delta x = (b-a)/n$

5) Estimasi Galat dalam Aturan Trapesium dan Aturan Simpson.

   Jika *f''* kotinu dan M adalah batas atas dari nilai |*f''*| pada [a,b], maka aproksimasi trapezium untuk integral *f* dari a sampai b menggunakan n langkah mempunyai galat E_T yang memenuhi pertidaksamaan

   $|E_T| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ Aturan Trapezium

   Jika $f^{(4)}$ kontinu dan M adalah batas atas dari nilai $\left|f^{(4)}\right|$ pada [a,b], maka aproksimasi dengan aturan simpson untuk integral *f* dari a sampai b menggunakan n langkah mempunyai galat E_s yang memenuhi pertidaksamaan $|E_s| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$. Aturan Simpson

6) Integral dengan batas integrasi yang tak-berhingga merupakan integral tak-wajar Jenis I.

   1. Jika *f(x)* kontinu pada [a,∞], maka

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

2. Jika *f(x)* kontinu pada [-∞, b], maka

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

3. Jika *f(x)* kontinu pada [-∞, b], maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Di mana c adalah sembarang bilangan real.

Pada setiap kasus, jika nilai limit tersebut berhingga, maka integral tak-wajar dikatakan konvergen dan nilai limit tersebut merupakan nilai integral tak-wajar. Jika nilai limit tidak ada, maka integral tak-wajar dikatakan divergen.

7) Integral dari fungsi bernilai tak-berhingga pada suatu titik dalam interval integrasi disebut Integral tak-wajar Jenis II.

1. Jika *f(x)* kontinu pada (a,b] dan tak-kontinu di a, maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to a^{+}} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

2. Jika *f(x)* kontinu pada [a,b) dan tak-kontinu di b, maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to b^{-}} \int_{a}^{c} f(x)dx$$

3. Jika *f(x)* tak-kontinu di c, di mana a < c < b, dan kontinu pada [a, c) ∪ (c, b], maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

Pada setiap kasus, jika limitnya berhingga, maka integral tak-wajar dikatakan konvergen dan limit tersebut merupakan nilai integral tak-wajar. Jika limitnya tidak ada, maka integral tak-wajar dikatakan divergen.

8) untuk variabel acak kontinu adalah fungsi f yang terdefinisi pada interval $(-\infty, \infty)$ dan mempunyai property berikut:

1. f kontinu, kecuali mungkin di sejumlah berhingga titik,

2. f tak-negatif sehingga $f \geq 0$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Jika X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang *f*, maka peluang bahwa X mempunyai nilai pada interval di antara X = c dan X = d adalah integral luas.

$$P\ (c \ \leq X \ \leq d) = \int_{c}^{d} f(X)\ dX.$$

9) Nilai harapan atau mean dari variabel acak kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang f adalah bilangan

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X\ f(X)dx$$

10) Median dari variabel acak kontinu X yang mempunyai fungsi kepadatan peluang f adalah bilangan m dengan

$$\int_{-\infty}^{m} f(X)dX = \frac{1}{2} \quad dan \int_{m}^{\infty} f(X)dX = \frac{1}{2}.$$

11) Variansi dari variabel acak X yang mempunyai fungsi kepadatan peluang f adalah nilai yang diharapkan dari $(X - \mu)^2$. Yaitu

$$\text{Var (X)} = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \ \mu)^2\ f(X)dX$$

Simpangan baku dari X adalah

$$\sigma X = \sqrt{Var\ (x)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (X - \ \mu)^2\, f(x)\ dX}$$

5. Latihan

1) Gunakan substitusi untuk mengubah integral menjadi integral yang bentuknya dapat dicari ditabel dan hitung integralnya

$$\int \frac{dt}{\tan t\, \sqrt{4 - sin^2 t}}$$

2) Gunakan rumus reduksi untuk menghitung integral

$$\int 2\, sin^2\, t\, sec^4 t\, dt$$

3) Hitunglah integral dari $\int_1^2 x\, dx$

4) Hitunglah integral dari $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds$

5) Estimasikan banyaknya subinterval minimum yang diperlukan untuk mengaproksimasikan integral dengan besar galat kurang dari 10^{-4} menggunakan aturan Trapesium dan aturan simpson

$$\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds$$

6) Hitunglah Integral $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

7) Hitunglah Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Gunakan Integrasi, Uji Banding langsung, atau Uji Banding limit untuk menguji Konvergensi Integral. Jika terdapat lebih dari satu uji yang dapat digunakan, maka anda boleh memilih yang lebih disukai.

$$\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$$

2) Tentukan fungsi yang merupakan fungsi kepadatan peluang dan berikan alasan untuk jawaban anda.

$$f(x) = 2\cos 2x\ pada\ \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

3) Carilah konstanta C sehingga fungsi yang diberikan merupakan fungsi kepadatan peluang untuk suatu variabel acak dari $f(x) = \frac{1}{6}\ x\ pada\ [3, c]$

4) Hitunglah mean dan median untuk variabel acak dari

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}x, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

5) Hitunglah integral dari $\int \sqrt{2x+1}$

6) Hitunglah Integral dari $\int x^2 \cos x^3\ dx$

7) Hitunglah integral dari $\int_3^1 t^3\ (1\ + t^4)^3\ \ dt$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi teknik pengintegralan secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Integral parsial Substitusi rasional

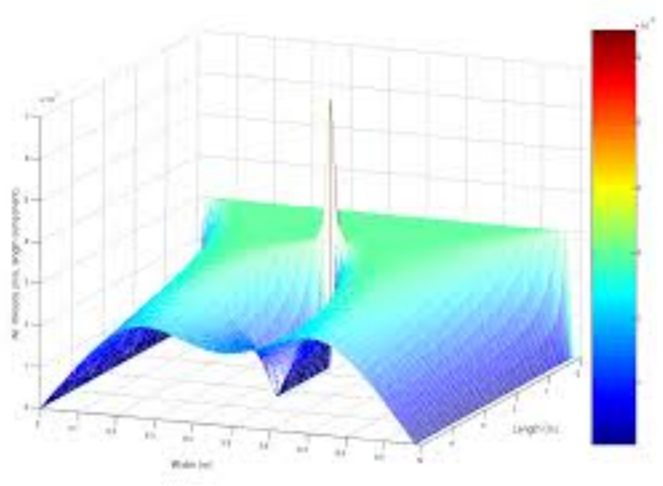
4. Referensi

Dale Varberg, E. J., Purcell, S. E., & Rigdon. (2019). Teknik Integrasi. In E. J. Dale Varberg, S. E. Purcell, & Rigdon, *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2* (pp. 1-11). Jakarta: Erlangga.

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Thomas, G. B. (2017). TEKNIK INTEGRASI. In G. B. Thomas, *Kalkulus Thomas Edisi Ketiga Belas Jilid 1* (pp. 444 - 517). Jakarta: Erlangga.

MODUL 2 PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE SATU



MODUL 2 PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE SATU

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Persamaan differensial orde satu adalah sebuag persamaan yang didapatkan dengan melakukan proses penurunan pada fungsi. Turunan yang digunakan adalah turunan pertama. Modul ini memuat materi rumus pendahuluan persamaan differensial orde satu, medan kemiringan, metode euler, . aplikasi persamaan differensial orde satu, penyelesaian grafis untuk persamaan otonom, sistem persamaan differensial orde satu dan bidang fase. Setiap contoh soal, latihan dan evaluasi pembelajaran dapat digunakan untuk memaksimalkan pembelajaran yang dilakukan oleh mahasiswa.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Dua

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral, teknik integral.

5. Kegunaan Modul Dua

   Kegunaan modul Dua ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan teknik pengintegralan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai persamaan differensial orde satu untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : rumus pendahuluan persamaan differensial orde satu, medan kemiringan, metode euler, aplikasi persamaan differensial orde satu, penyelesaian grafis untuk persamaan otonom, sistem persamaan differensial orde satu dan bidang fase.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 3 : Menguasai konsep rumus pendahuluan persamaan differensial orde satu, medan kemiringan, metode euler

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan pendahuluan persamaan differensial orde satu, medan kemiringan, metode euler. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan pendahuluan persamaan differensial orde satu, medan kemiringan, metode euler. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

2.1 Persamaan diferensial orde satu

Persamaan diferensial orde satu adalah persamaan berbentuk $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, dengan f(x, y) adalah fungsi dua variabel yang terdefinisi pada suatu daerah di bidang x-y. Persamaan ini merupakan persamaan orde satu karena persamaan tersebut hanya memuat turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dan tidak memuat turunan dengan orde yang lebih tinggi. Suatu persamaan orde satu dapat dinyatakan secara umum dalam dua bentuk, antara lain :

a. Bentuk implisit,

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ atau $F(x, y, y') = 0$.

Contoh

Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial berikut.

$$xyy' + x^2 + 1 = 0$$

Penyelesaian :

Jenis persamaan diferensial di contoh 1 adalah persamaan diferensial implisit orde satu karena terdapat suku xyy' di mana $y' = \frac{dy}{dx}$ yang artinya yaitu turunan pertama atau bisa disebut sebagai orde satu.

$yy' = \frac{-x^2-1}{x}$

$y\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-x^2-1}{x}\right)$

$y\,dy = \left(\frac{-x^2-1}{x}\right)$

$\int y\,dy = \int \left(\frac{-x^2-1}{x}\right) dx$

$\frac{1}{2}y^2 + C = \int -x\,dx \int -\frac{1}{x}dx$ (dikali 2)

$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 - In\,x + C$

$y^2 = -x^2 - 2\,In\,x + C$

$y = \sqrt{-x^2 - x^2 + C}$

$y = \sqrt{-2x^2 + C}$

Jadi, solusi persamaan diferensial pada contoh 1 adalah

$y = \sqrt{-2x^2 + C}$.

b. Bentuk eksplisit,

$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = f(x, y)$ atau $y' = f(x, y)$.

Contoh

Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 5$$

Penyelesaian :

Jenis persamaan diferensial di contoh 2 adalah persamaan diferensial eksplisit orde satu karena terdapat suku $\frac{dy}{dx}$ di mana yang artinya yaitu turunan pertama atau bisa disebut sebagai orde satu.

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 5$

$dy = (3x^2 + 6x - 5)dx$

$\int dy = \int (3x^2 + 6x - 5)dx$

$y + c = x^3 + 3x^2 - 5x$

Jadi, solusi persamaan diferensial pada contoh 2 adalah

$y + c = x^3 + 3x^2 - 5x.$

Berikut ini merupakan contoh identifikasi persamaan diferensial orde satu :

1. $xy' + y^2 + x^2 + 1 = 0$ atau $x\frac{dy}{dx} + y^2 + x^2 + 1 = 0$

   (Persamaan diferensial orde satu bentuk implisit).

2. $y'' - 2y + e^x = 0$ atau $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y + e^x = 0$

   (Persamaan diferensial orde dua bentuk implisit).

3. $y' = 2y + e^x$

   (Persamaan diferensial orde satu bentuk eksplisit).

4. $y'' = xy + x^2$

   (Persamaan diferensial orde dua bentuk eksplisit).

Berikut ini merupakan contoh soal latihan mengenai persamaan diferensial orde satu :

Contoh

Tunjukkan bahwa fungsi

$$y = (x+1) - \frac{1}{3}e^x$$

Merupakan penyelesaian dari masalah nilai awal orde satu

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}$$

Penyelesaian :

Persamaan

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

Yaitu persamaan diferensial orde sayu dengan f(x, y) = y - x

Persamaan pada ruas kiri :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

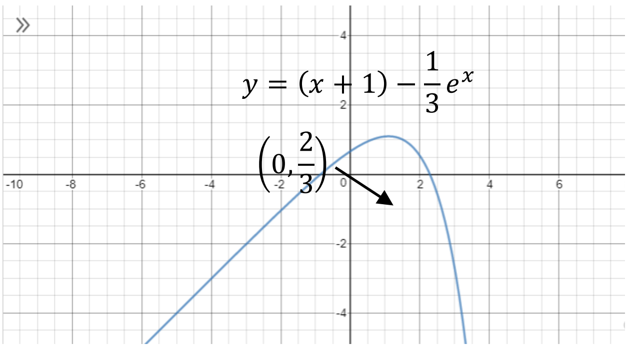
Persamaan pada ruas kanan :

$$y - x = (x+1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

Jadi, fungsi tersebut memenuhi syarat awal karena

$$y(0) = \left[(x+1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Berikut merupakan grafik terkait contoh soal tersebut.



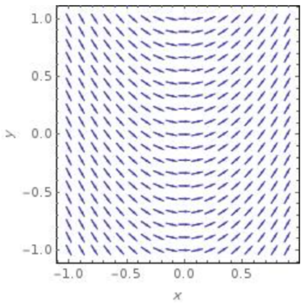
Gambar 11 Grafik fungsi

2.2 Medan kemiringan

$y' = F(x, y)$ secara visual merupakan kemiringan di setiap titik (x, y) di bidang cartesius sumbu x dan sumbu y. Kemiringan inilah yang disebut dengan medan kemiringan atau medan arah atau medan gradient.

Contoh

$$y' = 2x$$



Gambar 12 Medan kemiringan

Gambar ini adalah bidang medan arah/medan gradient/medan kemiringan dari $y' = 2x$ atau bisa juga disebut kumpulan kemiringan dari $y' = 2x$ di setiap titik (x, y).

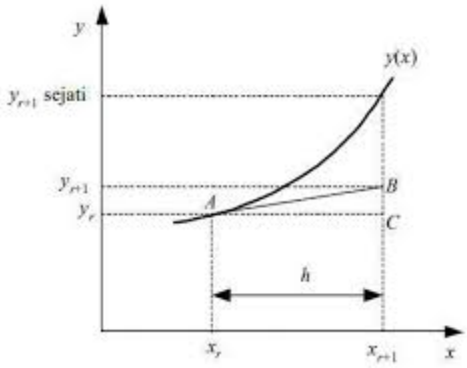
Perhatikan bahwa $F(x, y)$ yaitu 2x merupakan kemiringan yang tidak tergantung pada y. Hal ini bias dilihat secara vertical tidak ada perubahan

$$y(x) = c_1 + x^2$$

2.3 Metode Euler

Metode euler atau metode orde pertama adalah metode satu langkah paling sederhana. Dibanding dengan beberapa metode lainnya, metode ini kurang teliti.

Tetapi metode ini penting untuk dipelajari karena kesederhanaannya sehingga memudahkan dalam metode lain yang lebih teliti.



Gambar 13 Kemiringan

Pada diagram tersebut, kartesius y = f(x) didalam fungsi tersebut ada sebuah titik yang berada di x_0, y_0. Kita bisa lihat disana ada garis singgung (garis yang berwarna merah) fungsi y = f(x). Selanjutnya dari garis singgung kita bisa melihat ada titik di (x_1, y_1). Melalui titik x_1, y_1 yang berada digradien x_0, y_0, kita menentukan x_1, y_1 yang berada di kurva f(x). Jarak antara x_0 dengan x_1 disebut h atau dx. Jika h nya semakin kecil atau dalam artian $x_1$nya semakin kekiri, maka kesalahan atau errornya itu semakin kecil. Untuk menentukan x_1 yang paling tepat itu adalah mencari h-nya yang paling kecil.

4. Rangkuman

1) Bentuk implisit,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ atau } F(x, y, y') = 0.$$

2) Bentuk eksplisit,

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = f(x, y) \text{ atau } y' = f(x, y).$$

3) Berikut ini merupakan contoh identifikasi persamaan diferensial orde satu :

a. $xy' + y^2 + x^2 + 1 = 0$ atau $x\frac{dy}{dx} + y^2 + x^2 + 1 = 0$ (Persamaan diferensial orde satu bentuk implisit).

b. $y'' - 2y + e^x = 0$ atau $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y + e^x = 0$ (Persamaan diferensial orde dua bentuk implisit).

c. $y' = 2y + e^x$ (Persamaan diferensial orde satu bentuk eksplisit).

d. $y'' = xy + x^2$ (Persamaan diferensial orde dua bentuk eksplisit).

5. Latihan

1) Carilah tiga aproksimasi pertama y_1, y_2, y_3 menggunakan metode euler untuk masalah nilai awal y' = 1 + y, y(0) = 2, yang dimulai di $x_0 = 0$ dengan dx = 0,2.
2) Tentukan solusi dari persamaan $y^2dx + (3xy - 1)dy = 0$
3) Temukan kesalahan (y(tepat) – y(Euler)) pada titik yang ditentukan x = b untuk masing-masing pendekatan Euler anda.
4) Sebuah benda dengan temperature 50℉ diletakkan di luar ruangan yang temperature 100℉. Jika setelah 5 menit temperature tersebut berubah menjadi 60℉. Maka carilah waktu yang dibutuhkan benda tersebut untuk mencapai temperature 75℉ dan hitunglah temperature benda tersebbut setelah 20 menit.
5) Gunakan metode Euler dengan dx = 0,2 untuk y (2) jika y' = y > x dan y (1) adalah 2. Temukanlah nilai dari y (2) tersebut.
6) Carilah solusi umum dari $(y \sin 2x - \cos x)dx + (1 + sin^2x)dy = 0$
7) Jika terdapat persamaan $y = Ax^2 + Bx$ maka bentuk PD-nya yaitu

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Selesaikan persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x}$
2) Diketahui PDB $\frac{dy}{dx}$ = x + y dan y(0) = 1. Gunakan Metode euler untuk menghitung y(0,20) dengan ukuran langkah h = 0,1. Diketahui solusi sejati PDB adalah $y(x) = e^x - x - 1$.
3) Diketahui $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x}$ maka tentukanlah persamaan diferensial tersebut
4) Suatu bakteri diketahui dapat berkembang dengaan cepat. Setelah satu jam, 1000 bakteri teramati dan setelah 4 jam menjadi 3000 bakteri. Tentukanlah eksperi Matematika perkiraan jumlah bakteri yang ada dalam proses tersebut.
5) Tentukan trayektori orthogonal dari keluarga kurva $y = cx^2$
6) Tentukan trayektori orthogonal dari keluarga kurva $2x^2 + y^2 = c^2$
7) Diketahui suhu udara 450K, zat tertentu mendingin dari 370K ke 230K dalam 10 menit. Carilah suhu zat tersebut setelah 40 menit.
8) Tentukan keluarga trayektori ortogonal dari keluarga kurva $y^2 + x^2 = 2cx$.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetulnya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 4 : Menguasai konsep aplikasi persamaan differensial orde satu, penyelesaian grafis untuk persamaan otonom, sistem persamaan differensial orde satu dan bidang fase.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan aplikasi persamaan differensial orde satu, penyelesaian grafis untuk persamaan otonom, sistem persamaan differensial orde satu dan bidang fase.. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan aplikasi persamaan differensial orde satu, penyelesaian grafis untuk persamaan otonom, sistem persamaan differensial orde satu dan bidang fase. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

2.4 Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Satu

a. Gerak dengan Hambatan Sebanding dengan Kecepatan

Aplikasi dari persamaan diferensial tingkat 1 yang pertama menganalisa sebuah benda yang bergerak lurus dengan adanya gaya yang menghambat lajunya. Hukum II Newton menyatakan

$$F = m.a = m\frac{dv}{dt}$$

Jika gaya hambatan proporsional dengan kecepatannya, kita mendapatkan

$$m\frac{dv}{dt} = -k.v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v$$

Adapun persamaan diferensial yang menggunakan perubahan yang eksponensial yaitu

$$v = v_0 . e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 . e^{-\frac{k}{m}t}$$

Ketika kedua sisi diintegralkan terhadap waktu

$$s = v_0 . -\frac{m}{k} . e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

S=0, t=0;

$$v_0 . \frac{m}{k} = C$$

Persamaan posisi menjadi:

$$s(t) = v_0 . -\frac{m}{k} . e^{-\frac{k}{m}t} + v_0 . \frac{m}{k}$$

$$= v_0 . \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Untuk mencari tahu sejauh mana posisinya kita mencari $s(t)$ Ketika t mendekati tak hingga sehingga;

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} v_0 . \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$= v_0 . \frac{m}{k}(1 - 0)$$

$$= v_0 . \frac{m}{k}$$

Jadi; jarak terjauh $= v_0 . \frac{m}{k}$

b. Ketidakakuratan Model Pertumbuhan Eksponensial Populasi

Jika kita membuat model perubahan pertumbuhan populasi berdasar Hukkum perubahan Eksponensial

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Untuk persamaan diferensial pertumbuhan eksponensial dapat disubstitusikan

$$\frac{dP/dt}{P} = k$$

Dengan persamaan eksponensial $P = P_0 e^{kt}$ kita dapat menentukan perkiraan jumlah populasi untuk kedepannya.

Year	Population (millions)	$\Delta P/P$
1980	4454	$76/4454 \approx 0.0171$
1981	4530	$80/4530 \approx 0.0177$
1982	4610	$80/4610 \approx 0.0174$
1983	4690	$80/4690 \approx 0.0171$
1984	4770	$81/4770 \approx 0.0170$
1985	4851	$82/4851 \approx 0.0169$
1986	4933	$85/4933 \approx 0.0172$
1987	5018	$87/5018 \approx 0.0173$
1988	5105	$85/5105 \approx 0.0167$
1989	5190	

c. Trayektori Ortogonal

Trayektori ortogonal merupakan suatu perpotongan dua keluarga kurva yang saling tegak lurus. Dapat diartikan bahwa, setiap kurva dalam salah satu keluarga berpotongan tegak lurus dengan semua kurva di keluarga kurva yang lain. Sebaliknya jika titik perpotongannya, kedua kurva memiliki garis singgung yang saling tegak lurus maka dua buah kurva disebut sebagai berpotongan tegak lurus (ortogonal).

Apabila diketahui keluarga kurva di bidang *XY* yang dinyatakan dari persamaan *F(x, y, k)* = 0 dimana *k* = konstan variabel. Kurva yang memotong tegak lurus kurva-kurva tersebut disebut trayektori ortogonal dari kurva *F*.

Sistem kurva yang saling ortogonal adalah sistem yang penting pada masalah-masalah fisis yang berkaitan dengan potensial listrik, yakni salah satu keluarga kurva berhubungan dengan kekuatan medan listrik dan keluarga kurva lainnya berhubungan dengan potensial listrik. Cara untuk memperoleh trayektori ortogonal dari suatu keluarga kurva *F(x, y, k)* = 0 yakni sebagai berikut:

Tahap 1

Turunkan persamaan kurva, hingga mendapatkan persamaan diferensial orde-1 untuk keluarga kurva, yakni *F'(x, y, k)* = 0.

Tahap 2

Substitusi *k* = *F(x,y)* dalam *F'(x, y, k)* = 0 agar mendapatkan persamaan diferensial implisit untuk *F(x,y)* = 0 berbentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Tahap 3

Untuk persamaan diferensial yang berhubungan bagi keluarga ortogonal menjadi bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Tahap 4

Mencari penyelesaian dari persamaan diferensial.

d. Masalah Campuran (Larutan)

Masalah campuran merupakan masalah umum yang sering ditemui didalam bidang kimia. Misalkan suatu zat kimia pada larutan cair (atau yang terdispersi dalam gas) mengalir ke dalam wadah yang menampung cairan (atau gas) yang memiliki potensi juga mengandung zat kimia yang terlarut di dalamnya. Suatu campuran yang sempurna dalam sebuah tangki, yang mana campuran tersebut terdiri dari dua bahan, bahan pertama dan bahan kedua. Maka terjadi pencampuran didalam tangki tersebut dan masing-masing bahan dengan hasil campuran tersebut memiliki konsentrasi yang berbeda. Apabila Q menyatakan jumlah bahan dalam waktu tertentu, maka perubahan Q terhadap t dinyatakan dengan $\frac{dQ}{dt}$, lalu jika proses yang terjadi adalah ditemukan campuran masuk dan campuran keluar, yang mana laju jumlah bahan masuk dinyatakan dengan proses IN dan laju jumlah bahan keluar dinyatakan dengan proses OUT maka

$$\frac{dQ}{dt} = IN - OUT$$

Dimana laju masuk sama dengan laju keluar

$$IN = kv = sr\frac{gram}{liter}$$

$$OUT = \frac{Q}{K}v = \frac{Qr}{L}\frac{gram}{liter}$$

2.5 Penyelesaian grafis untuk Persamaan Otonom

a. Nilai Kesetimbangan dan Garis Fase

Persamaan diferensial merupakan fungsi turunan dari y yang disebut sebagai sistem persamaan diferensial otonom. Sembarang turunan bersifat kontinu. Jika dy/dx = g(y) adalah persamaan diferensial otonom, maka nilai y untuk dy/dx = 0 disebut sebagai nilai kestimbangan atau titik seimbang. Nilai kesetimbangan adalah nilai ketika suatu variable bebas tidak dapat berubah sehingga y nya setimbang. Penekanannya itu berpusat pada nilai y dengan dy/dx = 0 bukan pada nilai x. Seperti contoh yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)(y-3)$$

Maka nilai kesetimbangan untuk persamaan diferensial otonom adalah y = -2 dan y = 3.

Tahap pertama yang perlu dilakukan dalam membuat penyelesaian grafik persamaan diferensial otonom yaitu kita perlu membuat garis fase untuk persamaan tersebut. Garis fase adalah garis yang terdapat pada sumbu y dan menunjukan nilai kesetimbangan pada suatu persamaan dengan interval dy/dx dan d^2y/dx^2 nya bernilai positif dan negative. Maka setelah itu akan dapat diketahui interval tempat penyelesaian tersebut berujung naik atau turun serta kecekungan kurva persamaan itu.

b. Hukum Pendinginan Newton

Hukum pendinginan Newton adalah hukum ilmiah yang merumuskan benda-benda yang memiliki berbagai macam kerapatan seragam. Hukum pendinginan newton ini juga kerap kali dihubungkan dengan kematian pada tubuh manusia. Huku pendinginan newton ini ditemukan oleh karya Isaac Newton dengan judul "Scala graduum Caloris. Calorum Descriptiones & signa". Hukum pendinginan Newton dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T - T_s)$$

K merupakan tetapan proposionalitas, T adalah suhu, Ts adalah suhu pada sekitar objek, dan t merupakan waktu. Pada persamaan diferensial dapat diselesaikan $\int \frac{1}{(T - T_s)} dT(t) = \int -kdt$ melalui cara:

$$\ln|(T - T_s)| = -kt + c$$

$$T - T_s = e^{-kt} + e^c = ce^{-kt}$$

$$T(t) = T_s + ce^{-kt}$$

Jika t nya adalah 0 (pada keadaan awal) maka:

$$T(0) = T_s + ce^0$$

$$c = T_0 - T_s$$

sehingga:

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$$

Dengan persamaan diatas dapat disimpulkan bahwa apabila suatu suhu semakin tingginya atau suatu benda menjadi lebih dingin maka lanju perndingan tersebut akan menjadi lambat karena dT/dt nya menuju nol. Grafik dalam persamaan tersebut akan menjadi lebih rata seiring dengan pertambahan waktu yang memberikan representasi visual yang cepat mengenai fenomena pendinginan tersebut.

c. Benda Jatuh Bebas yang Mengalami Gesekan

Gerak jatuh bebas adalah gerak yang hanya dapat dipengaruhi oleh gaya gravitasi bumi atau gerak yang jatuh tanpa adanya suatu gesekan. Namun, pada prosesnya, keadaan tersebut dapat terjadi apabila suatu benda tersebut jatuh kedalam ruang yang hampa. Syarat utama suatu benda dapat mengalami gerak jatuh bebas yaitu karena kecepatan awal benda tersebut adalah nol atau dapat dikatakan bahwa benda bergerak tanpa adanya kecepatan awal. Maka dapat disimpulkan bahwa adanya gaya gesek yang akan meningkat seiring dengan adanya suatu benda yang jatuh. Akibatnya tidak ada suatu gaya yang bekerja dengan baik. Sehingga, munculan keadaan yang berlaku yaitu Hukum Newton I.

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$F = m\frac{dv}{dt} \; atau \; F = ma$$

Pada benda yang jatuh bebas, terdapat percepatan tetap yang diakibatkan oleh gravaitasi dan dilambangkan sebagai g, yaitu:

$$F_p = mg$$

Untuk laju yang besarnya dibawah kecepatan suara, terdapat percobaan-percobaan fisis yang menunjukkan bahwa F_r sebanding dengan kecepatan benda. Maka, akan didapatkan bahwa gaya total dari benda jatuh yaitu:

$$F = F_p - F_r$$

yang menyebabkan adanya,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

d. Pertumbuhan Populasi Logistik

Pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi yang terkait dengan suatu kepadatan, hal ini mencerminkan terhadap pengaruh dari persaingan intraspesifik. Dalam bidang Matematika, penghambatan suatu populasi ini dapat dijelaskan dengan menambahkan suatu variable yang berpengaruh pada kepadatan persamaan eksponensial. Dengan menggunakan model eksponensial maka,

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Hubungan sederhana yang dapat menggambarkan bahwwa suatu populasi menddekati batas populasi atau daya dukung lingkungan adalah

$$k = r\ (M - P)$$

Dengan r > 0 merupakan sebuah konstanta. Jika nilai k turun saat P nya bertambah menuju M dan k bernilai negative apabila P lebih besar dari M.

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2$$

2.6 Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu dan Bidang Fase

Sistem persamaan diferensial memiliki definisi sebagai gabungan dari beberapa persamaan diferensial. (Fitri, dkk, 2014:71) Sistem ini terdiri sebanyak n persamaan diferensial dan sebanyak n fungsi yang nilainya tak diketahui.

a. Bidang Fase

Bentuk umum sistem dengan dua persamaan diferensial orde satu secara otonom memiliki bentuk :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

Sistem ini dikatakan otonom karena perilaku turunan-turunan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ bergantung pada variabel tak bebas *(x dan y)* bukan pada variabel bebas waktu *t*.

Penyelesaian sistem fungsi *x(t)* dan *y(t)* yang memenuhi persamaan diferensial secara bersama untuk setiap *t* pada suatu interval waktu (berhingga atau tak berhingga). Kedua fungsi bergantung baik pada x dan juga y, karena itu hanya melihat salah satu persamaan saja tidak bisa untuk mendapatkan fungsi x(t) atau y(t). Dengan demikian, fungsi penyelesaian menyatakan definisi bahwa kurva penyelesaian melalui titik-titik tertentu dikenal dengan trajektori sistem. Selain itu, dengan menyatakan suatu kurva di bidang –xy akan mendapatkan penyelesaian dari x(t), y(t) dalam sistem otonom. Adapun bidang –xy yang menjadi tempat trajektori tersebut berada disebut dengan bidang fase.

Pemahaman sistem persamaan diferensial yakni dengan adanya suatu pendekatan menggunakan prosedur grafik yang dikenal dengan nama analisis bidang fase. Analisis ini meninjau kedua penyelesaian secara bersama-sama dan membahas trajektori penyelesaian di bidang fase dimana dapat dibuktikan bahwa dua trajektori tidak saling berpotongan ataupun bersingggungan. Analisis berikut disajikan dalam konteks pemodelan populasi ikan forel dan ikan kakap yang hidup bersama dalam satu kolam dengan model yang dinamakan model Kompetisi-Pemangsa.

b. Model Kompetisi-Pemangsa

Jika terdapat ikan forel dan ikan kakap hidup disuatu kolam dan berkompetisi untuk mendapatkan sumber daya yang sama namun terbatas, seperti makanan dan oksigen. Misalkan dua populasi ini dimodelkan sebagai berikut:

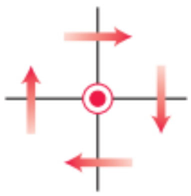
x(t) : jumlah ikan forel di kolam pada waktu t

y(t) : jumlah ikan kakap di kolam pada waktu t

Laju perubahan populasi dipengaruhi oleh beberapa faktor. Hal ini karena seiring berjalannya waktu tentu masing-masing dari spesies akan berkembang biak sehingga diasumsikan bahwa pertambahan populasi sebanding dengan ukuran populasi. Namun ada pula kenyataan bahwa kedua spesies tersebut berkompetisi sehingga adanya efek ketidaksetimbangan. Jumlah ikan kakap yang besar cenderung mengakibatkan penurunan jumlah ikan forel, begitupun sebaliknya jumlah ikan forel yang besar cenderung mengakibatkan penurunan jumlah ikan kakap. Dalam hal ini ukuran efek sebanding dengan frekuensi interaksi kedua spesies, yang bagi gilirannya sebanding dengan xy, yang merupakan hasil kali kedua populasi.

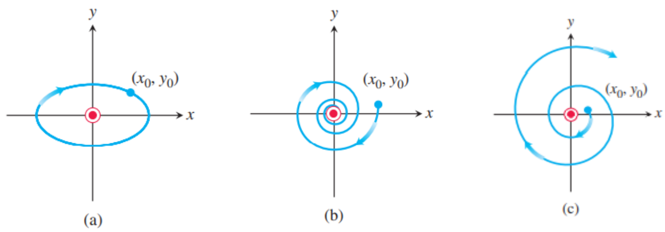
c. Keterbatasan Metoda Analisis Bidang Fase

Selain situasi dengan model kompetisi-pemangsa, penentuan sifat trajektori tidaklah selalu memungkinkan. Contohnya, diketahui trajektori di dekat suatu titik setimbang dengan titik asal (0,0) yang kemudian digambarkan seperti berikut :



Gambar 14 Titik Setimbang

Berdasarkan gambar tersebut maka tidak cukup untuk melakukan kemungkinan dalam membedakan tiga kemungkinan gerak trajektori, ketiga kemungkinan tersebut antara lain gerak periodik, gerak menuju titik stabil asimtotis, gerak di dekat titik setimbang yang tak stabil dimana dengan digambarkan sebagai berikut:



Gambar 15 Titik Kesetimbangan

4. Rangkuman

1) Persamaan diferensial yang menggunakan perubahan yang eksponensial yaitu

$$v = v_0 . e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 . e^{-\frac{k}{m}t}$$

2) Persamaan diferensial pertumbuhan eksponensial dapat disubstitusikan

$$\frac{\frac{dP}{dt}}{P} = k$$

3) Gaya total dari benda jatuh yaitu:

$$F = F_p - F_r$$

yang menyebabkan adanya,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

5. Latihan

1) Tentukan $x\frac{dy}{dx} - 5y = x^7$
2) Sebuah benda dengan massa 5 kg dijatuhkan dari ketinggian 100 m dengan kecepatan nol. Diasumsikan tidak ada hambatan udara. Maka carilah ekspresi Matematika untuk posisi pada tiap waktu t dan waktu yang diperlukan untuk mencapai permukaan tanah.
3) Buktikan teorema ini jika f dan g adalah solusi dari $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$, maka $c_1 f + c_2 g$ juga merupakan solusi dari persamaan diferensial tersebut dengan c_1, c_2 sebagai konstanta sembarang
4) Hitunglah y1 sampai dengan y5 dengan h = 0,2. y' = x + y, y(0) = 0.
5) Carilan solusi umum dari $(y \sin 2x - \cos x)dx + (1 + sin^2 x)dy = 0$
6) Untuk h = 0,3, hitunglah y0, y1, dan y2 pada masalah nilai awal berikut:

   $y'' = y^2 - x^2$

   $y(0) = 0$

   $y(1) = 1$
7) Tunjukan bahwa kurva $2x^2 + 3y^2 = 5$ dan $y^2 = x^3$ adalah orthogonal
8) Diberikan persamaan $a\left(\frac{dy}{dx}\right) + by = ke^{-\lambda x}$ dengan a,b,k adalah konstanta positif dan λ adalah konstanta negative. Maka selesaikanlah persamaan tersebut.
9) Tentukan apakah kesetimbangan $\frac{dP}{dt} = 2P(P-3)$ tersebut stabil.
10) Hitunglah $xdy + (3y - x^{-2}\cos x)dx = 0, x > 0$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Suatu zat radioaktif mula-mula banyaknya x_0 gram. Zat radioaktif berkurang banyaknya sebanding dengan banyaknya pada saat tersebut. Tentukan waktu T sehingga banyaknya zat radioaktif pada saat T adalah setengah dari banyaknya zat semula. Waktu T ini dikenal sebagai waktu setengah umur (hidup)
2) Selesaikan soal berikut :
$$xy' + (3x - xy + 2)dy = 0, y(2) = -1, y < 0$$
3) Bentuklah persamaan diferensial dari fungsi : $y = x + \frac{A}{x}$
4) Seloyang adonan dengan suhu awal yaitu 15℃ dan dimasukkan kedalam oven yang memiliki suhu 180℃ tetap konstan. Setelah 10 menit, suhu adonan dalam oven berubah menjadi 30℃. Pola kenaikkan suhu dalam oven mengikuti Hukum Pendinginan Newton. Berapa lamakan suhu adonan untuk mencapai 100℃.
5) Selesaikan persamaan diferensial $(x^2 + x - y)dx + x\,dy = 0$
6) Sebuah bola tembaga emas dengan suhu awal 145℃ dimasukkan ke dalam sebuah ruangan yang bersuhu 20℃ tetap konstan. Setelah 10 menit, suhu bola tembaga emas dalam ruangan menjadi 135℃. Pola penurunan suhu dalam ruangan mmengikuti Hukum Pendingan Newton. Berapa lamakah suhu bola tembaga emas menjadi 35℃.
7) Bagaimana menjelaskan hubungan antara ukuran populasi P dan waktu t untuk memprediksi ukuran populasi P pada waktu yang akan datang?
8) Jika terdapat mayat dengan temperature 85℉ dan temperature tersebut turun menjadi 74℉ setelah 2 jam. Suhu lingkungan disekitarnya adalah 68℉, maka hitunglah berapa jam mayat itu ditemukan
9) Tentukanlah solusi persamaan diferensial dari $(\mathrm{x}^2 + 1) + \mathrm{y}^2 + 1 = 0$
10) Perhatikan data penduduk RRC pada table berikut:

Tahun	Rata-Rata Populasi
1950	546.815.000
1951	557.480.000
1952	568.910.000
1953	581.390.000
1954	595.310.000

Gunakan model pertumbuhan poplasi untuk melakukan prediksi jumlah penduduk RRC pada tahun 1951-1955 dan 2000-2003. Bandingkan dengan data populasi sesungguhnya

11) Tentukanlah apakah persamaan $x(y')^2 + 4y' - x^3 = 0$ termasuk kedalam bentuk eksplisit atau implisit
12) $g(x, y, C) = \sin x - Cy + x = 0$ memiliki solusi umum yaitu
13) Selesaikanlah persamaan diferensial $x \sin\frac{y}{x} y' = y \sin\frac{y}{x} + x$
14) Tentukanlah solusi umum dari peramaan

$$(2x - y + 2)dx + (x + 2y + 2)dy = 0$$

15) Sebuah bak memuat 100 liter air. Karena suatu kesalahan 300 kg garam tertaburkan dalam bak yang seharusnya diperlukan hanya 200 kg. Untuk mengatasi masalah tersebut, air nya dibuang yang sudah tercampur oleh garam secara teratur 3 liter/menit. Dalam waktu yang sama bak juga dimasukkan 3 liter air murni. Jika dijaga agar kondisi garam dalam bak merata maka berapa lama agar garam yang ada dalam bak sesuai dengan yang diharapkan yaitu 200 kg?
16) Tentukanlah solusi dari $y' - \frac{y}{2} = \exp(-t)\,, dengan\ y(0) = -1.$
17) Tentukan $N(x, y)$ sehingga $(xy - y^2 + x)dx + N(x, y)dy = 0$ eksak.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetulnya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul tiga ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaikan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Turunan	Orde	Limit	Tangen	Normal
Kontinu	Diskontinu	Differensial	Persamaan	

4. Referensi

Faradillah, A., & Tsurayya, A. (2021). *Pengantar Persamaan Diferensial.* Jakarta: UHAMKA PRESS.

Jr., G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Kalkulus Edisi Ketiga Belas Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.

Krisnawan, K. P. (2014). On the othogonal trajectories and conformal mapping of complex variable functions. *Jurnal Sains Dasar*, 1-2.

Prof. SM. Nababan, P. (2014). *Persamaan Diferensial Biasa.* Banten: Universitas Terbuka.

UB, K. J. (2013). Buku Ajar Matematika Teknik I . 25-27.

Weir, M. D., & Joel, H. (2014). *Thomas'Calculus Thirteenth Edition.* Jakarta: PENERBIT ERLANGGA.

https://belajarkalkulus.com/medan-arah-eksistensi-dan-ketunggalan-solusi/

Faradillah, A., & Tsurayya, A. (2021). *Pengantar Persamaan Diferensial.* Jakarta: UHAMKA PRESS.

Jr., G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Kalkulus Edisi Ketiga Belas Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.

Krisnawan, K. P. (2014). On the othogonal trajectories and conformal mapping of complex variable functions. *Jurnal Sains Dasar*, 1-2.

Prof. SM. Nababan, P. (2014). *Persamaan Diferensial Biasa.* Banten: Universitas Terbuka.

UB, K. J. (2013). Buku Ajar Matematika Teknik I . 25-27.

Weir, M. D., & Joel, H. (2014). *Thomas'Calculus Thirteenth Edition.* Jakarta: PENERBIT ERLANGGA.

Nuraeni, Z. (2017). Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Estimasi Jumlah Populasi. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*

Bambang Suprihatin Bangun. (2019). *Persamaan Diferensial Biasa.* Yogyakarta: ISBN.

Nisya, I. K. (2018, Juli 4). *Matematika persamaan diferensial*. Retrieved from http://indahnisya.blogspot.com/2018/07/makalah-matematika-persamaan-diferensial.html

Prananto, D. (2015, March 25). *Persamaan diferensial biasa*. Retrieved from Persamaan diferensial orde pertama: https://www.slideshare.net/dwiprananto/persamaan-diferensial-biasa

Oktaviani, R., & Prihandono, B. (2014). Penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial non linear dengan metode Heun pada model Lotka-Volterra. *BIMASTER*, *3*(01).

Fitri, A., Oka, T. B., & Widana, I. N. (2014). Model Matematika (Linier) Populasi Anjing Rabies dengan Vaksinasi. *Jurnal Matematika, ISSN*, 1693-1394.

Azis, F. (2015). Analisa Matematik untuk Menentukan Kondisi Kestabilan Keseimbangan Pasar Berganda dengan Dua Produk Melalui Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear: http://repository.unisba.ac.id/bitstream/handle/123456789/5226/06bab2_azis_10060211023_skr_2015.pdf?sequence=6&isAllowed=y

Thomas, G., Hass, J., Weir, M. (2014). Thomas' Calculus. Britania Raya: Pearson Education.

Supandi, S., & Abdullah, S. S. (2017, February). MODEL PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA INTERAKSI DUA POPULASI. In *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika* (pp. 632-640).

MODUL 3 BARISAN DAN DERET TAK HINGGA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

MODUL 3 BARISAN DAN DERET TAK HINGGA

PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Barisan dan deret tak hingga didalam kalkulus menjadi salah satu materi dasar yang digunakan di materi selanjutnya. Barisan dan deret tak hingga didalam modul ini memuat tentang barisan tak hingga, deret tak hingga, uji integral, uji banding, konvergen mutlak:uji rasio dan uji akar, deret ganti tanda dan konvergen bersyarat, deret pangkat, deret Taylor dan deret Maclaurin, Konvergen deret Taylor, Deret binomial dan penerapan deret Taylor. Setiap topik yang dijabarkan dilengkapi dengan contoh soal dan latihan untuk menuntun mahasiswa menguasai setiap materi dengan baik.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Tiga

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral, teknik integral, persamaan differensial orde satu.

5. Kegunaan Modul Tiga

   Kegunaan modul tiga ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan teknik pengintegralan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai barisan dan deret untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : barisan tak hingga, deret tak hingga, uji integral, uji banding, konvergen mutlak:uji rasio dan uji akar, deret ganti tanda dan konvergen bersyarat, deret pangkat, deret Taylor dan deret Maclaurin, Konvergen deret Taylor, Deret binomial dan penerapan deret Taylor.

KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 3 : Menguasai konsep barisan tak hingga, deret tak hingga, uji integral, uji banding, konvergen mutlak:uji rasio dan uji akar, deret ganti tanda dan konvergen bersyarat

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan barisan tak hingga, deret tak hingga, uji integral, uji banding, konvergen mutlak:uji rasio dan uji akar, deret ganti tanda dan konvergen bersyarat. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan barisan tak hingga, deret tak hingga, uji integral, uji banding, konvergen mutlak:uji rasio dan uji akar, deret ganti tanda dan konvergen bersyarat. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

3.1 Barisan Tak – Terhingga

Merepresentasikan Barisan

Barisan adalah daftar bilangan yang diberikan dalam suatu urutan.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Masing – masing dari a_1, a_2, a_3, dan seterusnya mempresentasikan bilangan, dan merupakan suku – suku barisan. a_1 adalah suku pertama dan seterusnya. Bilangan bulat n disebut indeks dari a_n, dan menunjukkan letak a_n dalam urutan tersebut. Disini urutan menjadi hal yang penting.

Barisan yang dinyatakan dalam rumus a_n dapat kita sederhananakan dengan misalkan b_n dengan indeks n mulai dari bilangan bulat sembarang tidak harus 1.

Barisan tak – terhingga dari bilangan adalah fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif.

Barisan dapat dinyatakan dalam bentuk a_n yang sudah ditentukan oleh suku – sukunya atau dengan menuliskan suku – sukunya, kita juga bisa menambahkan aturan atau syarat. Bisa juga dengan grafik.

Konvergensi Dan Divergensi

Barisan $\{a_n\}$ konvergen ke bilangan L jika untuk setiap bilangan positif $\in$ terdapat bilangan bulat N yang bersesuaian sehingga untuk semua n,

$$n > N \to |a_n - L| < \in$$

Jika tidak ada bilangan L yang demikian, kita katakana bahwa $\{a_n\}$ divergen.

Jika $\{a_n\}$ konvergen ke L, maka kita tuliskan $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, atau cukup $a_n \to L$, dan L disebut limit barisan.

Dalam menuliskan tak – terhingga sebagai limit barisan kita hanya menggunakan lambang yang menggambarkan ide bahwa a_n pada akhirnya menjadi dan tetap lebih besar dari sembarang bilangan tetap apabila n meningkat, bisa juga menurun negative tak – terhingga.

Barisan $\{a_n\}$ divergen ke positif tak – terhingga jika untuk setiap bilangan M terdapat bilangan bulat N sehingga untuk semua n yang lebih besar dari N berlaku $a_n > M$. Jika syarat ini berlaku, maka ditulis

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ atau $a_n \to \infty$

Jika untuk sembarang bilangan m terdapat bilangan bulat N sehingga untuk semua $n > N$ berlaku $a_n < m$, maka dikatakan bahwa $\{a_n\}$ divergen ke negative tak -terhingga dan ditulis

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ atau $a_n \to -\infty$

Menghitung Limit Barisan

Teorema 1 : Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah barisan bilangan riil, dan misalkan A dan B adalah bilangan riil. Aturan berikut berlaku jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = B$

Aturan Jumlah : $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

Aturan Selisih : $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

Aturan Kelipatan Konstanta : $\lim_{n\to\infty}(k\times b_n) = k\times B$ (k sembarang bilangan)

Aturan Hasil Kali : $\lim_{n\to\infty}(a_n\times b_n) = A\times B$

Aturan Hasil Bagi : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}\ jika\ B \neq 0$

Hati – hati karena dalam Teorema 1 tidak mengatakn bahwa setiap barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ mempunyai limit.

Teorema 2 – Teorema Sandwich untuk Barisan : Misalkan $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, dan $\{c_n\}$ adalah barisan bilangan riil. Jika $a_n \leq b_n \leq c_n$ berlaku untuk semua n setelah indeks N, dan jika $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, maka $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Teorema 3 – Teorema Fungsi Kontinu untuk Barisan : Misalkan $\{a_n\}$ adalah bilangan riil. Jika $a_n \to L$ dan jika f adalah fungsi kontinu di L dan terdefinisi untuk semua a_n, maka $f(a_n) \to f(L)$.

Menggunakan Aturan L'Hopital

Teorema 4 : Jika $f(x)$ adalah fungsi yang terdefinisi untuk semua $x \geq n_0$ dan $\{a_n\}$ adalah barisan bilangan riil dengan $a_n = f(n)$ untuk $n \geq n_{0,}$ maka

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L \to \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Limit yang Sering Terjadi

Teorema 5 : Keenam barisan berikut konvergen ke limit yang diberikan ini

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1 \ (x > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \ (|x| < 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x \ (sembarang\ x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \ (sembarang\ x)$$

Definisi Rekursif

Barisan sering didefinisikan secara rekursif dengan memberikan

Nilai dari suku awal atau suku – sukunya, dan

Aturan, yang disebut rumus rekursif, untuk menghitung suku – suku berikutnya dari suku – suku sebelumnya.

Barisan Monoton Terbatas

Dua konsep yang menentukan dalam konvergensi barisan adalah barisan terbatas dan barisan monoton.

Sebuah barisan $\{a_n\}$ dikatakan terbatas di atas jika terdapat bilangan M sedemikian sehingga $a_n \leq M$ untuk semua n. Bilangan M adalah batas atas untuk $\{a_n\}$. Jika M adalah batas atas untuk $\{a_n\}$ dan tidak ada batas atas lain untuk $\{a_n\}$ Yang lebih kecil dari M, maka M merupakan batas atas terkecil untuk $\{a_n\}$

Sebuah barisan $\{a_n\}$ dikatakan terbatas di bawah jika terdapat bilangan m sedemikian sehingga $a_n \geq M$ untuk semua n. Bilangan m adalah batas bawah untuk $\{a_n\}$. Jika m adalah batas bawah untuk $\{a_n\}$ dan tidak ada batas bawah lain untuk $\{a_n\}$ Yang lebih besar dari m, maka m merupakan batas bawah terbesar untuk $\{a_n\}$

Jika $\{a_n\}$ terbatas dari atas dan bawah, maka $\{a_n\}$ dikatakan terbatas. Jika $\{a_n\}$ tidak terbatas, maka kita katakana bahwa $\{a_n\}$ adalah barisan tak – terbatas.

Sebuah barisan $\{a_n\}$ dikatakan tak – turun jika $a_n \leq a_{n+1}$ untuk semua n yaitu $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$

Sebuah barisan $\{a_n\}$ merupakan barisan tak – naik jika $a_n \geq a_{n+1}$ untuk semua n.

Barisan $\{a_n\}$ merupakan barisan monoton jika barisan tersebut merupakan barisan tak – turun atau tak – naik.

Teorema 6 – Teorema Barisan Monoton : Jika barisan $\{a_n\}$ terbatas sekaligus monoton, maka barisan tersebut konvergen.

Contoh Soal

1. Carilah nilai dari a_1, a_2, a_3, a_4 dari $a_n = 2 + (-1)^n$

$$a_1 = 2 + (-1)^1 = 1$$

$$a_2 = 2 + (-1)^2 = 3$$

$$a_3 = 2 + (-1)^3 = 1$$

$$a_4 = 2 + (-1)^4 = 3$$

2. Disajikan $a_1 = -2$ dan $a_{n+1} = \frac{na_n}{(n+1)}$. Carilah sepuluh suku pertama dari barisan tersebut

$$a_1 = -2$$

$$a_1 = \frac{1(-2)}{1+1} = -1$$

$$a_3 = \frac{2(-1)}{2+1} = -\frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{3(-\frac{2}{3})}{3+1} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{4(-\frac{1}{2})}{4+1} = -\frac{2}{5}$$

$$a_6 = \frac{5(-\frac{2}{5})}{5+1} = -\frac{1}{3}$$

$$a_7 = \frac{6(-\frac{1}{3})}{6+1} = -\frac{2}{7}$$

$$a_8 = \frac{7(-\frac{2}{7})}{7+1} = -\frac{1}{4}$$

$$a_9 = \frac{8(-\frac{1}{4})}{8+1} = -\frac{2}{9}$$

$$a_{10} = \frac{9(-\frac{2}{9})}{9+1} = -\frac{1}{5}$$

$$a_n = -\frac{2}{n}$$

3. Carilah rumus suku ke – n dari barisan 2,6,10,14,18, ...

   Diketahui $a_1 = 2$ dan $b = u_{n+1} - u_n = 6 - 2 = 4$

$$u_n = a + (n-1).b$$

   $u_n = 2 + (n-1).4$

   $u_n = 2 + 4n - 4$

   $u_n = 4n - 2$

4. Tentukan barisan $\{a_n\}$ konvergen atau divergen dan carilah limit dari barisan jika konvergen

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ (teorema sandwich)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ Maka konvergen dan limitnya 0

Diasumsikan konvergen maka carilah liminya diketahui $a_1 = 5$ dan $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dan $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{5a_n}$

$$L = \sqrt{5L}$$

$$L^2 = 5L$$

$$L^2 - 5L = 0$$

$L = 0$ atau $L = 5$

$$a_k > 1\ maka\ limitnya = 5$$

3.2 Deret Tak – Terhingga

Untuk suatu barisan bilangan $\{a_n\}$ yang diberikan, ekspresi berbentuk

$$a_1, +a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

disebut deret tak - terhingga. Deret tak – terhingga adalah jumlah dari barisan bilangan tak – terhingga. Bilangan a_n adalah suku ke – n dari deret.

Barisan $\{s_n\}$ yang didefinisikan oelh

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

adalah barisan jumlah parsial dari deret. Bilangan s_n adalah jumlah terhingga yang umum dan dapat dihitung menggunakan penjumlahan normal. Penjumlahan ini disebut jumlah parsial ke – n.

Apabila n semakin besar maka kita berharap bahwa jumlah parsial mendekati suatu nilai limit. Jika barisan jumlah parsial konvergen ke limit L, maka dikatakan bahwa deret konvergen ke jumlahnya, yaitu L. Dalam hal ini, dituliskan

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = L$$

Jika barisan jumlah parsial dari deret tidak konvergen, maka dikatakan bahwa deret divergen.

Deret Geometri

Deret geometri adalah deret berbentuk

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

dengan a dan r adalah bilangan riil dan $a \neq 0.$ Deret ini juga dapat ditulis sebagai $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$. Rasio r dapat bernilai positif atau bernilai negative.

Jika $r = 1$, maka jumlah pasrial ke – n dari deret geometri adalah

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots += a(1)^{n-1} = na$$

Jika $|r| \neq 1,$ kita dapat menentukan konvergensi atau divergensi deret dengan cara berikut:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, (r \neq 1)$$

Jika $|r| < 1$, maka deret geometri $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}$, yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, |r| < 1$$

Jika $|r| \geq 1$, maka deret geometri divergen.

Uji Suku ke – $\boldsymbol{n}$ untuk Deret Divergen

Suatu deret yang tidak konvergen adalah suku – suku deeret tersebut tidak mengecil.

Teorema 7 : Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $a_n \to 0$

Uji suku ke – n untuk Divergensi : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ tidak ada atau sama dengan nol.

Mengkombinasikan Deret

Teorema 8 : Jika $\sum a_n = A$ dan $\sum b_n = B$ adalah deret konvergen, maka

Aturan Jumlah :$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

Aturan Selisih : $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

Aturan Kelipatan Konstanta : $\sum ka_n = k\sum a_n = kA$ (untuk sembarang bilangan k)

Sebagai akibat dari Teorema 8, kita mempunyai hasil sebagai berikut:

Setiap kelipatan konstanta tidak nol dari barisan yang divergen juga merupakan barisan yang divergen

Jika $\sum a_n$ konvergen dan $\sum b_n$ divergen, maka $\sum(a_n + b_n)$ dan $\sum(a_n - b_n)$ keduanya divergen.

Menjumlahkan atau Menghapuskan Suku – Suku

Kita dapat menjumlahkan terhingga banyak suku pada suatu deret atau menghapuskan terhingga banyak suku tanpa mengubah konvergensi atau divergensi deret

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen untuk sembarang $k > 1$ dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

Sebaliknya, jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen untuk sembarang $k > 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Pengindeksan Ulang

Selama kita mengawetkan urutan suku – suku dari sebuah deret, kita dapat mengindeks ulang deret tersebut tanpa menggubah konvergensinya.

Untuk meningkatkan nilai awal indeks sebesar h unit, gantikan n pada rumus untuk a_n dengan $n - h$ yaitu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Untuk menurunkan nilai awal indeks sebesar h unit, gantikan n pada rumus untuk a_n dengan $n + h$ yaitu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Contoh Soal

1. Carilah rumus jumlah parsial ke – n untuk deret ini dan gunakan jumlah parsial tersebut untuk mendapatkan jumlah deret jika deret ini konvergen. $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-1)^{n-1}2^{n-1} + \cdots$

   $a = 1$ dan $r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-2}{1} = -2$

$$1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-1)^{n-1}2^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1(-2)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}(\frac{-1}{2})^{k-1} = \frac{1\{(1-(-2^n)\}}{1-(-2)}$$

$$s_n = \frac{1}{3}\{(1-(-2^n)\}$$

2. Tulislah awal deret tersebut kemudian carilah jumlah deret dari $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}\ldots$$

$$= \frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\cdots$$

$a = \frac{1}{16}$ dan $r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{12}$$

Series sum $= \frac{4}{5}$

3. Nyatakan bilangan ini sebagai rasio dari dua bilangan bulat $0,\overline{7} = 0,7777$ ...

$$0,7777\ldots = \frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots = \frac{7}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)$$

$a = 1$ dan $r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{10} = 0,1$

$$\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right) = \frac{1}{1-0,1} = \frac{1}{0,9}$$

$$0,7777\ldots = \frac{7}{10}.\frac{1}{0,9} = \frac{7}{9}$$

4. Gunakan uji suku ke – n untuk divergensi dalam menujukkan bahwa suatu deret divergen atau nyatakan bahwa uji tersebut tidak pasti $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+10}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1+\frac{10}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\frac{10}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{10}{n})}=\frac{1}{1+0}=1$$

Maka divergen

5. Carilah rumus untuk jumlah parsial ke – n dari deret dan gunakan jumlah parsial tersebut untuk menentukan apakah deret konvergen atau divergen. Jika konvergen carilah jumlahnya dari $\sum_{n=1}^{\infty}(\tan(n)-\tan(n-1))$

$$s_k=(\tan 1-\tan 0)+(\tan 2-\tan 1)+(\tan 3-\tan 2)+\cdots+(\tan k-\tan(k-1))+(\tan(k+1)-\tan k)$$

$$s_k=\tan(k+1)$$

$$\lim_{k\to\infty}s_k=\lim_{k\to\infty}\tan(k+1)$$

Maka deret divergen

6. Tentukan konvergen atau divergen berikan alasannya dan jika deret konvergen carilah jumlahnya $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$$a_n=\frac{n^n}{n!}$$

$$=\frac{n}{n}.\frac{n}{n-1}.\frac{n}{n-2}\dots.\frac{n}{2}.\frac{n}{1}\geq\frac{n}{n}.\frac{n}{n}.\frac{n}{n}\dots.\frac{n}{n}.\frac{n}{n}$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \dots \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \geq 1.1.1 \dots 1.1$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \dots \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = L = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Maka divergen

3.3 Uji Integral

Jumlah Parsial Tak – Turun

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret tak – terhingga dengan $a_n \geq 0$ untuk semua n. Setiap jumlah parsial lebih besar atau sama dengan jumlah parsial sebelumnya karena $s_{n+1} = s_n + a_n$. Dengan demikian,

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots$$

Karena jumlah parsial membentuk barisan tak – turun. Maka teorema Barisan Monoton memberikan hasil berikut.

Konsekuensi dari Teorema 6 : Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan suku – suku tak – negative merupakan deret konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya terbatas di atas.

Uji Integral

Teorema 9 – Uji Integral : Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan dengan suku – suku positif. Jika $a_n = f(n)$, dimana f fungsi dari x yang kontinu, positif, dan turun untuk semua $x \geq N$ (N adalah bilangan bulat positif), maka deret $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ dan integral $\int_N^{\infty} f(x)dx$ keduanya bersama – sama konvergen atau divergen.

Estimasi Galat

Untuk kebanyakan deret konvergen, kita tidak dapat dengan mudah mendapatkan jumlah totalnya. Maka dari itu, kita dapat mengestimasi jumlah deret tersebut dengan menjumlahkan n suku pertama untuk mendapatkan s_n, tetapi kita perlu mengetahui sejauh mana s_n dari jumlah total S.

Dengan uji integral kita dapat mengetahui bahwa deret $\sum a_n$ konvergen, kemudian kita ingin mengestimasi besarnya suku sisa R_n yang mengukur selisih antara jumlah total deret S dengan jumlah parsial ke – n dari deret s_n

$$R_n = S - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

Dengan batas bawah suku sisa adalah

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx$$

Dengan batas atas suku sisa adalah

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Jadi Batas untuk Suku Sisa dari Uji Integral adalah jika $\{a_k\}$ adalah barisan suku – suku positif $a_k = f(k)$, dimana f adalah fungsi dari x yang kontinu, positif, dan menurun untuk semua $x \geq n$, dan bahwa $\sum a_n$ konvergen ke S. Maka suku sisa $R_n = S - s_n$ memenuhi pertidaksamaan

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Jika kita menambahkan jumlah parsial s_n ke setiap suku ketaksamaan maka kita peroleh

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq S \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Contoh Soal

1. Gunakan uji integral dalam menentukan konvergen atau divergen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \; adalah\, positif \; x \geq 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$$

$$\to \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \; konvergen \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \; konvergen$$

2. Tentukan deret ini konvergen atau divergen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} . \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

Maka divergen

3.4 Uji Banding

Teorema 10 – Uji Banding : Misalkan $\sum a_n$, $\sum c_n$, dan $\sum d_n$ adalah deret dengan suku – suku tak – negative. Misalkan untuk suatu bilangan bulat N berlaku

$d_n \leq a_n \leq c_n$ untuk semua $n > N$

Jika $\sum c_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ juga konvergen

Jika $\sum d_n$ divergen, maka $\sum a_n$ juga divergen

Uji Banding Limit

Teorema 11 – Uji Banding Limit : Misalkan $a_n > 0$ dan $b_n > 0$ untuk semua $n \geq N$ (dengan N adalah bilangan bulat)

Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ keduanya konvergen atau keduanya divergen

Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen

Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ dan $\sum b_n$ divergen, maka $\sum a_n$ divergen

Contoh Soal

1. Uji banding dan tentukan konvergen atau divergen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$

$$\frac{1}{n^2 + 30} < \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} . p = 2 > 1$$

   Maka konvergen

2. Uji banding limit untuk menentukan deret konvergen atau divergen $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n^2+1)(n-1)}$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{(n^2+1)(n-1)}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{(n^2+1)(n-1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)}{(n^2+1)(n-1)} = 1 \text{ divergent}$$

3.5 Konvergensi Mutlak: Uji Rasio Dan Uji Akar

Deret $\sum a_n$ konvergen mutlak jika deret nilai mutlak yang berpadanan, yaitu $\sum|a_n|$, konvergen.

Teorema 12 – Uji Konvergensi Mutlak : Jika $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Uji Rasio

Uji rasio mengukur laju pertumbuhan (penurunan) deret denagn menyelidiki rasio $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Deret geometri $\sum ar^n$ mempunyai laju pertumbuhan (penurunan) konstan ($\frac{(ar^{n+1})}{(ar^n)} = r$), dan deret konvergen jika dan hanya jika nilai mutlak rasionya kurang dari 1.

Teorema 13 – Uji Rasio : Misalkan $\sum a_n$ adalah sembarang deret dan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

1. Deret konvergen mutlak jika $\rho < 1$
2. Deret divergen jika $\rho > 1$ atau ρ tak – terhingga
3. Uji tidak memberikan kesimpulan jika $\rho = 1$

Uji Akar

Teorema 14 – Uji Akar : Misalkan $\sum a_n$ adalah sembarang deret dan

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

1. Deret konvergen mutlak jika $\rho < 1$
2. Deret divergen jika $\rho > 1$ atau ρ tak – terhingga
3. Uji tidak memberikan kesimpulan jika $\rho = 1$

Contoh Soal

1. Uji rasio dan tentukan deret konvergen mutlak atau divergen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}.\,n!}{2^n.\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

   Maka konvergen

2. Uji akar untuk menentukn apakah deret konvergen atau divergen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$

$$a_n = \frac{7}{(2n+5)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{7}{(2n+5)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{7}}{\sqrt[n]{(2n+5)^n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+5)} = \frac{1}{\infty}$$

$$= 0$$

   Maka konvergen

3. Tentukan deret konvergen atau divergen $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{2}.3$$

$$a_3 = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.3$$

$$a_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3$$

$$a_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3$$

$$a_n = 3\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{3}{n}$$

Maka deret divergen

3.6 Deret Ganti Tanda Dan Konvergensi Bersyarat

Deret yang suku – sukunya secara bergantian mempunyai tanda positif dan negative disebut deret berganti tanda. Kita membuktikan konvergensi deret harmonic berganti tanda dengan menerapkan Uji Deret Berganti Tanda. Uji ini untuk konvergensi deret berganti tanda dan tidak dapat digunakan untuk menyimpulkan bahwa suatu deret berganti tanda merupakan deret yang divergen.

Teorema 15 – Uji Deret Berganti Tanda : Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

konvergen jika ketiga syarat berikut dipenuhi :

1. Semua u_n bernilai positif
2. Suku u_n yang bernilai positif (pada akhirnya) tak – naik, yaitu $u_n \geq u_{n+1}$ untuk semua $n \geq N$, untuk suatu bilangan bulat N.
3. $u_n \to 0$

Teorema 16 – Teorema Estimasi untuk Deret Berganti Tanda : Jika deret berganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ memenuhi ketiga syarat pada Teorema 15, maka untuk $n \geq N$, diperoleh bahwa

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n$$

mendekati jumlah L dari deret dengan galat nilai mutlaknya kurang dari u_{n+1}, yaitu nilai mutlak dari suku pertama yang tidak digunakan. Lebih jauh, jumlah L terletak di antara dua jumlah parsial yang berturutan s_n dan s_{n+1}, dan suku sisanya $L - s_n$ mempunyai tanda yang sama dengan tanda dari suku pertama yang tidak digunakan.

Konvergensi Bersyarat

Deret konvergen yang tidak konvergen mutlak dikataakn deret konvergen bersayarat. Deret harmonic berganti tanda merupakan deret yang konvergen secara bersyarat atau konvergen bersyarat.

Menyusun Ulang Deret

Teorema 17 – Teorema Penyusunan Ulang untuk Deret Konvergen Mutlak : Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen mutlak dan $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ adalah sembarang susunan dari barisan $\{a_n\}$, maka $\sum b_n$ konvergen mutlak dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Contoh Soal

1. Apakah deret berganti tanda yang diberikan konvergen atau divergen $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$

   $u_n = \frac{1}{\ln n}$ u_n positif untuk semua n

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0\backslash$

Maka konvergen

2. Deret manakah yang konvergen mutlak, konvergen, dan divergen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$$

$$|a_n| = \frac{3+n}{5+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{3+n}{5+n}.\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

Maka divergent

3. Estimasi besarnya galat yang diakibatkan oleh penggunaan jumlah dari empat suku pertama untuk mengaproksimasikan jumlah dari seluruh suku pada deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$|S - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

$|error| = |S - s_4| \leq |a_{4+1}| = |a_5| = \left|(-1)^6(\frac{1}{5})\right|$ =0,2

4. **Rangkuman**

1) Barisan $\{a_n\}$ konvergen ke bilangan L jika untuk setiap bilangan positif $\in$ terdapat bilangan bulat N yang bersesuaian sehingga untuk semua n,

$$n > N \rightarrow |a_n - L| < \in$$

2) Jika tidak ada bilangan L yang demikian, kita katakana bahwa $\{a_n\}$ divergen.
3) Jika $\{a_n\}$ konvergen ke L, maka kita tuliskan $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, atau cukup $a_n \to L$, dan L disebut limit barisan.
4) Aturan berikut berlaku jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = B$
5) Aturan Jumlah : $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
6) Aturan Selisih : $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$
7) Aturan Kelipatan Konstanta : $\lim_{n\to\infty} (k\times b_n) = k\times B$ (k sembarang bilangan)
8) Aturan Hasil Kali : $\lim_{n\to\infty} (a_n\times b_n) = A\times B$
9) Aturan Hasil Bagi : $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}\ jika\ B \neq 0$
10) Jika $f(x)$ adalah fungsi yang terdefinisi untuk semua $x \geq n_0$ dan $\{a_n\}$ adalah barisan bilangan riil dengan $a_n = f(n)$ untuk $n \geq n_{0,}$ maka

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L \to \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

11) Deret geometri adalah deret berbentuk

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

12) Jika $\sum a_n = A$ dan $\sum b_n = B$ adalah deret konvergen, maka

    Aturan Jumlah :$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

    Aturan Selisih : $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

    Aturan Kelipatan Konstanta : $\sum ka_n = k\sum a_n = kA$ (untuk sembarang bilangan k)
13) Uji Banding Limit : Misalkan $a_n > 0$ dan $b_n > 0$ untuk semua $n \geq$ □ (dengan N adalah bilangan bulat)
    a. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ keduanya konvergen atau keduanya divergen

b. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen

c. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ dan $\sum b_n$ divergen, maka $\sum a_n$ divergen

14) Uji Konvergensi Mutlak : Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

15) Uji Rasio : Misalkan $\sum a_n$ adalah sembarang deret dan

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

b. Deret konvergen mutlak jika $\rho < 1$

c. Deret divergen jika $\rho > 1$ atau ρ tak – terhingga

d. Uji tidak memberikan kesimpulan jika $\rho = 1$

16) Uji Akar : Misalkan $\sum a_n$ adalah sembarang deret dan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

a. Deret konvergen mutlak jika $\rho < 1$

b. Deret divergen jika $\rho > 1$ atau ρ tak – terhingga

c. Uji tidak memberikan kesimpulan jika $\rho = 1$

17) Uji Deret Berganti Tanda : Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

konvergen jika ketiga syarat berikut dipenuhi :

i) Semua u_n bernilai positif

ii) Suku u_n yang bernilai positif (pada akhirnya) tak – naik, yaitu $u_n \geq u_{n+1}$ untuk semua $n \geq N$, untuk suatu bilangan bulat N.

iii) $u_n \to 0$

18) Teorema Penyusunan Ulang untuk Deret Konvergen Mutlak : Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen mutlak dan $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ adalah sembarang susunan dari barisan $\{a_n\}$, maka $\sum b_n$ konvergen mutlak dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

5. Latihan

1) Diketahui suku ke-n suatu barisan, tulislah 5 suku pertama dari $a_n = \frac{n-2}{n^2}$?
2) Diketahui suku ke-n suatu barisan, tulislah 5 suku pertama dari $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$?
3) Disajikan suku pertama $a_1 = 1$ dan rumus rekursi untuk suku – suku lainnya dari barisan tersebut $a_{n+1} = a_n + (\frac{1}{2^n})$. Tuliskan suku pertama dari barisan tersebut !
4) Carilah rumus suku ke - n dari barisan $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{3}{20}, \frac{5}{30}$!
5) Barisan $a_n = \ln n - \ln(n+1)$ konvergen atau divergen ? carilah limit jika konvergen
6) Diasumsikan bahwa barisan ini konvergen dan carilah limitnya $a_1 = 0$ dan $a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a}$
7) Carilah rumus jumlah parsial ke – n untuk setiap deret, dan gunakan parsial tersebut untuk mendapatkan jumlah deret jika deret ini konvergen $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$
8) Tuliskan delapan suku pertama dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ untuk menjukkan bagaimana deret tersebut berawal. Kemudian carilah jumlah dari deret tersebut atau tunjukkan bahwa deret tersebut divergen

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukan apakah deret geometri $1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + \cdots$ konvergen atau divergen. Jika konvergen carilah jumlahnya
2) Nyatakan bilangan $1,\overline{414} = 1{,}414414414$ sebagai rasio dari dua bilangan bulat
3) Gunakan uji suku ke – n untuk divergensi dalam menunjukkan bahwa suatu deret divergen, atau nyatakan bahwa uji tersebut tidak pasti $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$
4) Carilah rumus untuk jumlah parsial ke – n dari deret $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})$ dan gunakan jumlah parsial tersebut untuk menentukan apakah deret konvergen atau divergen. Jika deret konvergen carilah jumlahnya
5) Carilah jumlah dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-10(2n+1)}$
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{(n+1)}$ tentukan konvergen atau divergen ! jika konvergen cari jumlahnya
7) Gunakan uji integral untuk menentukan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ konvergen atau divergen
8) Gunakan uji banding untuk menentukan deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$ konvergen atau divergen
9) Gunakan uji banding limit untuk menentukan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$
10) Gunakan uji rasio untuk menentukan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2(n+2)!}{n!\, 3^{2n}}$ konvergen mutlak atau divergen
11) Gunakan uji akar untuk menentukan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{(3n)^n}$ konvergen mutlak atau divergen

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 6 : Menguasai konsep deret pangkat, deret Taylor dan deret Maclaurin, Konvergen deret Taylor, Deret binomial dan penerapan deret Taylor.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan deret pangkat, deret Taylor dan deret Maclaurin, Konvergen deret Taylor, Deret binomial dan penerapan deret Taylor. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan deret pangkat, deret Taylor dan deret Maclaurin, Konvergen deret Taylor, Deret binomial dan penerapan deret Taylor. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

3.7 Deret Pangkat

Deret Pangkat dan Konvergensi

Deret pangkat di sekitar $x = 0$ adalah deret pangkat berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Deret pangkat di sekitar $x = a$ adalah deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_1(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

dengan pusat a dan koefisien $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$, ... berupa konstanta.

Teorema 18 – Teorema Konvergensi untuk Deret Pangkat : Jika deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a x^2 + \cdots$ konvergen di $x = c \neq 0$, maka deret tersebut konvergen mutlak untuk semua x dengan $|x| < |c|$. Jika deret tersebut divergen di $x = d$, maka deret akan divergen untuk semua x dengan $|x| > |d|$.

Radius Konvergensi Deret Pangkat

Konsekuensi dari Teorema 18 : Konvergensi deret $\sum c_n(x-a)^n$ digambarkan oleh salah satu dari ketiga kasus berikut :

Terdapat bilangan positif R sedemikian sehingga deret divergen untuk x dengan $|x-a| > R$ tetapi konvergen mutlak untuk x dengan $|x-a| < R$. Deret mungkin konvergen atau tidak konvergen di titik ujung interval $x = a - R$ dan $x = a + R$.

Deret konvergen mutlak untuk setiap x $(R = \infty)$.

Deret konvergen di $x = a$ dan divergen di x yang lainnya $(R = 0)$.

R disebut radius konvergensi deret pangkat, dan interval dengan radius R yang berpusat $x - a$ disebut interval konvergensi. Interval konvergensi bisa berupa interval terbuka, tutup, atau setengah terbuka, bergantung pada deretnnya. Di titik x dengan $|x-a| < R$, deret konvergen mutlak. Jika deret konvergen untuk semua nilai x, dikatakan bahwa radius konvergensinya tidak terhingga. Jika deret hanya konvergen di $x = a$, dikatakan bahwa radius konvergensinya nol.

Cara Menguji Konvergensi Deret Pangkat :

Gunakan Uji rasio (atau Uji Akar) untuk mencari interval yang mengakibatkan deret konvergen mutlak. Biasanya interval tersebut adalah interval terbuka

$|x - a| < R$ atau $a - R < x < a + R$

Jika interval dari konvergensi mutlak merupakan interval yang terhingga, ujilah konvergensi atau divergensi dari masing – masing titik ujung interval. Gunakan Uji Banding, Uji Integral, atau Uji Deret Berganti Tanda.

Jika interval dari konvergensi mutlak adalah $a - R < x < a + R$, maka deret merupakan deret divergen untuk $|x - a| > R$ (bahkan deret tidak konvergen bersyarat) karena suku ke – n tidak menuju nol untuk nilai x tersebut.

Operasi pada Deret Pangkat

Teorema 19 – Teorema Perkalian Deret Pangkat : Jika $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < R$, dan

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_{\square} b_{n-k}$$

maka $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergen mutlak ke $A(x)B(x)$ untuk $|x| < R$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Kita juga dapat mensubstitusikan fungsi $f(x)$ untuk x dalam deret pangkat yang konvergen

Teorema 20 : Jika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < R$, maka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ konvergen mutlak untuk sembarang fungsi kontinu f pada $|f(x)| < R$.

Teorema 21 – Teorema Diferensiasi Suku Demi Suku : Jika $\sum c_n (x-a)^n$ mempunyai radius konvergensi $R > 0$, maka deret tersebut mendefinisikan fungsi

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ pada interval $a - R < x < a + R$

fungsi f ini mempunyai turunan (di dalam interval tersebut) untuk semua orde, dan kita memperoleh turunan dengan cara mendiferensiasikan deret asli suku demi suku :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2}$$

dan seterusnya. Masing – masing turunan konvergen di setiap titik pada interval $a - R < x < a + R$.

Teorema 22 – Teorema Integrasi Suku Demi Suku : Jika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

konvergen untuk $a - R < x < a + R$ $(R > 0)$, maka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

konvergen untuk $a - R < x < a + R$ dan

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + c$$

untuk $a - R < x < a + R$.

Contoh Soal

Carilah radius dan interval konvergensi deret kemudian mutlaknya kemudian bersayaratnya $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

a. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \rightarrow r = x \rightarrow |r| = |x| < 1$ maka intervalnya $x\epsilon(-1,1)$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n \rightarrow r = |x| \rightarrow |r| = |x| < 1$ maka konvergen mutlaknya $x\epsilon(-1,1)$

c. tidak akan konvergen bersayarat

kita merepresentasikan fungsi $f(x) = \frac{2}{x}$ sebagai deret pangkat di sekitar $x = 2$. Gunakan deret geometri untuk merepresentasikan $f(x)$ sebagai deret pangkat di sekitar $x = 1$ dan carilah interval konvergensinya

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{1 - [-(x-1)]}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2[-(x-1)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n (x-1)^n$ maka konvergen untuk $|-(x-1)| < 1 \; or \; 0 < x < 2$

3.8 Deret Taylor Dan Deret Maclaurin

Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Jika f adalah fungsi yang mempunyai turunan untuk semua orde pada suatu interval yang memuat a sebagai titik interior, maka deret taylor yang dihasilkan oleh f di $x = a$ adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{\square!}(x-a)^n + \cdots$$

deret Maclaurin dari f adalah deret taylor yang dihasilkan oleh f di $x = 0$, atau

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

deret maclaurin yang dihasilkan f biasa hanya disebut deret taylor dari f.

Polinomial Taylor

Linearisasi fungsi f yang terdiferensiasikan di titik a adalah polynomial berderajat satu yang diberikan oleh

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Kita menggunakan linearisasi ini untuk mengaproksimasikan $f(x)$ untuk nilai x di dekat a. Jika f mempunyai turunan tingkat tinggi di a, maka fungsi tersebut juga mempunyai aproksimasi polynomial tingkat tinggi, satu untuk masing – masing turunan yang ada. Polynomial – polynomial ini disebut polynomial taylor dari f.

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai turunan orde k dengan $k = 1,2, \ldots, N$ pada suatu interval yang memuat a sebagai titik interiornya, maka untuk suatu bilangan bulat n dari 0 sampai N, polynomial taylor orde n yang dihasilkan oleh f di $x = a$ adalah polynomial

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Contoh Soal

Carilah polynomial taylor orde $0,1,2, dan\ 3$ yang dihasilkan oleh f di a. $f(x) = e^{2x}, a = 0$

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x}$$

$$f'''(x) = 8e^{2x}$$

$$f(0) = e^{2.0} = 1$$

$$f'^{(0)} = 2$$

$$f''^{(0)} = 4$$

$$f'''^{(0)} = 8$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + 2x$$

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2$$

$$P_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

$$P_0(x) = f(0) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{2}{1}x$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{2}{1}x + \frac{4}{2}x^2$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{2}{1}x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3$$

Carilah deret maclaurin untuk fungsi e^x

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n)}}{n!}x^n = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

Carilah deret taylor yang dihasilkan oleh f di $x = a$

$$f(x) = x^3 - 2x + 4 \rightarrow f(2) = 2^3 - 2.2 + 4 = 8$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow f'(2) = 3.2^2 - 2 = 10$$

$$f''(x) = 6x \rightarrow f''(2) = 6.2 = 12$$

$$f'''(x) = 6 \rightarrow f'''(2) = 6$$

Turunan selanjutnya 0

Deret taylor di $x = 2$

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

$$f(x) = 8 + 10.(x-2) + \frac{12}{2}(x-2)^2 + \frac{6}{6}(x-2)^3$$

$$f(x) = 8 + 10.(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$$

3.9 Konvergensi Deret Taylor

Teorema 23 – Teorema Taylor : Jika f beserta turunannya ke $-n$ pertamanya $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada interval tertutup di antara a dan b, dan $f^{(n)}$ terdiferensiasikan pada interval terbuka di antara a dan b, maka terdapat bilangan c di antara a dan b sedemikian sehingga

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Teorema Taylor merupakan generealisasi dari teorema nilai rata – rata. Ketika kita menerapkan teorema taylor, biasanya kita ingin membuat a bernilai tetap, dan memperlakukan b sebagai variable bebas. Rumus taylor biasanya lebih mudah untuk digunakan dalam kasus seperti ini jika kita mengubah b menjadi x. Berikut ini versi dari teorema taylor dengan perubahan tersebut

Rumus Taylor : Jika f mempunyai turunan untuk semua orde pada interval terbuka I yang memuat a, maka untuk setiap bilangan bulat positif n dan untuk setiap x dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

dengan

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ untuk suatu c di antara a dan x.

Persamaan ini memberikan aproksimasi polynomial dari f dengan orde tersebut dan rumus untuk galat yang muncul dalam penggunaan aproksimasi pada interval I. $R_n(x)$ disebut sebagai sisa orde n atau suku galat untuk aproksimasi f oleh $P_n(x)$ pada I.

Jika untuk semua $x \in I$ berlaku $R_n(x) \to 0$ apabila $n \to \infty$, maka kita katakana bahwa deret taylor yang dihasilkan oleh f di $x = a$ konvergen ke f pada I, dan kita tuliskan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Mengestimasi Suku Sisa

Teorema 24 – Teorema Estimasi Suku Sisa : Jika terdapat konstanta positif M sedemikian rupa sehingga $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$ untuk semua t di antara x dan a, termasuk x dan a itu sendiri, maka suku sisa $R_n(x)$ dalam

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

jika ketaksamaan ini berlaku untuk setiap n dan syarat lainnya dalam teorema taylor dipenuhi oleh f, makad eret tersebut konvergen ke $f(x)$.

Menggunakan Deret Tayor

Karena setiap deret taylor adalah deret pangkat, maka operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian deret taylor semuanya berlaku pada irisan dari interval konvergensinya.

Contoh Soal

Carilah emapt suku tak nol pertama dari deret maclaurin untuk fungsi $e^x \sin x$

Deret taylor di $e^x \ di \ x = 0$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Deert taylor di $\sin x \ \ di \ x = 0$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Deret taylor di $e^x \sin x \ \ di \ x = 0$

$$[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots][x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}] = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}$$

Estimasilah galat yang muncul jika $P_3(x) = x - \left(\frac{x^3}{6}\right)$ digunakan untuk mengestimasi nilai $\sin x$ di $x = 0{,}1$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f''''(x) = \sin x$$

$$\left| R_n(x) \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

$$\left| R_3(0{,}1) \le (1) \frac{|0{,}1-0|^4}{4!} \right| \approx 4{,}2\times 10^{-6}$$

$$error \le 4{,}2\times 10^{-6}$$

3.10 Deret Binomial dan Penerapan Deret Taylor

Deret Binomial untuk Pangkat dan Akar

Deret binomial : Untuk $-1 < x < 1$,

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

di mana kita mendefinisikan

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}$$

dan

$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}$ Untuk $k \ge 3$

Menghitung Integral Non – Elementer

Terkadang kita dapat menggunakan deret taylor yang kita kenal untuk mendapatkan jumlah dari deret pangkat dalam suku – suku dari fungsi yang kita ketahui. Deret taylor dapat digunakan untuk menyatakan integral non – elementer dalam bentuk deret.

Menghitung Bentuk Tak - Tentu

Kita terkadang menghitung bentuk tak – tentu dengan cara menyatakan fungsi yang terlibat sebagai deret taylor

Kesamaan Euler

Kesamaan euler adalah untuk sembarang bilangan riil θ, didefinisikan $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Kesamaan euler memungkinkan kita untuk mendefinisikan e^{a+bi} sebagai $e^{a}.e^{bi}$ untuk sembarang bilangan kompleks $a + bi$. Salahs atu akibat dari kesamaan tersebut adalah kesamaan

$$e^{i\pi} = -1$$

Ketika kesamaan tersebut dituliskan dalam bentuk $e^{i\pi} + 1 = 0$, maka kesamaan ini menggabungkan lima dari konstanta terpenting dalam matematika.

Deret Taylor yang sering digunakan

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x \leq 1$$

$$tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |\,x| \leq 1$$

Contoh Soal

Carilah deret binomial untuk fungsi $(1+x)^4$

$\binom{m}{1} = m \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}$

$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}$ untuk $k \geq 3$

$$(1+x)^4 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{4}{k} x^k$$

$$= 1 + \binom{4}{1} x^1 + \binom{4}{2} x^2 + \binom{4}{3} x^3 + \binom{4}{4} x^4 + 0x^5 + 0x^6$$

$$= 1 + \frac{4}{1!} x^1 + \frac{4(3)}{2!} x^2 + \frac{4(3)(2)}{3!} x^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4!} x^4$$

$$= 1 + 4x + \frac{12}{2} x^2 + \frac{24}{6} x^3 + \frac{4!}{4!} x^4$$

$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Carilah polynomial yang mengaproksimasikan $f(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt, [0,1]$ galat kurang dari 10^{-3}

$$\sin t^2 = t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \cdots$$

$$f(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt$$

$$= \int_0^x (t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \cdots)\, dt$$

$$= [\frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^{11}}{11.5!} - \frac{t^{15}}{15.7!} + \cdots]\,\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!} - \frac{x^{15}}{15.7!} + \cdots$$

$$f(x) \approx \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!}$$

Gunakan deret untuk menghitung $\lim\limits_{x\to\infty} (x+1) \sin \frac{1}{x+1}$

Deret taylor untuk $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Deret taylor untuk $\sin \frac{1}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} (x+1) \sin \frac{1}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} (x+1)(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3!\,(x+1)^3} + \frac{1}{5!\,(x+1)^5} - \cdots)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3!\,(x+1)^3} + \frac{1}{5!\,(x+1)^5} - \cdots\right)$$

$= 1 - 0 + 0$

$= 1$

4. Rangkuman

1) Deret pangkat di sekitar $x = 0$ adalah deret pangkat berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

2) Deret pangkat di sekitar $x = a$ adalah deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$= c_0 + c_1(x-a) + c_1(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

dengan pusat a dan koefisien $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ berupa konstanta.

3) Teorema Perkalian Deret Pangkat : Jika $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < R$, dan

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

maka $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergen mutlak ke $A(x)B(x)$ untuk $|x| < R$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

4) deret taylor yang dihasilkan oleh f di $x = a$ adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

5) deret Maclaurin dari f adalah deret taylor yang dihasilkan oleh f di $x = 0$, atau

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

deret maclaurin yang dihasilkan f biasa hanya disebut deret taylor dari f.

6) Teorema Taylor : Jika f beserta turunannya ke – n pertamanya $f', f'', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada interval tertutup di antara a dan b, dan $f^{(n)}$ terdiferensiasikan pada interval terbuka di antara a dan b, maka terdapat bilangan c di antara a dan b sedemikian sehingga

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

7) Deret binomial : Untuk $-1 < x < 1$,

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

di mana kita mendefinisikan

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}$$

dan

$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}$ Untuk $k \geq 3$

5. Latihan

1) Untuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yang didefinisikan menjadi $a_1 = \frac{1}{3}$ dan $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$ tentukan konvergen atau divergen
2) Tentukan apakah deret berganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ konvergen atau divergen
3) Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$ konvergen mutlak, konvergen, atau divergen
4) Estimasilah besarnya galat yang diakibatkan oleh penggunaan jumlah dari empat suku pertama untuk mengaproksimasikan jumlah dari seluruh suku pada deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n}$
5) (a) carilah radius dan konvergensi deret. Untuk nilai x berapakah deret konvergen (b) mutlak, dan (c) bersyarat dari $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+2}$
6) Carilah interval konvergensi deret gunakan teorema 20 dan jumlah dari deret $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$ sebagai fungsi dari x
7) Carilah polynomial taylor orde $0,1,2, dan$ 3 yang dihasilkan oleh f di a dari $f(x) = \tan x\,, a = \frac{\pi}{4}$
8) Carilah deret maclaurin untuk fungsi $\sin\frac{x}{2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Carilah deret taylor yag dihasilkan oleh f di $x = a$ dari $f(x) = 2^x, a = 1$
2) Gunakan substitusi untuk mendapatkan deret taylor di $x = 0$ dari fungsi $\frac{1}{2-x}$
3) Gunakan operasi deret pangkat untuk mencari deret taylor di $x = 0$ dari $x\ln(1 + 2x)$

4) Carilah empat suku tak nol pertama dari deret maclaurin untuk fungsi $e^{\sin x}$

5) Carilah emapt suku pertama dari deret binomial untuk fungsi $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

6) Gunakan deret untuk mengaproksimasikan nilai integral dalam $\int_0^{0,1} \frac{\sin x}{x} dx$ dengan besar galat kurang dari 10^{-8}

7) Gunakan deret untuk menghitung $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

8) Gunakan bagian deret taylor yang sering digunakan pada subbab 10 untuk mencari jumlah dari deret $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \cdots$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C . PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul tiga ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi barisan dan deret beserta aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Turunan barisan deret konvergen Divergen

   Kontinu Diskontinu Differensial

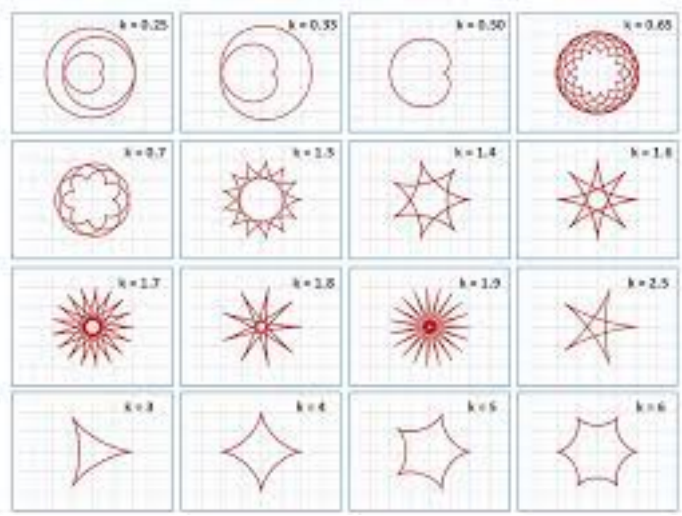
4. Referensi

   Hass, J., & Heil, C. (n.d.). *CALCULUS with the assistance of.*

   Khuri, A. I. (2003). Infinite Sequences and Series. *Advanced Calculus with Applications in Statistics*, 132–204. https://doi.org/10.1002/0471394882.ch5

   Meyer, R. M. (1979). *Doubly Infinite Sequences and Series*. 63–94. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8072-6_2

MODUL 4 PERSAMAAN PARAMETRIK DAN KOORDINAT POLAR



MODUL 4 PERSAMAAN PARAMETRIK DAN KOORDINAT POLAR

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Persamaan parametrik dan koordinat polar adalah suatu materi yang banyak digunakan untuk mengukur dan memprediksi suatu kondisi perusahaan tertentu. Persamaan ini dijabarkan secara detail di dalam modul ini yang dilengkapi oleh contoh soal, latihan dan evaluasi pembelajaran. Modul ini dapat membantu mahasiswa untuk menguasai materi persamaan parametrik. Bahan ajar modul ini mendeskripsikan materi persamaan parametri diantaranya yaitu parameterisasi kurva di bidang, kalkulus dengan kurva parametrik, koordinat polar, menggambar grafik persamaan koordinat polar, luas dan panjang dalam koordinat polar, irisan kerucut, irisan kerucut dalam koordinat polar.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Empat

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral, teknik integral, persamaan differensial orde satu, barisan dan deret tak hingga.

5. Kegunaan Modul Empat

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan Persamaan Parametrik dan koordinat polar. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai Persamaan Parametrik dan koordinat polar untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup: Parameterisasi kurva di bidang, kalkulus dengan kurva parametrik, koordinat polar, menggambar grafik persamaan koordinat polar, luas dan panjang dalam koordinat polar, irisan kerucut, irisan kerucut dalam koordinat polar.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 7 : Menguasai konsep parameterisasi kurva di bidang, kalkulus dengan kurva parametrik, koordinat polar, menggambar grafik persamaan koordinat polar.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

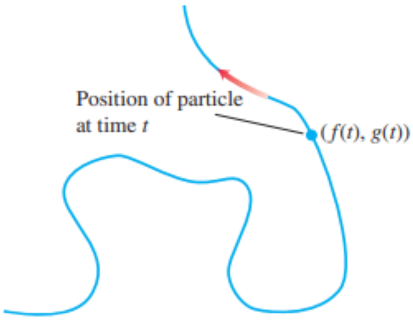
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan parameterisasi kurva di bidang, kalkulus dengan kurva parametrik, koordinat polar, menggambar grafik persamaan koordinat polar. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan parameterisasi kurva di bidang, kalkulus dengan kurva parametrik, koordinat polar, menggambar grafik persamaan koordinat polar. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

4.1 Parameterisasi Kurva di Bidang

a. Persamaan Parametrik

Kurva atau lintasan yang dilalui oleh partikel yang bergerak di bidang-*xy* tidak selalu berupa grafik fungsi atau persamaan tunggal.



Gambar 16 Posisi Partikel

Pada Gambar 16 diatas memperlihatkan lintasan dari patikel yang bergerak di bidang-xy. Lintasan tersebut tidak memenuhi uji garis tegak sehingga lintasan tersebut tidak dapat digambarkan sebagai grafik dari fungsi variabel x. Namun, terkadang lintasan semacam itu dapat digambarkan dengan pasangan persamaan, yaitu $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, dengan f dan g adalah fungsi kontinu, dalam gerak t biasanya menyatakan waktu. Persamaan tersebut menggambarkan persamaan kurva yang lebih umum daripada yang digambarkan oleh fungsi satu variabel, dan kurva tesebut tidak hanya memberikan grafik dari lintasan yang dilalui tetapi juga lokasi partikel, yaitu $(x, y) = (f(t), g(t))$ pada saat t.

Definisi

Jika x dan y diberikan sebagai fungsi

$$x = f(t), y = g(t)$$

pada interval I untuk nilai-t, maka himpunan titik-titik $(x, y) = (f(t), g(t))$ yang didefinisikan oleh persamaan tersebut merupakan **kurva**

parametrik. Persamaan tersebut merupakan **persamaan parametrik** untuk kurva.

Variabel t = parameter untuk kurva

Daerah asal untuk t = I, merupakan interval parametrik

Jika I berupa interval tertutup $a \leq t \leq b$, maka titik $(f(a), g(a))$ merupakan titik awal dan $(f(b), g(b))$ merupakan titik akhir. Ketika memberikan persamaan parametrik dan interval parameter untuk suatu kurva, maka dikatakan telah memparameterisasi kurva. Parameterisasi kurva adalah persamaan parametrik bersama-sama dengan interval parameter parameter. Suatu kurva dapat dinyatakan oleh persamaan parametrik yang berbeda-beda.

Contoh 1 Sketsakan kurva yang didefinisikan oleh persamaan parametrik

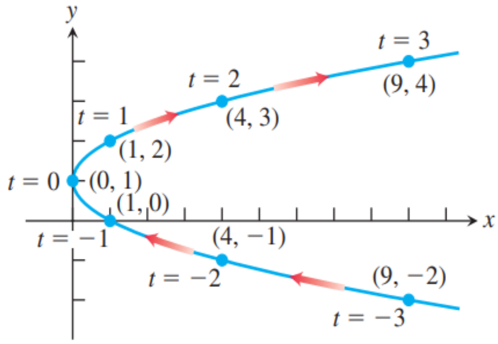
$$x = t^2, \qquad y = t + 1, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Penyelesaian

Membuat tabel nilai yang ringkas, lalu menggambar titik (x, y) dan menggambar kurva yang melalui titik-titik tersebut.

Tabel 4.1 Nilai $x = t^2$ dan $y = t + 1$ untuk beberapa nilai t

t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4



Gambar 17 Persamaan Parametrik

Setiap nilai t memberikan sebuah titik (x, y) pada kurva, misalnya pada $t = 1$ memberikan titik (1,2) yang terlihat pada Tabel 4.1. Jika memikirkan kurva sebagai lintasan dari partikel yang bergerak, maka partikel tersebut akan bergerak sepanjang kurva sesuai arah anak panah yang ditunjukkan pada Gambar 17. Meskipun pada tabel diberikan interval waktu yang sama, namun titik-titik yang berturutan pada grafik tidak dihubungkan oleh kurva yang sama panjang. Hal ini dikarenakan saat t bertambah, maka gerak partikel menjadi semakin lambat ketika partikel bergerak di dekat sumbu-y sepanjang kurva bagian bawah, dan kemudian gerak partikel menjadi semakin cepat setelah mencapai sumbu-y dititik (0,1) dan bergerak sepanjang kurva bagian atas. Karena interval nilai untuk t adalah semua bilangan riil, maka kurva tersebut tidak mempunyai titik awal dan titik akhir.

Contoh 2 Identifikasikan secara geometris kurva pada Contoh 1 (Gambar 17) dengan cara mengeliminasi parameter t dan carilah persamaan aljabar dalam x dan y.

Penyelesaian

Menyelesaikan persamaan y untuk mendapatkan parameter $y = t + 1$ dan mensubstitusikan hasilnya ke dalam persamaan parametrik untuk x. Prosedur ini memberikan $t = y - 1$ dan

$$x = t^2 = (y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1$$

Persamaan $x = y^2 - 2y + 1$ mempresentasikan parabola terbuka ke samping kanan seperti yang disajikan pada Gambar 1.2.

Contoh 3 Posisi P(x,y) dari partikel yang bergerak di bidang-xy diberikan olejh persamaan dan interval parameter

$$x = \sqrt{t}, y = t, \quad t \geq 0.$$

Identifikasikan lintasan yang dilalui partikel dan gambarkan gerak partikel tersebut.

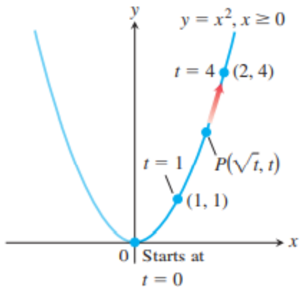
Penyelesaian

Mencoba mengidentifikasikan lintasan dengan cara mengeliminasi t dari persamaan x dan y, yang kemungkinan menghasilkan persamaan aljabar yang diketahui yang menghubungkan x dan y. Didapat

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2$$

Jadi, koordinat dari posisi artikel memenuhi persamaan $y = x^2$. Dengan demikian, partikel bergerak sepanjang parabola $y = x^2$.

Akan tetapi, tidaklah benar apabila menyimpulkan bahwa lintasan partikel adalah seluruh parabola $y = x^2$ karena lintasan yang dilalui partikel hanya separuh parabola. Koordinat-x dari partikel tidak pernah bernilai negatif. Partikel mulai bergerak dari titik (0,0) saat $t = 0$ dan naik ke kuadran pertama saat t bertambah, digambarkan gerak partikel tersebut sebagai berikut



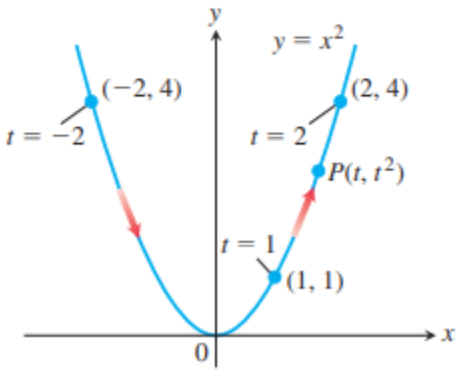
Gambar 18 Gambar lintasan

Interval parameter adalah $[0, \infty)$ dan tidak ada titik akhir.

Contoh 4 Parameterisasi dari grafik fungsi f diberikan oleh

$$x = t, \quad y = f(t) = t^2, \quad -\infty \leq t \leq \infty.$$

Ketika $t \geq 0$, parameterisasi ini memberikan lintasan yang sama di bidang-xy seperti yang ada dalam Contoh 3. Akan tetapi, karena parameter t disini bernilai negatif, maka didapatkan juga bagian kiri parabola; yaitu mempunyai seluruh kurva parabola, digambarkan gerak partikel tersebut sebagai berikut



Gambar 19 Kurva Parabola

Lintasan yang didefinisikan oleh $x = t,\ y = t^2,\ -\infty \leq t \leq \infty$ adalah seluruh parabola $y = x^2$

Untuk parameterisasi ini, tidak ada titik awal dan titik akhir.

Contoh 5 Carilah parameterisasi untuk garis yang melalui titik (a, b) dan mempunyai kemiringan m.

Penyelesaian

Persamaan Cartesius untuk garis adalah $y - b = m(x - a)$. Jika kita membuat parameter $t = x - a$, diperoleh $x = a + t$ dan $y - b = mt$. Jadi,

$$x = a + t, \quad y = b + mt, \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

merupakan parameterisasi garis. Parameterisasi ini berbeda dengan parameterisasi natural dalam Contoh 4 ketika $t = x$. Akan tetapi, kedua parameterisasi ini menghasilkan garis yang sama.

Contoh 6 Sketsakan dan identifikasikan lintasan yang dilalui oleh titik $P(x, y)$ jika

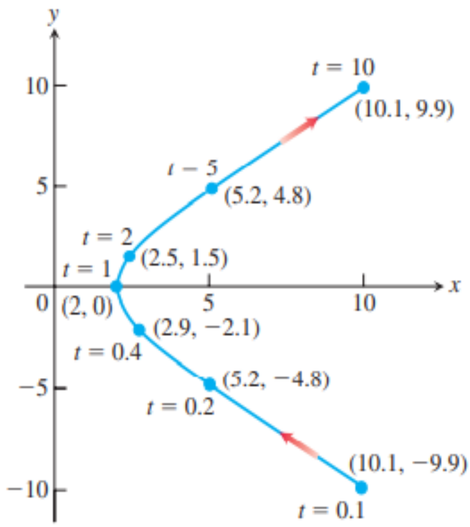
$$x = t + \left(\frac{1}{t}\right), \quad y = t - \left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0.$$

Penyelesaian

Membuat tabel nilai yang ringkas, menggambar titik-titik, dan menggambar kurva mulus yang melalui titik-titik tersebut.

Tabel 1.2 Nilai $x = t + \left(\frac{1}{t}\right)$ dan $y = t - \left(\frac{1}{t}\right)$ untuk beberapa nilai t yang dipilih

t	*1/t*	*x*	*y*
0,1	10,0	10,1	-9,9
0,2	5,0	5,2	-4,8
0,4	2,5	2,9	-2,1
1,0	1,0	2,0	0,0
2,0	0,5	2,5	1,5
5,0	0,2	5,2	4,8
10,0	0,1	10,1	9,9



Gambar 20 Kurva Persamaan Parametrik

Kurva untuk $x = t + \left(\frac{1}{t}\right)$, $y = t - \left(\frac{1}{t}\right)$ untuk $0{,}1 \leq t \leq 10$. Selanjutnya, mengeliminasi parameter t dari persamaan. Dengan mengambil selisih antara x dan y yang diberikan oleh persamaan parametrik, diperoleh

$$x - y = \left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t}$$

Jika menjumlahkan kedua persamaan parametrik didapat

$$x + y = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \left(t - \frac{1}{t}\right) = 2t.$$

Kemudian, dapat mengeliminasi parameter t dengan cara mengalikan persamaan terakhir, yaitu

$$(x - y)(x + y) = \left(\frac{2}{t}\right)(2t) = 4$$

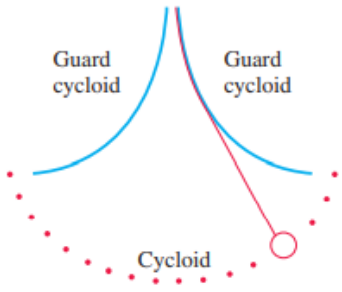
atau, dengan mengekspansi ekspresi pada ruas kiri, didapat persamaan standar untuk hiperbola

$$x^2 - y^2 = 4. \qquad (1)$$

Jadi, koordinat dari semua titik $P(x, y)$ yang digambarkan oleh persamaan parametrik memenuhi Persamaan 1. Akan tetapi, Persamaan 1 tidak mensyaratkan koordinat-x harus bernilai positif. Jadi, terdapat titik (x, y) pada parabola yang tidak memenuhi persamaan parametrik $x = t + \left(\frac{1}{t}\right), t > 0$, yang selalu memberikan x positif. Hal ini berarti bahwa persamaan parametrik tidak memberikan tidak menghasilkan titik pada cabang kiri hiperbola yang diberikan oleh Persamaan 1, yaitu titik-titik dengan koordinat-x bernilai negatif. Untuk nilai t yang kecil positif, lintasan terletak di kuadran empat dan naik ke kuadran pertama seiring kenaikan nilai t, memotong sumbu-x ketika $t = 1$ terlihat pada Gambar 1.5. Daerah asal parameter adalah $(0, \infty)$ dan lintasan tidak mempunyai titik awal maupun titik akhir.

b. Sikloid

Pada jam pendulum yang bola pendulumnya berayun dalam busur melingkar adalah frekuensi dari ayunan pendulum tersebut bergantung pada amplitudo ayunan. Semakin lebar ayunan, maka semakin lama waktu yang diperlukan oleh bola pendulum untuk kembali ke pusat (posisi terendahnya). Namun, hal ini tidak terjadi jika bola pendulum dapat dibuat berayun secara sikloid. Pada tahun 1673, Christian Huygen merancang jam pendulum yang bola pendulumnya berayun secara sikloid. Pada jam pendulum Huygens, bola pendulum berayun membentuk sikloid dimana frekuensi tidak bergantung kepada amplitudo. Adapun jam pendulum ini menggantung bola pendulum pada kawat tipis yang dibatasi oleh penahan yang mengakibatkan bola tersebut tertahan apabila bola pendulum tersebut berayun menjauhi pusat, yang digambarkan sebagai berikut,



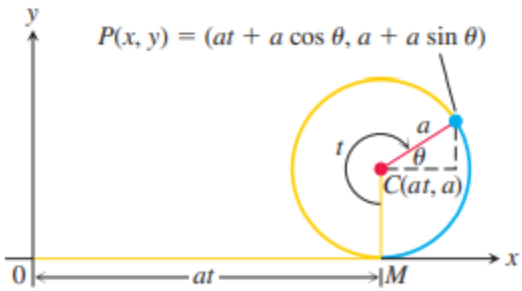
Gambar 21 Sikloid

Lintasan tersebut digambarkan secara parametris dalam contoh berikut.

Contoh Roda yang mempunyai radius a menggelinding sepanjang garis lurus mendatar. Carilah persamaan parametrik untuk lintasan yang dilalui oleh titik P pada keliling roda. Lintasan ini disebut sikloid.

Penyelesaian

Menetapkan sumbu-x sebagai garis lurus yang dilalui roda, menandai titik P pada roda, meletakkan titik P pada titik asal, menggelindingkan roda ke arah kanan. Sudut t yang dilalui oleh roda yang menggelinding tersebut merupakan parameter dan diukur dalam radian.



Gambar 22 Roda

Posisi dari P(x,y) pada roda yang mengelilingi dengan sudut t.

Pada Gambar 22 memperlihatkan roda sejenak setelah dasarnya terletak pada at satuan dari titik asal. Pusat roda C, terletak di (at, a) dan koordinat P adalah

$$x = at + a\cos\theta\,, \quad y = a + a\sin\theta.$$

Untuk menyatakan θ dalam t, bahwa dalam gambar $t + \theta = \frac{3\pi}{2}$ sehingga

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

Ini membuat

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t\,,$$

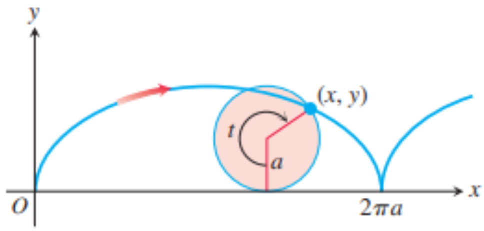
$$\sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

Persamaan yang dicari adalah

$$x = at - a\sin t\,, \quad y = a - a\cos t$$

Ini biasanya ditulis dengan faktor a yang dikeluarkan, yaitu

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad \text{Persamaan 2}$$

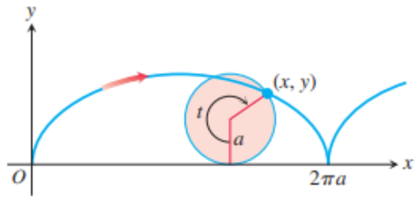


Gambar 23 Kurva Sikloid

Gambar 23 memperlihatkan busur pertama dari sikloid dan sebagian dari busur selanjutnya.

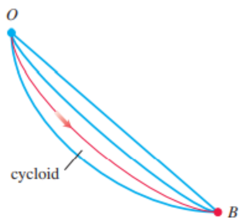
c. (Brachistochrones) dan Tautokron (Tautochrones)

Jika Gambar 23 dibalik yaitu bagian atas dibawah, maka Persamaan 2 masih berlaku dan kurva yang dihasilkan digambarkan sebagai berikut



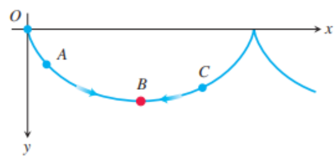
Gambar 24 Tautokron

Adapun kurva ini memliki dua properti fisik yang menarik. Properti pertama, berkaitan dengan titik asal O dan titik B yang terletak di bagian bawah busur pertama. Di antara kurva-kurva mulus yang menghubungkan titik-titik tersebut, sikloid adalah kurva yang ditempuh dengan waktu tercepat oleh manik-manik yang meluncur tanpa gesekan, hanya dipengaruhi oleh gaya gravitasi dari O ke B (Gambar 25). Ini membuat sikloid merupakan brakistokron atau kurva waktu tersingkat untuk titik-titik tersebut.



Gambar 25 Titik sikloid

Properti kedua, meskipun manik-manik meluncur menuju B dari titik awal yang berbeda, namun manik-manik tersebut memerlukan waktu yang sama untuk mencapai B (Gambar 26). Ini membuat sikloid merupakan tautokron atau kurva dengan waktu tempuh sama untuk O dan B.



Gambar 26 Kurva tautokron

4.2 Kalkulus dengan Kurva Parametrik

a. Garis Singgung dan Luas

Kurva yang diparameterisasi $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ terdiferensiasikan di t jika f dan g terdiferensiasikan di t. Pada titik tempat kurva parametrik terdiferensiasikan dengan y juga terdiferensiasikan terhadap x, turunan dy/dt, dx/dt dan dy/dx dihubungkan oleh Aturan Rantai :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt}$$

Jika $dx/dt \neq 0$, dapat membagi kedua persamaan dengan dx/dt untuk mendapatkan penyelesaian dy/dx. Sehingga adapun parametrik untuk dy/dx dirumuskan

Jika ketiga turunan ada dan $dx/dt \neq 0$, maka

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad (1)$$

Jika persamaan parametrik mendefinisikan y sebagai fungsi dari x yang terdiferensiasikan dua kali, dapat dengan menerapkan Persamaan 1 pada fungsi $\frac{dy}{dx} = y'$ untuk menghitung d^2y/dx^2 sebagai fungsi dari t.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt},$$

Sehingga parametrik untuk d^2y/dx^2 dirumuskan

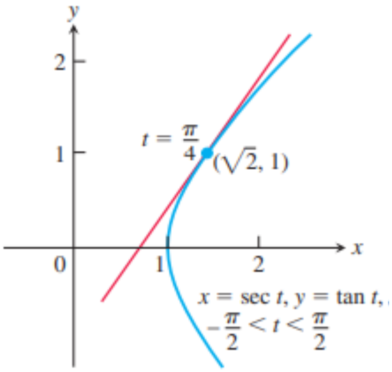
Jika persamaan $x = f(t), y = g(t)$ mendefinisikan y sebagai fungsi dari x yang terdiferensiasikan dua kali, maka di sembarang titik dengan $dx/dt \neq 0$ dan $y' = dy/dx$, diperoleh

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}, \qquad (2)$$

Contoh 1 Carilah garis singgung kurva

$$x = \sec t\,, \quad y = \tan t\,, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

di titik $(\sqrt{2}, 1)$ dengan $t = \pi/4$ (Gambar 2.1)



Gambar 27 Cabang kanan hiperbola

Penyelesaian

Kemiringan kurva di t adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

Dengan memberikan t nilai $\pi/4$, diperoleh

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

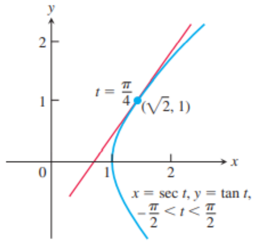
Garis singgung diberikan oleh

$$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$$

$$y = \sqrt{2}x - 2 + 1$$

$$y = \sqrt{2}x - 1$$

Contoh 2 Carilah d^2y/dx^2 sebagai fungsi dari t jika $x = t - t^2$ dan $y = t - t^3$.



Gambar 28 Posisi fungsi

Penyelesaian

- Nyatakan $y' = dy/dx$ dalam t, yaitu

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

- Diferensiasikan y' terhadap t,

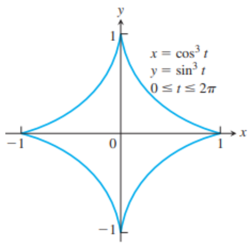
$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right) = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}$$

- Bagilah dy'/dt dengan dx/dt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2-6t-6t^2)(1-2t)^2}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}$$

Contoh 3 Carilah luas daerah yang dilingkupi oleh astroida

$$x = \cos^3 t\,, \quad y = \sin^3 t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



Gambar 29 Astroida

Penyelesaian

$$A = 4\int_0^1 y\,dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \,.\, 3\cos^3 t \sin t \, dt$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)(1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\left[\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2t)\, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 2t\, dt + \int_0^{\pi/2} \cos^3 2t\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + \frac{1}{2}\left(\sin 2t - \frac{1}{3}\sin^3 2t\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) + \frac{1}{2}(0 - 0 - 0 + 0)\right]$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

b. Panjang Kurva yang Didefinisikan Secara Parametris

Panjang kurva dari A ke B sebagai integral mendefinisikan :

Jika kurva C didefinisikan secara parametris oleh $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, $a \le t \le b$, dengan f' dan g' adalah fungsi kontinu dan tidak secara bersama-sama bernilai nol pada interval [a, b], dan C dilalui tepat satu kali apabila t bertambah dari $t = a$ ke $t = b$, maka panjang kurva C adalah integral tentu

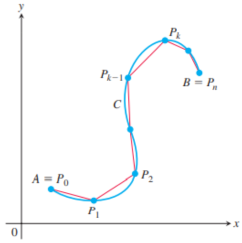
$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Adapun adanya pendefinisian tersebut dengan memisalkan C adalah kurva yang diberikan secara parametrik oleh persamaan

$x = f(t)$ dan $y = g(t)$, $a \le t \le b$.

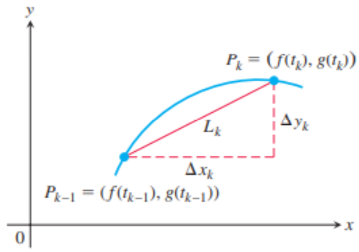
Asumsikan bahwa fungsi f dan g terdiferensiasikan secara kontinu pada interval [a, b]. Asumsikan pula bahwa turunan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak secara bersama-sama bernilai nol, yang mencegah kurva C memiliki sudut. Kurva ini disebut kurva mulus. Adanya pembagian lintasan/busur AB menjadi n

bagian di titik-titik $A = P_1, P_2, P_3, \dots, P_n = B$ yang digambarkan sebagai berikut



Gambar 30 Titik berpadanan

Titik-titik tersebut berpadanan dengan partisi interval [a, b] oleh $a < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$, dengan $P_k = (f(t_k), g(t_k))$. Titik-titik yang berurutan ini dihubungkan oleh ruas garis lurus. Ruas garis yang mempresentasikannya mempunyai panjang (Gambar 2.4) :



Gambar 31 Panjang busur

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [(t_k) - (t_{k-1})]^2}$$

Jika Δt_k kecil, panjang L_k kira-kira sama dengan panjang busur $P_{k-1}P_k$. Dengan Teorema Nilai Rata-rata, terdapat bilangan t_k^* dan t_k^{**} dalam interval sedemikian sehingga

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\Delta t_k,$$
$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\Delta t_k,$$

Dengan mengasumsikan bahwa lintasan dari A sampai B dilalui satu kali apabila t bertambah dari $t = a$ ke $t = b$, tanpa dilalui dengan arah sebaliknya atau dilalui kembali, aproksimasi terhadap panjang kurva AB adalah jumlah semua panjang L_k, yaitu :

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\ \Delta t_k$$

Jumlahan pada ruas kanan tidak persis berupa Jumlah Riemann, namun dapat ditunjukkan bahwa limit penjumlahan, yang merupakan norma dari partisi yang menuju nol dan banyaknya ruas garis $n \to \infty$, merupakan integral tentu

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\ \Delta t_k$$

$$= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\ dt$$

Jika $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, maka dengan menggunakan notasi Leibniz, hasil mengenai panjang busur :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \qquad (3)$$

Contoh 1 Dengan menggunakan definisi, carilah panjang lingkaran dengan radius r yang didefinisikan secara parametrik oleh

Penyelesaian

Apabila t berubah dari 0 ke 2π, lingkaran dilalui tepat satu kali sehingga kelilingnya adalah

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

dan

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

Jadi,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r[t]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Contoh 5 Carilah panjang astroida (Gambar 2.3)

$$x = \cos^3 t\,,\;\; y = \sin^3 t\,,\;\; 0 \le t \le 2\pi$$

Penyelesaian

Karena kurva simetris terhadap sumbu koordinat, panjang kurva astroida adalah empat kali panjang bagian kurva di kuadran pertama.

$$x = \cos^3 t\,,\;\; y = \sin^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t\,(-\sin t)]^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\sin^2 t\,(\cos t)]^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t}$$

$$= 3|\cos t \sin t|$$

$$= 3\cos t \sin t$$

Oleh karena itu,

Panjang bagian kurva di kuadran pertama = $\int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\;\; dt$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\;\; dt$$

$$= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

Panjang kurva astorida adalah empat kali panjang kurva tersebut yaitu 4(3/2) = 6.

c. Panjang Kurva $\boldsymbol{y = f(x)}$

Jika diberikan fungsi $y = f(x), a \leq x \leq b$ yang kontinu dan terdiferensiasikan, maka dengan menjadikan $x = t$ sebagai parameter. Jadi, grafik fungsi f adalah kurva C yang didefinisikan secara parametris oleh $x = t$ dan $y = f(t), \quad a \leq t \leq b,$

Maka,

$\frac{dx}{dt} = 1$ dan $\frac{dy}{dt} = f'(t)$.

Dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t)$$

Memberikan

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 1 + [f'(t)]^2 \\ &= 1 + [f'(x)]^2\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan terakhir ke Persamaan (3) diperoleh rumus panjang kurva untuk grafik $y = f(x)$.

d. Diferensial dari Panjang Busur

Pendefinisian fungsi panjang busur untuk kurva yang didefinisikan secara parametris $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, yaitu dengan

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(z)]^2 + [g'(z)]^2}\, dz$$

Kemudian, dengan Teorema Dasar Kalkulus,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Diferensial dari panjang busur adalah

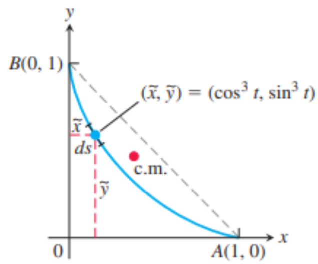
$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

sama dengan $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Contoh 1 Carilah sentroid dari panjang busur asroida dalam Contoh 5 di kuadran pertama.

Penyelesaian

Mengambil kerapatan kurva sebesar $\delta = 1$ dan menghitung massa kurva dan momen kurva terhadap sumbu koordinat.



Gambar 32 Massa kurva

Distribusi massa simetris terhadap garis $y = x$, sehingga $\bar{x} = \bar{y}$. Ruas tipikal dari kurva (Gambar 2.6) mempunyai massa

$$dm = 1.ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 3 \cos t \sin t\, dt.$$

Massa kurva adalah

$$M = \int_0^{\pi/2} dm = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t\, dt = \frac{3}{2}$$

Momen kurva terhadap sumbu-x adalah

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\, .\, 3 \cos t \sin t\, dt$$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt = 3 \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}$$

Dengan demikian,

$$\tilde{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3/5}{3/2} = \frac{2}{5}$$

Sentroid di titik (2/5, 2/5).

Contoh 2 Carilah waktu T yang diperlukan oleh manik-manik meluncur tanpa gesekan di sepanjang sikloid $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ dari $t = 0$ ke $t = \pi$.

Penyelesaian

Mencari waktu

$$T_c = \int_{t=0}^{t=\pi} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

untuk ds dan y dinyatakan secara parametris dalam parameter t. Untuk sikloid diperoleh $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ dan $\frac{dy}{dt} = a \sin t$ sehingga

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$

$$= \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)}\, dt.$$

Dengan mensubstitusikan ds dan y pada integran diperoleh

$$T_C = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(1 - \cos t)}}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\, dt = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

e. Luas Permukaan Benda Putar

Luas permukaan benda putar yang diperoleh dengan cara memutar kurva mengelilingi sumbu-x dirumuskan $S = \int 2\pi y\, ds$ dan luas permukaan benda putar yang diperoleh dengan cara memutar kurva mengelilingi sumbu-y dirumuskan $S = \int 2\pi x\, ds$.

Berdasarkan hal tersebut adapun luas permukaan benda putar untuk kurva yang diparameterisasi yaitu

Jika kurva mulus $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ dilalui tepat satu kali ketika t bertambah dari a ke b, maka luas permukaan yang dibentuk dengan cara memutar kurva mengelilingi sumbu koordinat adalah sebagai berikut

1) Perputaran mengelilingi sumbu-x $(y \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

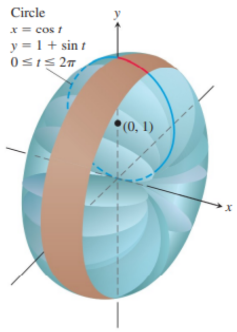
2) Perputaran mengelilingi sumbu-y $(x \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Contoh 1 Parameterisasi standar untuk lingkaran yang mempunyai radius 1 dan pusat (0, 1) di bidang-xy adalah

$$x = \cos t\,, \quad y = 1 + \sin t\,, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Gunakan parameterisasi untuk memperoleh luas permukaan yang diperoleh dengan cara memutar lingkaran tersebut mengelilingi sumbu-x (Gambar 33)



Gambar 33 Lingkaran mengelilingi sumbu x

Penyelesaian

Menghitung rumus

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$= \int_a^{2\pi} 2\pi y\,(1 +$

$\sin t)\sqrt{(-(\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt$

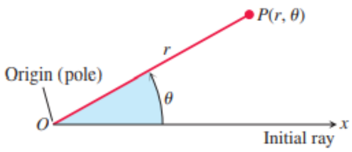
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)\, dt$$

$$= 2\pi[t - \cos t]_0^{2\pi} = 4\pi^2$$

4.3 Koordinat Polar

a. Definisi Koordinat Polar

Koordinat polar dibangun dengan menggunakan dua acuan, yaitu titik pusat dan sumbu kutub yang berupa garis mendatar dari titik pusat (x-ray) ke arah kanan (Utomo, dkk, 2011). Koordinat Polar sangat berguna dalam menghitung integral lipat, menggambarkan lintasan planet dan satelit. Dalam mendefinisikan koordinat polar, pertama tetapkan titik asal O (yang disebut kutub) dan sinar awal dari O yang digambarkan sebagai berikut :



Gambar 34 Sinar awal

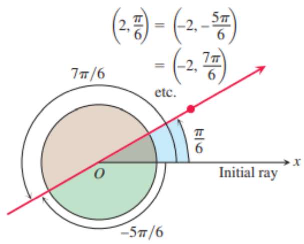
Biasanya, sumbu-x positif dipilih sebagai sinar awal. Kemudian, setiap titik P sebagai dapat ditempatkan dengan memberikan pasangan koordinat polar (r, θ) untuk titik tersebut, dengan r menyatakan jarah berarah dari O ke P, dan menyatakan sudut berarah dari sinar awal ke sinar OP. Sehingga titik P dinamakan sebagai

$$P(r, \theta)$$

Adapun sudut bernilai positif jika diukur berlawanan arah dengan perputaran jarum jam, dan bernilai negatif jika diukur searah dengan jarum jam.

Contoh 1 Carilah semua koordinat polar dari titik $P(2, \pi/6)$.

Penyelesaian



,

Gambar 35 Koordinar polar sinar awal

Membuat sketsa sinar awal, menggambar sinar yang berawal dari titik asal dan membentuk sudut $\pi/6$ radian dengan sinar awal, dan menandai titik $(2, \pi/6)$.

Mencari sudut yang lainnya untuk pasangan koordinat P dengan $r = 2$ dan $r = -2$.

Untuk $r = 2$, sudut-sudut yang memenuhi adalah

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \frac{\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots.$$

Untuk $r = -2$, sudut-sudutnya adalah

$$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots.$$

Pasangan koordinat yang berpadanan dengan P adalah

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

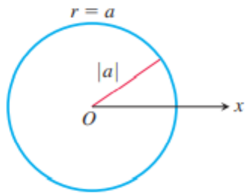
dan

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Apabila $n = 0$, maka kedua rumus terakhir memberikan koordinat $(2, \pi/6)$ dan $(-2, -5\pi/6)$. Apabila $n = 1$, maka rumus tersebut memberikan koordinat $(2{,}13\pi/6)$ dan $(-2{,}7\pi/6)$, dan seterusnya.

b. Persamaan Polar dan Grafik

Jika r bernilai tetap, yaitu $r = a \neq 0$, maka tiitk $P(r, \theta)$ akan terletak sejauh $|a|$ satuan dari titik asal O. Apabila θ bervariasi pada interval yang panjangnya 2π, maka P melalui lingkaran yang mempunyai radius $|a|$ dan pusat di titik asal O. Hal tersebut digambarkan sebagai berikut



Gambar 36 Radius persamaan polar

Contoh 1 Lingkaran atau garis dapat memiliki lebih dari satu persamaan polar.

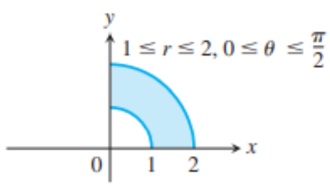
a) $r = 1$ dam $r = -1$ adalah persamaan untuk lingkaran dengan radius 1 dan pusat O.

b) $\theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{7\pi}{6}$, dan $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ adalah persamaan untuk garis dalam (Gambar 3.2)

Persamaan berbentuk $r = a$ dan dapat digabungkan dengan mendefinisikan daerah, ruas garis dan sinar.

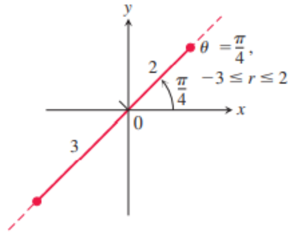
Contoh 2 Gambarlah himpunan titik yang koordinat polarnya memenuhi syarat berikut.

a) $1 \leq r \leq 2$ dan $0 \leq \theta \leq \pi/2$



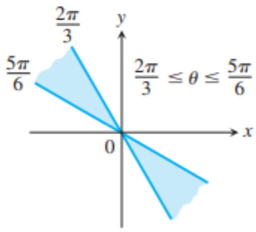
Gambar 37 Syarat polar 1

b) $-3 \leq r \leq 2$ dan $\theta = \frac{\pi}{4}$



Gambar 38 Syarat polar 2

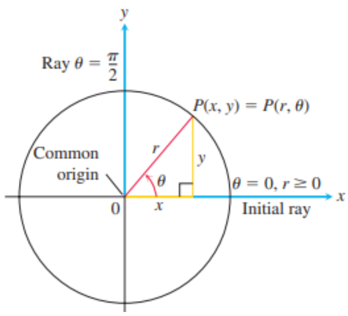
c) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ (tanpa batasan untuk r)



Gambar 39 Syarat polar 3

c. Menghubungkan Koordinat Polar dan Koordinat Kartesius

Saat menggunakan koordinat polar maupun koordinat Kartesius di bidang, dengan meletakkan kedua titik asal bersama-sama dan menjadikan sinar awal sebagai sumbu-x positif. Sinar $\theta = \frac{\pi}{2}, r > 0$ menjadi sumbu-y positif. Adapun hal ini digambarkan sebagai berikut



Gambar 40 Koordinat polar dan kartesius

Sehingga adanya persamaan yang menghubungkan koordinat polar dan Kartesius yaitu

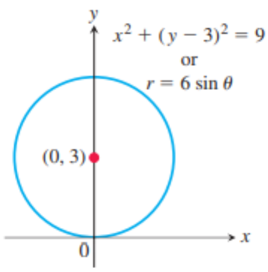
$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad r^2 = x^2 + y^2\,, \quad \tan\theta = y/x$$

Dua persamaan yang pertama menentukan secara tunggal koordinat Kartesius x dan y ketika diberikan koordinat polar r dan θ. Di lain pihak, jika x dan y diberikan, maka persamaan ketiga memberikan dua kemungkinan pilihan untuk r yaitu bernilai positif atau negatif.

Berikut beberapa kurva bidang yang dinyatakan dalam persamaan koordinat polar maupun koordinat Kartesius.

Persamaan Polar	Persamaan Kartesius yang Ekuivalen
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\sin\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3$ $+2xy^2 - y^2 = 0$

Contoh 1 Carilah persamaan polar untuk lingkaran yang ditunjukkan sebagai berikut



Gambar 41 Persamaan polar lingkaran

Penyelesaian

Menerapkan persamaan yang mengaitkan koordinat polar dan Kartesius.

$$x^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$r^2 - 6r\sin\theta = 0$$

$r = 0$ atau $r - 6\sin\theta = 0$

$$r = 6\sin\theta$$

Contoh 2 Gantilah persamaan polar berikut dengn persamaan Kartesius yang ekuivalen dan identifikasikan grafiknya.

a) $r\cos\theta = -4$

b) $r^2 = 4r\cos\theta$

c) $r = 6\sin\theta$

Penyelesaian

Menggunakan substitusi $r\cos\theta = x, r\sin\theta = y$ dan $r^2 = x^2 + y^2$

a) $r\cos\theta = -4$

Persamaan Kartesius : $r\ cos\ \ \theta = -4$

$$x = -4$$

Grafik : Garis tegak melalui $x = -4$ pada sumbu-x

b) $r^2 = 4r\cos\theta$

Persamaan Kartesius : $r^2 = 4r\ cos\ \ \theta$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Grafik : Lingkaran dengan radius 2 dan pusat $(h,k) = (2{,}0)$.

c) $r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Persamaan Kartesius : $r(2\cos\theta - \sin\theta) = 4$

$$2r\cos\theta - r\sin\theta = 4$$

$$2x - y = 4$$

$$y = 2x - 4$$

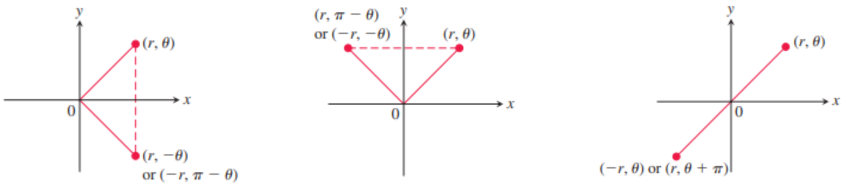
Grafik : Garis berkemiringan $m = 2$, perpotongan dengan sumbu-y $b = -4$.

4.4 Menggambar Grafik Persamaan Koordinat Polar

a. Simetri

Terdapat tiga uji simetri untuk grafik polar dalam bidang-xy Kartesius, yaitu :

1) Simetri terhadap sumbu-x : Jika titik (r, θ) terletak pada grafik, maka titik $(r, -\theta)$ atau $(-r, \pi - \theta)$ terletak pada grafik.
2) Simetri terhadap sumbu-y : Jika titik (r, θ) terletak pada grafik, maka titik $(r, \pi - \theta)$ atau $(-r, -\theta)$ terletak pada grafik.
3) Simetri terhadap titik asal : Jika titik (r, θ) terletak pada grafik, maka titik $(-r, \theta)$ atau $(r, \theta + \pi)$ terletak pada grafik.



Gambar 42 Simetri

b. Kemiringan

Kemiringan dari kurva polar $r = f(\theta)$ di bidang-xy masih diberikan oleh dy/dx, bukan $r' = df/d\theta$. Alasan atas hal tersebut saat grafik f dipandang sebagai persamaan parametrik

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta.$$

Jika f adalah fungsi dari θ yang terdiferensiasikan, maka demikian juga halnya dengan x dan y. Untuk $dx/d\theta \neq 0$, dapat menghitung dy/dx dari rumus parametrik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$= \frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta).\sin\theta)}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta).\cos\theta)}$$

$$= \frac{\frac{df}{d\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\frac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

Dengan demikian, terlihat bahwa dy/dx tidak sama dengan $df/d\theta$.

Adapun kemiringan kurva $r = f(\theta)$ dalam bidang-xy Kartesius dirumuskan

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,y)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

asalkan $dx/d\theta \neq 0$ di titik (r, θ).

Jika kurva $r = f(\theta)$ melalui titik asal di $\theta = \theta_0$, maka $f(\theta_0) = 0$, dan persamaan untuk kemiringan memberikan

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\theta,\theta_0)} = \frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

Jika grafik $r = f(\theta)$ melalui titik asal di $\theta = \theta_0$, maka kemiringan kurva di titik tersebut adalah θ_0.

Contoh 1 Gambarlah grafik $r = 1 - \cos\theta$ dalam bidang-xy Kartesius

Penyelesaian

Kurva simetri terhadap sumbu-x karena

(r, θ) pada grafik $\rightarrow r = 1 - \cos\theta$

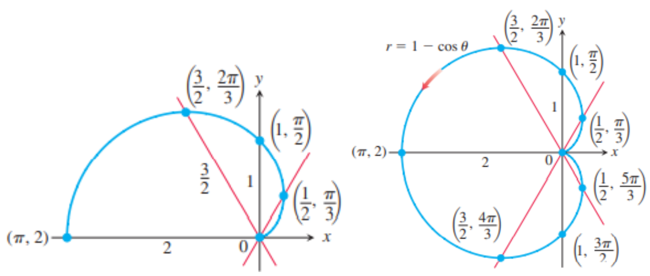
$\rightarrow r = 1 - \cos(-\theta)$

$\rightarrow (r, -\theta)$ pada grafik.

Seiring dengan bertambahnya nilai θ dari 0 ke π, nilai $\cos\theta$ turun dari 1 ke -1 dan $r = 1 - \cos\theta$ naik dari nilai minimum, yaitu 0 ke nilai maksimum yaitu 2. Apabila θ berlanjut dari π ke 2π, maka naik dari -1 kembali ke 1 dan r turun dari 2 kembali ke 0. Kurva kembali berulang ketika $\theta = 2\pi$, karena cosinus mempunyai periode 2π. Kurva meninggalkan titik asal dengan kemiringan $\tan(0) = 0$ dan kembali ke titik asal dengan kemiringan $\tan(2\pi) = 0$.

Berikut tabel nilai dari $\theta = 0$ ke $\theta = \pi$, kemudian penggambaran titik-titik, penggambaran kurva mulus yang melalui titik-titik tersebut dengan garis singgung mendatar di titik asal dan mencerminkan kurva terhadap sumbu-x untuk melengkapi grafik yang di gambarkan sebagai berikut :

θ	$r = 1 - \cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2



Gambar 43 Kemiringan kurva

c. Mengkonversikan Grafik dari Bidang-r ke Bidang-xy

Salah satu cara untuk menggambar grafik persamaan polar $r = f(\theta)$ di bidang-xy adalah dengan membuat tabel nilai-(r, θ), menggambar titik-titik yang berpadanan, dan menghubungkan titik-titik tersebut sesuai urutan peningkatan θ. Hal ini dapat dilakukan dengan baik apabila terdapat cukup banyak titik yang telah digambar untuk menyatakan semua lintasan dan lubang pada grafik. Cara lain untuk menggambarkan grafik adalah sebagai berikut :

1) Gambarlah fungsi $r = f(\theta)$ dalam bidang-$r\theta$ Kartesius,
2) Gunakan grafik Kartesius sebagai “tabel” dan panduan untuk membuat sketsa grafik koordinat polar di bidang-xy.

4. Rangkuman

1) Jika x dan y diberikan sebagai fungsi

$$x = f(t), y = g(t)$$

pada interval I untuk nilai-t, maka himpunan titik-titik $(x, y) = (f(t), g(t))$ yang didefinisikan oleh persamaan tersebut merupakan **kurva parametrik**.

2) Pada titik tempat kurva parametrik terdiferensiasikan dengan y juga terdiferensiasikan terhadap x, turunan dy/dt, dx/dt dan dy/dx dihubungkan oleh Aturan Rantai :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt}$$

3) Fungsi $\frac{dy}{dx} = y'$ untuk menghitung d^2y/dx^2 sebagai fungsi dari t.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt},$$

Jika persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$ mendefinisikan y sebagai fungsi dari x yang terdiferensiasikan dua kali, maka di sembarang titik dengan $dx/dt \neq 0$ dan $y' = dy/dx$, diperoleh

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

4) Jika kurva C didefinisikan secara parametris oleh $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, dengan f' dan g' adalah fungsi kontinu dan tidak secara bersama-sama bernilai nol pada interval [a, b], dan C dilalui tepat satu kali apabila t bertambah dari $t = a$ ke $t = b$, maka panjang kurva C adalah integral tentu

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

5) Jika $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, maka dengan menggunakan notasi Leibniz, hasil mengenai panjang busur :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

6) Diferensial dari panjang busur adalah

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

sama dengan $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

7) Luas permukaan yang dibentuk dengan cara memutar kurva mengelilingi sumbu koordinat adalah sebagai berikut
   a. Perputaran mengelilingi sumbu-x $(y \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

   b. Perputaran mengelilingi sumbu-y $(x \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

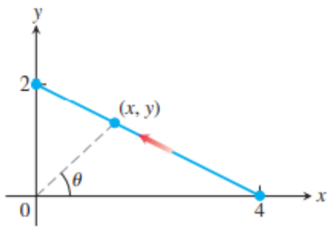
8) Terdapat tiga uji simetri untuk grafik polar dalam bidang-xy Kartesius, yaitu :
   a. Simetri terhadap sumbu-x : Jika titik (r, θ) terletak pada grafik, maka titik $(r, -\theta)$ atau $(-r, \pi - \theta)$ terletak pada grafik.

b. Simetri terhadap sumbu-y : Jika titik (r, θ) terletak pada grafik, maka titik $(r, \pi - \theta)$ atau $(-r, -\theta)$ terletak pada grafik.

c. Simetri terhadap titik asal : Jika titik (r, θ) terletak pada grafik, maka titik $(-r, \theta)$ atau $(r, \theta + \pi)$ terletak pada grafik.

5. Latihan

1. Carilah persamaan parametrik dan interval parametrik untuk gerak partikel yang dimulai dari $(a, 0)$ dan menelusuri lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$
   a. Satu kali dengan arah yang sesuai arah jarum jam.
   b. Satu kali dengan arah yang berlawanan dengan arah jarum jam.
   c. Dua kali dengan arah yang sesuai arah jarum jam.
   d. Dua kali dengan arah yang berlawanan dengan arah jarum jam.
2. Carilah parameterisasi untuk kurva setengah parabola $y = x^2 + 2x$ bagian kiri.
3. Carilah persamaan parametrik untuk setengah lingkaran
$$x^2 + y^2 = a^2$$
   dengan parameternya adalah kemiringan $t = dy/dx$ untuk garis singgung kurva di titik (x, y).
4. Carilah parameterisasi untuk ruas garis yang menghubungkan titik $(0,2)$ dan $(4,0)$ menggunakan sudut θ dalam gambar berikut sebagai parameter.



5. Sikloid $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, pada interval
   a. $0 \leq t \leq 2\pi$
   b. $0 \leq t \leq 4\pi$

c. $\pi \leq t \leq 3\pi$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) $x = t, y = \sqrt{t}, t = 1/4$. Carilah persamaan garis singgung kurva dan nilai d^2y/dx^2 di titik tersebut.
2) $x^3 - 2t^2 = 9, 2y^3 - 3t^2 = 4, t = 2$. Carilah kemiringan kurva $x = f(t), y = g(t)$ di titik dengan nilai t yang diberikan.
3) Carilah panjang kurva pada $x = \cos t\,, y = t + \sin t\,, 0 \leq t \leq \pi$.
4) Sebuah ruas garis yang menghubungkan titik (0,1) dan (2,2) diputar mengelilingi sumbu-x sehingga menghasilkan kerucut terpancung. Carilah luas permukaan dari kerucut tersebut menggunakan parameterisasi $x = 2t, y = t + 1, 0 \leq t \leq 1$.
5) Manakah pasangan koordinat polar yang menyatakan titik yang sama?
   a. $(-2, \pi/3)$
   b. $(2, -\pi/3)$
   c. (r, θ)
   d. $(r, \theta + \pi)$
   e. $(-r, \theta)$
6) Carilah koordinat Kartesius dari titik-titik berikut (yang diberikan dalam koordinat polar).
   a. $(\sqrt{2}, \pi/4)$
   b. $(1, 0)$
   c. $(0, \pi/2)$
   d. $(\sqrt{2}, \pi/4)$
   e. $(-3, 5\pi/6)$
7) Gambarlah grafik himpunan titik yang koordinat polarnya memenuhi persamaan dan pertidaksamaan dalam $0 \leq r \leq 2$.

8) Gantilah persamaan polar pada $r\cos\theta = 2$ dengan persamaan Kartesius yang ekuivalen. Kemudian identifikasikan grafik persamaan tersebut
9) Gantilah persamaan Kartesius pada $x^2 + y^2 = 4$ dengan persamaan polar yang ekuivalen.
10) Identifikasi simetri dari kurva $r = 2 + \sin\theta$ dan buatlah sketsa kurva di bidang-xy.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara *online* melalui *teams* pada kolom *feedback* yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 8 : Menguasai konsep luas dan panjang dalam koordinat polar, irisan kerucut, irisan kerucut dalam koordinat polar.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

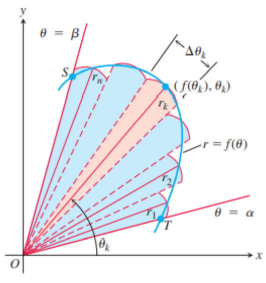
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan luas dan panjang dalam koordinat polar, irisan kerucut, irisan kerucut dalam koordinat polar.. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan luas dan panjang dalam koordinat polar, irisan kerucut, irisan kerucut dalam koordinat polar.. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

4.5 Luas dan Panjang dalam Koordinat Polar

b. Luas di Bidang



Gambar 44 Luas di bidang

Daerah OTS pada Gambar 44 diatas dibatasi oleh sinar $\theta = \alpha$ dan $\theta = \beta$ serta kurva $r = f(\theta)$. Adapun juring tipikal ke-k mempunyai radius $r_k = f(\theta_k)$ dan sudut pusat $\Delta\theta_k$ yang diukur dalam radian. Untuk mendapatkan rumus luas daerah OTS, yakni dengan mengaproksimasikan daerah tersebut dengan juring lingkaran yang berbentuk kipas. Luas juring tersebut adalah $\Delta\theta_k/2\pi$ kali luas daerah lingkaran dalam radius r_k, atau

$$A_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$

Luas daerah OTS kira-kira

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$

Jika f kontinu, aproksimasi tersebut membaik apabila norma dari partisi P menuju nol, dengan norma dari P adalah nilai terbesar. Sehingga adanya rumus berikut yang mendefinisikan luas daerah, yaitu

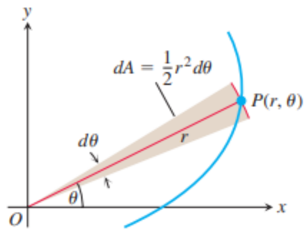
$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

Dapat pula dirumuskan suatu luas daerah berbentuk kipas di antara titik asal dan kurva $r = f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ adalah

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Luas ini merupakan integral dari diferensial luas pada gambar berikut

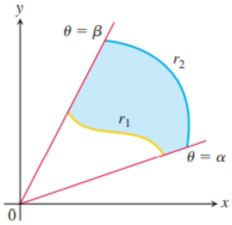


Gambar 45 Luas dari integral differensial

sehingga

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

Jika mencari luas dari daerah $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ yang digambarkan seperti dibawah ini memiliki rumus yang berbeda yang dirumuskan dengan



$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} {r_2}^2 d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} {r_1}^2 d\theta$$

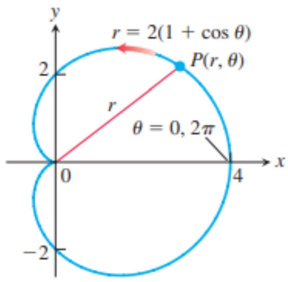
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} ({r_2}^2 - {r_1}^2) d\theta$$

Gambar 46 Luas daerah contoh

Contoh 1 Carilah luas daerah di bidang-xy yang dilingkupi oleh kardoida $r = 2(1 + \cos\theta)$

Penyelesaian

Menggambar grafik kardoida



Gambar 47 Grafik Kardoida

Kemudian menentukan radius OP melewati daerah tersebut satu kali apabila θ berjalan dari 0 ke 2π. Dengan demikian, luas daerah adalah

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} . 4(1 + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2.\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta) d\theta$$

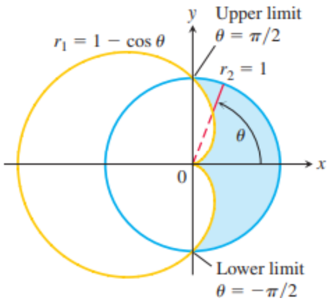
$$= \left[3\theta + 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 6\pi - 0 = 6\pi$$

Contoh 2 Carilah luas daerah yang terletak di dalam lingkaran $r = 1$ dan luas kardioida $r = 1 - \cos\theta$.

Penyelesaian

Pertama, sketsakan daerah tersebut untuk menentukan batas-batasnya dan limit integrasi. Adapun disketsakan sebagai berikut



Gambar 48 Luas Kardoida

Kurva sebelah luar adalah $r_2 = 1$, kurva sebelah dalam adalah $r_1 = 1 - \cos\theta$, dan θ terentang dari $-\pi/2$ ke $\pi/2$. Maka luas daerahnya adalah

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}({r_2}^2 - {r_1}^2)d\theta$$

$$A = 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}({r_2}^2 - {r_1}^2)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \big(1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\big)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \left[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \sin\frac{2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}$$

c. Panjang Kurva Polar

Untuk mendapatkan sebuah formula koordinat polar untuk menghitung panjang kurva $r = f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, dengan menyatakan kurva sebagai suatu parameter sebagai berikut

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta\,, y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta\,, \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Adapun telah diketahui sebelumnya rumus dari panjang kurva parametrik yakni

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Persamaan ini pun berubah menjadi

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Ketika Persamaan 2 disubstitusikan ke dalamnya untuk x dan y.

Sehingga panjang kurva polar didefinisikan

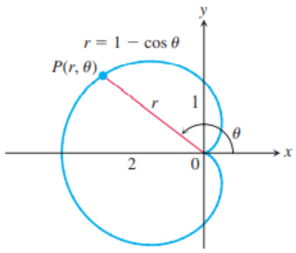
Jika $r = f(\theta)$ memiliki turunan pertama kontinu untuk $\alpha \leq \theta \leq \beta$ dan jika titik $P(r,\theta)$ melewati kurva $r = f(\theta)$ tepat satu kali ketika θ bergerak dari α ke β, maka panjang kurva adalah

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Contoh 1 Carilah panjang kardioida $r = 1 - \cos\theta$.

Penyelesaian

Sketsakan kardioida tersebut untuk menentukan batas-batas integrasi.



Gambar 49 Batas integrasi kardoida

Titik $P(r,\theta)$, menelusuri kurva satu kali, berlawanan arah putaran jam ketika θ bergerak dari 0 ke 2π, sehingga ini menjadi nilai yang dipergunakan untuk α dan β.

Dengan

$$r = 1 - \cos\theta, \frac{dr}{d\theta} = \sin\theta$$

terdapat

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \\ &= 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 2 - 2\cos\theta \end{aligned}$$

dan

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

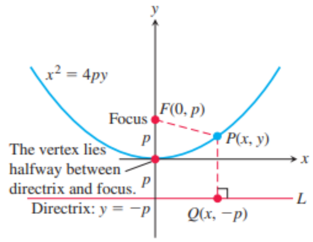
$$= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4 + 4 = 8$$

4.6 Irisan Kerucut

c. Parabola

Parabola adalah himpunan yang memuat semua titik di bidang dengan jarak yang sama dari titik tetap dan garis tetap yang diberikan di bidang. Titik tetap tersebut dinamakan fokus parabola. Garis tetap tersebut dinamakan direktriks. Parabola mempunyai persamaan paling sederhana ketika fokus dan direktriksnya bertautan dengan salah satu sumbu koordinat. Sebagai contoh, perhatikan gambar berikut



Gambar 50 Grafik Parabola

Andaikan fokus terletak di titik $F(0, p)$ di sumbu-y positif dan direktriksnya adalah garis $y = -p$. Dalam notasi pada gambar, titik $P(x, y)$ terletak pada parabola jika dan hanya jika $PF = PQ$. Dari rumus jarak,

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y-(-p)\right)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

Apabila kedua ekspresi tersebut disamakan, dikuadratkan kemudian disederhanakan, maka diperoleh

$$y = \frac{x^2}{4p} \text{ atau } x^2 = 4py \qquad (1)$$

Persamaan ini menyatakan parabola yang simetris terhadap sumbu-y. Sumbu-y ini sebagai sumbu parabola/sumbu simetri. Kemudian, titik potong parabola dengan sumbunya disebut titik puncak. Pada Gambar 6.1 puncak parabola $x^2 = 4py$ terletak di titik asal. Bilangan positif p adalah panjang fokus parabola. Adapun jika parabola terbuka ke bawah, dengan fokusnya pada $(0, -p)$ dan direktriksnya garis $y = p$, maka Persamaan 1 menjadi

$$y = -\frac{x^2}{4p} \text{ atau } x^2 = -4py$$

Contoh 1 Carilah fokus dan direktriksnya dari parabola $y^2 = 10x$.

Penyelesaian

Mencari nilai p dalam persamaan standar $y^2 = 4px$:

$$4p = 10, \text{ sehingga } p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

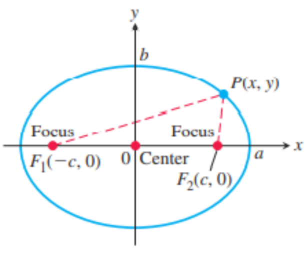
Kemudian mencari fokus dan direktriks untuk nilai p tersebut :

Fokus : $(p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Direktriks : $x = -p$ atau $x = -\frac{5}{2}$

d. Elips

Elips adalah himpunan titik di bidang yang jumlah jaraknya dari kedua titik tetap di bidang bernilai tetap. Kedua titik tetap tersebut adalah fokus elips. Garis yang melalui fokus elips adalah sumbu fokus elips. Titik tengah di antara kedua fokus disebut pusat. Titik potong sumbu fokus dan elips disebut puncak.



Gambar 51 Ellips

Elips yang didefinisikan oleh persamaan adalah $PF_1 + PF_2 = 2a$ grafik persamaan $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ dimana $b^2 = a^2 + c^2$.

Garis singgung elips di titik tersebut tegak lurus sumbu koordinat karena dengan menurunkan persamaan secara implisit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

bernilai nol jika $x = 0$ dan tak terhingga jika $y = 0$.

Sumbu mayor elips dalam persamaan adalah ruas garis dengan panjang $2a$ yang menghubungkan titik $(\pm a, 0)$. Sumbu minor adalah ruas garis dengan panjang $2b$ yang menghubungkan titik $(0, \pm b)$. Bilangan a merupakan sumbu semimayor dan bilangan b merupakan sumbu semiminor. Bilangan c dari

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

merupakan jarak pusat ke fokus elips. Jika $a = b$ maka elips menjadi lingkaran.

Persamaan bentuk standar untuk elips yang berpusat di titik asal, yaitu

• Fokus pada sumbu-x : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$

Jarak pusat ke fokus : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Fokus : $(\pm c, 0)$

Titik puncak : $(\pm a, 0)$

• Fokus pada sumbu-y : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $(a > b)$

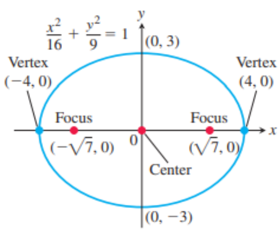
Jarak pusat ke fokus : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Fokus : $(0, \pm c)$

Titik puncak : $(0, \pm a)$

Contoh 1 Elips

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Gambar 52 Contoh Ellips

mempunyai

Sumbu semimayor : $a = \sqrt{16} = 4$,

Sumbu semiminor : $b = \sqrt{9} = 3$

Jarak pusat ke fokus : $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Fokus : $(\pm c, 0) = (\pm 7{,}0)$

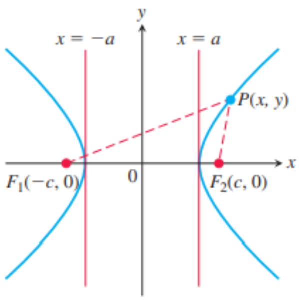
Titik puncak : $(\pm a, 0) = (\pm 4{,}0)$

Pusat : (0, 0)

e. Hiperbola

Hiperbola adalah himpunan titik di bidang yang selisih jaraknya dari dua titik tetap di bidang bernilai tetap. Kedua titik tetap tersebut adalah fokus hiperbola.

Garis yang melalui fokus hiperbola disebut sumbu fokus. Titik pada sumbu fokus yang berada di tengah-tengah kedua fokus dinamakan pusat hiperbola. Titik potong sumbu fokus dan hiperbola disebut titik puncak.



Gambar 53 Hiperbola

Hiperbola mempunyai dua cabang. Untuk titik-titik yang terletak pada cabang kanan hiperbola, $PF_1 - PF_2 = 2a$. Untuk titik-titik yang terletak pada cabang kiri hiperbola, $PF_2 - PF_1 = 2a$. Kemudian, dimisalkan $b =$

$$\sqrt{c^2 + a^2}$$

Garis singgung di titik tersebut berupa garis vertikal karena dari persamaan diturunkan secara implisit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Bernilai tak-terhingga ketika $y = 0$. Hiperbola tidak mempunyai perpotongan-y bahkan, tidak ada bagian kurva yang terletak di antara garis $x = -a$ dan $x = a$.

Garis

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

merupakan dua asimtot untuk hiperbola.

Persamaan bentuk standar untuk hiperbola yang berpusat di titik asal

• Fokus pada sumbu-x : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Jarak pusat ke fokus : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Fokus : $(\pm c, 0)$

Titik puncak : $(\pm a, 0)$

Asimtot : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ atau $y = \pm \frac{b}{a} x$

• Fokus pada sumbu-y : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Jarak pusat ke fokus : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

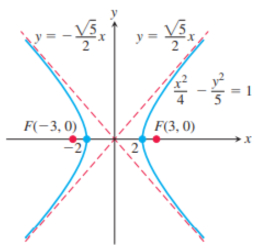
Fokus : $(0, \pm c)$

Titik puncak : $(0, \pm a)$

Asimtot : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ atau $y = \pm \frac{a}{b} x$

Contoh 1 Persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Gambar 54 Contoh hiperbola

dengan $a^2 = 4$ dan $b^2 = 5$, mempunyai

Jarak pusat ke fokus : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

Fokus : $(\pm c, 0) = (\pm 3{,}0)$, Titik puncak : $(\pm a, 0) = (\pm 2{,}0)$

Pusat : (0, 0)

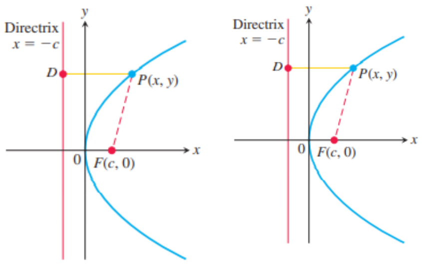
Asimtot : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 0$ atau $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

4.7 Irisan Kerucut dalam Koordinat Polar

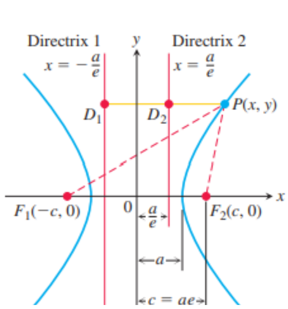
a. Eksentrisitas

Definisi dari eksentrisitas antara lain :

- Eksentrisitas elips $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1\ (a > b)$ adalah $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
- Eksentrisitas hiperbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ adalah $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
- Eksentrisitas parabola adalah $e = 1$.



Gambar 55 Eksentrisitas



Gambar 56 Direktris Hiperbola

Fokus dan direktriks hiperbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. Dimanapun letak P pada hiperbola, selalu berlaku $PF_1 = e.PD_1$ dan $PF_2 = e.PD_2$

Adapun baik pada elips maupun hiperbola, eksentrisitas adalah rasio dari jarak antara fokus terhadap jarak antara puncak (karena $c/a = 2c/2a$)

Ekesentrisitas = $\frac{\text{jarak antar fokus}}{\text{jarak antar titik puncak}}$

Persamaan "fokus-direktriks" $PF = e.PD$ mengaitkan parabola, elips dan hiperbola dengan cara berikut. Misalkan jarak PF dari titik P ke titik tetap (fokus) adalah kelipatan konstanta dari jarak P ke garis tetap (direktriks). Jadi, misalkan

$$PF = e.PD$$

dengan e adalah konstanta kesebandingan, maka lintasan yang dilalui oleh P berupa

a) Parabola jika $e = 1$,
b) Elips dengan eksentrisitas e jika $e < 1$, dan
c) Hiperbola dengan eksentrisitas e jika $e > 1$.

Dapat pula disimpulkan bahwa himpunan titik-titik P yang rasio antara jarak dari fokus ($|PF|$) dan jarak dari direktriks ($|PD|$) adalah suatu konstanta positif e (eksentrisitas), yakni himpunan titik P yang memenuhi hubungan

$$|PF| = e|PD|$$

disebut konik. Jika $0 < e < 1$, konik itu adalah elips; jika $e = 1$, konik itu adalah parabola; jika $e > 1$, konik itu adalah hiperbola (Varberg, dkk dikutip dari Erlangga, 2017).

Contoh 1

Carilah persamaan Kartesius untuk hiperbola dengan pusat di titik asal, fokus di (3, 0), dan garis direktriks $x = 1$

Penyelesaian

Pertama-tama menggunakan komponen seperti diperlihatkan pada Gambar 7.3 untuk mencari eksentrisitas hiperbola. Adapun fokusnya adalah

$$(c, 0) = (3,0), \text{ sehingga } c = 3$$

direktris adalah garis

$$x = \frac{a}{e} = 1, \text{ sehingga } a = e$$

Ketika digabungkan dengan persamaan e=c/a yang mendefinisikan eksentrisitas,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}, \text{ sehingga } e^2 = 3 \text{ dan } e = \sqrt{3}$$

Dengan mengetahui e, diperoleh persamaan yang diinginkan dari persamaan $PF = e.PD$. Dalam koordinat ini maka

$$PF = e.PD$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{3}|x-1|$$

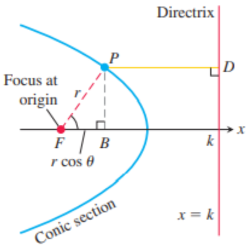
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$2x^2 - y^2 = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$$

b. Persamaan Polar

Mencari persamaan polar dari elips, parabola atau hiprbola dengan meletakkan salah satu fokus di titik asal dan direktriks yang berpadanan di sebelah kanan titik asal sepanjang garis tegak x=k seperti digambarkan sebagai berikut



Gambar 57 Contoh Direktriks

Dalam koordinat polar, menjadi

$$PF = r$$

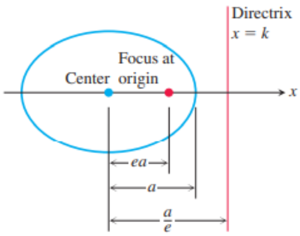
aan

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta.$$

Jadi, persamaan fokus-direktriks irisan kerucut menjadi $PF = e.PD$ yang dapat diselesaikan untuk r sehingga diperoleh rumus dari persamaan polar untuk irisan kerucut dengan eksentrisitas e :

$$r = \frac{ke}{1+e\cos\theta} \qquad (2)$$

dengan $x = k > 0$ adalah direktriks tegak.



Gambar 58 Direktriks Elips

Pada elips yang mempunyai sumbu semimayor a, jarak fokus-direktriks diberikan oleh $k = \left(\frac{a}{e}\right) - ea$, sehingga $ke = a(1-e^2)$.

Diperoleh persamaan polar untuk elips dengan eksentrisitas e dan sumbu semimayor a dirumuskan

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \qquad (3)$$

Contoh 1 Carilah persamaan untuk hiperbola dengan eksentrisitas 3/2 dan direktriks $x = 2$.

Penyelesaian

Menggunakan Persamaan 2 dengan $k = 2$ dan $e = 3/2$, yaitu

$$r = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)\cos\theta} = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}$$

Contoh 2 Carilah direktriks dari parabola

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}$$

Penyelesaian

Dengan membagi pembilang dan penyebut dengan 10 untuk mendapatkan persamaan polar dalam bentuk standar, yaitu

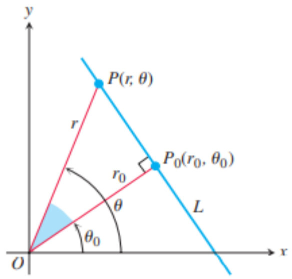
$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}$$

Persamaan ini adalah persamaan

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

Dengan $k = 5/2$ dan $e = 1$. Jadi, persamaan untuk direktriks adalah $x = 5/2$.

c. Garis



Gambar 59 Persamaan Polar garis

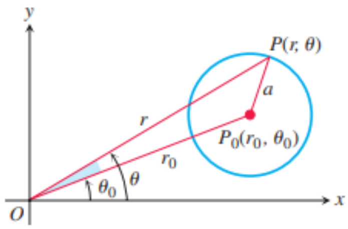
Persamaan polar untuk garis L dengan membaca hubungan $r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$ pada segitiga siku-siku OP_0P.

Adapun persamaan polar standar untuk garis yakni

Jika titik P adalah titik perpotongan tegak lurus garis L dengan garis yang berawal dari titik asal, untuk $r_0 \geq 0$, maka persamaan untuk L adalah

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

d. Lingkaran



Gambar 60 Persamaan Polar lingkaran

1.

Persamaan polar untuk lingkaran dapat diperoleh dengan cara menerapkan Hukum Cosinus pada segitiga OP_0P.

Adapun penerapan Hukum Cosinus pada segitiga OP_0P

Jika lingkaran melalui titik asal, maka $r_0 = a$ dan persamaan disederhanakan menjadi

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$

$$r^2 = 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$

$$r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$$

Jika pusat lingkaran terletak di sumbu-x positif, maka $\theta_0 = 0$ dan persamaan menjadi

$$r = 2a\cos\theta$$

Jika pusat lingkaran terletak pada sumbu-y positif, maka dan persamaan menjadi

$$r = 2a\sin\theta$$

4. Rangkuman

2) Jika f kontinu, aproksimasi tersebut membaik apabila norma dari partisi P menuju nol, dengan norma dari P adalah nilai terbesar. Sehingga adanya rumus berikut yang mendefinisikan luas daerah, yaitu

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

3) Jika $r = f(\theta)$ memiliki turunan pertama kontinu untuk $\alpha \leq \theta \leq \beta$ dan jika titik $P(r, \theta)$ melewati kurva $r = f(\theta)$ tepat satu kali ketika θ bergerak dari α ke β, maka panjang kurva adalah

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

4) Garis singgung elips di titik tersebut tegak lurus sumbu koordinat karena dengan menurunkan persamaan secara implisit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

bernilai nol jika $x = 0$ dan tak terhingga jika $y = 0$.

5) Eksentrisitas adalah rasio dari jarak antara fokus terhadap jarak antara puncak (karena $c/a = 2c/2a$)

$$\text{Ekesentrisitas} = \frac{\text{jarak antar fokus}}{\text{jarak antar titik puncak}}$$

6) Jika lingkaran melalui titik asal, maka $r_0 = a$ dan persamaan disederhanakan menjadi

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$

$$r^2 = 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$

$$r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$$

Jika pusat lingkaran terletak di sumbu-x positif, maka $\theta_0 = 0$ dan persamaan menjadi

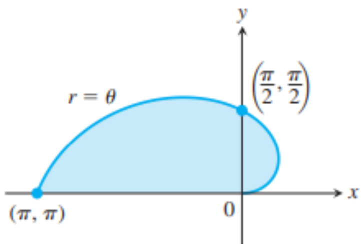
$$r = 2a\cos\theta$$

Jika pusat lingkaran terletak pada sumbu-y positif, maka dan persamaan menjadi

$$r = 2a\sin\theta$$

5. Latihan

1) Gambarlah grafik lemniskat pada $r^2 = 4\sin 2\theta$, simetri apa yang dimiliki oleh kurva tersebut?
2) Kardioida $r = -1 + \cos\theta\,;\theta = \pm\pi/2$. Carilah kemiringan kurva di titik yang diberikan dan buatlah sketsa kurva bersama-sama dengan garis singgungnya di titik tersebut.
3) Gambarlah grafik persamaan $r = \sin\left(\frac{8}{7}\theta\right)$ untuk $0 \leq \theta \leq 14\pi$.
4) Carilah luas daerah pada daerah yang dibatasi oleh spiral $r = \theta$ untuk $0 \leq \theta \leq \pi$.



5) Carilah luas daerah pada perpotongan dari lingkaran $r = 1$ dan $r = 2\sin\theta$.
6) Carilah panjang kurva pada spiral $r = \theta^2, 0 \leq \theta \leq \sqrt{5}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Carilah panjang kurva pada kurva $r = \sqrt{1 + \sin 2\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi/2$.
2) $y = -8x^2$. Carilah fokus dan direktriks dari parabola tersebut serta gambarkan parabola tersebut.
3) $6x^2 + 9y^2 = 54$. Tuliskan persamaan dalam bentuk standar, gambarkan elips tersebut serta fokus dari elips.
4) $y^2 - 3x^2 = 3$. Tuliskan persamaan dalam bentuk standar dan carilah asimtot hiperbola. Kemudian gambarkan hiperbola tersebut sertakan asimtot dan fokus.
5) Carilah pusat, fokus, titik puncak, asimtot dan radius yang sesuai dari irisan kerucut pada $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$.
6) Pada $2x^2 + y^2 = 4$, carilah eksentrisitas dari elips. Kemudian cari dan gambar fokus serta direktriks elips.
7) Eksentrisitas : 2, Puncak : $(\pm 2,0)$, berpusat di titik asal bidang-xy. Carilah persamaan polar untuk hiperbola dalam koordinat Kartesius.
8) Carilah persamaan polar untuk irisan kerucut dengan $e = \frac{1}{3}, y = 6$
9) Gambarlah garis dan irisan kerucut pada $r = 1/(1 + \cos \theta)$.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetulnya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara *online* melalui *teams* pada kolom *feedback* yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul dempat ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Persamaan Parametrik dan koordinat polar beserta aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Turunan	Limit	Tangen	Normal	Parametrik
Kontinu	Diskontinu	Differensial	Polar	Kartesius

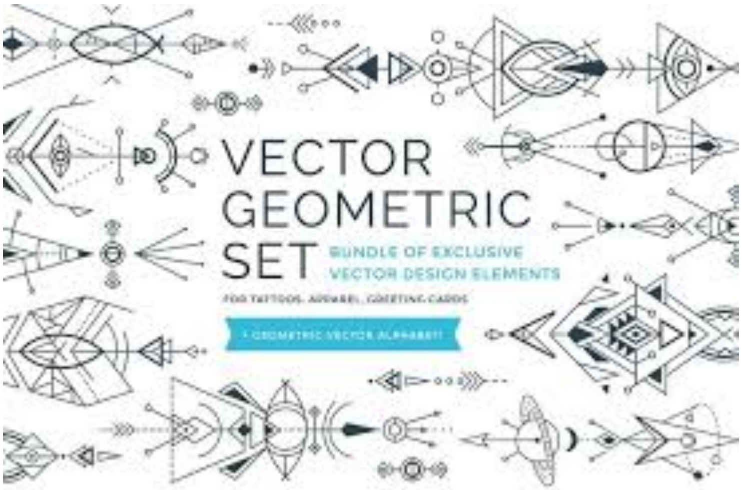
4. Referensi

Thomas, G., Hass, J., Weir, M. (2014). *Thomas' Calculus (Thirteenth edition*). Britania Raya: Pearson Education.

Varberg, Rurcell, Rigdon. (2017). *Kalkulus (Ninth edition*). Jakarta: Erlangga.

Utomo, R., Santosa, R. G., & Haryono, N. A. (2011). Penghitungan Luas Daerah Di Dalam Kurva Polar. *Jurnal Informatika*, *4*(2).

MODUL 5 VEKTOR DAN GEOMETRI



MODUL 5 VEKTOR DAN GEOMETRI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Vektor dan geometri menjadi materi yang dibahas di dalam modul ini. Vektor sebagai materi dasar dapat dipahami dan digunakan untuk memahami materi yang lebih lanjut. Modul ini memuat materi sistem koordinat tiga dimensi, vektor, hasil kali titik, hasil kali silang, garis dan bidang ruang, silinder dan permukaan kuadratik. Modul ini dilengkapi dengan materi, contoh soal, latihan dan evaluasi pembelajaran dan rangkuman yang dapat digunakan mahasiswa untuk belajar secara mandiri maupun berkelompok.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Lima

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

   S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret , integral, persamaan differensial, persamaan parametrik.

5. Kegunaan Modul Lima

   Kegunaan modul lima ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan vektor dan geometri ruang. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai vektor dan geometri ruang untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : sistem koordinat tiga dimensi, vektor, hasil kali titik, hasil kali silang, garis dan bidang ruang, silinder dan permukaan kuadratik.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 9 : Menguasai konsep sistem koordinat tiga dimensi, vektor, hasil kali titik, hasil kali silang.

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

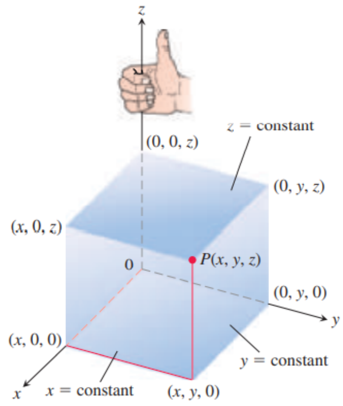
Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan sistem koordinat tiga dimensi, vektor, hasil kali titik, hasil kali silang. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan sistem koordinat tiga dimensi, vektor, hasil kali titik, hasil kali silang. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

5.1 Sistem Koordinat Tiga Dimensi

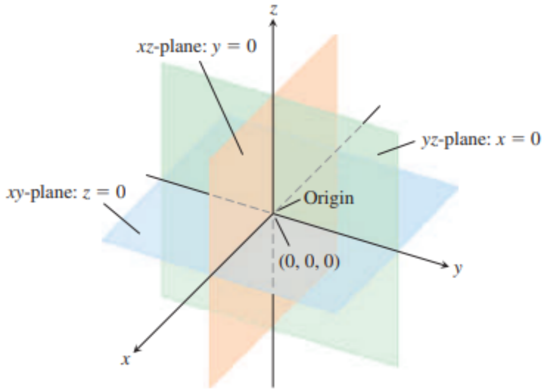
Untuk menempatkan titik di ruang, dapat menggunakan tiga sumbu koordinat yang saling tegak lurus.



Gambar 61 Sistem koordinat kartesius tangan kanan

Koordinat Kartesius (x, y, z) untuk setiap P di ruang adalah nilai dimana bidang-bidang yang melalui P saling berpotongan tegak lurus. Koordinat Kartesius untuk ruang disebut juga dengan koordinat siku-siku. Titik-titik di sumbu$-$x mempunyai koordinat$-$y dan koordinat$-$z yang bernilai 0. Jadi titik-titik mempunyai koordinat berbentuk $(x, 0, 0)$. Sehingga, titik-titik di sumbu sumbu$-$y mempuyai koordinat $(0, y, 0)$ dan titik-titik di sumbu$-$z mempunyai koordinat $(0, 0, z)$.

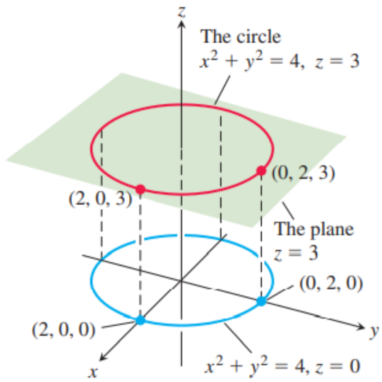
Bidang yang ditentukan oleh sumbu-sumbu koordinat adalag bidang$-$xy, dengan persamaan standar $z = 0$; bidang$-$yz, dengan persamaan standar $x = 0$; bidang$-$xz dengan persamaan standar $y = 0$. Pada ketiga bidang tersebut berpotongan di titik asal $(0, 0, 0)$. Titik asal ini dinyatakan dengan huruf O atau 0.



Gambar 62 bidang x,y,z membagi ruang delapan oktan

Ketiga bidang koordinat $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$ membagi ruang menjadi delapan bagian yang disebut oktan. Oktan yang memuat titik-titik dengan koordinat positif disebut dengan oktan pertama, dan tidak ada konveksi untuk menomori ketujuh oktan lainnya.

Contoh 1:



Gambar 63 Contoh ruang

Titik $P(x, y, z)$ manakah yang memenuhi persamaan $x^2 + y^2 = 4$ dan $z = 3$?

Penyelesaian: Titik yang terletak di bidang horizontal $z = 3$, dan dibidang tersebut membentuk lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Kita menyebut himpunan titik-

titik tersebur sebagai "Lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ di bidang $z = 3$" atau "Lingkaran $x^2 + y^2 = 4, z = 3$".

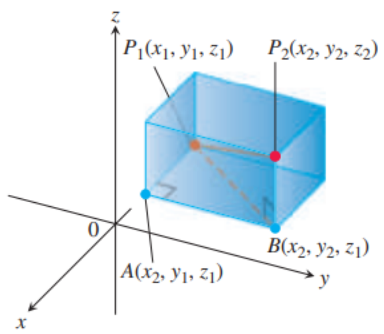
5.2 Jarak dan Bola dalam Ruang

Rumus untuk jarak dua titik di bidang−xy diperluas ke titik dalam ruang.

Jarak di antara Titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Bukti



Gambar 64 Jarak titik dengan penerapan Phytagoras

Kita mengontruksikan kotak persegi empat yang sisinya sejajar dengan bidang koordinat serta titik P_1 dan P_2 berada di sudut kotak yang letaknya berlawanan (Gambar 4). Jika $A(x_2, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_1)$ adalah titik pada kotak seperti di gambar. Maka titik sisi kotak, yaitu P_1A, AB dan BP_2 mempunyai Panjang

$$|P_1A| = |x_2 - x_1|, |AB| = |y_2 - y_1|, |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \text{ dan } |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Jadi,

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

$$= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2$$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Dengan demikian.

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Contoh 2:

Jarak antara $P_1(2,1,5)$ dan $P_2(-2,3,0)$ adalah

Penyelesaian:

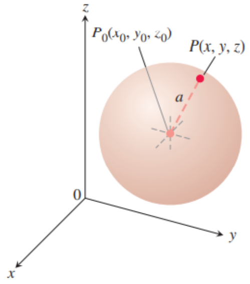
$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2 + (0-5)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4 + 25}$$

$$= \sqrt{45} \approx 6{,}708$$

Untuk menuliskan persamaan bola di ruang, dapat menggunakan rumus jarak. Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 65 Bola dengan jari-jari a

Titik $P(x, y, z)$ persis terletak di bola dengan radius a dan pusat (x_0, y_0, z_0) apabila $|P_0P| = a$ atau

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

Contoh 3:

Carilah pusat dan radius bola $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$

Penyelesaian:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$$

$$(x^2 + 3x) + y^2 + (z^2 - 4z) = -1$$

$$\left(x^2 + 3x\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 + y^2 + \left(z^2 - 4z\left(\frac{-4}{2}\right)\right)^2 = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = -1 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{21}{4}$$

Dari bentuk di atas, diperoleh $x_0 = -\frac{3}{2}, y_0 = 0, z_0 = 2$, dan $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Jadi bola mempunyai pusat $\left(-\frac{3}{2}, 0,2\right)$ dan radius $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Contoh 4:

Carilah jarak antara titik $P(2, -3,4)$ dan titik $Q(-3,2, -5)$

Penyelesaian:

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3 - 2)^2 + (2 - (-3))^2 + (-5 - 4)^2}$$

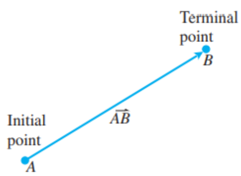
$$= \sqrt{25 + 25 + 81}$$

$$= \sqrt{131}$$

$$\approx 11{,}45$$

5.3 Vektor

a. Bentuk Komponen



Gambar 66 Ruang garis berarah

Kuantitas seperti gaya atau kecepatan disebut dengan vektor dan dinyatakan dengan ruas garis berarah. Mata panah menunjukkan arah vektor dan panjangnya memberikan magnitudo vektor dalam satuan yang dipilih. Vektor biasanya ditulis dengan huruf kecil yang dicetak tebal atau huruf yang diberikan gambar panah diatasnya.

DEFINISI. Vektor yang digambarkan oleh garis berarah $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ mempuyai titik pangkal A dan titik ujung B dan panjangnya dinotasikan dengan $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$. Dua vektor dikatakan sama jika panjang dan arahnya sama,

Panah yang digunakan untuk menggambarkan vektor merepresentasikan vektor yang sama jika menunjukkan arah yang sama tanpa menghiraukan titik pangkalnya.

DEFINISI. Jika v adalah vektor berdimensi dua di bidang yang sama dengan vektor yang mempunyai titik pangkal di titik ujung $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$, maka bentuk komponen dari v adalah

$$\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$$

Jika v adalah vektor berdimensi tiga di bidang yang sama dengan vektir yang mempunyai titik pangkal di titik asal dan titik ujung $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$, maka bentuk komponen dari v adalah

$$\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$$

Magnitudo atau panjang vektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ adalah panjang dari sembarang representasi ruas garis berarah yang sama dengan vektor tersebut. Jika $\mathrm{v} = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1)$ adalah vektor posisi standar untuk $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, maka rumus jarak memberikan panjang dari v yang dilambangkan dengan $|\mathrm{v}|$ atau $||\mathrm{v}||$.

Magnitudo atau panjang vektor $\mathrm{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ adalah bilangan tak-negatif

$$|\mathrm{v}| = \sqrt{\mathrm{v}_1{}^2 + \mathrm{v}_2{}^2 + \mathrm{v}_3{}^2} = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2 + (\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1)^2}$$

Satu-satunya vektor yang mempunyai panjang 0 adalah vektor nol $0 = (0,0)$ atau $0 = (0,0,0)$. Vektor ini juga satu-satunya vektor yang tidak mempunyai arah tertentu.

Contoh 5:

Carilah (a) bentuk komponen dan (b) panjang vektor dengan titik pangkat $\mathrm{P}(-3,4,1)$ dan titik ujung $\mathrm{Q}(-5,2,2)$

Penyelesaian:

(a) Vektor posisi standar v yang merepresentasikan $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ mempunyai komponen

$\mathrm{v}_1 = \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1 = -5 - (-3) = -2$

$\mathrm{v}_2 = \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1 = 2 - 4 = -2$

$v_3 = z_2 - z_1 = 2 - 1 = 1$

Bentuk komponen $\overrightarrow{PQ}$ adalah $v = (-2, -2, 1)$

(b) Panjang atau besar dari $v = \overrightarrow{PQ}$ adalah

$|v| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$

$|v| = \sqrt{4 + 4 + 1}$

$|v| = \sqrt{9}$

$|v| = 3$

b. Operasi Aljabar Vektor

Dua operasi dasar yang melibatkan vektor adalah penjumlahan vektror dan perkalian skalar. Skalar merupakan bilangan riil yang dapat bernilai positif, negatif, atau angka nol dan dapat digunakan untuk menskalakan vektor dengan perkalian.

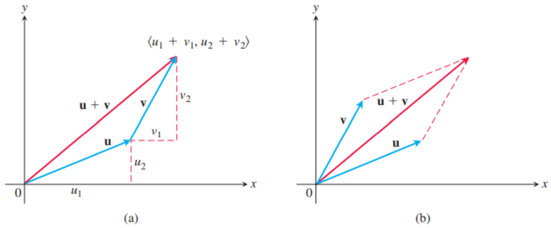
DEFINISI: Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor, dan k adalah skalar.

Penjumlahan: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

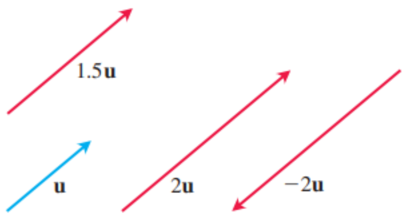
Perkalian dengan scalar: $ku = (ku_1, ku_2, ku_3)$

Menjumlahkan vektor-vektor dilakukan dengan cara menjumlahkan komponen-komponen yang bersesuaian dari vektor tersebut. Untuk mengalikan vektor dengan skalar dilakukan dengan mengalikan masing-masing komponen vektor dengan skalar.

Definisi dari penjumlahan vektor diilustrasikan secara geometris untuk vektor di bidang dalam gambar 7a, dengan titik pangkal dari salah satu vektor yang diletakkan pada titik ujung vektor lainnya. Intepretasi yang lain dalam gambar 7b yang disebut dengan hukum jajaran genjang penjumlahan dengan hasil penjumlahannya yang disebut dengan vektor resultan yang berupa diagonal dari jajaran genjang.



Gambar 67 Interpretasi geometris dan Hukum jajargenjang



Gambar 68 Perkalian skalar u

Pada gambar 8 merupakan interpretasi geometris hasilkali ku dari skalar k dan vektor u. Jika $k > 0$, maka ku searah dengan u; sedangkan jika $k < 0$, maka ku berlawanan dengan arah u. Dengan demikian, panjang u dan ku yaitu

$$|ku| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + (ku_3)^2}$$

$$= \sqrt{k^2({u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2)}$$

$$= \sqrt{k^2}\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

$$= |k||u|$$

Panjang ku adalah nilai mutlak dari skalar k dikalikan dengan panjang u vektor $(-1)u = -u$ mempunyai panjang yang sama dengan u tetapi mempunyai arah yang berlawanan. Selisih $u - v$ dari dua vektor u dan v didefinisikan dengan

$$u - v = u + (-v)$$

Jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$, maka

$$u - v = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

Contoh 6:

Misalkan $u = (-1,3,1)$ dan $v = (4,7,0)$. Carilah komponen dari

(a) $2u + 3v$

(b) $u - v$

Penyelesaian:

(a) $2u + 3v = 2(-1,3,1) + 3(4,7,0)$
$= (-2,6,2) + (12,21,0)$
$= (10,27,2)$

(b) $u - v = (-1,3,1) - (4,7,0)$
$= (-1 - 4, 3 - 7, 1 - 0)$
$= (-5, -4, 1)$

c. Properti-properti Operasi Vektor.

Misalkan u, v, w adalah vektor dan a, b adalah skalar

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $u + 0 = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $0u = 0$
6. $1u = u$
7. $a(bu) = (a)u$
8. $a(u + v) = au + av$
9. $(a + b)u = au + bu$

d. Vektor Satuan

Vektor v yang mempunyai panjang i disebut dengan vektor satuan. Vektor satuan standar adalah

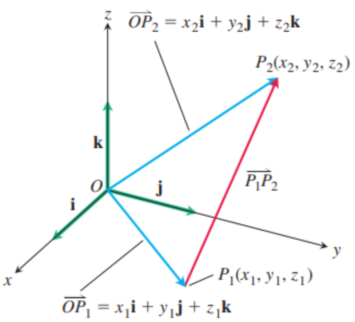
$$\mathrm{i} = (1,0,0), \mathrm{j} = (0,1,0), \mathrm{k} = (0,0,1)$$

Sembarang vektor $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vector satuan standar, yaitu

$$\begin{aligned} \mathrm{v} &= (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3) \\ &= (\mathrm{v}_1, 0,0) + (0, \mathrm{v}_2, 0) + (0,0, \mathrm{v}_3) \\ &= \mathrm{v}_1(1,0,0) + \mathrm{v}_2(0,1,0) + \mathrm{v}_3(0,0,1) \\ &= \mathrm{v}_1\mathrm{i} + \mathrm{v}_2\mathrm{j} + \mathrm{v}_3\mathrm{k} \end{aligned}$$

Dalam bentuk komponen, vektor dari

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)\mathrm{i} + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)\mathrm{j} + (\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1)\mathrm{k}$$



Gambar 69 Vektor dari dua garis

Apabila $\mathrm{v} \neq 0$, maka panjang $|\mathrm{v}|$ tidak nol dan

$$\left|\frac{1}{|v|}v\right| = \frac{1}{|v|}|v| = 1$$

Ini berarti bahwa $\frac{v}{|v|}$ adalah vektor satuan dalam arah v, yang disebut dengan arah dari vektor tak nol.

Contoh 7:

Carilah vektor satuan u dalam arah vektor dari $P_1(1,0,1)$ ke $P_2(3,2,0)$

Penyelesaian: Kita membagi $\overrightarrow{P_1P_2}$ dengan panjangnya, yaitu

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3-1)i + (2-0)j + (0-1)k$$

$$= 2i + 2j - k$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

$$u = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|}$$

$$= \frac{2i+2j-k}{3}$$

$$= \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$$

Vektor satuan u dalam arah $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Secara ringkas, kita dapat menyatakan sembarang vektor tak nol dalam dua fitur yaitu panjang dan arah, dengan menuliskan $|v|\frac{v}{|v|}$.

Contoh 8:

Gaya sebesar 6 Newton dikenakan dalam arah vektor $v = 2i + 2j - k$. Nyatakan gaya F sebagai hasil kali dan besar arah vektor.

Penyelesaian: Vektor gaya memiliki besar 6 dan arah $\frac{v}{|v|}$ sehingga

$$F = 6\frac{v}{|v|}$$

$$= 6\frac{2i+2j-k}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

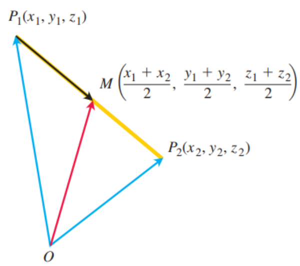
$$= 6\frac{2i+2j-k}{3}$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k\right)$$

e. Titik Tengah dari Ruas Garis

Titik tengah M dari ruas garis yang menghubungkan titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah titik

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



Gambar 70 Koordinat titik tengah

Bukti:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$$

$$= \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Contoh 9:

Titik tengah dari ruas garis yang menghubungkan $P_1(3, -2,0)$ dan $P_2(7,4,4)$ adalah

Penyelesaian:

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3 + 7}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{0 + 4}{2}\right)$$

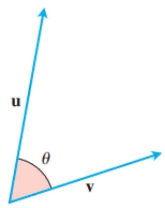
$$= (5,1,2)$$

5.4 Hasil Kali Titik

(H, Karso) Perkalian diantara dua vektor tidak seperti perkalian diantara dua bilangan real. Perkalian diantara dua bilangan real hasil kalinya adalah sebuah bilangan real lagi. Namun hasil kali dua vektor belum tentu demikian.

a. Sudut di Antara Vektor

Ketika titik pangkal dua vektor tak-nol u dan v diletakkan berimpitan, maka kedua vektor tersebut membentuk sudut θ, dengan $0 \leq \theta \leq \pi$ (Gambar 11).



Gambar 71 Sudut antara u dan v

TEOREMA 1. Sudut di antara dua vektor

Sudut θ di antara dua vektor tak-nol $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ diberikan oleh

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|u||v|}\right)$$

DEFINISI. Hasil kali titik $u \cdot v$ ("u titik v") dari vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah scalar

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Contoh 10:

Kita mengilustrasikan definisi

(a) $(1, -2, -1) \cdot (-6, 2, -3) = (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3)$

$= -6 - 4 + 3$

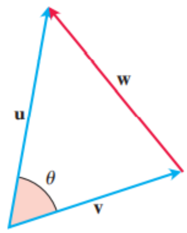
$= -7$

(b) $\left(\frac{1}{2}i + 3j + k\right) \cdot (41 - j + 2k) = \frac{1}{2}(4) + 3(-1) + 1(2)$

$= 2 - 3 + 2$

$$= 1$$

Bukti Teorema 1 Dengan menerapkan hukum cosinus untuk segitiga



Gambar 72 Hukum jajargenjang

Dari gambar 72, diperoleh

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

$$2|u||v|\cos\theta = |u|^2 + |v|^2 - |w|^2$$

Karena $w = u - v$, bentuk komponen dari w adalah $u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3$. Jadi

$$|u|^2 = \left(\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}\right) = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2$$

$$|v|^2 = \left(\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}\right) = {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2$$

$$|w|^2 = \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}\right)$$

$$= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$

$$= {u_1}^2 - 2u_1v_1 + {v_1}^2 + {u_2}^2 - 2u_2v_2 + {v_2}^2 + {u_3}^2 - 2u_3v_3 + {v_3}^2$$

dan,

$$|u|^2 + |v|^2 - |w|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

Maka,

$$2|u||v|\cos\theta = |u|^2 + |v|^2 - |w|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

$$|u||v|\cos\theta = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|u||v|}$$

Karena $0 \leq \theta \leq \pi$, sehingga di peroleh

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|u||v|}\right)$$

Sudut di Antara Dua Vektor Tak-Nol u dan v adalah

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{|u||v|}\right)$$

Contoh 11:

Carilah sudut di antara $u = i - 2j - 2k$ dan $v = 6i + 3j + 2k$

Penyelesaian:

$$u \cdot v = (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2)$$

$$= 6 - 6 - 4$$

$$= -4$$

$$|u| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

$$|v| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$= 7$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{|u||v|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right) \approx 1{,}76 \text{ radian atau } 100{,}98°$$

b. Vektor Ortogonal

Dua vektor tak-nol u dan v ortogonal (saling tegak lurus) jika sudut di antara kedua vektor adalah $\frac{\pi}{2}$. Vektor yang demikian memenuhi $u \cdot v = 0$ karena $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

DEFINISI. Vektor u dan v ortogonal jika $u \cdot v = 0$

Contoh 12:

Untuk mengetahui bahwa dua vektor ortogonal, hitunglah hasilkali titiknya.

(a) $u = (3, -2)$ dan $v = (4,6)$ ortogonal karena
$u \cdot v = (3)(4) + (-2)(6) = 12 - 12 = 0$

(b) $u = 3i - 2j + k$ dan $v = 2j + 4k$ ortogonal karena
$u \cdot v = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = -4 + 4 = 0$

(c) Vektor 0 ortogonal terhadap setiap vektor u karena

$$\begin{aligned} 0 \cdot u &= (0,0,0) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\ &= (0)u_1 + (0)u_2 + (0)u_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c. Properti-properti Hasilkali Titik dan Proyeksi Vektor

Hasil kali titik memenuhi kebanyakan hukum hasilkali biasa untuk bilangan riil (skalar)

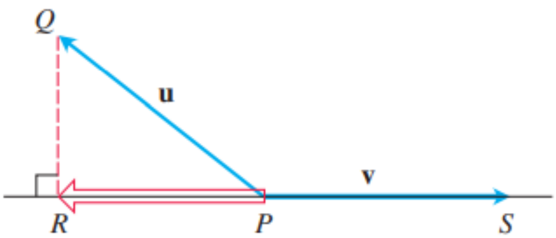
Properti-Properti Hasilkali Titik

Jika u, v dan w menyatakan vektor dan c menyatakan skalar, maka

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$
3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
4. $u \cdot u = |u|^2$
5. $0 \cdot v = 0$

Proyeksi Vektor

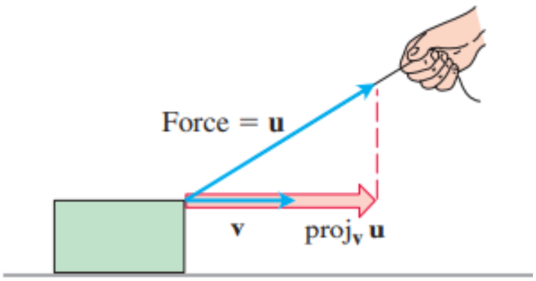
Proyeksi vektor $u = \overrightarrow{PQ}$ pada vektor tak-nol $v = \overrightarrow{PS}$ adalah vektor $\overrightarrow{PR}$ yang diperoleh dengan cara mengambil garos tegak lurus dari Q ke PS.



Gambar 73 Proyeksi Vektor

Notasi untuk proyeksi vektor adalah $\text{proj}_v u$ (“Proyeksi vektor u pada v”).

Jika u menyatakan gaya, maka $\text{proj}_v u$ menyatakan gaya efektif dalam arah v



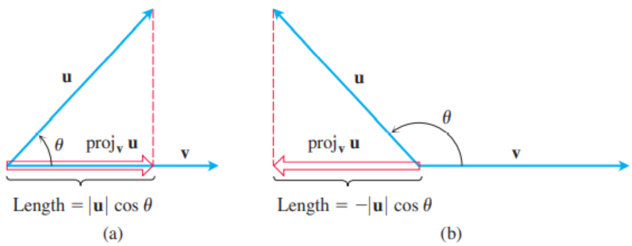
Gambar 74 Gaya efektif

Jika sudut θ yang terletak di antara u dan v merupakan sudut lancip, maka $\text{proj}_\text{v}\text{u}$ mempunyai panjang $|\text{u}|\cos\theta$ dari arah $\frac{\text{v}}{|\text{v}|}$. Jika θ sudut tumpul, maka $\cos\theta < 0$ dan $\text{proj}_\text{v}\text{u}$ mempunyai panjang $-|\text{u}|\cos\theta$ dan arah $-\frac{\text{v}}{|\text{v}|}$.

$$\text{proj}_\text{v}\text{u} = (|\text{u}|\cos\theta)\frac{\text{v}}{|\text{v}|}$$

$$= \left(\frac{\text{u}\cdot\text{v}}{|\text{v}|}\right)\frac{\text{v}}{|\text{v}|}$$

$$= \left(\frac{\text{u}\cdot\text{v}}{|\text{v}|^2}\right)\text{v}$$



Gambar 75 Panjang Proyeksi

Proyeksi vektor u pada v adalah vektor

$$\text{proj}_\text{v}\text{u} = \left(\frac{\text{u}\cdot\text{v}}{|\text{v}|^2}\right)\text{v}$$

Komponen skalar u dalam arah v adalah skalar

$$|\text{u}|\cos\theta = \left(\frac{\text{u}\cdot\text{v}}{|\text{v}|}\right) = \text{u}\cdot\frac{\text{v}}{|\text{v}|}$$

Contoh 13:

Carilah proyeksi vektor $\text{u} = 61 + 3\text{j} + 2\text{k}$ pada $\text{v} = \text{i} - 2\text{j} - 2\text{k}$ pada komponen skalar dari u dalam arah v.

Penyelesaian:

$$\text{proj}_{v}u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{6-6-4}{1+4+4}(i - 2j - 2k)$$

$$= -\frac{4}{9}(i - 2j - 2k)$$

$$= (-\frac{4}{9}i + \frac{8}{9}j + \frac{8}{9}k).$$

$$|u|\cos\theta = u \cdot \frac{v}{|v|} = 61 + 3j + 2k \cdot \left(\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k\right)$$

$$= 2 - 2 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

d. Usaha

DEFINISI. Usaha yang dilakukan oleh gaya konstan F yang bekerja untuk memindahkan benda sejauh $D = \overrightarrow{PQ}$ adalah

$$W = F \cdot D$$

Contoh 14:

Jika $|F| = 40$ N, $|D| = 3\text{m}$, dan $\theta = 60°$, maka usaha yang dilakukan oleh gaya F yang bekerja dari P ke Q adalah

Penyelesaian:

Usaha $= F \cdot D$

$$= |F||D| \cos\theta$$

$$= (40)(3) \cos 60°$$

$$= 120\left(\frac{1}{2}\right) = 60 \text{ J (Joule)}$$

Contoh 15:

Gaya $F = 8i + 5j$ dalam newton menggerakkan sebuah benda mulai dari $(1,0)$ke $(7,1)$, dengan jarak di ukur dalam meter. Berapakah usaha yang dilakukan

Penyelesaian:

Misalkan D adalah vektor mulai dari $(1,0)$ke $(7,1)$; yakni misalkan $D = 6i + j$, maka

$$
\begin{aligned}
\text{Usaha} &= F \cdot D \\
&= (8)(6) + (5)(1) \\
&= 53 \text{ Newton} - \text{meter} \\
&= 53 \text{ Joule}
\end{aligned}
$$

5.5 Hasil kali Silang

a. Hasil kali Silang Dua Vektor dalam Ruang

DEFINISI. Hasilkali Silang u x v ("u cross v") adalah vektor

$$u \times v = (|u||v| \sin\theta)n$$

Hasilkali silang disebut dengan hasilkali vektor u dan v, dan hanya berlaku di ruang vektor. Vektor u x v orthogonal terhadap u maupun v karena hasilkali silang merupakan kelipatan skalar dari n.

b. **Vektor Sejajar**

Vektor tak-nol u dan v sejajar jika dan hanya jika $u \times v = 0$

c. Properti-properti Hasilkali Silang

Jika u, v dan w adalah vektor sedangkan r dan s adalah skalar, maka

1. $(\mathrm{ru}) \times (\mathrm{sv}) = (\mathrm{rs})(\mathrm{u} \times \mathrm{v})$
2. $\mathrm{u} \times (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = \mathrm{u} \times \mathrm{v} + \mathrm{u} \times \mathrm{w}$
3. $\mathrm{v} \times \mathrm{u} = -(\mathrm{u} \times \mathrm{v})$
4. $(\mathrm{v} + \mathrm{w}) \times \mathrm{u} = \mathrm{v} \times \mathrm{u} + \mathrm{w} \times \mathrm{u}$
5. $0 \times \mathrm{u} = 0$
6. $\mathrm{u} \times (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = (\mathrm{u} \cdot \mathrm{w})\mathrm{v} - (\mathrm{u} \cdot \mathrm{v})\mathrm{w}$

d. $|\mathrm{u} \times \mathrm{v}|$ adalah Luas Jajaran Genjang

Karena n adalah vektor satuan, maka besar dari u x v adalah

$$|\mathrm{u} \times \mathrm{v}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}||\sin\theta||\mathrm{n}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}|\sin\theta$$

Rumus diatas menyatakan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh u dan v, dengan $|\mathrm{u}|$ adalah alas dari jajaran genjang dan $|\mathrm{v}||\sin\theta|$ adalah tinggi jajaran genjang.

e. Perhitungan Hasilkali Silang Menggunakan Determinan

Jika $\mathrm{u} = \mathrm{u}_1\mathrm{i} + \mathrm{u}_2\mathrm{j} + \mathrm{u}_3\mathrm{k}$ dan $\mathrm{v} = \mathrm{v}_1\mathrm{i} + \mathrm{v}_2\mathrm{j} + \mathrm{v}_3\mathrm{k}$, maka

$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3 \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \end{vmatrix}$$

Contoh 16:

Carilah u x v dan v x u jika $\mathrm{u} = 2\mathrm{i} \mp \mathrm{j} + \mathrm{k}$ dan $\mathrm{v} = -4\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + \mathrm{k}$

Penyelesaian:

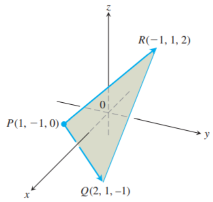
$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathrm{k}$$

$$= -2\mathrm{i} - 6\mathrm{j} + 10\mathrm{k}$$

$$\mathrm{v} \times \mathrm{u} = -(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = 2\mathrm{i} + 6\mathrm{k} - 10\mathrm{k}$$

Contoh 17:

Carilah vektor yang tegak lurus dengan bidang $P(1,-1,0), Q(2,1,-1)$ dan $R(-1,1,2)$



Gambar 76 Vektor tegak lurus

Penyelesaian:

$$\overrightarrow{PQ} = (2-1)\mathrm{i} + (1+1)\mathrm{j} + (-1-0)\mathrm{k} = \mathrm{i} + 2\mathrm{j} - \mathrm{k}$$

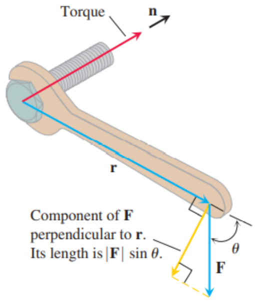
$$\overrightarrow{PR} = (-1-1)\mathrm{i} + (1+1)\mathrm{j} + (2-0)\mathrm{k} = -1\mathrm{i} + 2\mathrm{j} + 2\mathrm{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathrm{k}$$

$$= 6\mathrm{i} + 6\mathrm{k}$$

f. Torque

Ketika memutar baut menggunakan gaya F pada kunci pas (Gambar 17), menghasilkan torque yang mengakibatkan baut berputar.



Gambar 77 Vektor Torque

Vektor torque menunjukkan arah dari sumbu baut menurut aturan tangan kanan. Besar dari torque tergantung pada seberapa jauh gaya dokenakan pada kunci pas dan seberapa besar gaya tersebut tegak lurus pada kunci pas tempat gaya tersebut dikenakan. Bilangan yang digunakan untuk mengukur torque adalah panjang dan lengan pengungkit r dan komposnen skalar dari F yang tegak lurus pada r.

Besar dari vektor torque $= |\mathrm{r}||\mathrm{F}|\sin\theta$, atau $|\mathrm{r} \times \mathrm{F}|$. Misalkan n adalah vektor satuan sepanjang sumbu buat dalam arah torque, maka deskripsi lengkap dari vektor torque adalah r x F, atau vektor torque $= (|\mathrm{r}||\mathrm{F}|\sin\theta)\mathrm{n}$.

Contoh 18:

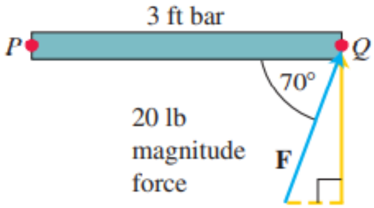
Besar dari torque yang diakibatkan oleh gaya F pada titik poros F dalam (Gambar 77) adalah

Penyelesaian:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \mathrm{F}\right| = |\mathrm{PQ}||\mathrm{F}|\sin 70°$$

$$\approx (3)(20)(0{,}94)$$

$$\approx 56{,}4 \text{ ft} - \text{Ib}$$



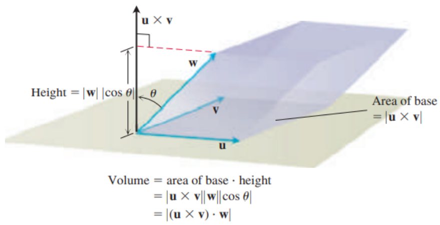
Gambar 78 Besar Torque

g. Tripel Skalar atau Hasilkali Kotak

Hasilkali (u x v) · w disebut hasilkali tripel skalar dari u, v, dan w, dengan demikian

$$|(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) \cdot \mathrm{w}| = |\mathrm{u} \times \mathrm{v}||\mathrm{w}||\cos\theta|.$$

Nilai mutlak dari hasilkali ini adalah volume dan paralelepipedum yang dibentuk oleh u, v, dan w.



Gambar 79 Volume Parallelepipedium

Hasilkali tripel skalar dapat dihitung sebagai determinan

$$(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) \cdot \mathrm{w} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathrm{k}\right] \cdot \mathrm{w}$$

$$= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Contoh 19:

Carilah volume kotak (paraleleipedum) yang dibentuk oleh $u = i + 2j - k, v = -2i + k,$ dan $w = 7j - 4k$.

Penyelesaian:

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -23$$

Volume paralelepipedum adalah $|(u \times v) \cdot w| = 23$ satuan kubik

4 Rangkuman

1) Jarak di antara Titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2) Titik $P(x, y, z)$ persis terletak di bola dengan radius a dan pusat (x_0, y_0, z_0) apabila $|P_0P| = a$ atau

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

3) Magnitudo atau panjang vektor $v = \overrightarrow{PQ}$ adalah bilangan tak-negatif

$$|v| = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

4) Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor, dan k adalah skalar.

   Penjumlahan: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

   Perkalian dengan scalar: $ku = (ku_1, ku_2, ku_3)$

5) Misalkan u, v, w adalah vektor dan a, b adalah skalar

   a. $u + v = v + u$

b. $(u+v)+w=u+(v+w)$

c. $u+0=u$

d. $u+(-u)=0$

e. $0u=0$

f. $1u=u$

g. $a(bu)=(a)u$

h. $a(u+v)=au+av$

i. $(a+b)u=au+bu$

6) Apabila $v \neq 0$, maka panjang $|v|$ tidak nol dan

$$\left|\frac{1}{|v|}v\right|=\frac{1}{|v|}|v|=1$$

Ini berarti bahwa $\frac{v}{|v|}$ adalah vektor satuan dalam arah v, yang disebut dengan arah dari vektor tak nol.

7) Hasil kali titik $u \cdot v$ ("u titik v") dari vektor $u=(u_1,u_2,u_3)$ dan $v=(v_1,v_2,v_3)$ adalah scalar

$$u \cdot v = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

8) Sudut di Antara Dua Vektor Tak-Nol u dan v adalah

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{|u||v|}\right)$$

9) Dua vektor tak-nol u dan v ortogonal (saling tegak lurus) jika sudut di antara kedua vektor adalah $\frac{\pi}{2}$. Vektor yang demikian memenuhi $u \cdot v = 0$ karena $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

10) Jika sudut θ yang terletak di antara u dan v merupakan sudut lancip, maka $\mathrm{proj}_v u$ mempunyai panjang $|u|\cos\theta$ dari arah $\frac{v}{|v|}$. Jika θ sudut tumpul, maka $\cos\theta<0$ dan $\mathrm{proj}_v u$ mempunyai panjang $-|u|\cos\theta$ dan arah $-\frac{v}{|v|}$.

$$\mathrm{proj}_v u=(|u|\cos\theta)\frac{v}{|v|}$$

$$= \left(\frac{u \cdot v}{|v|}\right)\frac{v}{|v|}$$

$$= \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v$$

11) Jika u, v dan w adalah vektor sedangkan r dan s adalah skalar, maka

a. $(ru) \text{ x } (sv) = (rs)(u \text{ x } v)$

b. $u \text{ x } (v + w) = u \text{ x } v + u \text{ x } w$

c. $v \text{ x } u = -(u \text{ x } v)$

d. $(v + w) \text{ x } u = v \text{ x } u + w \text{ x } u$

e. $0 \text{ x } u = 0$

f. $u \text{ x } (v \text{ x } w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$

5 Latihan

1. Berikan deskripsi geometri dari himpunan titik dalam ruang yang koordinatnya memenuhi persamaan berikut

   a. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0$

   b. $x = 1, y = 0$

2. Deskripsikan himpunan titik dalam ruang yang koordinatnya memenuhi pertidaksamaan atau kombinasi persamaan dan pertidaksamaan berikut

   1) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

   2) $z = y^3, x = 2$

3. Carilah jarak antara titik P_1 dan P_2 dari $P_1(1,1,1)$, $P_2(3,3,0)$
4. Carilah jarak antara titik P_1 dan P_2 dari $P_1(0,0,0)$, $P_2(2,-2,-2)$
5. Carilah pusat dan radius bola $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$
6. Carilah pusat dan radius bola $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z + 3)^2 = 25$

6 Evaluasi Pembelajaran

1. Carilah rumus untuk jarak dari titik $P(x, y, z)$ ke
   a. $\text{Sumbu} - x$
   b. $\text{Sumbu} - y$
   c. $\text{Sumbu} - z$
2. Misalkan $u = (3,2)$ dan $v = (-2,5)$, carilah bentuk komponen dan besar (panjang) vektor berikut
   a. $3u$
   b. $u + v$
3. Carilah bentuk komponen vektor $\overrightarrow{PQ}$ dengan $P = (1,3)$dan $Q = (2, -1)$
4. Nyatakan masing-masing vektor dalam bentuk $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$
   a. $\overrightarrow{P_1P_2}$ jika P_1 adalah titik $(1,2,0)$ dan P_2 adalah titik $(2,9,-2)$
   b. $5u - v$ jika $u = (1,1,-1)$ dan $v = (2,0,3)$
5. Carilah arah $\overrightarrow{P_1P_2}$ dan titik tengah ruas garis P_1P_2 dari $P_1(1,4,5), P_s(4,-2,7)$
6. Misalkan $u = 2i + j, v = i + j, \text{dan } w = i = j$. Carilah skalar $a \text{ dan } b$ sedemikian sehingga $u = av + bw$.
7. Misalkan $v = 5j - 3k, u = i + j + k$, carilah
   a. $v \cdot u$
   b. $|v|$
   c. $|u|$
   d. Cosinus dari sudut di antara v dan u
   e. Komponen skalar dari u dalam arah v
   f. Vektor $\text{Proj}_v u$
8. Carilah besarnya sudut-sudut segitiga yang mempunyai titik sudut $A = (-1,0), B = (2,1), \text{dan } C = (1,-2)$.
9. Gaya $F = 2i + j - 3k$ dikenakan pada pesawat ruang angkasa dengan vektor kecepatan $v = 3i - j$. Nyatakan F sebagai jumlah dari vektor yang sejajar dengan v dan orthogonal terhadap v.

10. Carilah usaha yang dilakukan oleh gaya $F = 5i$ dengan besar 5 Newton pada benda yang bergerak sepanjang garis dari titik asal ke titik $(1,1)$ (dengan jarak diukur dalam meter).

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 10 : Menguasai konsep garis dan bidang ruang, silinder dan permukaan kuadratik

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

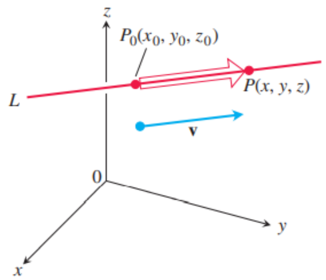
Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan garis dan bidang ruang, silinder dan permukaan kuadratik. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan garis dan bidang ruang, silinder dan permukaan kuadratik. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

5.7 Garis dan Bidang di Ruang

Di bidang, garis ditentukan oleh titik dan bilangan yang menyatakan kemiringan garis. Di ruang, garis ditentukan oleh titik dan vektor yang menyatakan arah garis. Misalakn L adalah garis di bidang yang melalui titik $P_0(x_0, y_{0,} z_0)$ dan sejajar vektor $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$, maka L adalah himpunan titik $P(x, y, z)$ dengan $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar v.



Gambar 80 Titik pada garis

Jadi $\overrightarrow{P_0P} = tv$ untuk suatu parameter skalar t. Nilai t tergantung pada lokasi titik P di sepanjang garis, dan daerah asal t adalah $(-\infty, \infty)$. Bentuk persamaan $\overrightarrow{P_0P} = tv$ yang diekspansi adalah

$$(x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k = t(v_1i + v_2j + v_3k)$$

$$xi + yj + zk = x_0i + y_0j + z_0k = t(v_1i + v_2j + v_3k)$$

a. Persamaan vektor untuk Garis

Persamaan vektor untuk garis L yang melalui $P_0(x_0, y_{0,}z_0)$ dan sejajar vektor v adalah $v(t) = v_0 + tv,\ -\infty < t < \infty$, dengan r adalah vektor posisi dari titik $P(x, y, z)$ pada t dan x_0 adalah vektor posisi $P_0(x_0, y_{0,}z_0)$.

b. Persamaan Parametrik untuk Garis

Parameterisasi standar untuk garis yang melalui $P_0(x_0, y_{0,}z_0)$ dan sejajar $v = v_1i{+}v_2j + v_3k$ adalah $x = x_0 + tv_1, y = y_0 + tv_2, z = z_0 + tv_3,\ -\infty < t < \infty$.

Contoh 20:

Carilah persamaan parametrik untuk garis yang melalui $(-2,0,4)$ dan sejajar $v = 2i + 4j - 2k$

Penyelesaian:

Dengan $P_0(x_0, y_{0,} z_0)$ sama dengan $(-2,0,4)$ dan $v_1 i + v_2 j + v_3 k$ sama dengan $2i + 4j - 2k$, maka

$x = x_0 + tv_1, y = y_0 + tv_2, z = z_0 + tv_3$

$x = -2 + 2t, y = 4t, z = 4 - 2t$

Contoh 21:

Carilah persamaan parametrik untuk garis yang melalui $(3,-2,4)$ dan $(5,6,-2)$

Penyelesaian:

Vektor yang sejajar terhadap garis yang diberikan adalah

$v = (5 - 3, 6 + 2, -2 - 4) = (2,8,-6)$

Jika kita pilih $(x_0, y_{0,} z_0)$ sebagai $(3,-2,4)$, kita peroleh persamaan parameter

$$x = 3 + 2t, y = -2 + 8t, z = 4 - 6t$$

Contoh 22:

Sebuah helikopter terbang secara langsung dari helipad di titik asal ke arah titik $(1,1,1)$ dengan laju $60 \frac{ft}{s}$. Dimana posisi helicopter setelah 10 detik?

Penyelesaian:

Anggap titik asal sebagai posisi awal dari helikopter. Kemudian vektor satuan

$u = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k$, memberikan arah terbang helikopter. Maka posisi helkopter pada saat t adalah

$$r(t) = r_0 + rv$$

$$= r_0 + t|v|\frac{v}{|v|}$$

$$= r_0 + t(\text{laju})u$$

$$= 0 + t(60)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$

$$= 20\sqrt{3}t(i + j + k)$$

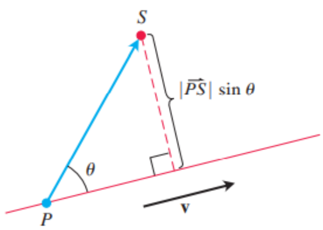
Ketika t = 10 detik, maka

$$r_{10} = 200\sqrt{3}(i + j + k)$$

$$= (200\sqrt{3}i + 200\sqrt{3}j + 200\sqrt{3}k)$$

Setelah 10 detik terbang dari titik asal ke arah $(1,1,1)$, helikopter berada di titik $(200\sqrt{3}i + 200\sqrt{3}j + 200\sqrt{3}k)$ dalam ruang. Helikopter menempuh jarak $60\frac{ft}{s}(10s) = 600ft$, yang merupakan panjang vektor r(10).

c. Jarak dari Titik Garis ke Ruang



Gambar 81 Titik garis ke ruang

Dari konsep gambar di atas, nilai mutlak komponen skalar adalah $|\overrightarrow{PS}|\sin\theta$, yaitu $\frac{|\overrightarrow{PS} \times v|}{|v|}$.

Contoh 23:

Carilah jarak dari titik $S(1,1,5)$ ke garis L: $x = 1 + t, y = 3 - t, z = 2t$

Penyelesaian:

Dari persamaan L, di dapat titik $P(1,3,0)$ sejajar $v = i - j + k$. Dengan

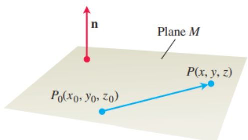
$\overrightarrow{PS} = (1-1)i + (1-3)j + (5-0)k = -2j + 5k$, dan

$$\overrightarrow{PS} \text{ x } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i + 5j + 2k$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PS} \text{ x } v|}{|v|} = \frac{\sqrt{1+25+4}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

d. Persamaan untuk Bidang di Ruang

Bidang di ruang ditentukan untuk mengetahui titik pada bidang di kemiringan atau orientasinya. Kemiringan ini didefinisikan dengan menentukan vektor yang tegak lurus atau normal terhadap bidang.



Gambar 82 Bidang di ruang

Misalkan bidang M melalui ttik $P_0(x_0, y_{0,} z_0)$ dan normal terhadap vektor tak-nol $n = Ai + Bj + Ck$. Jadi M adalah himpunan semua titik $P(x, y, z)$ yang orthogonal pada n (Gambar 22).

e. Persamaan untuk Bidang

Bidang yang melalui $P_0(x_0, y_{0,} z_0)$ normal terhadap $n = Ai + Bj + Ck$ mempunyai

Persamaan Vektor:

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Persamaan Komponen:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Persamaan Komponen yang disederhanakan :

$$Ax + By + Cz = D, \text{dimana } D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Contoh 24:

Carilah persamaan bidang yang melalui $P_0(-3,0,7)$ dan tegak lurus terhadap $n = 5i + 2j - k$

Penyelesaian: Persamaan komponen adalah

$$5\big(x - (-3)\big) + 2(y - o) + (-1)(z - 7) = 0$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$5x + 15 + 2y - z + 7 = 0$

$$5x + 2y - z = -22$$

Komponen $n = 5i + 2j - k$ menjadi koefisien x, y, z pada persamaan $5x + 2y - z = -22$. Vektor $n = Ai + Bj + Ck$ normal terhadap bidang $Ax + By + Cz = D$.

Contoh 25:

Carilah sudut di antara bidang $3x - 6y - 2z = 15$ dan bidang $2x + y - 2z = 5$

Penyelesaian: Vektor

$n_1 = 3i - 6j - 2k, n_2 = 2i + j - 2k,$ merupakan normal-normal dari bidang. Sudut di antara normal-normal tersebut adalah

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}\right)$$

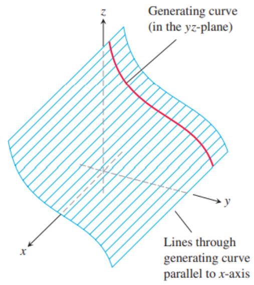
$$= \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

$$\approx 1{,}38 \text{ radian}$$

5.8 Silinder dan Permukaan Kuadrik

a. Silinder

Silinder adalah permukaan yang diperoleh dengan cara menggerakkan sebuat garis lurus sepanjang kurva planar yang diberikan dengan tetap mempertahankan garis tersebut sejajar terhadap suatu garis tetap yang diberikan. Kurva tersebut dinamakan kurva pembentuk untuk silinder.

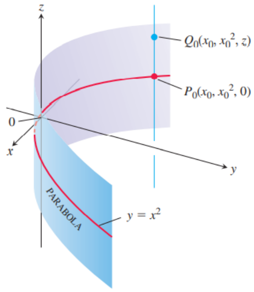


Gambar 83 Silinder dan kurva pembentuk

Dalam ilmu ukur ruang, yang mengartikan silinder sebagai silinder lingkaran (silinder sirkular), yang menjadi kurva pembentuk adalah lingkaran.

Contoh 26:

Carilah persamaan silinder yang dibentuk oleh garis yang sejajar sumbu−z yang melalui parabola $y = x^2, z = 0$.



Gambar 84 Titik dari silinder

Penyelesaian:

Titik $P_0(x_0, x_0{}^2, 0)$ terletak pada $y = x^2$ di bidang−xy. Oleh karena itu, untuk sembarang nilai z, titik $Q(x_0, x_0{}^2, z)$ terletak pada silinder karena titik tersebut terletak pada garis $x = x_0, y = x_0{}^2$ yang sejajar dengan sumbu−z. Sebaliknya, sembarang titik $Q(x_0, x_0{}^2, z)$ yang koordinat−y-nya adalah kuadrat dari koordinat−x-nya terletak pada silinder karena ia terletak pada garis $x = x_0, y = x_0{}^2$ melalui P_0 dan sejajar dengan sumbu−z (Gambar 24).

Dengan demikian, titik-titik pada permukaan adalah titik-titik koordinatnya melalui persamaan $y = x^2$. Ini mengakibatkan persamaan $y = x^2$ menjadi persamaan untuk silinder. Oleh karena itu, silinder tersebut dinamakan "silinder $y = x^2$"

b. Permukaan Kuadrik

Permukaan kuadrik adalah grafik di ruang dari persamaan berderajat dua dalam x, y, z.

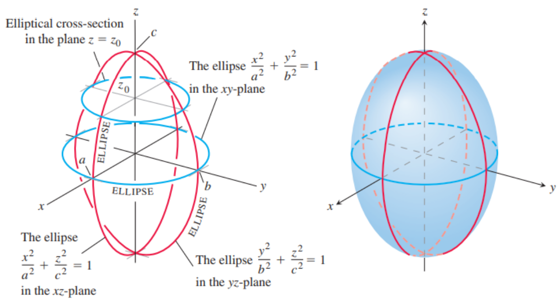
$$Ax^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dz = E,$$

Dengan $A, B, C, D,$ dan E adalah konstanta. Permukaan kuadrik dasar adalah ellipsoid, paraboloid, kerucut eliptik, dan hyperboloid.

Contoh 27: Elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Gambar 25) memotong sumbu koordinat di titik $(\pm a, 0,0), (0, \pm b, 0), (0,0, \pm c)$. Elipsoid terletak dalam kotak persegi panjang yang didefinisikan oleh persaman $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$. Permukaan tersebut simetri terhadap masing-masing bidang koordinat karena masing-masing variabel dalam persamaan tersebut dikuadratkan.



Gambar 85 Elipsoid

Kurva dari perpotongan bidang koordinat debfab oernyjaab verupa elips. Misalnya $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ketika $z = 0$. Kurva yang merupakan gasil perpotongan dengan bidang $z = z_0, |z_0| < c$, berupa elips

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2\right)} = 1$$

Jika dua di antara setengah sumbu a, b, c bernilai sama, maka permukaan tersebut berupa elipsoid perputaran. Jika Ketiga setengah sumbu bernilai sama, maka permukaan tersebut berupa bola.

4. Rangkuman

1) Jadi $\overrightarrow{P_0P} = tv$ untuk suatu parameter skalar t. Nilai t tergantung pada lokasi titik P di sepanjang garis, dan daerah asal t adalah $(-\infty, \infty)$. Bentuk persamaan $\overrightarrow{P_0P} = tv$ yang diekspansi adalah

$$(x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k = t(v_1 i + v_2 j + v_3 k)$$

$$xi + yj + zk = x_0 i + y_0 j + z_0 k = t(v_1 i + v_2 j + v_3 k)$$

2) Parameterisasi standar untuk garis yang melalui $P_0(x_0, y_{0,} z_0)$ dan sejajar $v = v_1 i{+}v_2 j + v_3 k$ adalah $x = x_0 + tv_1, y = y_0 + tv_2, z = z_0 + tv_3$, $-\infty < t < \infty$.
3) Misalkan bidang M melalui ttik $P_0(x_0, y_{0,} z_0)$ dan normal terhadap vektor tak-nol $n = Ai + Bj + Ck$. Jadi M adalah himpunan semua titik $P(x, y, z)$ yang orthogonal pada n
4) Permukaan kuadrik adalah grafik di ruang dari persamaan berderajat dua dalam x, y, z.

$$Ax^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dz = E,$$

Dengan A, B, C, D, dan E adalah konstanta. Permukaan kuadrik dasar adalah ellipsoid, paraboloid, kerucut eliptik, dan hyperboloid.

5. Latihan

1. Carilah panjang dan arah dari u x v dan v x u (apabila terdefinisi)
   a. $u = 2i - 2j - k, v = i - k$
   b. $u = 2i, v = -3j$
2. Misalkan $P(1, -1,2), Q(2,0, -1), R(0,2,1)$, tentukan
   a. Luas segitiga yang mempunyai titik sudut P, Q, dan R
   b. Carilah vektor satuan yang tegak lurus bidang PQR
3. Carilah luas palelepipedum yang titik sudutnya $A(-1,2), B(2,0), C(7,1), D(4,3)$

4. Carilah luas palelepipedum yang titik sudutnya $A(0,0,0), B(3,2,4), C(5,1,4), D(2,-1,0)$
5. Carilah luas segitiga yang titik sudutnya $A(0,0), B(-2,3), C(3,1)$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Carilah persamaan parametrik untuk garis yang melalui $P(1,2,-1)$ dan $(-1,0,1)$
2) Carilah persamaan parametrik untuk garis yang melalui $(0,-7,0)$ dan tegak lurus bidang $x + 2y + 2z = 13$
3) Carilah jarak dari titik ke garis $(0,0,0); x = 5 + 3t; y = 5 + 4t; z = -3 - 5t$
4) Carilah jarak dari titik ke bidang $(2,2,3), 2x + y + 2z = 4$
5) Carilah sudut di antara bidang-bidang $x + y = 1, 2x + y - 2z = 2$
6) Gambarlah permukaan silinder $x^2 + y^2 = 4$
7) Gambarlah permukaan ellipsoid $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$
8) Tunjukkan bahwa volume dari bagian yang merupakan perpotongan dari paraboloid
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$
9) Dengan bidang $z = h$ sama dengan setengah alas dari bagian tersebut dikaitkan dengan tingginya.
10) Gambarlah permukaan paraboloid hiperbolik
$$y^2 - x^2 = z$$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C . PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul lima ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi vektor dan geometri ruang secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Turunan geometri Integral Ruang Dimensi

4. Referensi

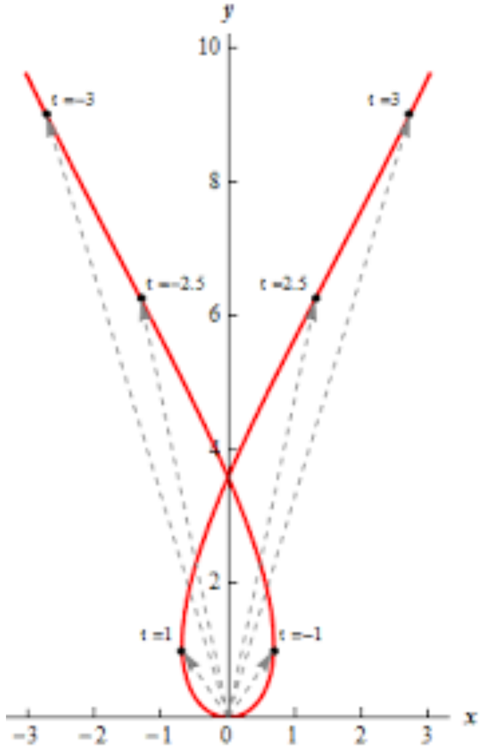
George B.Thomas, J., D.Weir, M., Hass, J., & Heil, C. (2014). *Kalkulus Edisi Ketiga Belas Jilid 2.* Jakarta: Erlangga.

Jr., G. B., Weir, M., & Hass, J. (2014). *Kalkulus Thomas Edisi Ketiga*

Belas Jlid 2. Jakarta: Erlangga.

Varbeg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2008). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2.* Jakarta: Erlangga.

MODUL 6 NILAI FUNGSI VEKTOR DAN PERUBAHANNYA



MODUL 6 FUNGSI BERNILAI VEKTOR DAN GERAK DALAM RUANG

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Modul ini membahas terkait fungsi bernilai vektor dan gerak dalam ruang. Materi yang dijabarkan secara terinci dan bertahap dapat menuntun mahasiswa untuk menguasai materi yang tersedia. Modul ini memuat tentang Kurva dalam ruang dan garis singgungnya, integral fungsi vektor dan gerak proyektil, panjang busur dalam ruang, vektor kelengkungan dan vektor normal kurva, komponen tangensial dan komponen normal dari percepatan, kecepatan dan percepatan dalam koordinat polar. Setiap contoh soal maupun soal yang dapat menjadi alat untuk mahasiswa dapat mengukur kompetensi yang diperoleh setelah mempelajari modul ini.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Enam

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret, integral persamaan differensial.

5. Kegunaan Modul Enam

   Kegunaan enam enam ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan nilai fungsi vektor dan gerak dalam ruang. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai nilai fungsi vektor dan gerak dalam ruang untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Kurva dalam ruang dan garis singgungnya, integral fungsi vektor dan gerak proyektil, panjang busur dalam ruang, vektor kelengkungan dan vektor normal kurva, komponen tangensial dan komponen normal dari percepatan, kecepatan dan percepatan dalam koordinat polar.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 11 : Menguasai konsep Kurva dalam ruang dan garis singgungnya, integral fungsi vektor dan gerak proyektil, panjang busur dalam ruang

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Kurva dalam ruang dan garis singgungnya, integral fungsi vektor dan gerak proyektil, panjang busur dalam ruang. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Kurva dalam ruang dan garis singgungnya, integral fungsi vektor dan gerak proyektil, panjang busur dalam ruang. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

6.1 Kurva dalam Ruang dan Garis Singgungnya

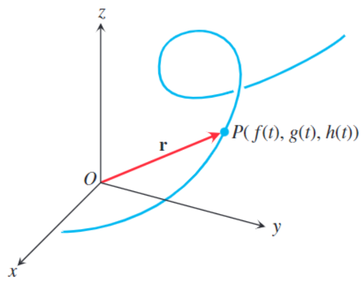
Saat suatu partikel bergerak didalam ruang sepanjang interval waktu I, kita memikirkan koordinat dari partikel tersebut sebagai fungsi yang didefinisikan pada I:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I. \tag{1}$$

Titik-titik $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)), t \in I$ menciptakan kurva didalam ruang yang disebut lintasan partikel. Persamaan dan interval pada persamaan (1) memparameterisasi kurva. Kurva didalam ruang juga dapat digambarkan pada bentuk vektor. Vektor

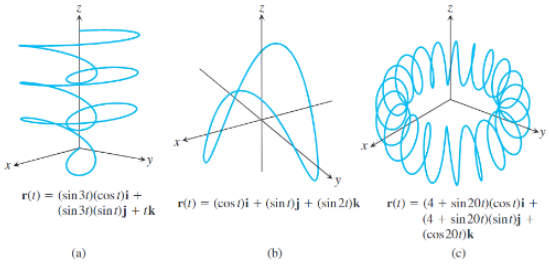
$$r(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)i + g(t)j + h(t)k \tag{2}$$

pada titik asal kepada posisi partikel $P(f(t), g(t), h(t))$ ketika *t* merupakan vektor posisi partikel seperti gambar dibawah ini.



Gambar 86 Vektor posisi

Fungsi *f, g, h* merupakan fungsi komponen (komponen-komponen) dari vektor posisi (Gambar 1). Kita memikirkan lintasan partikel sebagai kurva yang ditelaah *r* sepanjang interval waktu I. Gambar 2 menunjukkan beberapa kurva ruang yang sulit digambar menggunakan tangan.



Gambar 87 Kurva ruang oleh vektor posisi

Persamaan (2) mempresentasikan r sebagai fungsi vektor dari variabel riil t dalam interval I. Pada umumnya, suatu fungsi benilai-vektor atau fungsi vektor didalam himpunan daerah asal D merupakan suatu aturan yang menghubungkan suatu vektor pada ruang ke masing-masing elemen pada D. Dalam materi ini, daerah asal hendak memiliki bentuk interval bilangan riil yang melahirkan suatu kurva ruang.

Fungsi vektor dalam sebuah daerah asal dibidang atau ruang juga hendak melahirkan "medan vektor". Fungsi bernilai riil dinyatakan dengan fungsi skalar agar dapat membedakannya dengan fungsi vektor. Komponen dari r pada persamaan (2) merupakan fungsi skalar dari t. daerah asal dari fungsi bernilai verktor merupakan irisan dari daerah asal komponen-komponennya.

1. Limit dan Kekontinuan

a. Metode dalam mendefinisikan limit untuk fungsi bernilai vektor sama dengan metode mendefinisikan limit untuk fungsi bernilai rill. Misalnya $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ merupakan fungsi vektor dengan daerah asal D, serta L merupakan vektor. Kita menyebutkan bahwa r memiliki limit L untuk t mendekati t_0 dan menulisnya dengan

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = L$$

Apabila untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, ditemukan bilangan yang berpadanan $\delta > 0$ sedemikian mengakibatkan bagi seluruh $t \in D$ berlaku

$$|r(t) - L| < \epsilon \quad \text{jika} \quad 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Apabila $L = L_1 i + L_2 j + L_3 k$, maka mampu dibuktikan bahwa $\lim_{t \to t_0} r(t) = L$ tepatnya saat

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2, \ serta \ \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3.$$

Kita meninggalkan buktinya, persamaan

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right) i + \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right) j + \left(\lim_{t \to t_0} h(t)\right) k$$

Membagikan metode praktis agar dapat mengoperasikan limit dari fungsi vektor.

Contoh 1:

Jika $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$, dengan $t_0 = \frac{\pi}{4}$ maka hitung limitnya!

Pembahasan:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} r(t) = \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \cos t\right) i + \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \sin t\right) j + \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} t\right) k$$

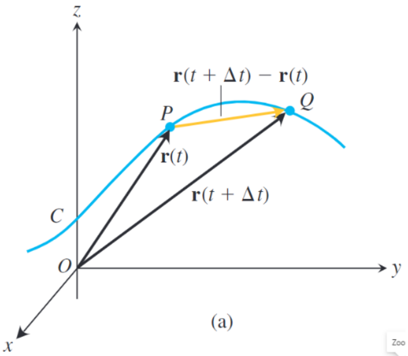
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j + \frac{\pi}{4} k.$$

b. Kekontinuan

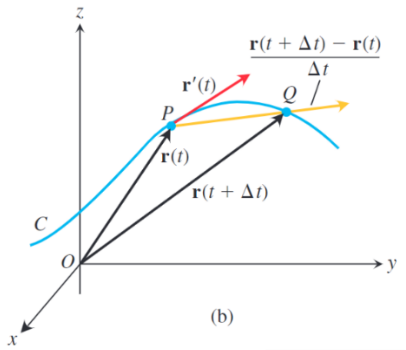
Fungsi vektor *r(t)* kontinu pada titik $t = t_0$ pada daerah asalnya apabila $\lim_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$. Fungsi tersebut kontinu apabila fungsi kontinu di daerah asal intervalnya.

2. Turunan dan Gerak

Turunan adalah fungsi *f* merupakan dungsi lain *f'* yang nilainya pada sebarang nilai *c.* pada bab ini misalkan $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ merupakan vektor posisi dari suatu partikel yang bergerak selama kurva didalam ruang dan misalkan *f, g,* dan *h* merupakan fungsi t yang terdiferensiasikan. Sehingga, perbedaan posisi partikel ketika *t* dan $t + \Delta t$ merupakan $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$



Gambar 88 Posisi Partikel di waktu t



Gambar 89 Titik Q mendekati titik P sepanjang kurva

Dalam bentuk komponen, kita peroleh

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

$$= [f(t + \Delta t)i + g(t + \Delta t)j + h(t + \Delta t)k] - [f(t)i + g(t)j + h(t)k]$$

$$= [f(t + \Delta t - f(t)]i + [g(t + \Delta t - g(t)]j + [h(t + \Delta t - h(t)]k.$$

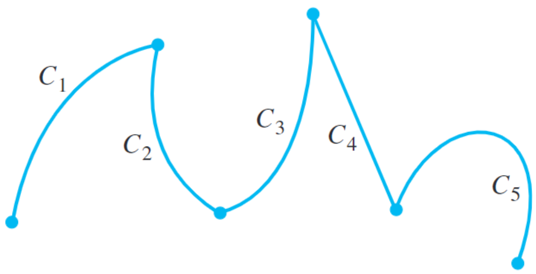
Jika Δt mendekati 0, terdapat tiga hal yang terlihat terjadi berbarengan. Pertama , Q mendekati P sepanjang kurva. Kedua, garis sekan (garis tali busur) PQ terlihat mendekati posisi garis singgung kurva di P. ketiga, hasil bagi $\Delta r/\Delta t$ mendekati limit. Dari penelitian diatas diperoleh definisi turunan yaitu fungsi vektor $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ memiliki turunan di t apabila f, g, dan h memiliki turunan di t. turunan tersebut merupakan fungsi vektor

$$r'(t) = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}i + \frac{dg}{dt}j + \frac{dh}{dt}k.$$

Fungsi vektor r terdiferensiasikan apabila fungsi tersebut terdiferensiasikan disetiap titik pada daerah asalnya. Kurva yang ditelaah oleh r adalah kurva mulus apabila *dr/dt* kontinu dan tidak pernah nol, yakni apabila ***f***, g, dan h memiliki turunan pertama yang kontinu dan tidak bersama-sama bernilai nol. Kata geometris dari definisi diatas diperlihatkan pada gambar diatas. Titik P dan Q memiliki vektor posisi *r(t)* dan $r(t + \Delta t)$, dan vektor $\overrightarrow{PQ}$ digambarkan oleh $r(t + \Delta t) - r(t)$. Bagi $\Delta t > 0$, kelipatan skalar $(1/\Delta t)(r(t + \Delta t) - r(t))$ memiliki arah yang sama dengan arah vektor $\overrightarrow{PQ}$.

Jika $\Delta t \to 0$, maka vektor ini mendekati vektor yang menyinggung kurva di P, seperti pada gambar diatas yang b. vektor *r'(t),* sebaliknya apabila tidak sama dengan 0, dapat didefinisikan sebagai vektor singgung dalam kurva di P. garis singgung dalam kurva dititik $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ diartikan sebagai garis yang melalui titik tersebut dan sejajar dengan $r'(t_0)$.

Kita membutuhkan $dx/dt \neq 0$ bagi kurva mulus guna menegaskan bahwa kurva memiliki garis singgung yang berputar dengan sinambung diseluruh titik, dalam kurva mulus, tidak ada sudut lancip atau *cusps*. Kurva yang berasal dari beberapa potongan kurva mulus yang bersambung-sambung disebut mulus sepanggal (Gambar 5).



Gambar 90 Kurva mulus sesepenggal

Kembali pada gambar diatas, kita menggambar bagi Δt positif oleh karena itu Δr berpindah maju, sesuai arah gerak. Vektor $\Delta r/\Delta t$ memiliki arah seperti arah $\Delta r,$ dan bergerak maju juga. Apabila Δt negatif, oleh karena itu Δr hendak bergerak mundur, sehingga berlawanan dengan arah gerak. Namun, hasil bagi $\Delta r/\Delta t$ adalah kelipatan skalar negatif dari Δr, yang tetap bergerak maju.

Seperti apapun arah gerak $\Delta r,$ $\Delta r/\Delta t$ hendak bergerak maju dan kita berharap vektor $dx/dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta r/\Delta t$, yang bukan 0, juga bergerak maju. Hal ini berarti bahwa turunan *dx/dt*, yang merupakan laju perubahan posisi pada waktu, bergerak maju tepat arah berpindah. Bagi kurva mulus, *dx/dt* tidak akan bernilai 0; partikel tidak berhenti ataupun berbalik arah.

Maka dari itu, jika *r* merupakan vektor posisi dari partikel yang bergerak sepanjang kurva mulus pada ruang, sehingga

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

merupakan vektor kecepatan partikel, yang menyinggung kurva. Dalam sembarang waktu *t*, arah *v* merupakan arah gerak, besarnya *v* merupakan laju partikel, serta turunan *a* = *dv/dt*, apabila ada, merupakan vektor akselerasi (vektor percepatan) partikel. Dengan ringkas,

1. Kecepatan merupakan turunan dari posisi: $v = \frac{dr}{dt}$,
2. Laju merupakan besarnya kecepatan: Laju = $|v|$,
3. Percepatan merupakan turunan dari kecepatan: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2t}{dt^2}$,
4. Vektor satuan $v/|v|$ merupakan arah gerak ketika *t*.

Contoh 2:

Hitunglah kecepatan, laju, dan percepatan dari suatu partikel yang geraknya pada ruang diberikan oleh vektor posisi $r(t) = 2cos\ t\ i + 2\ sin\ t\ j + 5\ cos^2 t\ k.$

Pembahasan:

Cari kecepatan dan percepatan dalam t yaitu

$$v(t) = r'(t) = -2\ sin\ t\ i + 2\ cos\ t\ j - 10\ cos\ t\ sin\ t\ k$$

$$= -2 \sin t\, i + 2 \cos t\, j - 5 \sin 2t\, k$$

$$a(t) = r''(t) = -2 \cos t\, i - 2 \sin t\, j - 10 \cos 2t\, k$$

kemudian mencari lajunya yaitu

$$|v(t)| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + (-5 \sin 2t)^2} = \sqrt{4 + 25 \sin^2 2t}$$

Kita juga dapat menyebutkan kecepatan dari suatu partikel yang bergerak sebagai hasilkali laju dan arahnya, yakni sebagai berikut.

$$\text{Kecepatan} = |v| \left(\frac{v}{|v|}\right) = (laju)(arah).$$

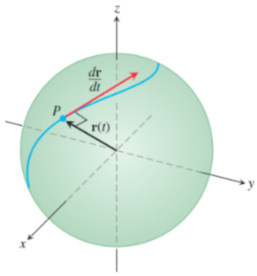
3. Aturan Diferensiasi

Diferensial vektor pada umumnya serupa dengan aturan diferensial fungsi biasa. Karena turunan dari fungsi vektor bisa dihitung komponen-komponennya, sehingga aturan untuk mendiferensiasikan fungsi vektor memiliki bentuk yang serupa dengan aturan bagi diferensi fungsi skalar. Asumsikan *u* dan *v* merupakan fungsi vektor dari *t* yang terdiferensiasikan. *C* merupakan vektor konstanta, *c* meruapak sembarang skalar, serta *f* merupakan sembarang fungsi skalar yang terdiferensiasi.

Aturan Diferensiasi untuk Fungsi Vektor		
1	Aturan fungsi konstan	$\frac{d}{dt} C = 0$
2	Aturan kelipatan skalar	$\frac{d}{dt}[cu(t)] = cu'(t)$ $\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$
3	Aturan jumlah	$\frac{d}{dt}[u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t)$
4	Aturan selisih	$\frac{d}{dt}[u(t) - v(t)] = u'(t) - v'(t)$
5	Aturan hasilkali titik	$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)]$ $= u'(t) \cdot v'(t) + u(t) \cdot v'(t)$

6	Aturan hasilkali silang	$\frac{d}{dt}[u(t)\times v(t)]$ $= u'(t)\times v'(t) + u(t)\times v'(t)$
7	Aturan rantai	$\frac{d}{dt}[u(f(t))] = f'(t)u'(f(t))$

4. Fungsi Vektor dengan Panjang Konstan



Gambar 91 Partikel bergerak pada Bola

Ketika kita mengikuti jejak suatu partikel yang bergerak pada bola yang berpusat di titik asal (Gambar 6), vektor posisi memiliki panjang konstant yang serupa dengan panjang jari-jari bola. Vektor kecepatan *dx/dt*, yang menyinggung lintasan gerak, menyinggung bola serta oleh sebabnya tegak lurus di *r*. Hal tersebut selalu terjadi pada fungsi vektor dengan panjang konstan yang terdiferensiasikan, vektor ini dan turunan pertamanya saling ortogonal. Dengan perhitungan langsung,

$$r(t) \cdot r(t) = c^2$$

$$\frac{d}{dt}[r(t) \cdot r(t)] = 0$$

$$r'(t) \cdot r(t) + r(t) \cdot r'(t) = 0$$

$$2r'(t) \cdot r(t) = 0$$

Vektor *r'(t)* dan *r(t)* ortogonal karena hasilkali titik ini adalah 0, secara sederhana jika *r* merupakan fungsi vektor dari *t* dengan panjang konstan yang terdiferensiasikan, jadi

$$r \cdot \frac{dr}{dt} = 0.$$

6.2 Integral Fungsi Vektor; Gerak Proyektil

1. Integral Fungsi Vektor

Fungsi vektor *R(t)* yang terdiferensiasikan merupakan antiturunan fungsi vektor *r(t)* pada interval *I* apabila *dR/dt* = *r* disetiap titik dalam I. Apabila *R* merupakan antiturunan dari *r* dalam I, sehingga dapat ditampilkan, dengan menemukan antiturunan dari setiap komponen, bahwa masing-masing antiturunan dari *r* pada *I* memiliki bentuk *R* + *C* bagi sebuah vektor kontanta *C*.

Himpunan seluruh antiturunan dari *r* dalam *I* merupakan integral tak-tentu dari *r* dalam I. Integral tak-tentu dari *r* pada *t* merupakan himpunan seluruh antiturunan dari r, yang dilambangkan dengan $\int r(t)$ *dt*. Apabila *R* merupakan antiturunan dari *r*, sehingga

$$\int r(t)\,dt = R(t) + C$$

Contoh 1:

Apabila ingin mengintegrasikan fungsi vektor, kita mengintegrasikan masing-masing komponen

$$\int ((cos\ t)i + j - 2tk)\,dt = \left(\int cos\ t\ dt\right)i + \left(\int dt\right)j - \left(\int 2t\ dt\right)k$$

$$= (sin\ t + C_1)i + (t + C_2)j - (t^2 + C_3)k$$

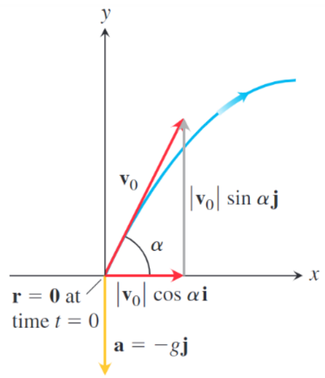
$$= (sin\ t)i + tj - t^2k + C \qquad C = C_1 i + C_2 j - C_3 k$$

Integral tentu dari fungsi vektor paling baik didefinisikan didalam komponen. Jika komponen dari *r(t)* = *f(t)I* + *g(t)j* + *h(t)k* terintegrasikan pada $[a, b]$, sehingga demikian juga dengan *r*, serta integral tentu untuk *r* dari *a* sampai *b* yakni

$$\int_a^b r(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)i + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)j + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)k.$$

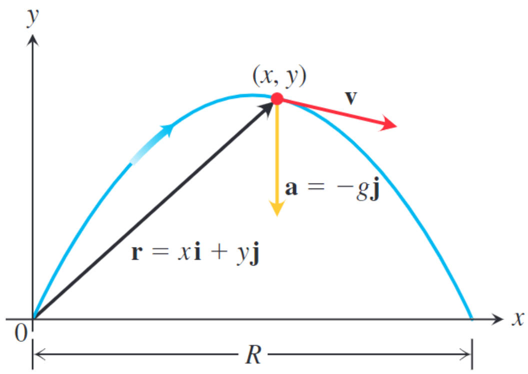
2. Persamaan Vektor dan Persamaan Parametrik untuk Gerak Proyektil Ideal

Contoh klasik dari integrasi fungsi vektor merupakan penurunan dari persamaan gerak proyektil. Dalam contoh klasik, kita mengabaikan efek gesekan pada objek, yang kemungkinan bervariasi pada laju dan ketinggian proyektil dan juga mengabaikan efek jarak jauh dari bumi yang berputar dibawah proyektil. Untuk memperoleh persamaan gerak proyektil, kita asumsikan bahwa proyektil berperilaku seperti suatu partikel yang bergerak dalam bidang koordinat vertikal dan gaya yang bekerja pada proyektil sepanjang proyektil tersebut terbang merupakan gaya gravitasi konstan, yang selalu mengarah lurus ke bawah.



Gambar 92 Posisi, kecepatan dan percepatan

Kita asumsikan bahwa proyektil ditembakkan dari titik asal pada saat $t = 0$ ke kuadran pertama dengan kecepatan awal v_0 (Gambar 7).



Gambar 93 Posisi, kecepatan dan percepatan setelah waktu t

Jika v_0 membentuk sudut α terhadap horizontal, maka

$$v_0 = (|v_0| cos\ \alpha)i + (|v_0| sin\ \alpha)j$$

Apabila kita menggunakan notasi v_0 yang lebih sederhana untuk laju awal $|v_0|$, sehingga posisi awal proyektil merupakan

$$v_0 = (v_0 cos \propto)i + (v_0 sin \propto)j \quad (3)$$

Posisi awal proyektil merupakan

$$r_0 = 0i + 0j = 0 \quad (4)$$

Hukum Newton kedua berbunyi: "*Percepatan suatu benda berbanding lurus dengan gaya total yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massanya. Arah percepatan sama dengan arah gaya total yang bekerja padanya*". Hukum Newton kedua untuk gerak mengatakan bahwa gaya yang bekerja pada proyektil sama dengan massa proyektil *m* dikalikan dengan percepatannya, atau $m(d^2r/dt^2)$ apabila *r* merupakan vektor posisi proyektil dan *t* merupakan waktu. Apabila gaya yang bekerja hanyalah gaya gravitasi $-mgj$, sehingga

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -mgj \quad dan \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -gj,$$

Dengan g merupakan percepatan yang diakibatkan oleh gravitasi. Kita mencari *r* sebagai fungsi *t* melalui cara menyelesaikan masalah nilai awal berikut.

Persamaan diferensial: $\frac{d^2r}{dt^2} = -gj$

Syarat awal: $r = r_0$ dan $\frac{dr}{dt} = v_0$ ketika t = 0.

Integrasi pertama memberikan

$$\frac{dr}{dt} = -(gt)j + v_0$$

Integrasi kedua memberikan

$$r = -\frac{1}{2}gt^2j + v_0t + r_0.$$

Substitusi nilai v_0 dan r_0 dari persamaan (3) dan (4) memberikan

$$r = -\frac{1}{2}gt^2j + (v_0\ cos\ \alpha)ti + (v_0\ sin\ \alpha)tj + 0$$

Dengan mengumpulkan suku-sukunya, kita mendapatkan persamaan gerak proyektil Ideal, yakni:

$$r = -(v_0\ cos\ \alpha)ti + \left((v_0\ sin\ \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)j \qquad (5)$$

Persamaan (5) adalah persamaan vektor dari lintasan gerak proyektil ideal. Sudut α adalah sudut luncur proyektil (sudut tembak, sudut elevasi), dan v_0 seperti yang dikatakan sebelumnya, adalah kecepatan awal proyektil. Komponen dari *r* memberikan persamaan parametrik

$$x = (v_0\ cos\ \alpha)t \quad dan \quad y = (v_0\ sin\ \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2, \qquad (6)$$

Dengan *x* adalah jarak *downrange* (jarak horizontal) dan *y* adalah tinggi provektil pada saat $t \geq 0$.

Contoh 2:

Sebuah proyektil ditembakkan dari titik asal di atas tanah horizontal dengan laju awal 500 *m/s* dan sudut luncur *60*°. Di mana posisi proyektil 10 detik kemudian?

Pembahasan:

Kita menggunakan Persamaan (5) dengan v_0 = 500, *a* = *60*°, *g* = 9,8, dan t = 10 untuk mencari komponen proyektil 10 detik setelah ditembakkan.

$$r = (v_0\ cos\ \alpha)ti + \left((v_0\ sin\ \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)j$$

$$= (500)\left(\frac{1}{2}\right)(10)i + \left((500)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10 - \left(\frac{1}{2}\right)(9 \cdot 8)(100)\right)j$$

$$\approx 2500i + 3840j$$

Sepuluh detik setelah ditembakkan, proyektil kira-kira 3840 *m* di atas tanah dan 2500 *m* downrange (jarak horizontal) dari titik asal. Proyektil ideal bergerak sepanjang parabola, seperti yang sekarang kita simpulkan dari Persamaan (6). Jika kita mensubstitusikan *t* = *x/(*v_0*, cos α)* dari persamaan pertama ke persamaan kcdua, kita memperoleh persamaan koordinat Cartesius

$$y = -\left(\frac{g}{2{v_0}^2 cos\ \alpha}\right)x^2 + (tan\ \alpha)x.$$

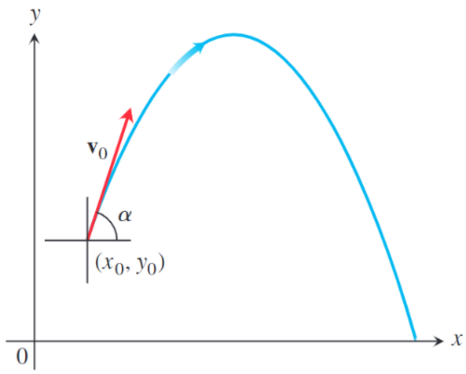
Persamaan tersebut mempunyai bentuk *y* = ax^2 + *bx* sehingga grafiknya berupa parabola. Proyektil mencapai titik tertinggi ketika komponen kecepatan vertikalnya bernilai nol. Ketika ditembakkan pada tanah horizontal, proyektil mendarat saat komponen vertikal pada Persamaan (5) bernilai nol, dan jangkauan R adalah jarak dari titik asal ke *Impact point* (titik henti atau titik tumbukan).

Tinggi, Waktu Melayang, dan Jangkauan untuk Gerak Proyektil Ideal, Untuk gerak proyektil ideal ketika sebuah objek diluncurkan dari titik asal pada permukaan horizontal dengan laju awal v_0 dan sudut luncur α:

$$Tinggi\ maksimum\colon\quad y_{maks} = \frac{(v_0\ sin\ \alpha)^2}{2g}$$

$$Waktu\ melayang\colon\quad t = \frac{2v_0\ sin\ \alpha}{g}$$

$$Jangkauan\colon\ R = \frac{{v_0}^2}{g} sin\ 2\alpha$$



Gambar 94 Lintasan Proyektil

Apabila kita menembakkan proyektil ideal dari titik (x_0, y_0) alih-alih titik asal (Gambar 9), maka vektor posisi untuk lintasan gerak adalah

$$r = (x_0(v_0 \cos \alpha)t)i + \left(y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)j \qquad (7)$$

3. Gerak Proyektil yang Dipengaruhi Tiupan Angin

Contoh berikut ini menunjukkan cara untuk menyertakan gaya lain yang bekerja pada proyektil, akibat adanya tiupan angin. Kita juga mengasumsikan bahwa lintasan bisbol dalam Contoh dibawah ini terletak pada sebuah bidang vertikal.

Contoh 3:

Sebuah bola bisbol dipukul ketika bola tersebut berada pada ketinggian 3 *ft* di atas tanah. Bola ini meninggalkan tongkat pemukul dengan laju awal 152 *ft/s*, dan membentuk sudut *20*° terhadap horizontal. Seketika setelah bola dipukul, angin bertiup dari arah horizontal tepat berlawanan dengan arah bola sehingga bola melambung menuju *outfield* (daerah luar), menambah komponen sebesar −8,8i (*ft/s*) pada keccpatan awal bola (8,8 *ft/s* = 6 mph).

a) Carilah persamaan vektor (vektor posisi) untuk lintasan bola bisbol.

b) Seberapa tinggi bola bisbol tersebut dapat melambung, dan kapan bola tersebut mencapai ketinggian maksimum?

c) Dengan mengasumsikan bahwa bola tersebut tidak ditangkap, carilah jangkauan dan waktu melayang bola.

Pembahasan:

a) Dengan menggunakan persamaan (3) dan memperhitungkan tiupan angin. kecepatan awal dari bola bisbol adalah

$$v_0 = (v_0 cos \propto)i + (v_0 sin \propto)j - 8{,}8i$$
$$= (152\ cos\ 20°)i + (152\ sin\ 20°)j - (8{,}8)i$$
$$= (152\ cos\ 20° - 8{,}8)i + (152\ sin\ 20°)j$$

Posisi awal adalah r_0 = *0i* + *3j*. Integrasi dari d^2r/dt^2 memberikan

$$\frac{dr}{dt} = -(gt)j + v_0.$$

Integrasi kedua memberikan

$$r = -\frac{1}{2}gt^2j + v_0t + r_0$$

Substitusi nilai v_0 dan r_0 ke persamaan terakhir memberikan vektor posisi bola bisbol

$$r = -\frac{1}{2}gt^2j + v_0t + r_0$$
$$= -16t^2j + (152\ cos\ 20° - 8{,}8)ti + (152\ sin\ 20°)tj + 3j$$
$$= (152\ cos\ 20° - 8{,}8)i + (3 + (152\ sin\ 20°)t - 16t^2j$$

b) Bola bisbol mencapai titik tertinggi ketika komponen vertikal dari kecepatan bernilai nol, atau

$$\frac{dy}{dt} = 152\ sin\ 20° - 32t = 0$$

Dengan memecahkan untuk *t*, kita memperoleh

$$t = \frac{152\ sin\ 20°}{32} \approx 1{,}62\ detik$$

Mensubstitusikan waktu ini kepada komponen vertikal untuk *r* memberikan tinggi maksimum

$$y_{maks} = 3 + (152 \, sin \, 20°)(1{,}62) - 16(16{,}2)^2$$
$$\approx 45{,}2 \, ft$$

Jadi, tinggi maksimum bola bisbol sekitar detik setelah bola meninggalkan tongkat pemukulnya.

c) Untuk mengetahui kapan bola bisbol mendarat, kita menetapkan bahwa komponen vertikal untuk *r* bernilai *O* dan memecahkan untuk *t*:

$$3 + (152 \, sin \, 20°)t - 16t^2 = 0$$
$$3 + (51{,}99)t - 16t^2 = 0$$

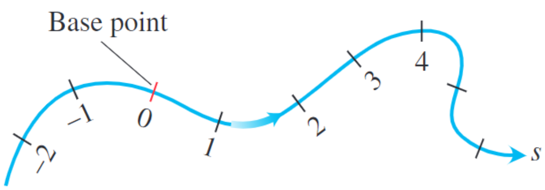
Hasilnya kira-kira *r* = 3,3 detik dan *t* = −0,06 detik. Jika waktu yang bernilai positif disubstitusikan ke komponen horizontal untuk *r*, maka kita mendapatkan jangkauan sebesar

$$R = (152 \, cos \, 20° - 8{,}8)(3{,}3)$$
$$\approx 442 \, ft$$

Jadi, jangkauan horizontal kira-kira 442 *ft*. dan waktu melayang kira-kira 3,3 detik.

6.3 Panjang Busur dalam Ruang

1. Panjang Busur Sepanjang Sebuah Kurva Ruang



Gambar 95 Kurva mulus diskalakan

Salah satu dari fitur kurva mulus di bidang dan ruang adalah panjang kurva tersebut dapat diukur. Ini memungkinkan kita untuk menempatkan titik-titik sepanjang kurva tersebut dengan memberikan jarak berarahnya *s* sepanjang kurva dari suatu titik dasar, seperti kita menempatkan titik-titik pada sumbu koordinat dengan memberikan jarak berarahnya dari titik asal (Gambar 10).

Hal inilah yang kita lakukan untuk kurva bidang dalam pembahasannya sebelumnya. Untuk mengukur jarak sepanjang sebuah kurva dalam ruang, kita menambahkan suku-z pada rumus yang kita gunakan untuk kurva dalam bidang. Panjang sebuah kurva mulus *r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,* $a \leq t \leq b$, yang dilalui satu kali seiring dengan pertambahan *t* dari *t = a* ke *t = b*, adalah

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (1)$$

Seperti halnya untuk kurva bidang, kita dapat menghitung panjang suatu kurva dalam ruang, dari sembarang parameterisasi yang mudah dan memenuhi syarat yang diberikan. Kita meninggalkan buktinya.

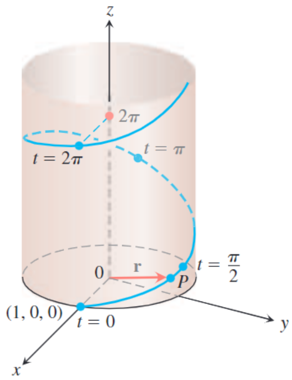
Akar kuadrat dalam Persamaan (1) adalah $|v|$, yaitu panjang vektor kecepatan *dr/dt*. Ini memungkinkan. kita untuk menulis rumus panjang kurva dengan cara yang lebih pendek, yakni rumus panjang busur

$$L = \int_a^b |v|\, dt \qquad (2)$$

Contoh 1:

Sebuah gantole membubung ke atas sepanjang heliks *r(t) = (cos t)i* + *(sin t)j* + *tk*. Berapa panjang lintasan gantole dari *t = 0* ke *t = 2π*?

Pembahasan:



Gambar 96 Heliks

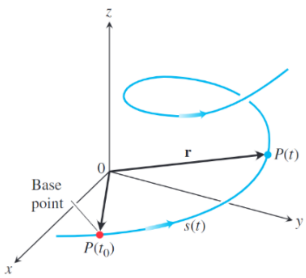
Segmen lintasan selama periode waktu tersebut berpadanan dengan satu kali putaran dari heliks (Gambar 11). Panjang dari bagian kurva tersebut adalah,

$$L = \int_a^b |v|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-sin\ t)^2 + (cos\ t)^2 + (1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}\ satuan\ panjang.$$

Panjang ini adalah $\sqrt{2}$ kali keliling lingkaran dalam bidang-*xy* di mana heliks terletak. Jika kita memilih titik dasar *P*(t_0) pada kurva mulus *C* yang diparameterisasi oleh *t*, maka setiap nilai *t* menentukan sebuah titik *P(t)* = *(x(t), y(t), z(t))* pada *C* dan "jarak berarah"

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)|\, d\tau,$$



Gambar 97 Jarak berarah sepanjang kurva

yang diukur sepanjang *C* dari titik dasar (Gambar 12). Ini adalah fungsi panjang busur yang kita definisikan dalam bab sebelumnya untuk kurva bidang yang tidak mempunyai komponen-*z*. Jika $t > t_0$, maka *s(t)* adalah jarak sepanjang kurva dari titik $P(t_0)$ ke *P(t)*. Jika $t < t_0$, maka *s(t)* adalah negatif dari jarak tersebut. Masing-masing nilai *s* menentukan sebuah titik di *C*, dan ini memparameterisasi *C* terhadap *s*.

Kita meyebut *s* sebagai parameter panjang busur untuk kurva. Nilai parameter ini meningkat seiring peningkatan nilai *t*. Kita akan melihat bahwa parameter panjang busur ini khususnya efektif untuk menyelidiki sifat putaran dan puntiran dari sebuah kurva ruang. Sehingga didapat Parameter Panjang busur dengan Titik Dasar P(t_0) adalah

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)|\, d\tau \qquad (3)$$

Kita menggunakan huruf Yunani τ ("tau") sebagai variabel integrasi dalam Persamaan (3) karena huruf *t* telah digunakan sebagai batas atas integrasi. Jika sebuah kurva *r(t)* telah diberikan dengan suatu parameter *t* dan *s(t)* adalah fungsi panjang busur dalam Persamaan (3), maka kita mungkin dapat memecahkan *t* sebagai fungsi *s*: $t = t(s)$.

Kemudian, kurva dapat diperameterisasi dalam s dengan cara mensubstitusikan untuk *t*: $r = r(t(s))$. Parameterisasi yang baru ini mengidentifikasi sebuah titik pada kurva dengan jarak berarahnya sepanjang kurva dari titik dasar.

Contoh 2:

Ini adalah contoh bagi kita untuk dapat benar-benar mencari parameterisasi panjang busur dari sebuah kurva. Jika $t_0 = 0$. maka parameter panjang busur sepanjang heliks

$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$$

dari t_0 ke *t* adalah

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)|\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \sqrt{2}\, d\tau$$

$$= \sqrt{2}\, t.$$

Pemecahan persamaan ini untuk *t* memberikan $t = s/\sqrt{2}$. Substitusi nilai tersebut ke vektor posisi *r* memberikan parameterisasi panjang kurva untuk heliks sebagai berikut:

$$r(t(s)) = \left(cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)i + \left(sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)j + \frac{s}{\sqrt{2}}k.$$

Tidak seperti Contoh diatas, pada umumnya sulit untuk mendapatkan secara analitik parameterisasi panjang busur dari suatu kurva dalam suatu parameter lainnya *t*. Namun, untungnya kita jarang membutuhkan rumus eksak untuk *s(t)* atau inversnya *t(s)*.

2. Laju pada Sebuah Kurva Mulus

Karena turunan di bawah akar dalam Persamaan (3) tersebut kontinu (kurvanya mulus), maka Teorema Dasar Kalkulus mengatakan bahwa *s* adalah fungsi dari *t* yang terdiferensiasikan dengan turunan.

$$\frac{ds}{dt} = |v(t)| \qquad (4)$$

Persamaan (4) mengatakan bahwa laju dari gerak partikel sepanjang lintasannya adalah besarnya *v*, yang konsisten dengan apa yang kita ketahui. Meskipun titik dasar $P(t_0)$ memainkan peranan penting dalam pendefinisian *s* pada Persamaan (3), namun titik ini tidak punya peran pada Persamaan (4).

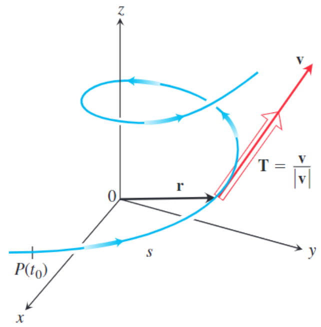
Laju gerak partikel yang melingkupi jarak sepanjang lintasannya tidak bergantung pada jaraknya dari titik dasar. Perhatikan bahwa $ds/dt > 0$

karena, dengan definisi, $|v(t)|$ tidak pernah bernilai nol untuk kurva mulus. Kita melihat sekali lagi bahwa *s* adalah fungsi naik dari *t*.

3. Vektor Singgung Satuan

Kita telah mengetahui bahwa vektor kecepatan $v = dr/dt$ menyinggung kurva *r(t)* dan oleh karenanya vektor

$$T = \frac{v}{|v|}$$



Gambar 98 Vektor singgung satuan T

adalah vektor satuan yang menyinggung kurva (mulus), yang disebut **vektor singgung satuan** (Gambar 13). Vektor singgung satuan *T* adalah fungsi dari *t* yang terdiferensiasikan apabila *v* adalah fungsi dari *t* yang terdiferensiasikan.

Contoh 3:

Carilah vektor singgung satuan dari kurva

$$r(t) = (1 + 3\cos t)i + (3\sin t)j + t^2k$$

yang merepresentasikan lintasan dari gantole dalam Contoh 3, pada Subbab sebelumnya.

Pembahasan:

Dalam contoh tersebut, kita mendapatkan bahwa

$$v = \frac{dr}{dt} = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$$

dan

$$|v| = \sqrt{9 + 4t^2}$$

Jadi,

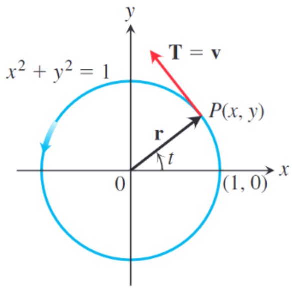
$$T = \frac{v}{|v|} = -\frac{3 \sin t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{3 \cos t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\boldsymbol{j} + \frac{2t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\boldsymbol{k}.$$

untuk gerak yang berlawanan dengan arah jarum jam

$$r(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$$

mengelilingi lingkaran satuan, kita melihat bahwa

$$v = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$$



Gambar 99 Gerak berlawanan arah

adalah vektor satuan sehingga $T = v$ dan T ortogonal pada r (Gambar 14). Vektor kecepatan merupakan perubahan vektor posisi r terhadap waktu t. Karena $ds/dt > 0$ untuk kurva yang kita tinjau, maka s acalah fungsi satu-satu satu dan mempunyai invers t sebagai fungsi dari s. Turunan dari invers tersebut adalah

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|v|}$$

Ini membuat r adalah fungsi dari s yang terdiferensiasikan dan turunannya dapat dihitung dengan Aturan Rantai yang diberikan oleh

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds} = v\frac{1}{|v|} = \frac{v}{|v|} = T$$

Persamaan ini mengatakan bahwa dr/ds merupakan vektor singgung satuan dalam arah vektor kecepatan v (Gambar 13).

4. Rangkuman

1) Apabila untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, ditemukan bilangan yang berpadanan $\delta > 0$ sedemikian mengakibatkan bagi seluruh $t \in D$ berlaku

$$|r(t) - L| < \epsilon \quad \text{jika} \quad 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Apabila $L = L_1 i + L_2 j + L_3 k,$ maka mampu dibuktikan bahwa $\lim_{t \to t_0} r(t) = L$ tepatnya saat

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2, \ \ serta \quad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3.$$

2) Fungsi vektor *r(t)* kontinu pada titik $t = t_0$ pada daerah asalnya apabila $\lim_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$.
3) Kecepatan merupakan turunan dari posisi: $v = \frac{dr}{dt}$,
4) Laju merupakan besarnya kecepatan: Laju = $|v|$,
5) Percepatan merupakan turunan dari kecepatan: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2t}{dt^2}$,
6) Vektor satuan $v/|v|$ merupakan arah gerak ketika *t*.
7) Apabila *R* merupakan antiturunan dari *r*, sehingga

$$\int r(t)\, dt = R(t) + C$$

8) Jika v_0 membentuk sudut α terhadap horizontal, maka

$$v_0 = (|v_0| cos\ \alpha)i + (|v_0| sin\ \alpha)j$$

9) Apabila kita menggunakan notasi v_0 yang lebih sederhana untuk laju awal $|v_0|$, sehingga posisi awal proyektil merupakan

$$v_0 = (v_0 cos \propto)i + (v_0 sin \propto)j$$

Panjang sebuah kurva mulus *r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,* $a \le t \le b,$ yang dilalui satu kali seiring dengan pertambahan *t* dari *t = a* ke *t = b*, adalah

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

5. Latihan

1) Carilah persamaan dalam *x* dan *y* yang grafiknya adalah lintasan partikel tersebut. Kemudian, carilah kecepatan dan percepatan partikel pada nilai *t* yang diberikan.

   a. $r(t) = \frac{t}{t+1}\boldsymbol{i} + \frac{1}{t}\boldsymbol{j}, \quad t = -\frac{1}{2}$

   b. $r(t) = (cos\ 2t)\boldsymbol{i} + 3(sin\ 2t)\boldsymbol{j}, \quad t = 0$

2) Carilah persamaan parametrik untuk garis yang menyinggung kurva yang diberikan di nilai parameter $t = t_0$, yang diberikan.

$$r(t) = t^2\boldsymbol{i} + (2t-1)\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 2$$

3) $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{5-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2t}\boldsymbol{k}\right] dt$

4) Carilah vektor singgung satuan kurva. Carilah juga panjang dari bagian kurva yang ditunjukkan.

   a. $r(t) = (2+t)\boldsymbol{i} - (t+1)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 3$

   b. $r(t) = (2\ cos\ t)\boldsymbol{i} + (2\ sin\ t)\boldsymbol{j} + \sqrt{5}t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

5) Carilah panjang kurva

$$r(t) = (\sqrt{2}t)\boldsymbol{i} + (\sqrt{2}t)\boldsymbol{j} + (1-t^2)\boldsymbol{k}$$

   dari (0, 0, 1) ke $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Carilah vektor kecepatan dan percepatan dari partikel. Kemudian carilah laju dan arah gerak partikel untuk nilai *t* yang diberikan.Tuliskan kecepatan partikel untuk waktu yang diberikan sebagai hasilkali laju dan arah gerak partikel.

   a. $r(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

   b. $r(t) = (2\ cos\ t)\boldsymbol{i} + (3\ sin\ t)\boldsymbol{j}\ + 4t\boldsymbol{k}, \quad t = \pi/2$

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [(\sin t)\boldsymbol{i} + (1 + cost)\boldsymbol{j} + (sec^2 t)\boldsymbol{k}]\ dt$

3. Waktu tempuh Sebuah proyektil ditembakkan dengan laju 840 *m/s* dan sudut 60°. Berapa lama proyektil tersebut akan mencapai jarak horizontal (*downrange*) 21 km?
4. Sebuah partikel yang bergerak pada sebuah garis lurus berada di titik $(1, -1, 2)$ dan mempunyai laju 2 pada saat $t = 0$. Partikel bergerak menuju titik (3, 0, 3) dengan percepatan konstan $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Carilah vektor posisi partikel (3, 0. 3) pada saat t.
5. Carilah panjang bagian kurva yang ditunjukkan.
   a. $r(t) = (1 + 2t)\boldsymbol{i} + (1 + 3t)\boldsymbol{j} + (6 - 6t)\boldsymbol{k}, \quad -1 \leq t \leq 0$
   b. $r(t) = (cos\ t + t\ sin\ t)\boldsymbol{i} + (sin\ t - t\ cos\ t)\boldsymbol{j}, \quad \pi/2 \leq t \leq \pi$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 12 : Menguasai konsep vektor kelengkungan dan vektor normal kurva, komponen tangensial dan komponen normal dari percepatan, kecepatan dan percepatan dalam koordinat polar

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

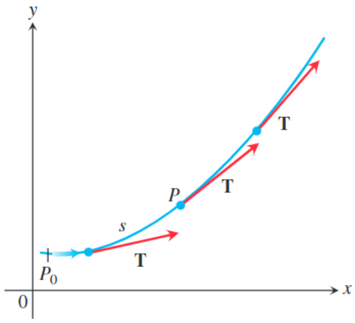
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan vektor kelengkungan dan vektor normal kurva, komponen tangensial dan komponen normal dari percepatan, kecepatan dan percepatan dalam koordinat polar. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan vektor kelengkungan dan vektor normal kurva, komponen tangensial dan komponen normal dari percepatan, kecepatan dan percepatan dalam koordinat polar. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

6.4 Vektor Kelengkungan dan Vektor Normal Kurva

1. Kelengkungan dari Kurva Bidang

Sebuah partikel bergerak sepanjang sebuah kurva mulus dalam bidang, $T = dr/ds$ berputar apabila kurva melengkung. Karena T adalah vektor satuan, maka konstan, dan hanya arahnya yang berubah apabila partikel bergerak kurva.



Gambar 100 P bergerak sepanjang kurva searah

Laju ketika T berputar per satuan panjang sepanjang kurva disebut kelengkungan (Gambar 15). Simbol tradisional untuk fungsi kelengkungan adalah huruf Yunani κ ("kappa"). Apabila T merupakan vektor satuan dari sebuah kurva mulus, fungsi kelengkungan dari kurva tersebut adalah

$$\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right|$$

Jika $|dT/ds|$ besar, maka T berputar dengan sangat tajam ketika partikel melalui P, dan kelengkungan di P juga besar. Jika $|dT/ds|$ mendekati nol, maka T beputar lebih lambat dan kelengkungan di P lebih kecil.

Jika sebuah kurva mulus *r(t)* telah diberikan dalam suatu parameter t alih-alih parameter panjang busur s, maka kita dapat menghitung kelengkungan sebagai

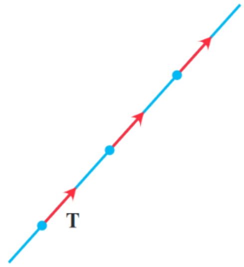
$$\begin{aligned}\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right| &= \left|\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds}\right| && \textit{aturan rantai} \\ &= \frac{1}{|ds/dt|}\left|\frac{dT}{dt}\right| \\ &= \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{dt}\right| && \frac{ds}{dt} = |v|\end{aligned}$$

Sehingga diproleh rumus untuk menghitung Kelengkungan, yaitu apabila *r(t)* merupakan suatu kurva mulus, maka kelengkungan adalah fungsi skalar

$$\kappa = \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{dt}\right| \qquad (1)$$

Dengan $T = v/|v|$ merupakan vektor singgung satuan

Contoh 1:



Gambar 101 T mengarah ke arah yang sama

Sebuah garis lurus diparameterisasi oleh $r(t) = C + tv$ untuk vektor konstanta C dan v. Jadi, $r'(t) = v$, dan vektor singgung vektor konstanta dengan arah yang selalu sama dan mempunyai turunan 0 (Gambar 16). Akibatnya, untuk sembarang nilai parameter t, kelengkungan dari lurus adalah nol:

$$\kappa = \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{dt}\right| = \frac{1}{|v|}|0| = 0$$

Contoh 2:

Di sini kita mencari kelengkungan sebuah lingkaran. Kita mulai dengan parameterisasi

$$r(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j$$

untuk lingkaran berjari-jari a. Jadi,

$$v = \frac{dr}{dt} = -(a \sin t)i + (a \cos t)j$$

$$|v| = \sqrt{(-asint)^2 + (acost)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a.$$

$$karena\ a > 0, |a| = a$$

Dari persamaan ini, kita mendapatkan

$$T = \frac{v}{|v|} = -(\sin t)i + (\cos t)j$$

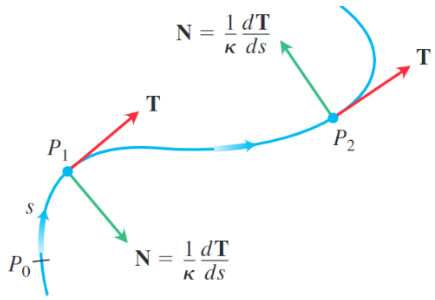
$$\frac{dT}{dt} = -(\cos t)i + (\sin t)j$$

$$\left|\frac{dT}{dt}\right| = \sqrt{cos^2t + sin^2t} = 1$$

Dengan demikian, untuk sembarang nilai parameter *t*, kelengkungan kurva adalah

$$\kappa = \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{dt}\right| = \frac{1}{a}(1) = \frac{1}{a} = \frac{1}{jari - jari}$$

Meskipun rumus untuk menghitung *k* dalam Persamaan (1) selalu valid untuk kurva ruang, dalam subbab berikut kita mencari rumus perhitungan yang biasanya lebih nyaman untuk digunakan.



Gambar 102 Vektor dT/ds normal pada kurva

Di antara vektor-vektor yang ortogonal, vektor singgung satuan *T* adalah salah satu yang signifikan karena vektor tersebut mengarah ke arah kurva berputar. Karena *T* menpunyai panjang konstan (yaitu 1), maka turunan *dT/ds* ortogonal pada *T*.

Oleh karena itu, jika kita membagi *dT/ds* dengan panjangnya, yaitu κ, maka kita mendapatkan vektor satuan *N* yang ortogonal pada *T* terlihat pada gambar diatas. Sehingga diperoleh definisi yaitu, Di titik dengan $\kappa \neq 0$, vektor normal satuan utama untuk kurva mulus di bidang adalah

$$N = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds}$$

Vektor *dT/ds* mengarah ke arah *T* berputar ketika kurva melengkung. Oleh karena itu, jika kita menghadap arah panjang busur yang naik, maka vektor *dT/ds* mengarah ke arah kanan jika *T* berputar searah jarum jam dan ke arah kiri jika *T* berputar berlawanan dengan arah jarum jam.

Dengan kata lain. vektor normal utama *N* akan mengarah ke sisi cekung kurva (Gambar 17). Jika kurva mulus *r(t)* telah diberikan dalam suatu parameter *t* alih-alih parameter panjang busur *s*, maka kita dapat menggunakan Aturan Rantai untuk menghitung *N* secara langsung:

$$N = \frac{dT/ds}{|dT/ds|}$$

$$= \frac{(dT/dt)(dt/ds)}{|dT/dt||dt/ds|}$$

$$= \frac{(dT/dt)}{|dT/dt|}. \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} > 0\ saling\ menghapuskan$$

Rumus ini memungkinkan kita untuk mencari *N* tanpa harus mencari κ dan *s* terlebih dahulu, yaitu jika *r(t)* merupakan suatu kurva mulus, maka normal satuan utama adalah

$$N = \frac{(dT/dt)}{|dT/dt|}$$

Dengan *T* = *v*/$|v|$ adalah vektor singgung satuan.

Contoh 3:

Carilah *T* dan *N* untuk gerak mclingkar

$$r(t) = (cos\ 2t)i + (sin\ 2t)j.$$

Pembahasan:

Pertama, kita mencari *T*:

$$v = -(2sin2t)i + (2cos2t)j$$

$$|v| = \sqrt{4\ sin^2 2t + 4\ cos^2 2t} = 2$$

$$T = \frac{v}{|v|} = -(sin\ 2t)i + (cos\ 2t)j.$$

Dari *T* ini, kita mendapatkan

$$\frac{dT}{dt} = -(2\ cos\ 2t)i - (2\ sin\ 2t)j$$

$$\left|\frac{dT}{dt}\right| = \sqrt{4\,cos^2 2t + 4\,sin^2 2t} = 2$$

Dan

$$N = \frac{(dT/dt)}{|dT/dt|}$$

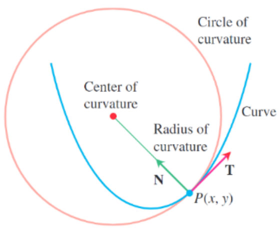
$$= -(cos\ 2t)i + (sin\ 2t)j.$$

Perhatikan bahwa $T \cdot N = 0$. yang membuktikan bahwa N ortogonal pada T. Perhatikan juga bahwa untuk gerak melingkar di sini, N berawal dari $r(t)$ menuju pusat lingkaran di titik asal.

2. Lingkaran Kelengkungan untuk Kurva Bidang

Lingkaran kelengkungan atau lingkaran oskulasi di sebuah titik P pada sebuah kurva bidang dengan $\kappa \neq 0$ adalah lingkaran pada bidang kurva yang

1. menyinggung kurva di P (mempunyai garis singgung yang sama dengan yang dimiliki kurva)
2. mempunyai kelengkungan yang sama dengan kelengkungan kurva di titik P
3. mempunyai pusat yang mengarah ke sisi cekung atau sisi dalam kurva (Gambar 18).



Gambar 103 Pusat lingkaran oskulasi

Jari-jari kelengkungan kurva di P adalah jari-jari lingkaran kelengkungan, yang menurut Contoh 2, adalah

$$Jari - jari\ kelengkungan = \rho = \frac{1}{\kappa}$$

Untuk mencari ρ, kita mencari κ dan mengambil kebalikannya. Pusat kelengkungan kurva di *P* adalah pusat dari lingkaran kelengkungan.

Contoh 4:

Carilah grafik lingkaran oskulasi dari parabola $y = x^2$ di titik asal.

Pembahasan:

Kita memparameterisasi parabola dengan menggunakan parameter $t = x$

$$r(t) = ti + t^2 j$$

Pertama, kita mencari kelengkungan parabola di titik asal, dengan menggunakan Persamaan (1):

$$v = \frac{dr}{dt} = i + 2tj$$

$$|v| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

Sehingga,

$$T = \frac{v}{|v|} = (1 + 4t^2)^{-1/2} i + 2t(1 + 4t^2)^{-1/2} j.$$

Dari persamaan terakhir, kita mendapatkan

$$\frac{dT}{dt} = -4t(1 + 4t^2)^{-3/2} + \left[2(1 + 4t^2)^{-1/2} - 8t^2(1 + 4t^2)^{-3/2}\right] j.$$

Di titik asal, $t = 0$, sehingga kelengkungan adalah

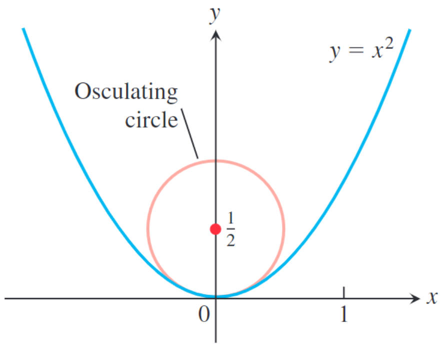
$$\kappa(0) = \frac{1}{|v(0)|} \left|\frac{dT}{dt}(0)\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} |0i + 2j|$$

$$= (1)\sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

Oleh karena itu, jari-jari kelengkungan adalah $1/\kappa = 1/2$. Di titik asal kita mempunyai $t = 0$ dan $T = i$, sehingga $N = j$. Jadi, pusat lingkaran adalah $(0, 1/2)$. Persamaan dari lingkaran oskulasi adalah

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



Gambar 104 Lingkaran oskulasi untuk parabola

Anda dapat melihat dari gambar 19, bahwa lingkaran oskulasi merupakan hampiran yang lebih baik untuk parabola di titik asal daripada hampiran garis singgung $y = 0$.

3. Kelengkungan dan Vektor Normal untuk Kurva Ruang

Jika sebuah kurva mulus ditentukan oleh vektor posisi *r(t)* sebagai fungsi dari suatu parameter *t,* dan jika *s* adalah parameter untuk panjang busur dari kurva. maka vektor singgung satuan *T* adalah $dr/ds = v/|v|$. Kelengkungan dalam ruang kemudian didefinisikan sebagai

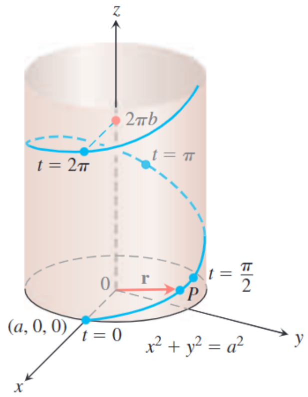
$$\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{dt}\right| \qquad (3)$$

sebagaimana untuk kurva bidang. Vektor *dT/ds* ortogonal terhadap *T*, dan kita mendefinisikan normal satuan utama sebagai

$$N = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{|dT/dt|} \qquad (4)$$

Contoh 5:

Carilah kelengkungan dari heliks (Gambar 20).



Gambar 105 Ruang Heliks

$$r(t) = (a\cos t)i + (a\sin t)j + btk, \quad a, b \geq 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

Pembahasan:

Kita menghitung T dari vektor kecepatan v:

$$v = -(a\sin t)i + (a\cos t)j + bk$$

$$|v| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$T = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[-(a\sin t)i + (a\cos t)j + bk]$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (3),

$$\kappa = \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{|dt|}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left|\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[-(a\cos t)i + (a\sin t)j]\right|$$

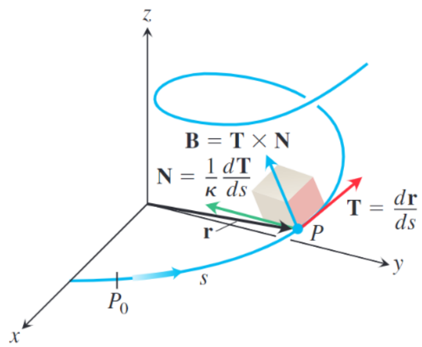
$$= \frac{a}{a^2 + b^2}|-(\cos t)i - (\sin t)j|$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Dari persamaan ini, kita melihat bahwa kenaikan b untuk nilai a yang tetap akan menurunkan kelengkungan. Penurunan a untuk nilai b yang tetap pada akhirnya juga akan menurunkan kelengkungan.

Jika $b = 0$, maka heliks tereduksi menjadi sebuah lingkaran dengan jari-jari a dan kelengkungan tereduksi menjadi $1/a$, seperti seharusnya. Jika $a = 0$, heliks menjadi sumbu-z, dan kelengkungan tereduksi menjadi 0, yang juga seperti seharusnya.

6.5 Komponen Tangensial dan Komponen Normal dari Percepatan

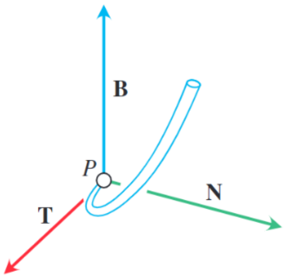


Gambar 106 Kerangka TNB

Jika Anda bergerak sepanjang kurva ruang, maka sistem koordinat **i**, **j**, dan **k** Cartesius untuk merepresentasikan vektor yang menggambarkan gerak Anda tidaklah sepenuhnya relevan dengan Anda. Yang bermakna adalah representasi vektor dari arah maju Anda (vektor singgung satuan **T**), arah ketika lintasan Anda berbelok (vektor normal satuan **N**), dan kecenderungan dari gerak Anda "memuntir" keluar bidang yang dibentuk oleh vektor-vektor terscbut dalam arah yang tegak lurus terhadap bidang ini (didefinisikan oleh vektor binormal satuan $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$).

Menyatakan vektor percepatan sepanjang kurva sebagai kombinasi linear dari kerangka **TNB** dari vektor satuan yang saling ortogonal yang melintas dengan gerakan tersebut (Gambar 21) secara khusus mengungkapkan sifat lintasan dan gerakan sepanjang kurva.

1. Kerangka TNB



Gambar 107 Vektor TNB

Vektor binormal dari kurva dalam ruang adalah $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$, yaitu vektor satuan yang ortogonal baik pada **T** maupun **N** (Gambar 22). Vektor **T**, **N**, dan **B** bersama-sama mendefinisikan kerangka vektor yang bergerak dengan aturan tangan kanan yang memainkan peran penting dalam penghitungan lintasan partikel yang bergerak di ruang.

2. Komponen Tangensial dan Komponen Normal dari Percepatan

Ketika sebuah objek dipercepat oleh gravitasi, rem, atau sebuah kombinasi linear dari motor roket, kita biasanya ingin mengetahui seberapa besar percepatan berperan dalam arah gerak, dalam arah tangensial **T**. Kita dapat menghitung hal ini dengan menggunakan Aturan Rantai untuk menuliskan **v** sebagai

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{T}\frac{ds}{dt}$$

Kemudian, kita mendiferensiasikan ruas paling kiri dan paling kanan dari persamaan tersebut untuk mendapatkan

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{T}\frac{ds}{dt}\right) &= \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)\\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\left(\boldsymbol{\kappa N}\frac{ds}{dt}\right) \qquad \frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \boldsymbol{\kappa N}\end{aligned}$$

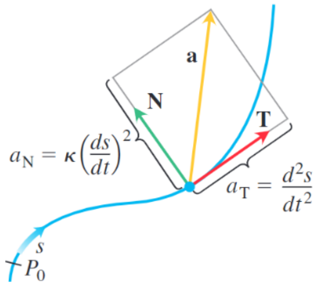
$$= \frac{d^2 s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\kappa}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \boldsymbol{N}.$$

Sehingga diperoleh definisi bahwa jika vektor percepatan ditulis sebagai

$$\mathbf{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}, \tag{1}$$

Maka,

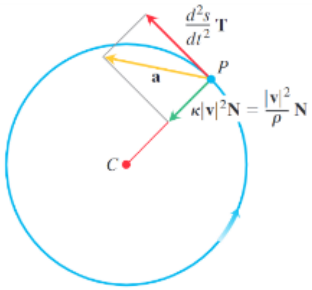
$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|v| \quad dan \quad a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa|v|^2 \tag{2}$$



Gambar 108 Komponen Tangensial dan normal

Perhatikan bahwa vektor binormal **B** tidak tampak dalam Persamaan (1). Seperti apapun lintasan dari objek yang bergerak yang kita amati tampak memuntir atau membelok dalam ruang, percepatan a *selalu terletak di bidang* **T** dan **N** serta ortogonal terhadap **B**.

Persamaan tersebut juga mengatakan secara pasti seberapa besar percepatan yang terjadi menyinggung gerak (d^2s/dr) dan seberapa besar yang normal terhadap gerak $[\kappa(\mathrm{ds/dt})^2]$ (Gambar 23). Komponen tangensial dari percepatan a_T mengukur laju perubahan panjang dari **v** (yaitu, perubahan dalam laju). Komponen normal dari percepatan a_N mengukur laju perubahan arah dari **v**. Perhatikan bahwa komponen skalar normal dari percepatan adalah kelengkungan dikalikan dengan kuadrat dari laju.



Gambar 109 Komponen tangensial dan normal mengelilingi lingkaran

Jika sebuah objek bergerak dalam sebuah lingkaran dengan laju konstan. maka d^2s/dt^2 bernilai nol dan semua titik percepatan sepanjang **N** menuju pusat lingkaran. Jika sebuah objek bergerak bertambah cepat atau melambat, maka a mempunyai komponen tangensial taknol (Gambar 24).

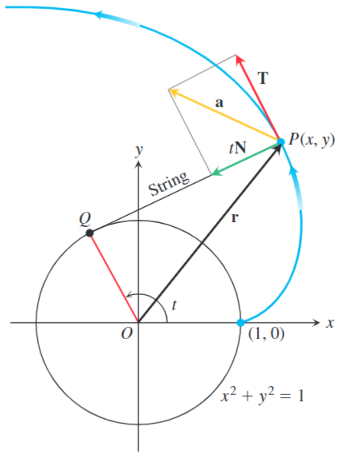
Untuk menghitung a, kita biasanya menggunakan rumus $a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T{}^2}$, yang diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan $|a|^2 = a \cdot a = a_T{}^2 + a_N{}^2$ untuk mencari a_N Dengan rumus ini, kita dapat memperoleh a_N tanpa harus menghitung κ terlebih dahulu. Sehingga didapat Rumus untuk Menghitung Komponen Normal dari Percepatan, yakni

$$a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T{}^2} \qquad (3)$$

Contoh 1:

Tanpa mencari T dan N, tuliskan percepatan dari gerak

$$r(t) = (\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j, \qquad t > 0$$



Gambar 110 Komponen tangensial dan normal dari percepatan gerak

Dalam bentuk $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$. (Lintasan dari gerak tersebut adalah involut dari lingkaran dalam Gambar 25).

Pembahasan:

Kita menggunakan Persamaan (2) yang pertama untuk memperoleh a_T:

$$v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-sin\,t + sin\,t + t\,cos\,t)\boldsymbol{i} + (cos\,t - cos\,t + t\,sin\,t)\boldsymbol{j}$$

$$= (t\,cos\,t)\boldsymbol{i} + (t\,sin\,t)\boldsymbol{j}$$

$$|v| = \sqrt{t^2cos^2t + t^2sin^2t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \qquad t > 0$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|v| = \frac{d}{dt}(t) = 1 \qquad Pers.2$$

Dengan mengetahui a_T kita menggunakan persamaan (3) untuk memperoleh a_N:

$$a = (cos\,t - t\,sin\,t)\boldsymbol{i} + (sin\,t + \ t\,cos\,t)\boldsymbol{j}$$

$$|a|^2 = t^2 + 1$$

$$a_N = \sqrt{|a|^2 - {a_T}^2}$$

$$= \sqrt{(t^2 + 1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t$$

Kita kemudian menggunakan persamaan (1) untuk memperoleh a:

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N N = (1)\boldsymbol{T} + (t)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} + t\boldsymbol{N}.$$

3. Torsi

Dari aturan untuk mendiferensiasikan hasilkali silang dalam pembahasan sebelumnya, kita mempunyai

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{ds} = \frac{d(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N})}{ds} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}.$$

Karena **N** adalah arah dari $d\boldsymbol{T}/ds$. maka $(d\boldsymbol{T}/ds)\times\boldsymbol{N} = 0$ dan

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{ds} = 0 + \boldsymbol{T}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \boldsymbol{T}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}.$$

Dari persamaan ini kita melihat hahwa $d\boldsymbol{B}/ds$ ortogonal terhadap **T**, karena sebuah hasilkali silang ortogonal terhadap faktornya. Karena $d\boldsymbol{B}/ds$ juga ortogonal terhadap **B** (yang disebut terakhir mempunyai panjang konstan), maka $d\boldsymbol{B}/ds$ ortogonal pada bidang dari **B** dan **T**. Dengan kata lain, $d\boldsymbol{B}/ds$ sejajar dengan **N** sehingga $d\boldsymbol{B}/ds$ adalah kelipatan skalar dari **N**. Dalam simbol-simbol,

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = -\tau\boldsymbol{N}.$$

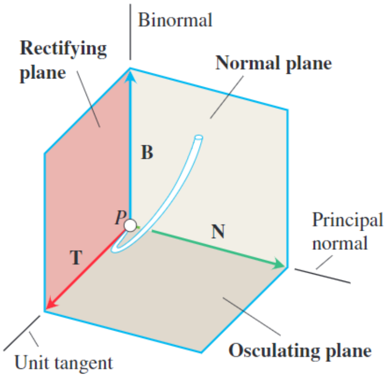
Tanda negatif dalam persamaan ini biasa. Skalar τ disebut torsi sepanjang kurva. Perhatikan bahwa

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\cdot N = -\tau\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N} = -\tau(1) = -\tau$$

Kita menggunakan persamaan ini untuk mendapatkan definisi berikut, yaitu misalkan $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$. Fungsi torsi dari kurva mulus adalah

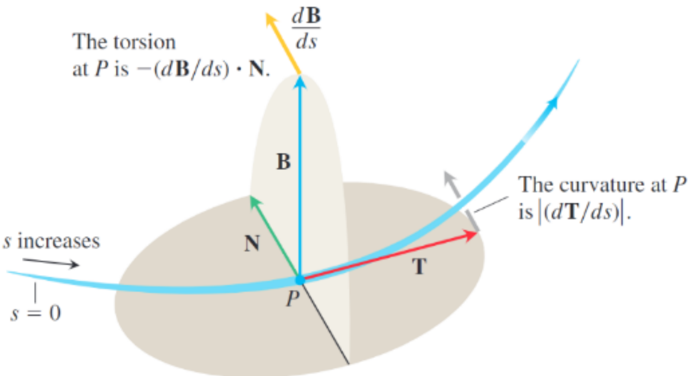
$$\tau = -\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\cdot\boldsymbol{N}. \tag{4}$$

Tidak seperti kelengkungan κ, yang tidak pernah negatif, torsi τ mungkin positif, negatif, atau nol.



Gambar 111 Nama bidang TNB

Ketiga bidang yang ditentukan oleh **T**, **N**, dan **B** dinamakan dan dalam Gambar 26. Kelengkungan $\kappa = |d\boldsymbol{T}/ds|$ dapat dipikirkan sebagai laju bidang normal berputar saat titik P bergerak sepanjang lintasannya. Dengan serupa, torsi $\tau = -(d\boldsymbol{B}/d\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{N}$ adalah laju dari bidang oskulasi berputar di sekitar **T** saat P bergerak sepanjang kurva. Torsi mengukur puntiran kurva.



Gambar 112Kerangka TNB dari lintasan gerak

Lihatlah Gambar 112. Dapat ditunjukkan bahwa kurva bidang merupakan heliks jika dan hanya jika kurva mempunyai kelengkungan taknol yang konstan dan torsi taknol yang konstan.

4. Rumus untuk Menghitung Kelengkungan dan Torsi

Sekarang akan diberikan rumus yang mudah untuk digunakan menghitung kelengkungan dan torsi dari sebuah kurva mulus. Dari Persamaan (1) dan (2) kita mempunyai

$$v \times a = \left(\frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}\right) \times \left[\frac{d^2 s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\kappa}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \boldsymbol{N}\right] \qquad v = dr/dt = (ds/dt)\boldsymbol{T}$$

$$= \left(\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}\right)(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}) + \boldsymbol{\kappa}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N})$$

$$= \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \boldsymbol{B}. \qquad \boldsymbol{T \times T = 0 \; dan \; T \times N = B}$$

Selanjutnya,

$$|v \times a| = \kappa \left|\frac{ds}{dt}\right|^{\boldsymbol{3}} |\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{\kappa}|\boldsymbol{v}|^{\boldsymbol{3}}. \qquad \frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{v}| \; \boldsymbol{dan} \; |\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{1}$$

Pemecahan untuk κ memberikan rumus berikut, yaitu rumus vektor untuk kelengkungan adalah

$$\kappa = \frac{|v \times a|}{|\boldsymbol{v}|^{\boldsymbol{3}}} \qquad (\boldsymbol{5})$$

Persamaan (5) menghitung kelengkungan, sebuah sifat geometri kurva, dari kecepatan dan percepatan dari sembarang representasi vektor untuk kurva saat $|\boldsymbol{v}|$ tidak sama dengan nol. Rumus yang paling banyak digunakan untuk torsi, yang diturunkan dalam buku-buku yang lebih lanjut, diberikan dalam bentuk determinan, yakni.

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|v \times a|^2} \qquad (Jika \; v \times a \neq 0) \qquad (6)$$

Rumus tersebut menghitung torsi secara langsung dari turunan fungsi-fungsi komponen *x = f(t), y = g(t), z = h(t)* yang membentuk ***r***. Baris pertama determinan berasal dari **v**, baris kedua berasal dari **a**, dan baris ketiga berasal dari $\dot{a} = da/dt$. Notasi titik (dot) Newton untuk turunan merupakan notasi yang umum.

Contoh 2:

Gunakan Persamaan (5) dan (6) untuk mencari kelengkungan κ dan torsi τ dari heliks

$$r(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0, \quad a^2 + b^2 = 0.$$

Pembahasan:

Kita menghitung kelengkungan dengan Persamaan (5):

$$v = -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$$

$$a = -(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}$$

$$v \times a = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (ab\sin t)\boldsymbol{i} - (ab\cos t)\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}$$

$$\kappa = \frac{|v \times a|}{|\boldsymbol{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \qquad (7)$$

Untuk menghitung torsi menggunakan Persamaan (6), kita mencari entri dalam dengan mendiferensiasikan **r** terhadap **t**. Kita telah mempunyai **v** dan dan **a**, dan

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = (a\sin t)\boldsymbol{i} - (a\cos t)\boldsymbol{j}$$

Jadi,

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|v \times a|^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & \boldsymbol{b} \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{(a\sqrt{a^2 + b^2})^2} \quad Nilai\ |v \times a|\ dari\ persamaan\ (7)$$

$$= \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

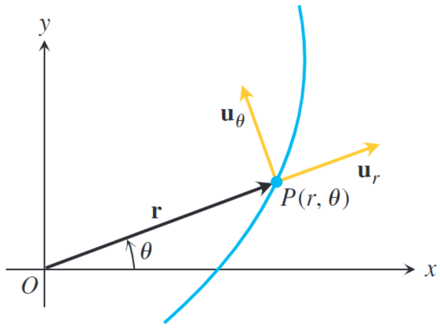
Dari persamaan terakhir kita melihat bahwa torsi dari heliks di sekitar silinder lingkaran bernilai konstan. Kenyataannya, kelengkungan konstan dan torsi konstan mencirikan heliks di antara semua kurva dalam ruang.

6.6 Kecepatan dan Percepatan dalam Koordinat Polar

1. Gerak dalam Koordinat Polar dan Silinder

Ketika sebuah partikel di $P(r, \theta)$ bergerak sepanjang sebuah kurva di koordinat polar, maka kita menyatakan posisi, kecepatan, dan percepatan tersebut dalam vektor satuan yang bergerak

$$u_r = (cos\ \theta)i + (sin\ \theta)j, \qquad u_\theta = -(sin\ \theta)i + (cos\ \theta)j, \qquad (1)$$



Gambar 113 Koordinat polar dan silinder

yang ditunjukkan dalam Gambar 28. Vektor u_r, menunjuk/mengarah vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ sehingga $r = r\,u_r$. Vektor u_θ, yang ortogonal terhadap u_r mengarah ke arah pertambahan θ. Kita mendapatkan dari Persamaan (1) bahwa,

$$\frac{du_r}{d\theta} = -(sin\ \theta)i + (cos\ \theta)j = u_\theta$$

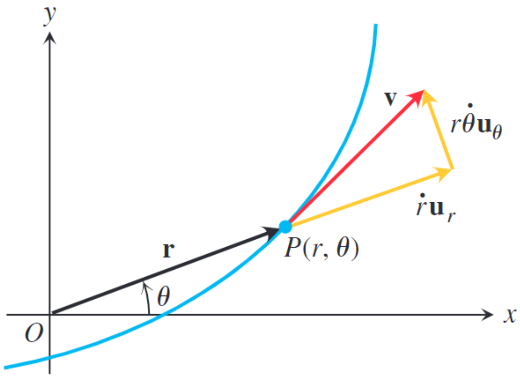
$$\frac{du_\theta}{d\theta} = -(cos\ \theta)i - (sin\ \theta)j = -u_r.$$

Ketika kita mendiferensiasikan u_r, dan u_θ terhadap t untuk mengamati perubahan mereka terhadap waktu, Aturan Rantai memberikan

$$\dot{u}_r = \frac{du_r}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}u_\theta, \qquad \dot{u}_\theta = \frac{du_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}u_r \qquad (2)$$

Jadi, kita dapat menyatakan vektor kecepatan dalam u_r, dan u_θ sebagai

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt}(ru_r) = \dot{r}u_r + r\dot{u}_r = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta.$$



Gambar 114 Koordinat polar kecepatan

Lihat Gambar 114. Seperti dalam subbab sebelumnya, kita menggunakan notasi titik Newton untuk turunan terhadap waktu agar penulisan rumus dapat sesederhana mungkin: $\dot{u}_r$, berarti du_r/dt, $\dot{\theta}$ berarti $d\theta/dt$, dan seterusnya.

Percepatan adalah

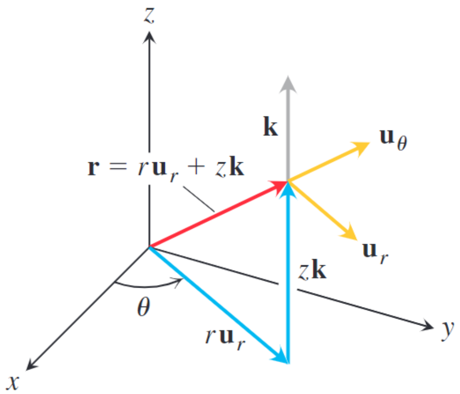
$$a = \dot{v} = (\ddot{r}u_r + \dot{r}\dot{u}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}u_\theta + r\ddot{\theta}u_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{u}_\theta).$$

Ketika Persamaan (2) digunakan untuk menghitung $\dot{u}_r$, dan $\dot{u}_\theta$ serta komponen-komponen secara terpisah, maka persamaan untuk percepatan dalam u_r, dan u_θ menjadi

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})u_\theta$$

Untuk mengembangkan persamaan gerak tersebut di ruang, kita menambahkan zk pada ruas kanan persamaan $r = ru_r$. Jadi, dalam koordinat silindris, kita mempunyai

- Posisi: $r = \mathrm{r}u_r + \mathrm{z}k$
- Kecepatan: $v = \mathrm{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta + \dot{z}k$
- Percepatan: $a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})u_\theta + \ddot{z}k$



Gambar 115 Vektor posisi dan vektor satuan

Vektor u_r, u_θ, dan k membentuk kerangka tangan-kanan (Gambar 13.32) dengan

$$u_r \times u_\theta = k, \qquad u_\theta \times k = u_r, \qquad k \times u_r = u_\theta$$

2. Gerak Planet pada Bidang

Hukum Newton mengenai gravitasi mengatakan bahwa jika **r** adalah vektor jari-jari dari pusat matahari dengan massa M ke pusat planet dengan massa m, maka gaya tarik gravitasi **F** di antara planet dan matahari adalah

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{|r|^2}\frac{r}{|r|}$$

Bilangan G adalah konstanta gravitasi universal. Jika kita mengukur massa dalam kilogram, gaya dalam newton, dan jarak dalam meter, maka G kira-kira sebesar $6{,}6738 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$. Penggabungan aturan gravitasi dengan hukum Newton kedua, $F = m\ddot{r}$, untuk gaya yang bekerja pada planet memberikan

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{|r|^2}\frac{r}{|r|},$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{|r|^2}\frac{r}{|r|}.$$

Oleh karena itu, planet dipercepat menuju pusat massa matahari sepanjang waktu. Karena $\ddot{r}$ adalah kelipatan skalar dari r, maka kita mempunyai

$$r \times \ddot{r} = 0$$

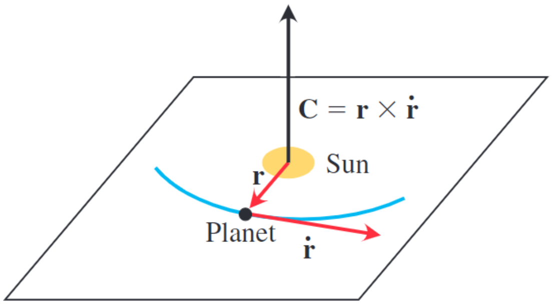
Dari persamaan terakhir,

$$\frac{d}{dt}(r \times \dot{r}) = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} = r \times \ddot{r} = 0$$

Akibatnya,

$$r \times \dot{r} = C \qquad (4)$$

untuk suatu vektor konstanta C.



Gambar 116 Planet dengan hukum gravitasi Newton

Persamaan (4) mengatakan kepada kita bahwa r dan $\dot{r}$ selalu terletak dibidang yang tegak lurus terhadap C. Jadi, planet bergerak di bidang tetap melalui pusat mataharinya (Gambar 31). Selanjutnya, kita akan melihat bahwa hukum Kepler menggambarkan gerak dengan cara yang tepat.

3. Hukum Kepler yang Pertama (Hukum Elips)

Hukum Kepler yang pertama mengatakan bahwa lintasan planet berbentuk elips dengan matahari sebagai salah satu fokusnya Eksentrisitas elips adalah

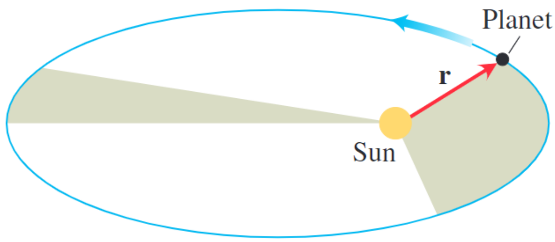
$$e = \frac{r_0 {v_0}^2}{GM} - 1 \qquad (5)$$

dan persamaan polar untuk elips adalah

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\ cos\ \theta}. \qquad (6)$$

Di sini v_0 adalah laju pada saat planet berada pada jarak minimumnya, yaitu r_0 dari matahari. Kita meninggalkan buktinya yang panjang. Massa matahari M adalah $1{,}99 \times 10^{30} kg$.

4. Hukum Kepler yang Kedua (Hukum Luas yang Sama)



Gambar 117 Garis Planet ke matahari

Hukum Kepler yang kedua mengatakan bahwa vektor jari-jari dari matahari ke sebuah planet (vektor r dalam model kita) menyapu luas yang sama dalam waktu yang sama, seperti yang ditampilkan dalam Gambar 32.

Dalam gambar tersebut, kita mengasumsikan bahwa bidang planet adalah bidang-*xy* sehingga vektor satuan dalam arah *C* adalah *k*. Kita perkenalkan koordinat polar dalam bidang, dengan memilih garis awal $\theta = 0$, arah *r* ketika $|r| = r$ merupakan nilai minimum. Kemudian, di *t = 0*, kita mempunyai $r(0) = r_0$ yang merupakan nilai minimum sehingga

$$\dot{r}|_{t=0} = \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = 0\ \ dan\ \ v_0 = |v|_{t=0} = \left[r\dot{\theta}\right]_{t=o} \quad Pers\ \ (3)\ \dot{z} = 0$$

Untuk menurunkan hukum Kepler yang kedua, kita menggunakan

Persamaan (3) untuk menghitung hasilkali silang $C = r \times \dot{r}$ dari Persamaan (4):

$$\begin{aligned} C &= r \times \dot{r} = r \times v \\ &= r u_r \times (\dot{r} u_r + r\dot{\theta} u_\theta) && Pers\ (3)\ \dot{z} = 0 \\ &= r\dot{r}(u_r \times u_r) + r(r\dot{\theta})(u_r \times u_\theta) \\ &= r(r\dot{\theta})k. && u_r \times u_r = 0, u_r \times u_\theta = k \qquad (7) \end{aligned}$$

Dengan membuat *t* sama dengan nol, dapat ditunjukkan bahwa

$$C = \left[r(r\dot{\theta}) \right]_{t=0} k = r_0 v_0 k.$$

Substitusi nilai *C* ke Persamaan (7) memberikan

$$r_0 v_0 k = r^2 \dot{\theta} k, atau\ r^2 \dot{\theta} k = r_0 v_0.$$

Ini menunjukkan cara mendapatkan luas. Diferensial luas dalam koordinat polar adalah

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Oleh karena itu, *dA/dt* mempunyai nilai konstan

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r_0 v_0 \qquad (8)$$

Jadi, *dA/dt* merupakan konstan, yang memberikan hukum kepler yang kedua.

5. Hukum Kepler yang Ketiga (Hukum Waktu-Jarak)

Hukum Kepler yang ketiga menyebutkan suatu hubungan matematis secara eksplisit antara periode orbit suatu planet dengan ukuran orbitnya. Waktu *T* yang diperlukan oleh sebuah planet untuk mengelilingi mataharinya sebanyak satu kali adalah periode orbit planet. *Hukum Kepler yang Ketiga* mengatakan bahwa *T* dan sumbu semi mayor orbit **a** dikaitkan oleh persamaan

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Karena ruas kanan persamaan tersebut bernilai konstant untuk tata surya yang diberikan, maka rasio T^2 terhadap a^3 selalu sama *untuk semua planet dalam tata Surya.* Berikut ini adalah penurunan parsial dari hukum Kepler yang Ketiga. Luas yang dilingkupi oleh orbit elips planet dihitung sebagai berikut:

$$Luas = \int_0^T dA = \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 dt = \frac{1}{2} T r_0 v_0$$

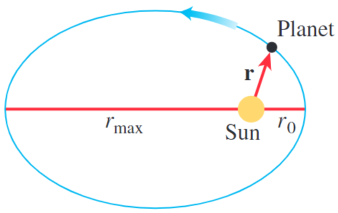
Jika b adalah sumbu semi minor, maka luas clips adalah πab; dan akibatnya

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0} \sqrt{1 - e^2} \; untuk \; sembarang \; elips \; b$$

$$= a\sqrt{1 - e^2} \tag{9}$$

Sekarang hanya tinggal menyatakan *a* dan *e* dalam r_0, v_0, *G*, dan *M*. Persamaan (5) digunakan untuk mendapatkan *e*. Untuk *a*, kita perhatikan bahwa jika nilai θ dalam Persamaan (6) dibuat sama dengan π, maka kita dapatkan

$$r_{maks} = r_0 \frac{1 + e}{1 - e}.$$



Gambar 118 Panjang sumbu mayor elips

Jadi, dari Gambar 33,

$$2a = r_0 + r_{maks} = \frac{2r_0}{1 - e} = \frac{2r_0 GM}{2GM - r_0 {v_0}^2} \tag{10}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas Persamaan (9) dan mensubstitusikan hasilnya ke Persamaan (5) dan (10), diperoleh hukum Kepler yang ketiga.

4. Rangkuman

2. Kelengkungan adalah fungsi skalar

$$\kappa = \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{dt}\right|$$

dengan $T = v/|v|$ merupakan vektor singgung satuan

3. Di titik dengan $\kappa \neq 0$, vektor normal satuan utama untuk kurva mulus di bidang adalah

$$N = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds}$$

4. Jika *r(t)* merupakan suatu kurva mulus, maka normal satuan utama adalah

$$N = \frac{(dT/dt)}{|dT/dt|}$$

5. Vektor *dT/ds* ortogonal terhadap *T*, dan kita mendefinisikan normal satuan utama sebagai

$$N = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}$$

6. Percepatan dalam u_r, dan u_θ menjadi

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})u_\theta$$

7. Persamaan gerak di ruang dengan koordinat silindris, kita mempunyai
   a. Posisi: $r = \mathrm{r}u_r + \mathrm{z}k$
   b. Kecepatan: $v = \mathrm{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta + \dot{z}k$
   c. Percepatan: $a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})u_\theta + \ddot{z}k$

8. Gaya tarik gravitasi **F** di antara planet dan matahari adalah

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{|r|^2}\frac{r}{|r|}$$

9. Eksentrisitas elips adalah

$$e = \frac{r_0{v_0}^2}{GM} - 1$$

5. Latihan

1) Carilah **T**, **N**, dan **K** untuk kurva di bidang pada Latihan 16-17.
   a. $\mathrm{r}(\mathrm{t}+3)\mathbf{i}+(5-\mathrm{t}^2)\mathbf{j}$
   b. $\mathrm{r}(t)=t\boldsymbol{i}+(In\ cos\ t)\boldsymbol{j}, \quad -\pi/2<t<\pi/2$
2) Tunjukkan bahwa parabola $y=ax^2, a\neq 0$, mempunyai kelengkungan terbesar di puncaknya dan tidak mempunyai kelengkungan minimum. (Catatan: Karena kelengkungan kurva tetap sama jika kurva ditranslasi atau rotasi, maka hasil ini benar untuk sembarang parabola.)
3) Carilah vektor kecepatan dan percepatan dalam u_r dan u_θ.
   a. $\mathrm{r}=(\mathrm{a}(1+\sin \mathrm{t})$ dan $\theta=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$
   b. $\mathrm{r}=\mathrm{a}(1-\cos\theta)$ dan $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}=3$
   c. $\mathrm{r}=2\cos 4\mathrm{t}$ dan $\theta=2\mathrm{t}$
4) Taksirlah panjang dari sumbu mayor orbit Bumi jika periode orbitnya adalah 365,256 hari.

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Carilah **T**, **N**, dan **K** untuk kurva ruang pada
   a. $r(t)=(6\ sin\ 2t)\boldsymbol{i}+(6\ cos\ 2t)\boldsymbol{j}+5t\boldsymbol{k}$
   b. $r(t)=(cos\ t+t\ sin\ t)\boldsymbol{i}+(sin\ t-t\ cos\ t)\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
2) Tuliskan **a** dalam bentuk $a=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ tanpa mencari **T** dan **N**.
   a. $r(t)=(1+3t)\boldsymbol{i}+(t-2)\boldsymbol{j}-3t\boldsymbol{k}$
   b. $r(t)=(a\ cos\ t)\boldsymbol{i}+(a\ sin\ t)\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$
3) Carilah persamaan untuk bidang oskulasi, normal, dan bidang haluan (*rectifying plane*) di nilai t tersebut.
   a. $r(t)=(cos\ t)\boldsymbol{i}+(sin\ t)\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}, \quad t=\pi/4$
   b. $r(t)=(cos\ t)\boldsymbol{i}+(sin\ t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}, \quad t=0$

4) Jika Anda telah mengetahui $|a_N|$ dan $|v|$, maka rumus $a_N = \kappa|v|^2$ memberikan cara yang mudah untuk mencari kelengkungan. Gunakan rumus tersebut untuk mencari kelengkungan dan jari-jari kelengkungan dari kurva

$$r(t) = (cos\ t + t\ sin\ t)i + (sin\ t - t\ cos\ t)j, \quad t > 0.$$

5) Periode dari rotasi bulan mengelilingi Bumi adalah $2{,}36055 \times 10^6$ detik. Taksirlah jarak ke bulan.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul enam ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi nilai fungsi vektor dan gerak dalam ruang secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Turunan	Torsi	Gravitasi	Tangen	Integral
Unit	Kontinu	Diskontinu	Differensial	

4. Referensi

Gata, A. S. (2020). Analisis Performansi Metode Ranging Pada Satelit Telkom 3s. *Diss. Institut Teknologi Telkom Purwokerto*.

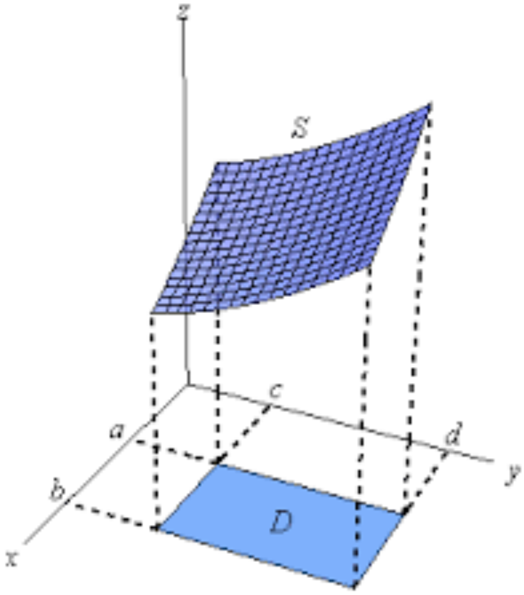
Jr., G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Kalkulus Edisi Ketiga Belas Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

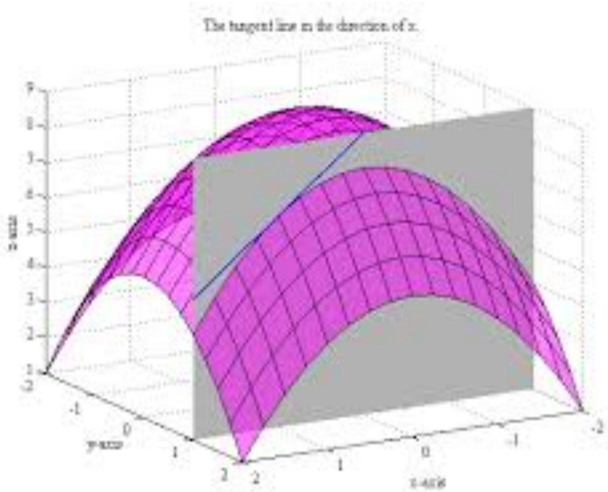
Prakoso, A. B., Adityas, H., & Nurhaqi, S. M. (2019). Prakoso, A. B., Adityas, H., & Mutahhari Nurhaqi, S. (2019). Pemodelan Gerak Orbit Planet secara Komputasi Menggunakan Matlab. *JIIF (Jurnal Ilmu dan Inovasi Fisika)*, 10-18.

Syarifudin, M. K. (2017). Pengembangan aplikasi mobile learning menggunakan Adobe Flash Cs6 sebagai penunjang pembelajaran fisika pada materi hukum Newton untuk siswa SMA/MA kelas X. *Diss. UIN Walisongo*.

Varberg, D., Purcell, E. j., & Rigdon, S. E. (2008). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.

MODUL 7 TURUNAN PARSIAL





MODUL 7 TURUNAN PARSIAL

PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Modul ini memuat tentang materi turunan parsial yang dijelaskan secara gamblang dan mudah dipahami oleh mahasiswa baik secara mandiri maupun kelompok. Modul ini memuat materi lengkap tentang turunan parsial yaitu Fungsi beberapa variabel, Limit dan kekontinuan pada dimensi yang lebih tinggi, Turunan parsial, Aturan rantai, Turunan berarah dan vektor gradien, Bidang singgung dan diferensial, Nilai ekstrem dan titik pelana, Pengali lagrange, Rumus taylor untuk dua variabel, Turunan parsial dengan variabel berkendala.

   Dengan penjabaran dan contoh yang lengkap, mahasiswa dapat dituntun untuk memahami materi dengan baik dan melakukan latihan maupun evaluasi pembelajaran dengan menggunakan soal yang sudah disediakan.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Tujuh

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.
S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni
KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.
KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral.

5. Kegunaan Modul Tujuh

   Kegunaan modul tujuh ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan turunan parsial. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai turunan parsial untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Fungsi beberapa variabel, Limit dan kekontinuan pada dimensi yang lebih tinggi, Turunan parsial, Aturan rantai, Turunan berarah dan vektor gradien, Bidang singgung dan diferensial, Nilai ekstrem dan titik pelana, Pengali lagrange, Rumus taylor untuk dua variabel, Turunan parsial dengan variabel berkendala.

KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 13 : Menguasai konsep Fungsi beberapa variabel, Limit dan kekontinuan pada dimensi yang lebih tinggi, Turunan parsial, Aturan rantai, Turunan berarah dan vektor gradient

2.Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

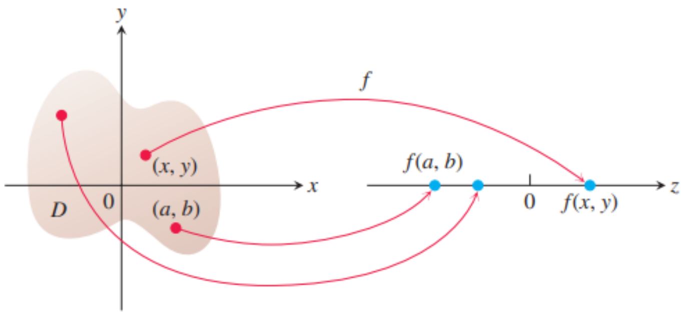
Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Fungsi beberapa variabel, Limit dan kekontinuan pada dimensi yang lebih tinggi, Turunan parsial, Aturan rantai, Turunan berarah dan vektor gradien. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Fungsi beberapa variabel, Limit dan kekontinuan pada dimensi yang lebih tinggi, Turunan parsial, Aturan rantai, Turunan berarah dan vektor gradien. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

7.1 Fungsi Beberapa Variabel

Fungsi bernilai riil beberapa variabel bebas didefinisikan dengan cara yang sejalan dengan pendefinisian fungsi satu variabel. Titik-titik pada daerah asalnya merupakan pasangan-pasangan terurut bilangan riil (*tripel, quadrupel, n-tupel*) dan nilai-nilai pada daerah hasilnya merupakan bilangan-bilangan riil. Misalkan D adalah himpunan n-tupel bilangan riil $\left(x_{1,}, x_2, .., x_n\right)$. Fungsi bernilai riil f pada D adalah suatu aturan yang menentukan suatu bilangan riil yang tunggal. $w = f\left(x_{1,}, x_2, .., x_n\right)$ untuk setiap anggota di D. Himpunan D adalah daerah asal fungsi. Himpunan nilai w yang dihasilkan oleh $\int$ adalah daerah hasil f. Notasi w merupakan variabel tak bebas f dan $\int$ dikatakan sebagai fungsi n variabel bebas x_1 sampai dengan x_n. Kita menyebut x_j sebagai variabel masukan fungsi dan menyebut w sebagai variabel keluaran fungsi. Jika f adalah suatu fungsi dua variabel bebas maka kita biasa menyebut variabel-variabel bebas x dan y serta variabel tak bebas z dan kita menggambarkan daerah asalnya sebagai suatu daerah di bidang xy (Gambar 1.1). Jika f adalah suatu fungsi tiga variabel bebas, kita menyebut variabel-variabel bebas x,y, dan z serta variabel tak bebas w dan kita menggambarkan daerah asalnya sebagai suatu daerah di ruang.



Gambar 119 Domain

Dalam menghitung fungsi yang didefinisikan oleh suatu rumus dengan memasukkan nilai-nilai variabel bebas ke dalam rumus tersebut dan menghitung nilai-nilai variabel tak bebas yang bersesuaian. Sebagai contoh nilai $f(x,y,z) = \sqrt{x^2y^2z^2}$ di titik (3,0,4) adalah $f(3,0,4) = \sqrt{(3)^2(0)^2(4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

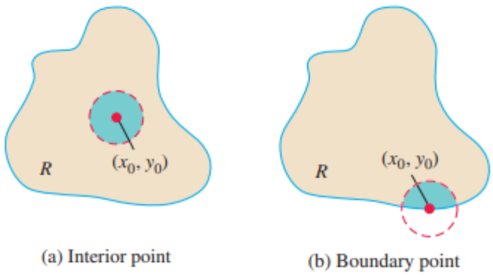
1. Daerah asal dan daerah hasil

Dalam mendefinisikan fungsi lebih dari satu variabel, kita mengikuti cara yang biasa dilakukan dengan mengecualikan masukan-masukan yang dapat menghasilkan bilangan-bilangan kompleks atau pembagian dengan nol. Jika $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ maka y tidak diperkenankan lebih kecil daripada x^2. Jika $f(x,y) = 1/(xy)$ maka (x,y) tidak diperkenankan sama dengan nol. Daerah asal suatu fungsi dipandang sebagai himpunan terbesar sedemikian hingga aturan yang mendefinisikan fungsi tersebut menghasilkan bilangan-bilangan riil, kecuali jika daerah asal tersebut ditentukan lain secara eksplisit. Daerah hasil terdiri dari himpunan semua nilai keluaran untuk variabel-variabel tak bebasnya.

2. **Fungsi dua variabel**

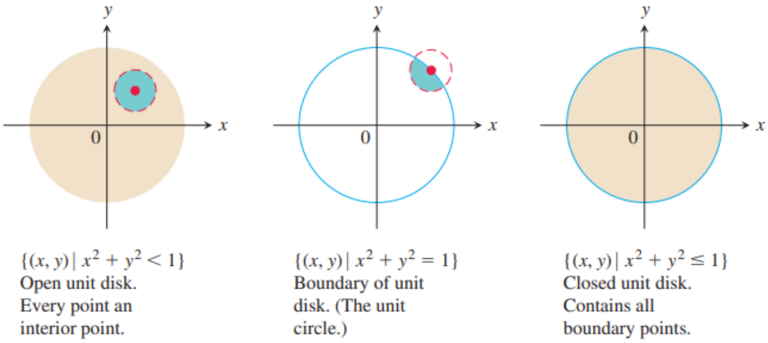
Daerah-daerah pada bidang dapat memiliki titik-titik interior dan titik-titik batas seperti interval-interval pada garis bilangan riil. Interval-interval tertutup $[a, b]$ memuat titik-titik batasnya, interval-interval terbuka (a, b) tidak memuat titik-titik batasnya, dan interval-interval seperti $[ab)$ tidak terbuka maupun tertutup.

Titik (x_0, y_0) di daerah R yang berada pada bidang xy adalah suatu titik interior R jika titik tersebut merupakan titik pusat suatu cakram beradius positif yang seluruhnya berada di R (Gambar 1.2). Titik (x_0, y_0) adalah suatu titik batas R jika setiap cakram yang berpusat di (x_0, y_0) memuat titik-titik yang terletak di luar R maupun yang terletak di dalam R. (Titik batas sendiri tidak harus terletak di R).



Gambar 120 Batas titik

Titik-titik interior suatu daerah, sebagai suatu himpunan membentuk interior daerah tersebut. Titik-titik batas daerah tersebut membentuk batasnya. Suatu daerah dikatakan terbuka jika daerah tersebut terdiri dari seluruhnya merupakan titik interior. Suatu daerah dikatakan tertutup jika daerah tersebut membuat semua titik batasnya (Gambar 1.3)



Gambar 121 Batasan titik

Seperti interval setengah terbuka pada himpunan bilangan riil beberapa daerah di bidang tidak terbuka dan tidak tertutup. Jika Anda awali dengan cakram terbuka pada gambar 121 dan menambahkan padanya beberapa, tetapi tidak semua. Tidak batasnya, maka himpunan yang diperoleh adalah himpunan yang tidak terbuka dan tidak tertutup. Titik-titik batas yang ada mempertahankan himpunan tersebut agar tidak terbuka. Ketiadaan sisa titik-titik batasnya mempertahankan himpunan tersebut agar tidak tertutup.

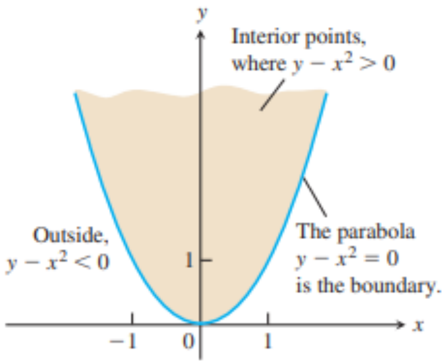
Suatu daerah di bidang dikatakan terbatas jika daerah tersebut terletak pada suatu cakram yang beradius terhingga. Suatu daerah dikatakan tak terbatas jika daerah tersebut tidak memiliki batas.

Contoh 2 :

Gambarkan daerah asal fungsi $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

Penyelesaian :

Karena f terdefinisi hanya jika n$y - x^2 \geq 0$, maka daerah asalnya tertutup dan tidak terbatas seperti yang diperlihatkan pada (Gambar 1.4). Parabola $y = x^2$ adalah batas daerah asalnya. Titik-titik di atas parabola membentuk interior daerah asalnya.



Gambar 122 Batas parabola

3. **Grafik, kurva ketinggian dan kontur fungsi dua variabel**

   Terdapat dua cara untuk menggambarkan nilai-nilai fungsi $f(x, y)$. Pertama adalah menggambar dan memberi label untuk kurva pada daerah hasil di mana f bernilai konstan. Cara lainnya adalah menggambar permukaan $z = f(x, y)$ di ruang. Himpunan semua titik di bidang di mana fungsi $f(x, y)$ memiliki nilai konstan $f(x, y) = c$ di sebut kurva ketinggian dari f. Himpunan semua titik $(x, y, \int(x, y))$ di ruang, dengan (x, y) berada di daerah asal f, disebut grafik f. Grafik f disebut juga dengan permukaan $z = f(x, y)$.

4. **Fungsi tiga variabel**

   Pada bidang titik-titik di mana suatu fungsi dua variabel memiliki nilai konstan $f(x, y) = c$ membentuk suatu kurva pada daerah asal fungsi. Di ruang, titik-titik di mana sebuah fungsi tiga variabel memiliki nilai konstan $f(x, y, z) = c$ membentuk suatu permukaan pada daerah asal fungsi. Himpunan titik $f(x, y, z)$ di ruang di mana fungsi tiga variabel memiliki nilai konstan $f(x, y, z) = c$ di sebut dengan permukaan ketinggian f. Karena grafik fungsi tiga variabel terdiri dari titik $(x, y, zf(x, y, z))$ yang terletak pada ruang berdimensi empat, kita tidak dapat menggambarkannya secara efektif pada sistem koordinat tiga dimensi. Meskipun demikian, kita dapat melihat perilaku fungsi tersebut dengan melihat permukaan ketinggian tiga dimensinya.

7.2 Limit dan Kekontinuan pada Dimensi yang Lebih Tinggi

Dalam subbab ini kita akan membahas limit dan kekontinuan untuk fungsi variabel banyak. Gagasan-gagasan ini sejalan dengan limit dan kekontinuan untuk satu variabel, tetapi memasukkan lebih banyak variabel bebas sehingga mengarah kepada kerumitan tambahan dan perbedaan-perbedaan penting yang memerlukan gagasan-gagasan baru.

1. Limit fungsi dua variabel

Jika nilai-nilai $f(x, y)$ berada cukup dekat dalam arah mana saja dengan suatu nilai yang tetap L untuk semua titik (x, y) yang cukup dekat dengan suatu titik (x_0, y_0), maka kita katakan bahwa f mendekati limit L sebagaimana (x, y) mendekati (x_0, y_0). Hal ini serupa dengan definisi tidak formal untuk limit fungsi satu variabel. Kita katakan bahwa suatu fungsi $f(x, y)$ mendekati limit L sebagaimana (x, y) mendekati (x_0, y_0) dan tuliskan sebagai

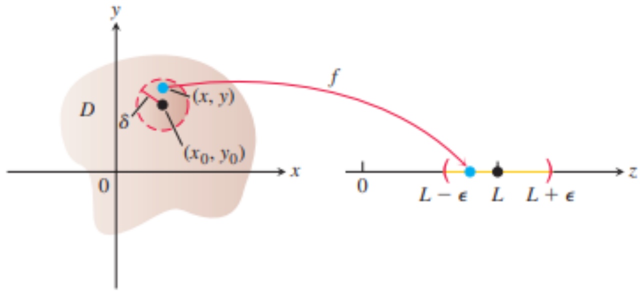
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat suatu bilangan yang sesuai $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk semua (x, y) pada daerah asal f,

$| f(x, y) - L| < \epsilon$

bilamana $0 < \sqrt{(x - x_0)^2(y - y_0)^2} < \delta$.

Definisi limit tersebut mengatakan bahwa jarak antara $f(x, y)$ dan L menjadi kecil dalam arah mana saja jika jarak dari (x, y) ke (x_0, y_0) dibuat cukup kecil (tetapi tidak 0). Definisi tersebut berlaku untuk titik interior (x_0, y_0) dan juga titik batas asal f, meskipun titik batas tidak selalu terletak pada daerah asal. Titik (x, y) yang mendekati (x_0, y_0) selalu berada di daerah asal f (Gambar 1.5)



Gambar 123 Pemetaan domain

Seperti pada fungsi satu variabel, dapat ditunjukkan bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k$$

Sebagai contoh pada pernyataan limit yang pertama di atas $f(x,y) = x$ dan $L = x_0$. Dengan menggunakan definisi limit, misalkan bahwa $\epsilon > 0$ dipilih. Jika kita mengambil δ sama dengan ϵ ini, kita melihat bahwa

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2(y-y_0)^2} < \delta = \epsilon$$

Mengakibatkan

$$\sqrt{(x-x_0)^2 < \epsilon} \quad (x-x_0)^2 \leq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

$$|x - x_0| < \epsilon \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$|f(x,y)| - x_0 < \epsilon \quad x = f(x,y)$$

Artinya

$|f(x,y)| - x_0 < \epsilon$ jika $< \sqrt{(x-x_0)^2(y-y_0)^2} < \delta$

Dengan demikian, δ yang telah diperoleh memenuhi persyaratan definisi tersebut, dan

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$

Pada contoh ini, kita dapat menggabungkan ketiga hasil sederhana yang memenuhi definisi limit tersebut dengan hasil-hasil pada teorema 1 untuk menghitung limit. Kita dengan mudah memasukkan nilai-x dan nilai-y dari titik yang didekati ke dalam pernyataan fungsionalnya untuk mencari nilai limitnya.

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-(0)(1)+3}{(0)^2(1)+(5)(0)(1)-(1)^3} = -3$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

2. Kekontinuan

Seperti pada fungsi satu variabel, kekontinuan didefinisikan menggunakan konsep limit. Fungsi $f(x,y)$ kontinu di titik (x_0y_0) jika

1) F terdefinisi di (x_0y_0)
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ada
3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0y_0)$

Jika fungsi dikatakan kontinu jika fungsi tersebut kontinu di setiap titik di daerah asalnya. Seperti pada definisi limit, definisi kekontinuan tersebut berlaku di titik-titik batas dan juga di titik-titik interior daerah asal f. Syaratnya hanyalah bahwa setiap titik yang dekat dengan (x_0y_0) terletak pada daerah asal f.

Jika f kontinu di (x_0y_0)dan g adalah fungsi satu variabel yang kontinu di $f(x_0y_0)$ maka fungsi komposisi $h = g \circ f$ yang didefinisikan dengan $h(x,y) = g(f(x,y))$ kontinu di (x_0y_0). Sebagai contoh, fungsi komposisi

$e^{x-y}, cos\frac{xy}{x^2+1}, In\ (1+x^2y^2)$ kontinu di setiap (x,y)

3. **Fungsi lebih dari dua variabel**

Definisi limit dan kekontinuan untuk fungsi dua variabel dan kesimpulan-kesimpulan tentang limit dan kekontinuan untuk penjumlahan, perkalian, pembagian, pangkat, dan komposisi seluruhnya diperluas untuk fungsi tiga atau lebih variabel. Fungsi-fungsi seperti

$In(x + y + z)$ dan $\frac{y \sin z}{x-1}$

Kontinu pada masing-masing daerah asalnya, dan limit-limit seperti

$$\lim_{P \to (1,0,-1)} \frac{e^{x+2}}{z^2 + \cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2 + \cos 0} = \frac{1}{2},$$

Dengan P menyatakan titik (x, y, z) dapat diperoleh dengan substitusi langsung.

7.3 Turunan Parsial

Andaikan f adalah suatu fungsi dua variabel x dan y. Jika y dijaga agar tetap konstan, katakanlah $y = y_0$ maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi satu variabel x. Turunannya di $x = x_0$ di sebut turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) dan dinyatakan oleh $f_x(x_0, y_0)$. Jadi,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Dengan cara serupa, turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan oleh $f_y(x_0 y_0)$ dan diberikan oleh

$$f_y(x_0 y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ketimbang menghitung $f_x(x_0, y_0)$ dan $f_y(x_0, y_0)$ secara langsung dari definisi di atas, biasanya kita mencari $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ dengan menggunakan aturan baku untuk turunan kemudian kita substitusikan $x = x_0$ dan $y = y_0$. Hal terpenting di sini adalah bahwa aturan untuk diferensiasi fungsi satu variabel berlaku untuk pencarian turunan parsial, selama kita memegang satu variabel tetap. Contoh : Jika $z = x^2 sin(xy)^2$, carilah $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)^2)] + \sin(xy)^2 \frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

$$= x^2 cos(xy^2) \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + sin(xy^2). 2x$$

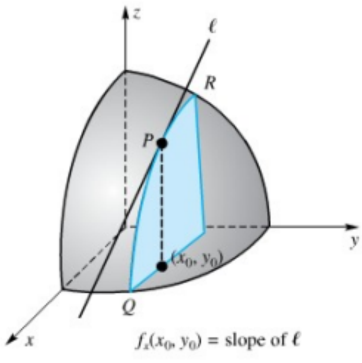
$$= x^2 \cos(xy^2) . y^2 + 2x\, sin(xy^2)$$

$$= x^2 y^2 cos(xy^2) + 2x\, sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 cos(xy^2). 2xy$$

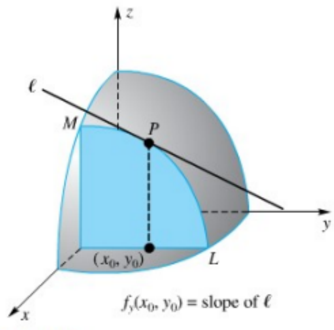
$$= 2x^3 y\, cos(xy^2)$$

Interpretasi geometri dan fisik dengan meninjau permukaan yang persamaannya $z = f(x, y)$. Bidang $y = y_0$ memotong permukaan ini pada kurva bidang QPR (Gambar 124)



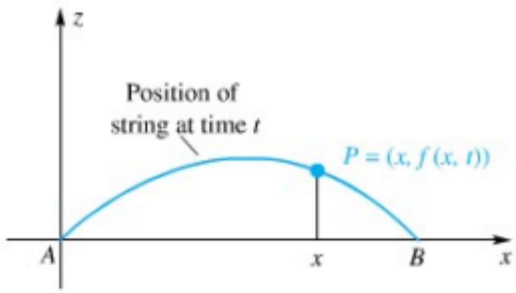
Gambar 124 Kurva bidang QPR

Dan $f_x(x_0 y_0)$ adalah kemiringan garis singgung pada kurva ini di $P(x_0 y_0, f(x_0 y_0))$. Secara serupa, bidang $x = x_0$ memotong permukaan pada kurva bidang LPM (Gambar 125)



Gambar 125 Kurva bidang LPM

Dan $f_y(x_0y_0)$ adalah kemiringan garis singgung pada kurva ini di titik P. Turunan parsial boleh juga di interpretasikan sebagai laju perubahan (sesaat). Andaikan bahwa dawai biola diikat di titik A dan B dan bergetar pada bidang $-xy$. (Gambar 1.8) memperlihatkan posisi dawai pada waktu tertentu t. Jika $z = f(x,t)$ menyatakan tinggi dawai di titik P dengan absis x pada waktu t, maka $\partial z/\partial x$ adalah kemiringan dawai di P dan $\partial z/\partial t$ adalah laju perubahan ketinggian P di sepanjang garis vertikal yang ditunjukkan. Dengan kata lain, $\partial z/\partial t$ adalah kecepatan vertikal P.



Gambar 126 Posisi di waktu t

Contoh : Permukaan $z = f(x,y) = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$ dan bidang y = 1 saling memotong dalam kurva seperti pada (Gambar 1.6). Carilah persamaan parameter untuk garis singgung di $(\sqrt{2}, 1{,}2)$.

Penyelesaian :

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2}(9 - 2x^2 - y^2)^{-1/2}(-4x)$$

Dengan demikian $f_x(\sqrt{2},1) = -\sqrt{2}$. Bilangan ini adalah kemiringan garis singgung pada kurva di $(\sqrt{2},1,2)$, yaitu $-\sqrt{2}/1$ adalah hasil bagi kenaikan terhadap jarak mendatar sepanjang garis singgung tersebut. Maka, sebagai akibatnya, garis ini mempunyai vektor arah $\langle 1,0,-\sqrt{2}\rangle$ oleh karena garis ini melalui $(\sqrt{2},1,2)$.

$$x = \sqrt{2} + t, \qquad y = 1, \qquad z = 2 - \sqrt{2t}$$

Menyediakan persamaan parameter yang disyaratkan.

Secara umum, karena turunan parsial suatu fungsi x dan y adalah fungsi lain dari dua variabel yang sama ini, turunan tersebut dapat didiferensiasikan secara parsial terhadap x dan y, menghasilkan empat buah turunan parsial kedua fungsi f.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{a x^2}\right)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{a y^2}\right)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Contoh :

Carilah keempat turunan parsial kedua dari

$$f(x,y) = xe^y - sin(x/y) + x^3y^2$$

Penyelesaian :

$$f_x(x,y) = e^y - \frac{1}{y}cos\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2$$

$$f_y(x,y) = xe^y + \frac{x}{y^2}cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{y^2} sin\left(\frac{x}{y}\right) + 6xy^2$$

$$f_{yy}(x,y) = xe^y + \frac{x^2}{y^4} sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y^3} cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3$$

$$f_{xy}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3} sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2} cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

$$f_{yx}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3} sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2} cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

Misalkan f suatu fungsi tiga variabel x, y, z. Turunan parsial f terhadap x di (x, y, z) dinyatakan oleh $f_x(x,y,z)$ atau $\partial f(x,y,z)/\partial x$ dan didefinisikan oleh

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

Jadi, $f_x(x,y,z)$ dapat diperoleh dengan memperlakukan y dan z sebagai konstanta dan melakukan diferensiasi terhadap x. Turunan parsial terhadap y dan z didefinisikan dengan cara yang serupa. Turunan-turunan parsial seperti f_{xy} dan f_{xyz} yang melibatkan diferensiasi terhadap lebih dari satu variabel disebut turunan parsial campuran.

Contoh :

Jika $f_x(x,y,z) = xy + 2yz + 3zx$, carilah f_x, f_y, f_z.

Penyelesaian :

Untuk memperoleh f_x kita pikirkan y dan z sebagai konstanta dan diferensiasikan terhadap variabel x. Jadi,

$$f_x(x,y,z) = y + 3z$$

Untuk mencari f_y, kita asumsikan x dan z sebagai konstanta dan diferensiasikan terhadap y:

$$f_y(x,y,z) = x + 2z$$

Serupa,

$$f_z(x,y,z) = 2y + 3x$$

7.4 Aturan Rantai

Aturan rantai untuk fungsi-fungsi komposit satu variabel sudah banyak dikenal. Jika $y = f(x(t))$ dengan f dan x keduanya fungsi yang dapat didiferensiasikan, maka

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Misalkan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ terdiferensiasikan di t dan misalkan $z = f(x, y)$ terdiferensiasikan di $(x(t), (y(t))$. Maka $z = f(x, (t), y(t))$ dapat didiferensiasikan di t dan

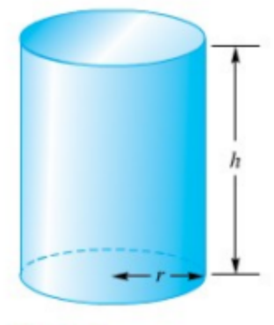
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$

Contoh :

Ketika sebuah tabung lingkaran tegak pejal dipanaskan, jari-jarinya r dan tingginya h bertambah sehingga sedemikian pula luas permukaannya S. Andaikan bahwa pada saat ketika r = 10 sentimeter dan h = 100 cm, r bertambah pada laju 0,2 cm/jam dan h bertambah pada laju 0,5 cm/jam. Seberapa cepat S bertambah pada saat ini?

Penyelesaian :

Rumus total luas permukaan sebuah tabung pada (Gambar 127) di bawah adalah:



Gambar 127 Luas permukaan tabung

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Jadi,

$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\frac{dh}{dt}$

$= (2\pi h + 4\pi r)(0{,}2) + (2\pi r)(0{,}5)$

Pada $r = 10$ dan $h = 100$

$\frac{ds}{dt} = (2\pi.100 + 4\pi.10)(0{,}2) + (2\pi.10)(0{,}5)$

$= 58\pi cm^2/jam$

Misalkan $x = x(s,t)$ dan $y = y(s,t)$ mempunyai turunan-turunan parsial pertama di (s,t) dan misalkan $z = f(x,y)$ terdiferensiasikan di $(x,(s,t),y(s,t))$. Maka $z = f(x(s,t),y(s,t))$ mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang diberikan oleh :

a. $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$
b. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Contoh :

Jika $w = x^2 + y^2 + z^2 + xy$, dengan $x = st, y = s - t$ dan $z = s + 2t$, carilah $\partial w/\partial t$

Penyelesaian :

$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$

$= (2x + y)(s) + (2y + x)(-1) + (2z)(2)$

$= (2st + s - t)(s) + (2s - 2t + st)(-1) + (2s + 4t)2$

$= 2s^2t + s^2 + 2s + 10t$

Andaikan bahwa $F(x,y) = 0$ mendefinisikan y secara implisit sebagai fungsi x, misalnya $y = g(x)$ tetapi bahwa fungsi g sukar atau tidak mungkin ditentukan. Kita masih tetap dapat mencari dy/dx. Satu metode untuk melakukan ini, yakni diferensiasi implisit. Mari kita turunkan kedua ruas $F(x,y) = 0$ terhadap x dengan menggunakan aturan rantai. Sehingga dapat kita dapatkan:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Dengan menyelesaikan persamaan untuk mencari nilai dy/dx, dihasilkan rumus :

$$dy/dx = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

Contoh :

Jika $F(x,y,z) = x^3 e^{y+z} - y\sin(x-z) = 0$ mendefinisikan z secara implisit sebagai suatu fungsi x dan y, carilah $\partial z/\partial x$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2 e^{y+z} - ycos(x-z)}{x^3 e^{y+z} + y\cos(x-z)}$$

7.5 Turunan berarah dan vektor gradien

Perhatikan lagi fungsi dua variabel $F(x,y)$. Turunan parsial $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$ mengukur laju perubahan dan kemiringan garis singgung pada arah-arah sejajar sumbu x dan sumbu y. Saat ini kita akan mempelajari mengenai laju perubahan f pada sebarang arah. Ini menuju ke konsep turunan berarah, yang kemudian dihubungkan dengan gradien. Akan sangat menguntungkan untuk menggunakan cara penulisan vektor. Misalkan $p = (x, y)$ dan misalkan i dan j adalah vektor-vektor satuan pada arah-arah x dan y positif. Maka dua turunan parsial di p dapat dituliskan sebagai berikut :

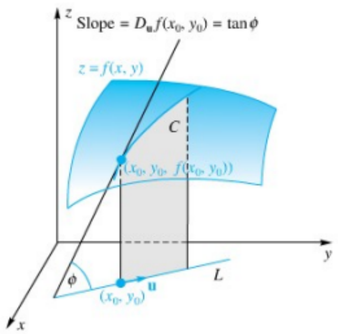
$f_x(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hi) - f(p)}{h}$

$f_y(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hj) - f(p)}{h}$

Untuk memperoleh konsep yang kita tuju, yang harus kita kerjakan hanyalah menggantikan i atau j dengan suatu vektor satuan sebarang u. Untuk tiap vektor satuan u, misalkan

$$D_u f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + hu) - f(p)}{h}$$

Limit ini, jika ia ada disebut turunan berarah f di p pada arah u. Jadi, $D_i f(p) = f_{(x)}(p)$ dan $D_j f(p) = f_{(y)}(p)$. Karena $p = (x, y)$, kita juga menggunakan cara penulisan $D_u f(x, y)$. (Gambar 128) memberikan interpretasi geometri dari $D_u f(x, y)$. Vektor u menentukan suatu garis L di bidang xy yang melalui (x_0, y_0). Bidang yang melalui L tegak lurus terhadap bidang xy memotong permukaan $z = f(x, y)$ dalam suatu kurva C. Garis singgungnya di titik $x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ mempunyai kemiringan $D_u f(x_0, y_0)$ mengukur laju perubahan f terhadap jarak dalam arah u.

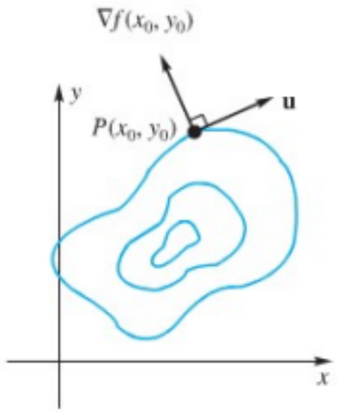


Gambar 128 Laju perubahan

Ingat bahwa $\nabla f(p)$ diberikan oleh $\nabla f(p) = f_x(p)i + f_y(p)j$. Misalkan f terdiferensiasikan di p. Maka f mempunyai turunan berarah di p dalam arah vektor satuan $u = u_1 i + u_2 j$ dan $D_u f(p) = u.\nabla f(p)$, yakni $D_u f(x, y) = u_1 f_x(x, y) + u_2 f_y(x, y)$. Untuk suatu fungsi f yang diketahui di suatu titik yang diberikan p, wajar untuk bertanya pada arah mana fungsi berubah paling cepat, yaitu pada arah mana $D_u f(p)$ adalah yang terbesar. Dari rumus geometri hasil kali titik, kita dapat menuliskan

$$D_u f(p) = u.\nabla f(p) = \|u\|\|\nabla f(p)\| cos\theta = \|\nabla f(p)\| cos\theta$$

Dengan θ sudut antara u dan $\nabla f(p)$. Jadi $D_u f(p)$ dimaksimumkan ketika $\theta = 0$ dan diminimumkan ketika $\theta = \pi/2$. Ingat bahwa kurva ketinggian permukaan $z = f(x, y, z)$ adalah proyeksi ke bidang xy dari kurva-kurva berpotongan permukaan dengan bidang-bidang $z = k$ yang sejajar bidang xy. Nilai fungsi di semua titik pada kurva ketinggian yang sama adalah konstan seperti pada (Gambar 129)



Gambar 129 Kurva ketinggian

Konsep kurva ketinggian fungsi dua variabel dapat diterapkan pada permukaan ketinggian untuk fungsi tiga variabel. Jika f suatu fungsi tiga variabel, permukaan $f(x, y, z) = k$, di mana k konstan disebut permukaan ketinggian untuk f. Di semua titik pada suatu permukaan ketinggian, nilai fungsi adalah sama dan vektor gradien dari $f(x, y, z)$ di suatu titik $P(x, y, z)$ dalam daerah asalnya adalah normal terhadap permukaan ketinggian dari f yang melalui P.

Dalam masalah konduksi kalor dalam benda homogen di mana $w = f(x, y, z)$ memberikan suhu pada titik (x, y, z), permukaan ketinggian $f(x, y, z) = k$ dinamakan permukaan isotermal karena semua titik di sana memiliki suhu sama k. Di seberang titik pada benda tersebut, kalor mengalir dalam arah yang berlawanan gradiennya dan oleh karenanya tegak lurus terhadap permukaan isoterm yang melalui titik tersebut. Jika $w = f(x, y, z)$ memberikan potensial elektrostatis (voltase) pada suatu titik seberang dalam suatu medan potensial listrik, permukaan ketinggiannya dinamakan permukaan ekuipotensial. Semua titik pada suatu permukaan ekuipotensial memiliki potensial elektrostatis yang sama dan arah arus listrik adalah searah dengan negatif gradiennya, yaitu dalam arah penurunan terbesar pada potensial.

Contoh :

Jika suhu pada seberang titik dalam suatu benda homogen diberikan oleh $T = e^{xy} - xy^2 - x^2yz$, ke mana arah yang memberikan penurunan suhu terbesar di titik $(1, -1{,}2)$?

Penyelesaian :

Penurunan suhu terbesar di $(1, -1{,}2)$ adalah dalam arah negatif gradien di titik tersebut. Karena $\nabla T = (ye^{xy} - y^2 - 2xyz)i + xe^{xy} - 2xy - x^2z)j + (-x^2)k$, kita temukan bahwa $-\nabla \mathrm{T}$ di $(1, -1{,}2)$ adalah $(e^{-1} - 3)i - e^{-1}j - k$.

4. Rangkuman

1. suatu fungsi $f(x, y)$ mendekati limit L sebagaimana (x, y) mendekati (x_0, y_0) dan tuliskan sebagai

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat suatu bilangan yang sesuai $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk semua (x, y) pada daerah asal f,

$| f(x, y) - L| < \epsilon$ bilamana $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 (y - y_0)^2} < \delta$.

2. Fungsi $f(x, y)$ kontinu di titik $(x_0 y_0)$ jika
   2. F terdefinisi di $(x_0 y_0)$
   3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ ada
   4. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0 y_0)$

1. Turunannya di $x = x_0$ di sebut turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) dan dinyatakan oleh $f_x(x_0, y_0)$. Jadi,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

2. Dengan cara serupa, turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan oleh $f_y(x_0 y_0)$ dan diberikan oleh

$$f_y(x_0 y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

3. Fungsi $f(x, y)$ dapat didiferensiasikan secara parsial terhadap x dan y, menghasilkan empat buah turunan parsial kedua fungsi f :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{a x^2}\right)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{a y^2}\right)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

4. Turunan parsial f terhadap x di (x, y, z) dinyatakan oleh $f_x(x, y, z)$ atau $\partial f(x, y, z)/\partial x$ dan didefinisikan oleh

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

5. Misalkan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ terdiferensiasikan di t dan misalkan $z = f(x, y)$ terdiferensiasikan di $(x(t), (y(t))$. Maka $z = f(x, (t), y(t))$ dapat didiferensiasikan di t dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$

6. Misalkan f terdiferensiasikan di p. Maka f mempunyai turunan berarah di p dalam arah vektor satuan $u = u_1 i + u_2 j$ dan $D_u f(p) = u.\nabla f(p)$, yakni $D_u f(x, y) = u_1 f_x(x, y) + u_2 f_y(x, y)$.

5. Latihan

1. Tentukan nilai-nilai fungsi dari :

   $f(x,y) = x^2 - xy^3$

   a. $\int(0,0)$
   b. $f(2,3)$
   c. $f(-1,1)$
   d. $f(-3,-2)$

2. Tentukan dan sketsakan kurva ketinggian $f(x,y) = c$ pada sistem sumbu koordinat yang sama untuk nilai-nilai c yang diberikan. Kita menyebut kurva-kurva ketinggian ini sebagai peta kontur

$$f(x,y) = x + y - 1, c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

3. Dititik (x, y) manakah di bidang fungsi-fungsi kontinu?

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

4. Tentukan f_x, f_y, dan f_z dari

$$f(x,y,z) = xy + yz + xz$$

5. Tentukan semua turunan parsial orde kedua fungsi berikut ini

$$f(x,y) = x + y + xy$$

6. $w = x^2 + y^2, x = \cos t, y = \sin t, t = \pi$

   Tentukan :

   a. Nyatakan dw/dt sebagai suatu fungsi terhadap t, baik menggunakan aturan rantai maupun dengan menyatakan w dalam t dan diferensiasikan secara langsung terhadap t
   b. Evaluasi dw/dt di titik t yang diberikan

7. Tentukan ∇f di titik yang diberikan

$$f(x,y,z) = 2x^3 - 3(x^2 + y^2)z + tan^{-1}xz, (1,1,1)$$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. $f(x, y) = xy$

   Tentukan :

   a. Daerah asal fungsi
   b. Daerah hasil fungsi
   c. Gambarkan kurva-kurva ketinggian fungsi
   d. Batas daerah asal fungsi
   e. Apakah daerah asalnya merupakan daerah terbuka, daerah tertutup, atau bukan keduanya
   f. Nyatakan apakah daerah asalnya terbatas atau tidak terbatas

2. Tentukan limit berikut ini

$$\lim_{(x,y0\to(0,In2)} e^{x-y}$$

3. Tentukan limit berikut ini dengan menulis ulang pecahan-pecahan tersebut terlebih dahulu

$$\lim_{(x,y0\to(0,In2)} \frac{sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

4. Tentukan $\partial f / \partial x$ dan $\partial f / \partial y$ dari

$$f(x, y) = (xy - 1)^2$$

5. Gambarkan diagram cabang dan tuliskan rumus aturan rantai untuk setiap turunan

   $\frac{dz}{dt}$ untuk $z = f(x, y), x = g(t), y = h(t)$

6. Dengan menganggap persamaan di bawah ini mendefinisikan y sebagai fungsi yang terdiferensiasikan terhadap x, gunakan teorema 8 untuk mencari nilai dy/dx di titik yang diberikan.

7. Tentukan turunan fungsi di P_0 dalam arah u

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2, P_0(1,1,1), u = i + j + k$$

8. Tentukan arah di mana fungsi naik atau turunan paling cepat di P_0. Kemudian tentukan turunan fungsi dalam arah tersebut

$$g(x, y, z) = xe^y + z^2, P_0(1, In\ 2, \frac{1}{2})$$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 14 : Menguasai konsep Bidang singgung dan diferensial, Nilai ekstrem dan titik pelana, Pengali lagrange, Rumus taylor untuk dua variabel, Turunan parsial dengan variabel berkendala

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Bidang singgung dan diferensial, Nilai ekstrem dan titik pelana, Pengali lagrange, Rumus taylor untuk dua variabel, Turunan parsial dengan variabel berkendala. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

7.6 Bidang singgung dan diferensial

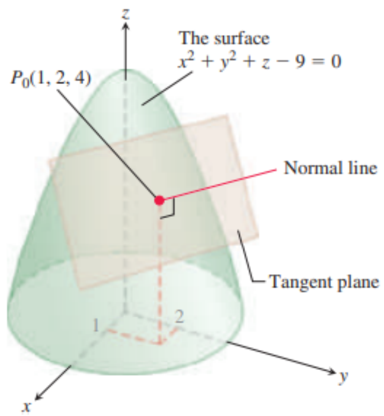
Bidang singgung di titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pada permukaan ketinggian $f(x, y, z) = c$ dari fungsi terdiferensiasikan f adalah bidang yang melalui P_0 dan merupakan normal $\nabla f|_{P_0}$. Garis normal permukaan tersebut di P_0 adalah garis yang melalui P_0 dan sejajar dengan $\nabla f|_{P_0}$. Garis singgung terhadap $f(x, y, z) = c$ di $P_0(x_0, y_0, z_0)$ = $f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$. Garis normal terhadap $f(x, y, z) = c$ di $P_0(x_0, y_0, z_0)$ yaitu $x = x_0 + f_x(P_0)t, y = y_0 + f_y(P_0)t, z = z_0 + f_z(P_0)t$.

Contoh :

Tentukan bidang singgung dan garis normal permukaan ketinggian $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ di titik $P_0(1,2,4)$.

Penyelesaian :

Permukaan tersebut diperlihatkan pada (Gambar 130).



Gambar 130 Bidang singgung

Bidang singgungnya adalah bidang yang melalui P_0 dan tegak lurus terhadap gradien f di P_0. Gradiennya adalah

$$\nabla f|_{P_0} = (2xi + 2yj + k)_{(1,2,4)} = 2i + 4j + k$$

Oleh karena itu, bidang singgungnya adalah bidang

$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0$, atau $2x + 4y + z = 14$

Garis normal permukaannya di P_0 adalah

$$x = 1 + 2t, y = 2 + 4t, z = 4 + t$$

Untuk mencari persamaan bidang singgung permukaan mulus $z = f(x, y)$ di suatu titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan $z_0 = f(x_0, y_0)$, kita perhatikan dahulu bahwa persamaan $z = f(x, y)$ ekuivalen dengan $f(x, y) - z = 0$. Oleh karena itu, permukaan $z = f(x, y)$ adalah permukaan ketinggian nol fungsi $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Turunan parsial F adalah

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - z) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y) - z) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y) - z) = 0 - 1 = -1$$

Oleh karena itu, rumus

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

Untuk bidang yang menyinggung permukaan ketinggian di P_0, berubah menjadi

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Bidang singgung terhadap permukaan $z = f(x,y)$ dari fungsi terdiferensiasikan f di titik $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ adalah $f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.

Contoh :

Tentukan bidang singgung terhadap permukaan $z = x\cos y - ye^x$ di titik (0,0,0).

Penyelesaian :

Kita hitung turunan parsial $f(x,y) = x\cos y - ye^x$ dan gunakan persamaan di atas :

$$f_x(0,0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 = 1$$

$$f_y(0,0) = (-\sin\ y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1$$

Oleh karena itu, bidang singgungnya adalah

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0$$

Atau

$$x - y - z = 0$$

Turunan berarah memainkan peran sebagai turunan biasa ketika kita ingin mengestimasi seberapa besar nilai sutau fungsi f berubah jika kita bergerak dengan jarak yang kecil ds dari suatu titik P_0 ke titik yang dekat. Jika f adalah suatu fungsi satu variabel, kita akan mendapatkan

$$df = f'(P_0)\ ds$$

Untuk fungsi dua atau lebih variabel, kita menggunakan rumus

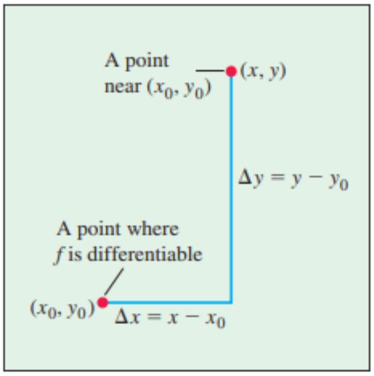
$$df = (\nabla f | P_0 \cdot u) ds,$$

Dengan u adalah arah pergerakan yang menjauh dari P_0.

Untuk mengestimasi perubahan nilai fungsi terdiferensiasikan f ketika kita bergerak dengan jarak yang kecil ds dari titik P_0 dalam arah tertentu u, kita dapat menggunakan rumus

$$d\int = \left(\nabla f|_{P_0} . u\right) ds$$

Misalkan fungsi-fungsi yang kita akan aproksimasikan adalah $z = f(x, y)$ di dekat titik (x_0, y_0) di mana kita mengetahui nilai $f, f_x, dan\ f_y$ dan di mana f terdiferensiasikan. Jika kita bergerak dari (x_0, y_0) ke sembarang titik (x, y) dengan kenaikan $\Delta x = x - x_0$ dan $\Delta y = y - y_0$ (Gambar 131)



Gambar 131 Titik pada f terdifferensiasi

Maka definisi keterdiferensiasian memberikan perubahan :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

Dengan $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ketika $\Delta x, \Delta y \to 0$. Jika kenaikan Δx dan Δy kecil, perkalian $\epsilon_1 \Delta x$ dan $\epsilon_2 \Delta y$ pada akhirnya akan tetap lebih kecil dan kita memiliki aproksimasi

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{L(x,y)}$$

Linearisasi fungsi $f(x,y)$ di titik (x_0,y_0) dengan $\int f$ terdiferensiasikan adalah fungsi

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + fx(x_0,y_0)(x-x_0) + fy(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Aproksimasi

$$f(x,y) \approx L(x,y)$$

Adalah aproksimasi linear baku f di (x_0,y_0). Dari persamaan berikut, kita memperoleh bahwa bidang $z = L(x,y)$ adalah bidang singgung permukaan $z = f(x,y)$ di titik (x_0,y_0). Jadi, linearitas fungsi dua variabel adalah aproksimasi berupa bidang singgung yang diperoleh dengan cara yang sama dengan linearisasi fungsi satu variabel yang merupakan aproksimasi berupa garis singgung.

Jika $\int$ memiliki turunan parsial pertama dan kedua yang kontinu pada satu himpunan terbuka yang memuat persegi panjang R yang berpusat di (x_0,y_0) dan jika M adalah sembarang batas atas untuk nilai-nilai $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{xy}|$ pada R maka galat $E(x,y)$ yang ditimbulkan dengan mengganti $f(x,y)$ pada R dengan linearisasinya

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + fx(x_0,y_0)(x-x_0) + fy(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Memenuhi pertidaksamaan

$$|E(x,y)| < \frac{1}{2} M(|x-x_0| + |y-y_0|)^2$$

Untuk membuat $|E(x,y)|$ kecil untuk suatu M yang diberikan, kita cukup membuat $|x-x_0|$ dan $|y-y_0|$ kecil. Jika kita bergerak dari (x_0,y_0) ke titik (x_0+dx, y_0+dy) yang dekat, perubahan yang dihasilkan

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Contoh :

Perusahaan Anda membuat tanki penyimpangan gula tetes berbentuk silinder yang terbuat dari baja tahan karat dan memiliki 25 ft serta beradius 5 ft. Seberapa sensitivitas volume tanku terhadap perubahan kecil dalam tinggi dan radiusnya?

Penyelesaian:

Karena volume silinder $V = \pi r^2 h$, diferensial totalnya memberikan aproksimasi perubahan volume sebagai:

$dV = V_r(5,25)dr + V_h(5,25)dh$

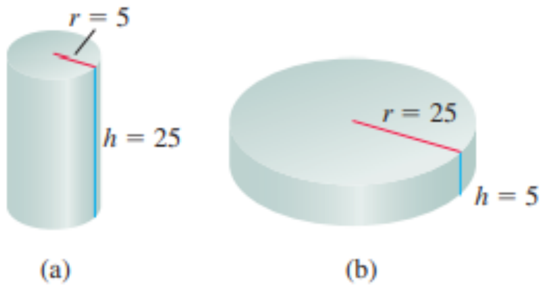
$= (2\pi rh)_{(5,25)}dr + (\pi r^2)_{(5,25)}dh$

$= 250\pi\ dr + 25\pi\ dh$

Oleh karena itu, perubahan 1 satuan dalam r mengakibatkan perubahan dalam V sekitar 250π satuan. Perubahan 1 satuan dalam h mengakibatkan perubahan dalam V sekitar 25π satuan. Volume tanki 10 kali lebih sensitif terhadap perubahan kecil dalam r daripada sensitivitas volume tanki terhadap perubahan kecil dalam h dengan ukuran yang sama. Karena insinyur kontrol kualitas menaruh perhatian untuk memastikan tanki tersebut memiliki volume yang benar, Anda akan memberikan perhatian khusus kepada radiusnya. Sebaliknya, jika nilai-nilai r dan h dipertukarkan, yaitu $r = 25$ dan $h = 5$, maka diferensial total V menjadi

$$dV = (2\pi h)_{(25,5)}dr + (\pi r^2)_{(25,5)}dh = 250\pi\ dr + 625\pi\ dh$$

Sekarang volume lebih sensitif terhadap perubahan dalam h daripada perubahan dalam r (Gambar 1.14). Aturan umumnya adalah bahwa suatu fungsi paling sensitif terhadap perubahan kecil dalam variabel yang menghasilkan turunan parsial terbesar.



Gambar 132 Volume benda sama dengan jari-jari berbeda

Hasil yang sejalan berlaku untuk fungsi lebih dari dua variabel yang terdiferensiasikan :

1. Linearisasi dari $f(x, y, z)$ di titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ adalah
$$L(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z)$$
2. Misalkan R adalah benda pejal berbentuk segi empat tertutup yang berpusat di P_0 dan terletak pada suatu daerah terbuka di mana turunan parsial kedua f kontinu. Misalkan pula bahwa $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{zz}|, |f_{xy}|, |f_{xz}|$ dan $|f_{yz}|$ bernilai kurang dari atau sama dengan M pada R. Oleh karena itu, galat $E(x, y, z) = f(x, y, z) - L(x, y, z)$ pada aproksimasi f oleh L adalah terbatas pada R yang dinyatakan oleh ketidaksamaan
$$|E| \leq \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|)^2$$
3. Jika turunan parsial kedua f kontinu dan jika x, y, z berubah dari x_0, y_0, z_0 sebesar dx, dy, dz yang cukup kecil maka diferensial total
$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz$$
Memberikan aproksimasi yang baik untuk perubahan f yang dihasilkan

Contoh :

Tentukan linearisasi $L(x, y, z)$ untuk

$$f(x, y, z) = x^2 - xy + 3\sin z$$

Di titik $(x_0, y_0, z_0) = (2,1,0)$. Tentukan batas atas galat yang timbul dengan menggantikan f oleh L pada daerah segi empat.

$$R: |x - 2| \leq 0{,}01, |y - 1| \leq 0{,}02, |z| \leq 0{,}01$$

Penyelesaian :

Perhitungan biasa memberikan

$$f(2,1,0) = 2, f_x(2,1,0) = 3, f_y(2,1,0) = -2, f_z(2,1,0) = 3$$

Karenanya,

$$L(x, y, z) = 2 + 3(x - 2) + (-2)(y - 1) + 3(z - 0)$$
$$= 3x - 2y + 3z - 2$$

Karena

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 0, f_{zz} = -3\sin z\,, f_{xy} = -1, f_{xz} = 0, f_{yz} = 0,$$

Dan $|-3\sin z| \leq 3\sin 0{,}01 \approx 0{,}03$. Kita dapat mengambil $M = 2$ sebagai suatu batas untuk turunan-turunan parsial keduanya. Jadi, galat yang timbul dengan menggantikan f oleh L di R memenuhi

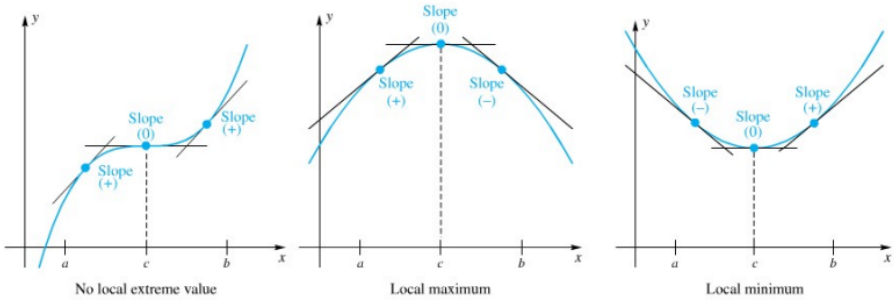
$|E| \leq \frac{1}{2}(2)(0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}01)^2 = 0{,}0016.$

7.7 Nilai ekstrem dan titik pelana

Misalkan S daerah asal f, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

1) $f(c)$ nilai maksimum lokal f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap S$.
2) $f(c)$ nilai minimum lokal f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap S$.
3) $f(c)$ nilai ekstrem lokal f jika ia berupa nilai maksimum lokal atau minimum lokal.

Teorema titik kritis berlaku dengan ungkapan nilai ekstrem diganti dengan nilai ekstrem lokal, bukti pada dasarnya sama. Jadi titik-titik kritis adalah calon untuk titik tempat kemungkinan terjadinya ekstrem lokal. Kita katakan calon karena kita tidak menuntut bahwa setiap titik harus merupakan ekstrem lokal. Bagian kiri grafik pada (Gambar 133) membuat ini jelas. Tetapi, jika turunan adalah positif pada satu pihak dari titik kritis dan negatif pada pihak lainnya, maka kita mempunyai ekstrem lokal, seperti yang diperlihatkan pada grafik tengah dan kanan.



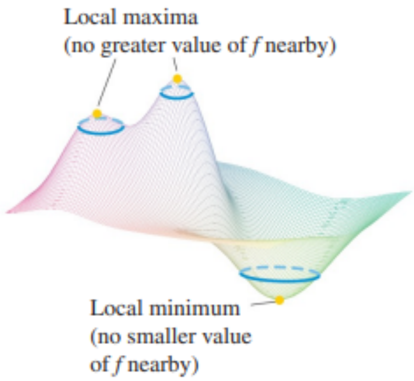
Gambar 133 Nilai minimum dan maksimum kurva

Jika $f(x, y)$ didefinisikan pada suatu daerah R yang memuat titik (a, b) maka :

a. $f(a, b)$ adalah nilai maksimum lokal f jika $f(a, b) \geq f(x, y)$ untuk semua titik (x, y) yang berada di daerah asal dan suatu cakram terbuka yang berpusat di (a, b).

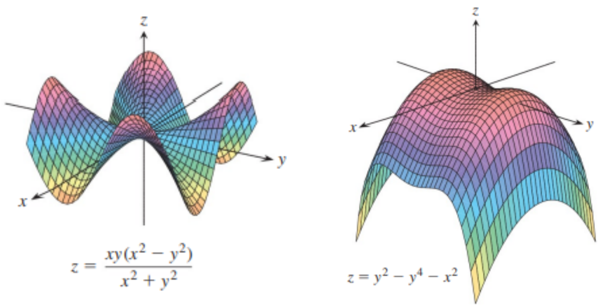
b. $f(a, b)$ adalah nilai minimum lokal $\int f$ jika $f(a, b) \leq f(x, y)$ untuk semua titik (x, y) yang berada di daerah asal dan suatu cakram terbuka yang berpusat di (a, b).

Maksimum lokal menyerupai puncak gunung pada permukaan $z = f(x, y)$ dan minimum lokal menyerupai dasar lembah (Gambar 134). Di titik yang demikian, bidang singgungnya jika ada memiliki arah horizontal. Ekstrem lokal disebut juga ekstrem relatif.



Gambar 134 Lokal maksimum dan lokal minimum

Jika $f(x, y)$ memiliki nilai maksimum dan minimum lokal di suatu titik interior daerah asalnya dan jika turunan-turunan parsialnya ada maka $f_y(a, b) = 0$. Titik interior daerah asa; fungsi $f(x, y)$ di mana f_x dan f_y bernilai nol atau di mana salah satu atau kedua-duanya dari f_x dan f_y tidak ada di sebut titik kritis f. Fungsi terdiferensiasikan $f(x, y)$ memiliki titik pelana di titik kritis (a, b), terdapat titik-titik (x, y) pada daerah asal di mana $f(x, y) > f(a, b)$ dan titik-titik (x, y) pada daerah asal di mana $f(x, y) < f(a, b)$. Titik yang bersesuaian $\left(a, b, f(a, b)\right)$ yang berada di permukaan $z = f(x, y)$ disebut titik pelana permukaan tersebut (Gambar 135)

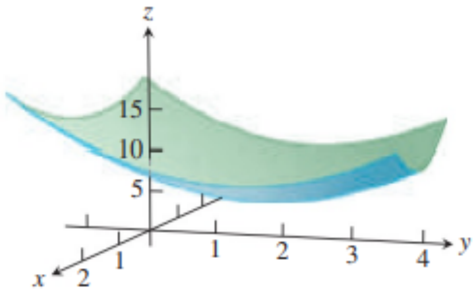


Gambar 135 Titik permukaan pelana

Contoh : Tentukan nilai-nilai ekstrem lokal $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$

Penyelesaian :

Daerah asal f adalah semua titik pada bidang dan turunan-turunan parsial $f_x = 2x$ dan $f_y = 2y - 4 = 0$. Satu-satunya kemungkinannya adalah titik (0,2) dengan nilai d di titik tersebut adalah 5. Karena $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 + 5$ tidak pernah kurang daripada 5, kita melihat bahwa titik kritis (0,2) memberikan suatu minimum lokal (Gambar 136)



Gambar 136 Titik kritis untuk lokal minimum

Jika $f(x, y)$ dan turunan parsialnya pertama serta keduanya kontinu pada suatu cakram yang berpusat di (a, b) dan $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ maka

1) f memiliki maksimum lokal di (a, b) jika $f_{xx} < 0$ dan $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ di (a, b)
2) f memiliki minimum lokal di (a, b) jika $f_{xx} > 0$ dan $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ di (a, b)
3) $\int f$ memiliki titik pelana di (a, b) jika $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ di (a, b)
4) Uji tidak memberikan kesimpulan di (a, b) jika $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$ di (a, b). Dalam hal ini, kita harus mencari cara lain untuk menentukan tingkah laku $\int di\ (a, b)$

Kita dapat menyusun pencarian ekstrem mutlak fungsi kontinu $f(x, y)$ pada daerah yang tertutup dan terbatas dalam tiga langkah :

a. Buatlah daftar berisi titik-titik interior R di mana f mungkin memiliki maksimum dan minimum lokal di titik-titik tersebut dan evaluasi f di titik-titik ini. Titik-titik tersebut adalah titik-titik f.
b. Buatlah daftar berisi titik-titik batas R di mana f mungkin memiliki maksimum dan minimum lokal dan evaluasi titik-titik ini. Kita perlihatkan bagaimana melakukan hal ini pada contoh berikutnya.
c. Carilah dan daftar-daftar tersebut nilai maksimum dan minimum f. Nilai-nilai ini akan menjadi nilai maksimum dan minimum mutlak f pada R. Karena maksimum dan minimum mutlak juga merupakan maksimum dan minimum lokal, nilai maksimum dan minimum lokal f tampak di suatu tempat dalam daftar-daftar yang dibuat pada langkah a dan b.

7.8 Pengali lagrange

Untuk memaksimumkan atau meminimumkan $f(p)$ terhadap kendala $g(p) = 0$, selesaikan sistem persamaan

$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ dan $g(p) = 0$

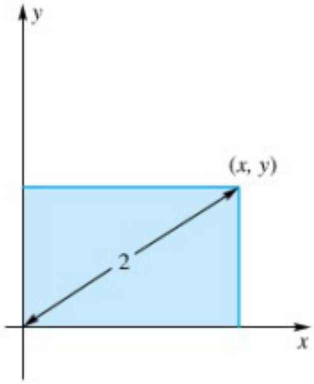
Untuk p dan λ. Tiap titik p yang demikian adalah suatu titik kritis untuk masalah nilai ekstrem terkendala dan λ yang berpadanan disebut pengali lagrange.

Contoh :

Berapa luas daerah terbesar yang dapat dimiliki oleh suatu persegi panjang jika panjang diagonalnya 2?

Penyelesaian :

Letakkan persegi panjang itu di kuadran pertama dengan dua sisinya sepanjang sumbu-sumbu koordinat maka titik sudut yang berhadapan dengan titik asal mempunyai koordinat (x, y) dengan x dan y positif (Gambar 137)



Gambar 137 Panjang diagonal

Panjang diagonalnya adalah $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ dan luasnya adalah xy. Jadi kita boleh merumuskan masalah berupa pemaksimuman $f(x, y) = xy$ terhadap kendala $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Gradien-gradien yang berpadanan adalag

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j = yi + xj$$

$$\nabla g(x, y) = g_x(x, y)i + g_y(x, y)j = 2xi + 2yj$$

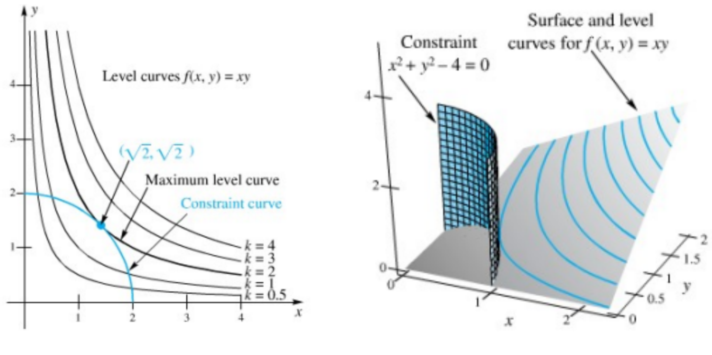
Sehingga persamaan-persamaan lagrange menjadi

$$y = \lambda(2\text{x})$$

$$x = \lambda(2\text{y})$$

$$x^2y^2 = 4$$

Yang harus kita selesaikan secara serentak. Jika persamaan pertama kita kalikan dengan y dan persamaan kedua dengan x, kita dapatkan $y^2 = 2\lambda\text{xy}$ dan $x^2 = 2\lambda\text{xy}$ yang menghasilkan $y^2 = x^2$. Dari perhitungan di atas kita akan mendapatkan $x = \sqrt{2}$ dan $y = \sqrt{2}$ dan dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini, kita akan mendapatkan $\lambda = \frac{1}{2}$. Jadi penyelesaian persamaan ini akan mempertahankan x dan y positif, yaitu $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$. Kita simpulkan bahwa persegi panjang yang luasnya terbesar dengan diagonal 2 adalah persegi, yang panjang sisinya $\sqrt{2}$. Luasnya adalah 2. Interpretasi geometri masalah ini dapat dilihat pada (Gambar 138).



Gambar 138 Interpretasi geometri

Kita dapat mencari maksimum dan minimum fungsi $f(x, y)$pada himpunan tertutup dan terbatas S dengan menggunakan langkah-langkah berikut :

a. Gunakan metode-metode dalam mencari maksimum dan minimum pada bagian dalam S.
b. Gunakan pengali lagrange untuk mencari titik-titik sepanjang perbatasan yang memberikan maksimum atau minimum lokal.
c. Hitung fungsi pada titik-titik ini untuk mencari maksimum dan minimum pada S.

7.9 Rumus taylor untuk dua variabel

Misalkan $f(x, y)$ dan turunan-turunan parsialnya sampai dengan orde ke $n + 1$ kontinu pada suatu daerah persegi panjang terbuka R yang berpusat di titik (a, b) maka pada R, (persamaan 1)

$$f(a + h, b + k)$$

$$= f(a, b) + (hf_x + kf_y)\big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\big|_{(a,b)}$$

$$+ \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx} + 3h^2 kf_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})\big|_{(a,b)} + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n} f\bigg|_{(a,b)} +\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1} f\bigg|_{(a,ch,b+ck)}$$

Suku-suku n turunan pertama dievaluasi di (a, b). Suku terakhir dievaluasi di suatu titik $(a + ch, b + ck)$ yang berada pada ruas garis yang menghubungkan (a, b) dan $(a + ch, b + ck)$. Jika $(a, b) = (0,0)$ dan kita memperlakukan h dan k sebagai variabel-variabel bebas, maka persamaannya yaitu, (persamaan 2)

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}\left(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy}\right)$$
$$-\frac{1}{3!}\left(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}\right) + \cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(x^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nx^{n-1}y\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots + y^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(x^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} + (n+1)x^n y\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^n \partial y} + \cdots + y^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)\Bigg|_{(cx,cy)}$$

Suku-suku n turunan pertama dievaluasi di (a, b). Suku terakhir dievaluasi di suatu titik yang berada pada ruas garis yang menghubungkan titik asal dan (x, y). Rumus Taylor memberikan aproksimasi polinom fungsi dua variabel. Suku-suku n turunan pertama memberikan polinomnya, suku terakhir memberikan galat aproksimasinya. Tiga suku pertama rumus Taylor memberikan linearisasi fungsinya. Untuk memperbaiki linearisasi tersebut, kita perlu menambahkan suku-suku berpangkat lebih tinggi.

7.10 Turunan parsial dengan variabel berkendala

Saat akan menentukan $\partial w/\partial x$ ketika variabel-variabel pada fungsi $w = f(x, y, z)$ berkaitan dengan persamaan lain memiliki tiga langkah. Langkah-langkah ini juga dapat digunakan dalam menentukan $\partial w/\partial y$ dan $\partial w/\partial z$.

a. Putuskan variabel-variabel mana yang tak-bebas dan mana yang bebas.
b. Hilangkan variabel tak-bebas lainnya pada pernyataan untuk w.

c. Diferensiasikan seperti biasa

Jika kita tidak bisa melakukan langkah (b) setelah memutuskan variabel-variabel mana yang tak-bebas, kita mendiferensiasikan persamaan-persamaan tersebut sebagaimana adanya dan mencoba menyelesaikannya untuk $\partial w/\partial x$ setelahnya. Dalam memperlihatkan variabel-variabel apa yang dianggap bebas dalam penghitungan suatu turunan, kita dapat menggunakan notasi berikut ini :

a) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ $\partial w/\partial x$ dengan x dan y sebagai variabel bebas

b) $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t}$ $\partial w/\partial x$ dengan y, x dan t sebagai variabel bebas

Dalam menyelesaikan masalah-masalah sering kali membantu untuk memulainya dengan suatu diagram panah yang memperlihatkan bagaimana variabel-variabel dan fungsi-fungsi berkaitan jika :

$$w = x^2 + y - z + \sin t \;\; dan\; x + y = t$$

Dan kita diminta untuk menentukan $\partial w/\partial x$ ketika x, y, dan z adalah variabel bebas, diagram yang sesuai yaitu pada (persamaan 3) :

Variabel-variabel bebas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rightarrow w$$

Variabel-variabel tak bebas

Variabel-variabel perantara

Untuk menghindari kebingungan antara variabel-variabel bebas dan variabel-variabel perantara dengan nama-nama simbol yang sama pada diagram tersebut adalah bermanfaat untuk menamai kembali variabel-variabel perantara. Dengan demikian, misalkan $u = x, v = y \; dan \; s = z$ menyatakan variabel-variabel perantara yang dinamai kembali. Dengan notasi ini, diagram panahnya menjadi seperti pada (persamaan 4).

Variabel-variabel bebas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} \rightarrow w$$

Variabel-variabel tak bebas

Variabel-variabel perantara dan relasi-relasi

Diagram tersebut memperlihatkan variabel-variabel bebas berada pada bagian kiri, variabel-variabel perantara dan kaitannya dengan variabel-variabel bebas berada pada bagian tengah dan variabel tak-bebas berada pada bagian kanan. Fungsi w sekarang menjadi:

$$w = u^2 + v - s + \sin t$$

Dengan

$$u = x; s = z; t = x + y$$

Untuk menentukan $\partial w/\partial x$, kita terapkan bentuk empat variabel aturan rantai pada w, yang dituntut oleh diagram panah pada persamaan (4) :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= (2u)(1) + (1)(0) + (-1)(0) + (\cos t)(1)$$

$$= 2u + \cos t$$

$$= 2x + \cos(x + y)$$

4. Rangkuman

1. Garis normal permukaan tersebut di P_0 adalah garis yang melalui P_0 dan sejajar dengan $\nabla f|_{P_0}$.
2. Garis singgung terhadap $f(x, y, z) = c$ di $P_0(x_0, y_0, z_0) =$ $f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$.
3. Garis normal terhadap $f(x, y, z) = c$ di $P_0(x_0, y_0, z_0)$ yaitu $x = x_0 + f_x(P_0)t, y = y_0 + f_y(P_0)t, z = z_0 + f_z(P_0)t$.
4. Bidang singgung terhadap permukaan $z = f(x, y)$ dari fungsi terdiferensiasikan f di titik $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ adalah $f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.
5. Linearisasi dari $f(x, y, z)$ di titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ adalah
$$L(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z)$$
6. Jika turunan parsial kedua f kontinu dan jika x, y, z berubah dari x_0, y_0, z_0 sebesar dx, dy, dz yang cukup kecil maka diferensial total
$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz$$
7. Jika $f(x, y)$ dan turunan parsialnya pertama serta keduanya kontinu pada suatu cakram yang berpusat di (a, b) dan $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ maka
   i. f memiliki maksimum lokal di (a, b) jika $f_{xx} < 0$ dan $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ di (a, b)
   ii. f memiliki minimum lokal di (a, b) jika $f_{xx} > 0$ dan $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ di (a, b)
   iii. $\int f$ memiliki titik pelana di (a, b) jika $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ di (a, b)
   iv. Uji tidak memberikan kesimpulan di (a, b) jika $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$ di (a, b). Dalam hal ini, kita harus mencari cara lain untuk menentukan tingkah laku $\int f$ di (a, b)

5. Latihan

1. $x + y + z = 1, P_0(0,1,0)$

   Tentukan persamaan untuk :

   a. Bidang singgung;

   b. Garis normal di titik P_0 pada permukaan yang diberikan

2. Tentukan persamaan bidang yang menyinggung permukaan yang diberikan di titik berikut :

   $z = \sqrt{y - x}, (1,2,1)$

3. Tentukan semua maksimum lokal dan titik pelana fungsi-fungsi berikut :

   a. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

   b. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

4. Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ pada bola $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

5. Tentukan tiga bilangan riil yang jumlahnya 9 dan jumlah kuadrat-kuadratnya sekecil mungkin

6. Misalkan $U = f(P, V, T)$ adalah energi internal gas yang mematuhi hukum gas ideal $PV = nRT$ (n dan R konstan). Tentukan :

   a. $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_v$

   b. $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Temperatur celcius pada suatu daerah di ruang diberikan oleh $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$. Sebuah partikel bergerak di daerah tersebut dan posisinya pada waktu t diberikan oleh $x = 2t^2, y = 3t, z = -t^2$ dengan waktu diukur dalam detik dan jarak dalam meter. Tentukan :
   a. Seberapa cepat temperatur yang dirasakan partikel berubah dalam derajat celcius per meter di titik $P(8,6,-4)$?
   b. Seberapa cepat temperatur yang dirasakan partikel berubah dalam derajat celcius/s di titik P?

2. Tentukan titik kritis $f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$ di kuadran pertama terbuka $(x > 0, y > 0)$ dan perlihatkan bahwa f mencapai minimum di titik tersebut.
3. Tentukan titik-titik pada elips $x^2 + 2y^2 = 1$ di mana $f(x, y) = xy$ memiliki nilai-nilai ekstrem.
4. Gunakan rumus Taylor untuk $f(x, y)$ di titik asal untuk mencari aproksimasi kuadratik dan kubik f di dekat titik asal.
   a. $f(x, y) = y \sin x$
   b. $f(x, y) = \sin x \cos y$
   c. $f(x, y) = cos(x^2 + y^2)$
   5. Tentukan $(\partial u/\partial y)_x$ di titik $(u, v) = (\sqrt{2}, 1)$ jika $x = u^2 + v^2$ dan $y = uv$
6. Jika $z = x + f(u)$ di mana $u = xy$, perlihatkan bahwa :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C . PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi turunan parsial dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Turunan	Orde	Limit	Tangen	Normal
Kontinu	Diskontinu	Differensial	Parsial	Variabel

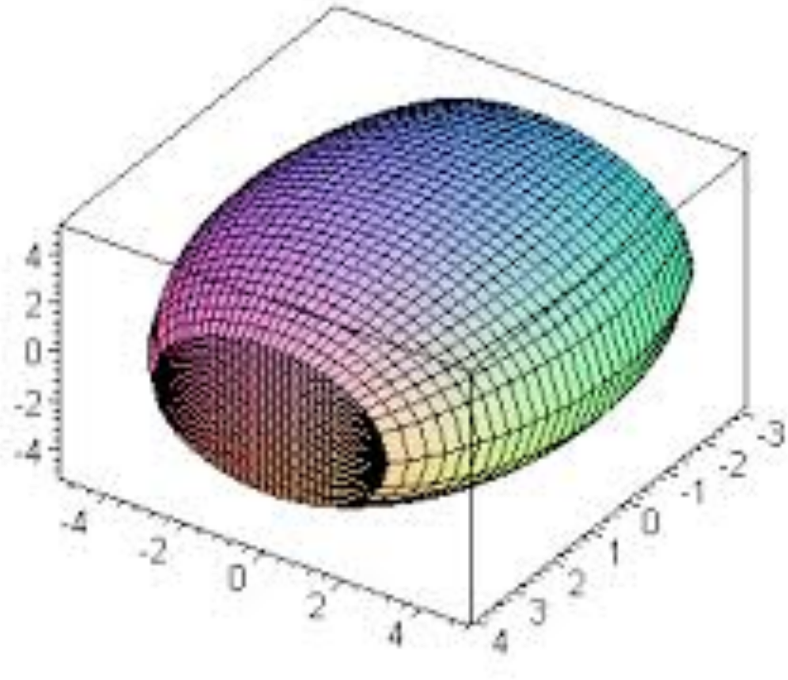
4. Referensi

Jr, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Kalkulus Thomas Edisi Ketiga Belas Jilid 2.* Jakarta : Erlangga.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2008). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2008). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2.* Jakarta: Erlangga.

MODUL 8 INTEGRAL LIPAT



MODUL 8 INTEGRAL LIPAT

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Modul ini memuat dua kegiatan pembelajaran yang terdiri dari integral lipat dua dan integral lipat tiga. Integral lipat ini memuat tentang Integral lipat dua dan Iterasinya pada persegi panjang, Integral lipat dua pada daerah umum, Luas Daerah dengan Integral Lipat dua, Integral lipat dua pada bentuk Polar, Integral lipat tiga di koordinat persegi panjang, Momen dan Pusat Massa, Integral Lipat Tiga pada Silinder dan Koordinat Bola, Substitusi pada Integral Lipat. Dengan menggunakan modul ini, mahasiswa dapat mempelajari setiap materi dengan menggunakan dua kegiatan pembelajaran yang dapat dilakukan secara mnadiri maupun berkelompok.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul delapan

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral.

5. Kegunaan Modul Delapan

   Kegunaan modul delapan ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan integral lipat. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai integral lipat untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Integral lipat dua dan Iterasinya pada persegi panjang, Integral lipat dua pada daerah umum, Luas Daerah dengan Integral Lipat dua, Integral lipat dua pada bentuk Polar, Integral lipat tiga di koordinat persegi panjang, Momen dan Pusat Massa, Integral Lipat Tiga pada Silinder dan Koordinat Bola, Substitusi pada Integral Lipat

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 15 : Menguasai konsep Integral lipat dua dan Iterasinya pada persegi panjang, Integral lipat dua pada daerah umum, Luas Daerah dengan Integral Lipat dua, Integral lipat dua pada bentuk Polar

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

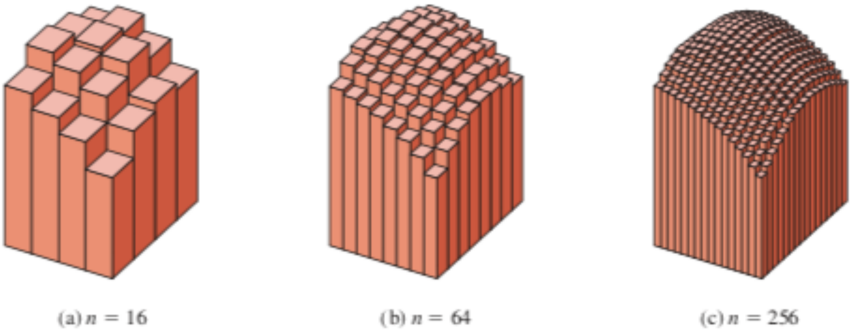
   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Integral lipat dua dan Iterasinya pada persegi panjang, Integral lipat dua pada daerah umum, Luas Daerah dengan Integral Lipat dua, Integral lipat dua pada bentuk Polar. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Integral lipat dua dan Iterasinya pada persegi panjang, Integral lipat dua pada daerah umum, Luas Daerah dengan Integral Lipat dua, Integral lipat dua pada bentuk Polar. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

8.1 Integral lipat dua dan Iterasinya pada persegi panjang

Integral lipat dua dilakukan pada fungsi $f(x, y)$ yang terdefinisi pada daerah $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. Dalam pengintgralan lipat dua ini, sama halnya dengan pendekatan pada integral lipat satu dengan melalukan pembagian interval menjadi beberapa daerah yang berbentuk persegi panjang. Bentuk persegi panjang yang terbentuk dipartisi sekecil mungkin dengan lebar Δx dan tinggi Δy dengan luas $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Jika jumlah dari partisi R diberikan dalam beberapa urutan, maka luas daerahnya yaitu $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3, \dots, \Delta A_n$, dimana ΔA_k adalah luas dari k persgei panjang kecil.



Gambar 139 Partisi Ruang

Bentuk penjumlahan Riemann dari R, dengan memilih titik (x_k, y_k) dalam k persegi panjang kecil, dengan mengalikan nilai dari f di titik tersebut dengan luas ΔA_k dan menjumlahkannya bersama, maka:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Dengan proses yang sama seperti integral sebelumnya, maka sebuah fungsi f dikatakan terintegralkan dan limit dari sigma pada fungsi tersebut dapat ditentukan ketika $|P| \to 0$, yaitu:

$$\lim_{\|P\|} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

ketika $|P| \to 0$ maka bilangan n akan naik, sehingga limitnya dapat dituliskan dengan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Integral dari fungsi f ini dituliskan dengan

$$\iint_R f(x,y)dA$$

atau

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

Hasil dari perhitungan integral lipat dua dapat juga menentukan volume dari suatu fungsi yaitu:

$$Volume = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x,y)dA$$

dimana $\Delta A_k \to 0$ ketika $n \to \infty$.

Teorema Fubini untuk menghitung Integral lipat dua. Misalkan untuk menghitung volume dibawah $z = 4 - x - y$ pada daerah $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ pada bidang xy. Jika kita aplikasikan metode mengiris pada modul sebelumnya, maka irisannya tegak lurus dengan sumbu x, maka volumenya adalah

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx$$

dimana $A(x)$ adalah luas persinggungan di x. Untuk setiap nilai x, dapat dihitung $A(x)$ seperti integral

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy$$

Jadi, volume yang terbentuk adalah

$$Volume = \int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left[4x - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx$$

$$= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5$$

Teorema Fubini yaitu, Jika $f(x,y)$ adalah kontinu melalui daerah $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, maka

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Contoh :

Tentukanlah volume yang dibatasi oleh kurva $z = 10 + x^2 + 3y^2$ dan $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Jawab:

$$V = \iint_R (10 + x^2 + 3y^2)dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 (10 + x^2 + 3y^2)dydx$$

$$= \int_0^1 [10y + x^2y + y^3]_{y=0}^{y=2}\, dx$$

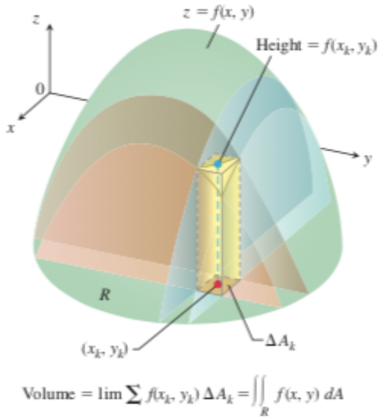
$$= \int_0^1 (20 + 2x^2 + 8)\, dx$$

$$= \left[20x + \frac{2}{3}x^2 + 8x \right]_0^1$$

$$= \frac{86}{3}$$

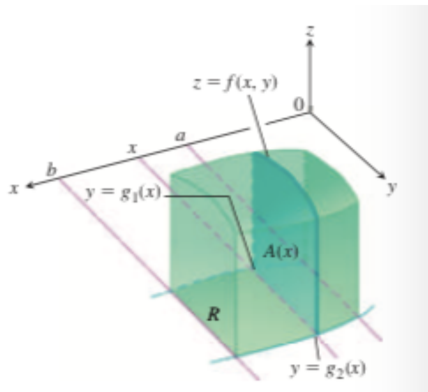
8.2 Integral lipat dua pada daerah umum

Jika $f(x,y)$ adalah positif dan kontinu pada R, didefinisikan volume dari benda padat R dan permukaan $z = f(x,y)$ menjadi $\iint_R f(x,y)dA$.



Gambar 140 Volume benda padat

Jika R adalah sebuah daerah pada bidang xy yang dibatasi oleh kurva $y = g_2(x)$ dan $y = g_1(x)$ dan dengan garis $x = a, x = b$, maka volumenya dapat ditentukan dengan menggunakan metode mengiris. Seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 141 Volume dengan metode mengiris

Pertama kita menghitung area persilangan:

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\, dy$$

dan kemudian mengintegralkan $A(x)$ dari $x = a$ ke $x = b$ untuk mendapatkan volume yaitu

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Misallkan $f(x,y)$ adalah kontinu pada daerah R. Jika R didefinisikan pada $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, dengan g_1 dan g_2 kontinu di $[a,b]$, maka

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Jika R didefinisikan pada $c \leq x \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, dengan h_1 dan h_2 kontinu di $[c,d]$, maka

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Jika $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ adalah kontinu di daerah yang dibatasi R, maka berikut ini beberapa sifat integral lipat dua:

1. Perkalian dengan konstanta

$$\iint_R cf(x,y) dA = c \iint_R f(x,y) dA$$

2. Operasi Penjumlahan dan pengurangan

$$\iint_R (f(x,y) \pm g(x,y)) dA = \iint_R f(x,y) dA \pm \iint_R g(x,y) dA$$

3. Dominasi

   a. $\iint_R f(x,y) dA \geq 0$ jika $f(x,y) \geq 0$ di R

   b. $\iint_R f(x,y) dA \geq \iint_R g(x,y) dA$ jika $f(x,y) \geq g(x,y)$ di R

4. Pertambahan

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

Jika R adalah gabungan dari daerah R_1 dan R_2.

8.3 Luas Daerah dengan Integral Lipat dua

Luas daerah yang tertutup, yang dibatasi oleh R adalah

$$A = \iint_R dA$$

Nilai rata-rata f pada R dihitung dengan:

$$\text{Nilai rata} - \text{rata}\, f \text{ pada R } = \frac{1}{Luas\ R} \iint_R f\ dA$$

Contoh :

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh R oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x + 2$.

Jawab:

Untuk menentukan luas pada daerah R, maka kita dapat membaginya menjadi dua daerah yaitu R_1 dan R_2, sehingga:

$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\, dy$$

atau dapat juga dituliskan dengan:

$$A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy\, dx$$

dapat disederhanakan dengan

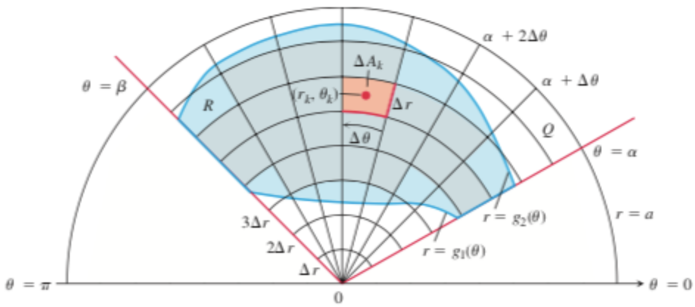
$$A = \int_{-1}^{2} [y]_{x^2}^{x+2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

8.4 Integral lipat dua pada bentuk Polar

Misalkan fungsi $f(r, \theta)$ adalah terdefinisi pada R yang terbatas pada $\theta = \alpha$ dan $\theta = \beta$ dan kontinu pada kurva $r = g_1(\theta)$ dan $r = g_2(\theta)$. Misalkan juga $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq a$ untuk setiap nilai θ diantara α dan β. Maka R berada di daerah Q yang didesinisikan oleh $0 \leq r \leq a$ dan $\alpha \leq \theta \leq \beta$, dimana $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 142 Partisi Busur

Pada daerah yang terbentuk pada gambar diatas, busur dipotong dari titik tengah dengan jari-jari $\Delta r, 2\Delta r, \ldots, m\Delta r$, dimana $\Delta r = a/m$, dengan

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \alpha + \Delta\theta, \quad \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \quad \ldots, \quad \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$$

dimana $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{m'}$.

Misalkan (r_k, θ_k) merupakan titik pada persegi panjang polar dengan luas ΔA_k, maka bentuk penjumlahannya

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\, \Delta A_k$$

Jika f adalah kontinu melalui R, penjumlahan akan mendekati limit ketika didefiniskan untuk membuat Δr dan $\Delta\theta$ mendekati 0. Limit dari penjumlahan menjadi definisi dari integral lipat dua dari f pada R. Dituliskan dengan:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r,\theta)\, dA = \iint_R f(r,\theta)\, rdr\, d\theta$$

dengan menggunakan versi teorema Fubini, maka dapat dituliskan dengan

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Luas dari daerah tertutup dan dibatasi R pada koordinar polar adalah

$$A = \iint_R f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Integral pada kartesius dapat diubah menjadi integral polar yaitu dengan mensubstitusikan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ dan mengubah $dx\, dy$ menjadi $rdr\, d\theta$. Sehingga dapat dituliskna dengan :

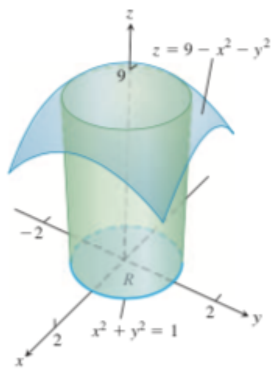
$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Contoh:

Tentukanlah volume dari daerah yang dibatasi oleh paraboloid $z = 9 - x^2 - y^2$ dan dibawah satuan lingkaran di bidang xy.

Jawab:

Satuan lingkaran adalah $x^2 + y^2 = 1$, dengan dideskripsikan pada koordinat polar oleh $r = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Daerah yang terbentuk seperti gambar berikut.



Gambar 143 Volume dibatasi Parabola dan lingkaran

Volumenya dapat dihitung seperti berikut

$$\iint\limits_R (9 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9r - r^3)\ dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \frac{17}{4} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{17\pi}{2}$$

4. Rangkuman

1) Teorema Fubini yaitu, Jika $f(x, y)$ adalah kontinu melalui daerah $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, maka

$$\iint\limits_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

2) Misallkan $f(x, y)$ adalah kontinu pada daerah R. Jika R didefinisikan pada $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, dengan g_1 dan g_2 kontinu di $[a, b]$, maka

$$\iint\limits_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

3) Jika R didefinisikan pada $c \leq x \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, dengan h_1 dan h_2 kontinu di $[c, d]$, maka

$$\iint\limits_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dx\, dy$$

4) Luas daerah yang tertutup, yang dibatasi oleh R adalah

$$A = \iint_R dA$$

5) Nilai rata-rata f pada R dihitung dengan:

$$\text{Nilai rata} - \text{rata } f \text{ pada R } = \frac{1}{Luas\ R} \iint_R f\ dA$$

6) Luas dari daerah tertutup dan dibatasi R pada koordinar polar adalah

$$A = \iint_R f(r, \theta)\ r\ dr\ d\theta$$

7) Integral pada kartesius dapat diubah menjadi integral polar yaitu dengan mensubstitusikan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ dan mengubah $dx\,dy$ menjadi $rdr\ d\theta$. Sehingga dapat dituliskna dengan :

$$\iint_R f(x, y)\ dx\ dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ dr\ d\theta$$

5. Latihan

1. Tentukanlah integral berikut:
   a. $\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1}(x + y + 1)dydx$
   b. $\int_{0}^{3}\int_{-2}^{0}(x^2y - 2xy)dydx$
   c. $\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y\sin x)dxdy$
2. Tentukanlah integral dari daerah berikut dan gambarlah daerah yang terbentuk pada bidang pv.

$$\int_{-2}^{0}\int_{v}^{-v} 2\ dp\ dv$$

3. Tentukanlah luas lingkaran dengan jari-jari luar 2 dan jari-jari dalam 1 dengan menggunakan:
   a. Teorema fubini

b. Geometri sederhana

4. Ubahlah integral kartesius berikut dalam bentuk integral polar, kemudian tentukanlah nilai integral polarnya

   a. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} (x+2y)\, dy\, dx$

   b. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

5. Tentukanla luas dari daerah yang dipotong dari kuadran pertama oleh kurva $r = 2(2 - \sin 2\theta)^{\frac{1}{2}}$.

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah integral berikut:

   a. $\int_0^1 \int_1^2 (xye^x) dydx$

   b. $\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{y}{1+xy}\right) dydx$

   c. $\int_\pi^{2\pi} \int_0^\pi (\sin x + \cos x) dxdy$

2) Tentukanlah integral dari daerah berikut dan gambarlah daerah yang terbentuk pada bidang uv.

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2}\, dv\, du$$

3) Tentukanlah luas daerah dari $R: 0 \leq x \leq 2, 2 - x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ dengan menggunakan:

   a. Teorema fubini

   b. Geometri sederhana

4) Ubahlah integral kartesius berikut dalam bentuk integral polar, kemudian tentukanlah nilai integral polarnya

   a. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx\, dy$

b. $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$

5) Tentukanlah rata-rata tinggi dari permukaan hemispherical $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ diatas persamaan $x^2 + y^2 \leq a^2$ pada bidang xy.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 16 : Menguasai konsep Integral lipat tiga di koordinat persegi panjang, Momen dan Pusat Massa, Integral Lipat Tiga pada Silinder dan Koordinat Bola, Substitusi pada Integral Lipat

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Integral lipat tiga di koordinat persegi panjang, Momen dan Pusat Massa, Integral Lipat Tiga pada Silinder dan Koordinat Bola, Substitusi pada Integral Lipat. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Integral lipat tiga di koordinat persegi panjang, Momen dan Pusat Massa, Integral Lipat Tiga pada Silinder dan Koordinat Bola, Substitusi pada Integral Lipat. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

8.5 Integral lipat tiga di koordinat persegi panjang

Integral lipat tiga merupakan penjumlahan pada suatu fungsi dengan tiga variabel yang ditulis dengan $f(x, y, y)$. Jika $f(x, y, z)$ adalah terdefinisi pada daerah tertutup D, seperti daerah bola pedal atau bola lampu maka integral dari f dapat didefinisikan. Kita dapat menuliskan pada daerah D dari 1 ke n pada beberapa urutan, bagian ke k memiliki dimensi Δx_k oleh Δy_k oleh Δz_k dan volume $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. Misalkan kita pilih titik (x_k, y_k, z_k) pada setiap bagian dan bentuk penjumlahannya

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$$

Partisi dibuat sebesar $|P|$ dimana setiap sellnya berukuran kecil. Ketika $|P| \to 0$ dan bilangan dari sell n menuju ∞, penjumlahan S_n mendekati sebuah batas tertentu. Kita sebut nilai limitnya sebagai integral lipat tiga dari f pada D dan dituliskan dengan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x, y, z)\, dV$$

atau

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Jika F adalah fungsi konstanta dengan nilai 1, maka penjumlahan direduksi menjadi

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k = \sum 1 \cdot \Delta V_k = \sum \Delta V_k$$

Ketika $\Delta x_k, \Delta y_k$ dan Δz_k mendekati nol, sel Δz_k menjadi lebih kecil. Volume dari D menjadi integral lipat tiga didefinisikan dengan

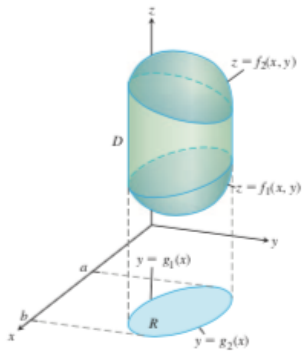
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_D dV$$

Volume dari sebuah daerah tertutup D adalah

$$V = \iiint_D dV$$

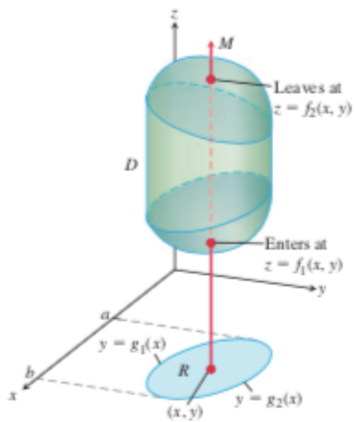
Menentukan limit dari integrase pada urutan $dz\, dy\, dx$ dengan menggunakan langkah-langkah berikut:

a. Sketch. Sketch pada daerah D sepanjang bayangan R (proyeksi vertical) pada bidang xy. Memberikan tanda batas atas dan batas bawah pada permukaan D dan batas tersebut dibatasi pada kurva R.



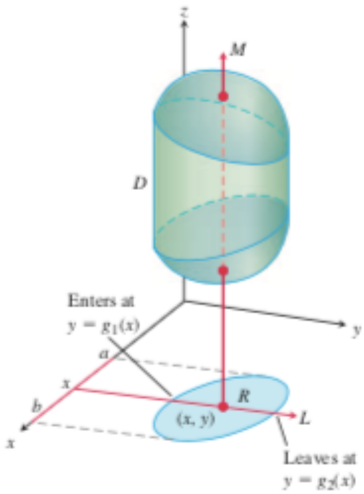
Gambar 144 Integrasi bayangan R

b. Menemukan limit z dari integral. Menggambar di garis M melalui titik tipikal (x, y) dalam R parallel ke sumbu z. z naik, M menjadi D di $z = f_1(x, y)$ dan pada $z = f_2(x, y)$. Sehingga terdapat integral limit z.



Gambar 145 Limit z dengan integral

c. Menemukan limit y dari integral. Gambarlah garis L melalui (x, y) parallel ke sumbu y. Misalkan y naik, L menjadi R di $y = g_1(x)$ dan pada $y = g_2(x)$. Terdapat limit y dari integral.



Gambar 146 Limit y dengan integral

b. Menemukan limit x dari integral. Pilih limit x bahwa termasuk semua garis melalui R parallel ke sumbu y. terdapat limit x dari integral. Integralnya adalah

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Untuk menentukan nilai rata-rata dari sebuah fungsi pada daerah D dapat didefinisikan dengan rumus

$$Nilai\ rata - rata\ F\ pada\ D = \frac{1}{Volume\ D} \iiint_D F\ dV$$

Contoh :

Tentukanlah volume dari daerah D yang tertutup oleh permukaan $z = x^2 + 3y^2$ dan $z = 8 - x^2 - y^2$.

Jawab :

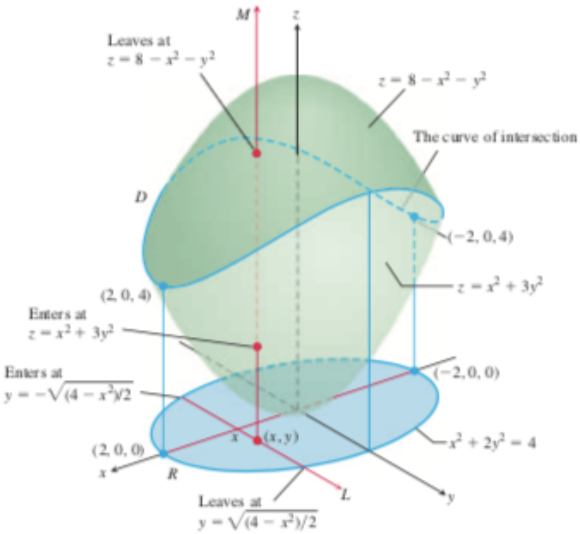
Volume adalah

$$V = \iiint\limits_{D} dz\, d\square\, dx$$

integral dari $F(x, y, z) = 1$ pada D.

untuk menemukan integralnya, perlu kita tentukan terlebih dahulu setiap batasan untuk variabel x, y dan z. Batasannya adalah $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ atau $x^2 + y^2 = 4, z > 0$. Batasan dari daerah R, Proyeksi D menjadi bidang xy. Batas atas dari R pada kurva $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ dan batas bawahnya pada kurva $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$.

Kemudian kita temukan limit z dari integrasinya. Garis M melalui titik tipikal (x, y) di R parallel ke sumbu z pada D di titik $\square = x^2 + 3y^2$ dan $z = 8 - x^2 - y^2$.



Gambar 147 Integral lipat tiga

Selanjutnya kita dapat menentukan limit integrase pada sumbu x. sehingga batas nilai x adalah $x = -2$ di titik $(-2,0,0)$ ke $x = 2$ di titik $(2,0,0)$. Sehingga volume dari D adalah

$$V = \iiint\limits_{D} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\; dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3\right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8\left(\frac{4 - x^2}{2}\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= 8\pi\sqrt{2}$$

8.6 Momen dan Pusat Massa

Jika $\delta(x, y, z)$ adalah kepadatan dari sebuah objek menduduki sebuah daerah D pada bidang, integral dari δ pada D diberikan dengan massa dari objek tersebut. Massa dari objek adalah batasannya seperti

$$M = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_D \delta(x, y, z)\, dV$$

Momen pertama dari sebuah daerah padat D sekitar bidang koordinat yang terdefinisi sebagai integral pada D dari jarak sebuah titik (x, y, z) di D ke perkalian bidang oleh kepadatan dari benda padat di titik tersebut. Sederhananya, momen pertama pada bidang yz adalah integral:

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta(x, y, z)\, dV$$

titik pusat dari massa adalah ditemukan dari momen pertama. Koorinat x dari titik pusat dari massa adalah $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$.

Sehingga momen pertama pada sumbu y adalah integral lipat dua terhadap daerah R yang dibentuk dari jarak dari perkalian sumbu x dengan kepadatan, atau

$$M_y = \iint_R x\delta(x, y) dA$$

Berikut ini beberapa rumus untuk momen pertama:

Benda padat tiga dimensi

Massa:

$$M = \iiint_D \delta dV$$

Momen pertama pada bidang koordinat

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta\, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\delta \, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_D z\,\delta \, dV$$

Titik pusat massa :

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Benda padat dua dimensi

Massa:

$$M = \iint_D \delta dA$$

Momen pertama pada bidang koordinat

$$M_y = \iint_R x\delta \, dA$$

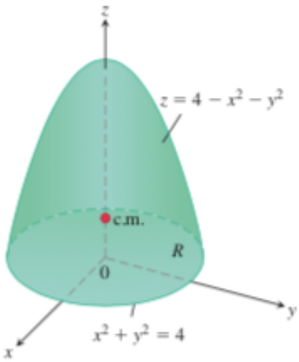
$$M_x = \iint_R y\delta \, dA$$

Titik pusat massa :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

Contoh :

Tentukanlah titik pusat massa dari benda padat dengan kepadatan konstan δ dengan batas bawah $R: x^2 + y^2 \leq 4$ di bidang $z = 0$ dan batas atas sebuah paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$.



Gambar 148 Titik pusat massa benda

Jawab :

Dengan menggunakan simetrisitas $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Untuk menemukan $\bar{z}$, kita hitung

$$M_{xy} = \iint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\,\delta\,dz\,dy\,dx$$

$$= \iint_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta dy\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\iint_R (4-x^2-y^2)^2 \square y\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{6}(4-r^2)\right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \frac{16\delta}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{32\pi\delta}{3}$$

8.7 Integral Lipat Tiga pada Silinder dan Koordinat Bola

1. Integrasi pada koordinat silinder

   Koordinat silinder merepresentasikan sebuah titik P di bidang oleh urutan lipat tiga (r, θ, z) dimana $r \geq 0$, berlaku:

   i. r dan θ adalah koordinat polar untuk proyeksi dari P pada bidang xy

   ii. z adalah koordinat vertical persegi panjang

   Hubungan persamaan persegi panjang dann koordinat silinder yaitu

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,, \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \frac{y}{x}$$

   untuk sebuah titik (r_k, θ_k, z_k) di pusat baji, kita hitung koordinat polar bahwa $\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$. Jadi $\Delta V_k = \Delta z_k r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$ dan penjumlahan Riemann untuk f pada D berbentuk

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k, z_k)\Delta z_k r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$$

   integral lipat tiga dari sebuah fungsi f pada D diperoleh dengan mengambil sebuah limit dari Penjumlahan Riemann dengan partisi yang panjangnya mendekati nol, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f\, dV = \iiint_D f\, dz\, r\, dr\, d\theta$$

2. Integrasi pada koordinat bola

   Koordinat bola merepresentasikan sebuah titik P di bidang dengan urutan lipat tiga (ρ, ϕ, θ) dimana

i. ρ adalah jarak dari P ke titik original $(\rho \geq 0)$

ii. ϕ adalah sudut $\overrightarrow{OP}$ dengan sumbu z positif $(0 \leq \phi \leq \pi)$

iii. θ adalah sudut dari koordinat silinder

hubungan persamaan koordinat bola ke kartesius dan koordinat silinder adalah

$$r = \rho \sin\ \phi\,, \qquad x = r\cos\theta = \rho \sin\ \phi \cos\theta$$

$$z = \rho \cos\ \phi\,, \qquad y = r\sin\theta = \rho \sin\ \phi \sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Contoh:

Tentukanlah persamaan koordinat bola dari persamaan bola $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Jawab:

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

$\rho^2 \sin^2\ \phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\ \phi \sin^2\theta + (\rho\cos\ \phi - 1)^2 = 1$

$\rho^2 \sin^2\ \phi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2\cos^2\ \phi - 2\rho\cos\ \phi + 1 = 1$

$\rho^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2\rho\cos\ \phi$

$\rho^2 = 2\rho\cos\ \phi$

$\rho = 2\cos\ \phi$

Dengan menggunakan Penjumlahan Riemann untuk fungsi $f(\rho, \phi, \theta)$ adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\rho_k, \phi_k, \theta_k)\rho_k^2 \sin\phi_k\, \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k$$

ketika panjang dari sebuah partisi mendekati nol dan baji bolanya lebih kecil, penjumlahan Riemann adalah sebuah limit ketika f kontinu :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\ dV = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

8.8 Substitusi pada Integral Lipat

Misalkan bahwa $f(x,y)$ adalah kontinu pada daerah R. Misalkan G prapeta dari R dengan peubah $x = g(u,v), y = h(u,v)$, misalkan bersifat satu-satu di interior G. Jika fungsi g dan h kontinu pada turunan pertama dengan interior G, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(g(u,v),h(u,v))\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Determinan Jacobian dari koordinat peubah ditentukan dengan peubah $x = g(u,v), y = h(u,v)$ adalah

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

dapat juga dituliskan dengan

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Contoh :

Tentukanlah integral dari $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2\, dy\, dx$

Jawab :

Misalkan $u = x + y$ dan $v = y - 2x$. Dengan perhitungan rutin aljabar pada x dan y dengan fungsi u dan v:

$$u = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \qquad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}$$

Transformasi Jacobian adalah

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 \, dy \, dx = \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{\frac{1}{2}} v^2 |J(u,v| \, dv \, du$$

$$= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{\frac{1}{2}} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv \, du$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{3} v^3\right]_{v=-2u}^{v=u} du$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (u^3 + 8u^3) du$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{7}{2}} du$$

$$= \frac{2}{9} u^{\frac{9}{2}} \Big]_0^1 = \frac{2}{9}$$

4. Rangkuman

1) Misalkan kita pilih titik (x_k, y_k, z_k) pada setiap bagian dan bentuk penjumlahannya

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \, \Delta V_k$$

2) Volume dari sebuah daerah tertutup D adalah

$$V = \iiint\limits_D dV$$

3) Nilai rata-rata dari sebuah fungsi pada daerah D dapat didefinisikan dengan rumus

$$Nilai\ rata-rata\ F\ pada\ D = \frac{1}{Volume\ D} \iiint\limits_D F\ dV$$

4) Massa dari objek adalah nilai limitnya seperti

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

$$= \iiint\limits_D \delta(x, y, z)\ dV$$

5) Benda padat tiga dimensi

Massa:

$$M = \iiint\limits_D \delta dV$$

Momen pertama pada bidang koordinat

$$M_{yz} = \iiint\limits_D x\delta\ dV$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_D y\delta\ dV$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_D z\ \delta\ dV$$

Titik pusat massa :

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

6) Benda padat dua dimensi

Massa:

$$M = \iint\limits_{D} \delta dA$$

Momen pertama pada bidang koordinat

$$M_y = \iint_R x\delta \, dA$$

$$M_x = \iint_R y\delta \, dA$$

Titik pusat massa :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

7) Hubungan persamaan persegi panjang dann koordinat silinder yaitu

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \frac{y}{x}$$

8) Hubungan persamaan koordinat bola ke kartesius dan koordinat silinder adalah

$$r = \rho\sin\phi, \qquad x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$$

$$z = \rho\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

9) Penjumlahan Riemann adalah sebuah limit ketika f kontinu :

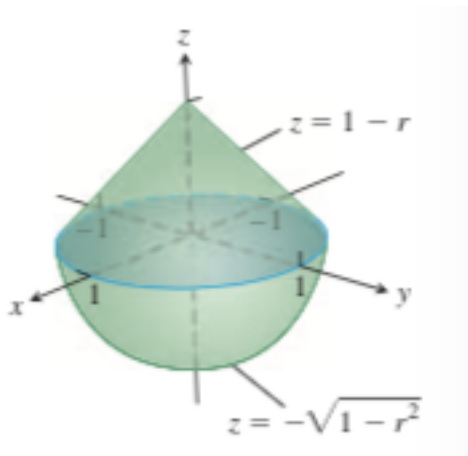
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\ dV = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

10) Jika fungsi g dan h kontinu pada turunan pertama dengan interior G, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(g(u,v),h(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

5. Latihan

1. Tentukanlah nilai integral berikut
   a. $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx$
   b. $\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^2 (x+y+z)\,dy\,dx\,dz$
2. Tentukanlah massa benda yang memenuhi daerah yang lebih kecil yang dipotong dari elips $x^2+4y^2=12$ dan parabola $x=4y^2$ jika $\delta(x,y) = 5x$.
3. Tentukanlah nilai integral dengan koordinat bola berikut
   a. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\phi} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$
   b. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^2 3\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$
4. Tentukanlah volume dari gambar berikut



5. Gunakanlah peubah $x = \frac{u}{v}, y = uv$ untuk mengintegralkan penjumlahan berikut

$$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_2^4 \int_{y/4}^{4/y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah nilai integral berikut

   a. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{4-x^2-y} x\, dz\, dy\, dx$

   b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\ln \sec v} \int_0^{2t} e^x dx\, dt\, dv$

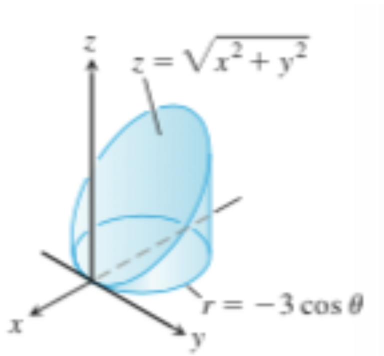
2. Tentukanlah pusat dari massa yang dibatasi oleh sumbu y dan garis $y = x$ dan $y = 2 - x$ jika $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$.

3. Tentukanlah nilai integral dengan koordinat bola berikut

   a. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 5\rho^3 \sin^3 \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

   b. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (\rho \cos \phi)\rho^2 \sin \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

4. Tentukanlah volume dari gambar berikut



5. Gunakanlah peubah $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ untuk mengintegralkan penjumlahan berikut

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$$

7. **Umpan Balik**

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C . PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul delapan ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi integral lipat dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Turunan Orde Limit Tangen Normal

Kontinu Diskontinu Differensial

4. Referensi

Jr, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Kalkulus Thomas Edisi Ketiga Belas Jilid 2.* Jakarta : Erlangga.

BIOGRAFI PENULIS

Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc. adalah seorang dosen di Universitas Kristen Indonesia pada program studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Ia menyelesaikan pendidikan sarjananya di Universitas tempat ia bekerja sekarang dan menuntaskan studi magisternya di National Chung Cheng University.

Penulis lahir di tanjung saribu pada tanggal 30 Maret 1994. Buku ini merupakan buku kedua yang ditulis dengan bentuk Buku Materi Pembelajaran (BMP) pada mata kuliah Kalkulus Lanjut.

Penulis juga sudah menerbitkan dan menulis beberapa artikel yang terbit di jurnal internasional maupun nasional. Semangat menulis dilakoni sejak duduk di bangku kuliah dengan menulis di blog pribadi.

Dengan adanya karya tulisan seperti ini, diharpkan para pembaca dan memahaminya dan juga dapat mendukung perkembangan ilmu pengetahuan. Setiap karya yang dituliskan dapat diakses di blog penulis maupun di web jurnal yang tersedia. Kegigihan penulis juga dapat dilihat dengan keaktifannya dapat berbagai komunitas untuk meningkatkan kemampuan dan karakter yang berdampak.