BMP.UKI: SCP-03-KD-PMAT-II-2022

BUKU MATERI PEMBELAJARAN
KALKULUS DASAR

Disusun oleh:

Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA

JAKARTA

2022

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan pertolonganNya penulisan Buku Materi Pembelajaran (BMP) Kalkulus Dasar ini dapat diselesaikan. Terima kasih untuk seluruh dosen dan segenap rekan kerja di Prodi pendidikan Matematika FKIP UKI yang turut membantu dan mendukung proses penulisan buku ini.

Buku ini ditulis untuk membantu proses pembelajaran pada mata kuliah Kalkulus Dasar yang dapat digunakan oleh seluruh mahasiswa untuk belajar secara mandiri. Selain itu, buku ini dapat juga digunakan di dalam kelas dalam proses tatap muka dengan dosen pegampu dengan menggunakan model pembelajaran berpusat pada mahasiswa atau yang biasa disebut dengan *Student Centered Learning (SCL)*. Kiranya buku ini dapat digunakan dan membantu memaksimalkan proses pembelajaran untuk memcapai kompetensi lulusan yang kreatif, inovatif unggul dan kompeten.

Setiap kritik dan saran yang membangun dapat disampaikan kepada penulis untuk meningkatkan kualitas BMP ini. Kiranya Tuhan memberkati kita semua.

Jakarta, Februari 2022

Penulis

<u>Santri Chintia Purba</u>

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

PETUNJUK PENGGUNAAN BMP

Bagian ini memuat cara penggunaaan modul supaya peserta didik dapat mencapai tujuan yang diinginkan. Bagian ini juga memuat tentang peran dosen mengenai tata belajar dengan menggunakan modul. Berikut ini dijabarkan petunjuk penggunaan BMP Kalkulus Dasar yaitu:

a. Petunjuk bagi mahasiswa

   Mahasiswa mengikuti langkah-langkah kegiatan pembelajaran yang sudah ada di dalam modul yaitu dengan memahami materi yang dijabarkan didalam modul baik secara mandiri maupun kelompok. Mahasiswa harus mempersiapkan alat tulis dan alat hitung yang dibutuhkan.

   Waktu pembelajaran yang dibutuhkan disetiap modul adaah sebanyak 2 kali pertemuan, yaitu 4 sks dikali dengan 2. Sehingga total waktu yang dibutuhkan adalah 400 menit per modul.

   Mahasiswa dapat memahami materi dan menyelesaikan soal-soal latihan maupun tugas yang diberikan sesuai dengan waktu yang ditentukan.

   Evaluasi akan dilakukan disetiap akhir satu modul dengan melakukan quis yang diberikan oleh dosen.

   Soal latihan yang dimuat didalam modul ini dapat digunakan untuk evaluasi *self assessment* mahasiswa, untuk melihat sejauh mana pemahaman mahasiswa akan materi yang ada.

   Soal-soal yang tersedia beragam yang terdiri dari soal latihan yang mudah, sedang dan sukar. Sehingga mahasiswa dapat meningkatkn pemahamannya dan kemampuan berpikirnya akan materi dan permasalahan yang ada.

b. Peran dosen

   Dosen sebagai fasilitator pembelajaran mengarahkan peserta didik melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan strategi pembelajaran yang digunakan yaitu *Teacher Centered Learning* (SCL). Dosen menjelaskan tata cara menggunakan modul dan menjelaskan kegiatan pembelajran yang akan dilakukan. Pembelajaran dilakukan dengan kooperatif learning, yaitu mahasiswa membentuk kelompok-kelompok kecil yang terdiri dari 3-4 orang. Anggota kelompok dipilih secara acak dan disesuaikan dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

Dosen menjelaskan beberapa materi dan mendiskusikannya bersama mahasiswa, selanjutnya mahasiswa akan melakukan diskusi kelompok sesuai dengan topik dan bahan diskusi yang diberikan.

Dosen akan memperhatikan kondisi diskusi peserta didik dan peserta didik dapat bertanya kepada dosen jika ada materi yang sulit untuk dipahami.

Selanjutnya dosen uga berperan mengevaluasi proses pembelajaran yang dilakukan dengan menggunakan isntrumen yang disusun yaitu dengan melakukan quiss di setiap akhir topik yang diselesaikan.

CAPAIAN PEMBELAJARAN LULUSAN

Sikap

S1 :Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

S2 :Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S6 :Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 :Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 :Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 :Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 :Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 :Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 :Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 :Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

<table>
<tr><td></td><td colspan="5">UNIVERSITAS KRISTEN INDONESIA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA</td></tr>
<tr><td colspan="6">RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER</td></tr>
<tr><td>MATA KULIAH</td><td>KODE</td><td>Rumpun MK</td><td>BOBOT (sks)</td><td>SEMESTER</td><td>Tgl Penyusunan</td></tr>
<tr><td>KALKULUS DASAR</td><td>113241011</td><td>MATEMATIKA.</td><td>4</td><td>II</td><td>2 Februari 2022</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OTORISASI</td><td colspan="2">Pengembang RPS</td><td colspan="2">Koordinator RMK</td><td>Ka. PRODI</td></tr>
<tr><td colspan="2">Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.</td><td colspan="2">Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.</td><td>Stevi Natalia, M.Pd.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capaian Pembelajaran (CP)</td><td colspan="5">CPL</td></tr>
<tr><td colspan="5">Sikap
1 S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius
2 S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.</td></tr>
</table>

		3 S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan. 4 S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik. 5 S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri; 6 S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas. 7 S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah Keterampilan Umum 1. KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya 2. KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur 3. KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan

		keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni 4. KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya. Keterampilan Khusus 1. KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup. 2. KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan. 3. KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika 4. KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari Pengetahuan 1. P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan

		matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri. 2. P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari 3. P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika.
	CPMK	
		1. Mahasiswa mampu memahami kompetensi yang akan dicapai pada matakuliah Kalkulus Dasar, menganalisis bahan/materi, jadwal perkuliahan, mentaati kontrak kuliah dan menyelesaikan tugas tepat waktu serta membuat rencana program belajar mandiri maupun kelompok berdasarkan hasil analisis, serta mampu menunjukkan penghayatan dan pengamalan nilai-nilai kristiani. 2. Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Fungsi umum, fungsi Trigonometri, Fungsi Transenden dan Pemanfaatan Teknologi untuk menggambar fungsi

		3. Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Limit dan kekontinuan dan aplikasinya 4. Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Turunan dan aplikasinya 5. Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada Integral, Aplikasi Integral beserta teknik integralnya.
Deskripsi Singkat MK	Mata kuliah ini dimaksudkan untuk memberi kemampuan pada mahasiswa tentang konsep-konsep matematika mengenai limit fungsi, kekontinuan turunan, fungsi transenden, integral tentu dan tak tentu yang memuat definisi, sifat-sifat, teknik, dan teorema terkait beserta aplikasinya yang mampu menerapkannya dalam menyelesaikan masalah yang ada berupa berbagai bentuk soal maupun project. Materi perkuliahan meliputi : Fungsi, Limit dan Kekontinuan, Turunan,	

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Aplikasi Turunan, Integral, Aplikasi Integral Tentu, Fungsi Transendental, dan Teknik Pengintegralan .</td></tr>
<tr><td>Bahan Kajian</td><td colspan="2">1. Fungsi
2. Limit dan Kekontinuan
3. Turunan
4. Aplikasi Turunan
5. Integral
6. Aplikasi Integral Tentu
7. Fungsi Transendental
8. Teknik Pengintegralan</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pustaka</td><td colspan="2">Utama:</td></tr>
<tr><td colspan="2">a. Thomas, Weir and Hans. 2010. Thomas' Calculus (Twelfth edition). Boston: Pearson.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pendukung:
1. Varberg, Rurcell, Rigdon. Kalkulus. Jakarta: Erlangga.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Media Pembelajaran</td><td>Perangkat lunak:</td><td>Perangkat keras:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Microsoft
Teams</td><td colspan="7">Laptop
Spidol board marker
Whiteboard
Poster
LCD</td></tr>
<tr><td colspan="2">Team Teaching</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Matakuliah syarat</td><td colspan="8">-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mg Ke-</td><td rowspan="2">Sub-CP-MK
(Kemampuan Akhir yang Direncanakan)</td><td rowspan="2">Bahan Kajian
(Materi Pembelajaran)</td><td rowspan="2">Bentuk dan Metode Pembelajaran
(Media & Sumber Belajar)</td><td rowspan="2">Estimasi Waktu</td><td rowspan="2">Pengalaman Belajar Mahasiswa</td><td colspan="3">Penilaian</td></tr>
<tr><td>Kriteria</td><td>Indikator</td><td>Bobot</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(3)</td><td>(4)</td><td>(5)</td><td>(6)</td><td>(7)</td><td>(8)</td><td>(9)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Mahasiswa mampu memahami kompetensi yang akan</td><td>1. Perkenalan
2. Kontrak kuliah/atura</td><td>Lecture (ceramah)</td><td>200’</td><td>Interaksi akrab dosen dengan mahasiswa</td><td>Kognitif
Afektif</td><td>Partisipatif
Motivasi belajar</td><td>%</td></tr>
</table>

	dicapai pada matakuliah Kalkulus Dasar, menganalisis bahan/materi, jadwal perkuliahan, mentaati kontrak kuliah dan menyelesaikan tugas tepat waktu serta membuat rencana program belajar mandiri maupun kelompok berdasarkan hasil analisis, serta mampu menunjukkan penghayatan dan pengamalan nilai-nilai kristiani.	n kesepakatan 3. Hak dan Kewajiban Mahasiswa 4. Motivasi dan Rencana Belajar 5. Penjelasan RPS 6. Pendahulua n Fungsi	Ekspositori Brainstorming Tanya-jawab Diskusi Pemberian contoh		dan sesama mahasiswa. Mahasiswa termotivasi untuk belajar mandiri. Mahasiswa siap bekomitmen. Mahasiswa dapat memper siapkan materi materi selanjutnya Mahasiswa memahami		Kesediaan berkomitmen Tanggungjawab	

					pengertian dasar fungsi Tugas : Exercises 1.1 (B1)			
2	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan,	1. Combining functions: Shifting and scaling graphs 2. Trigonometric functions 3. Graphing with calculators	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami fungsi kombinasi dan fungsi trigonometri Mahasiswa mampu memanfaatkan dan menggunakan	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan Quis 1	%

	menganalisis konsep-konsep pada materi Fungsi umum, fungsi Trigonometri dan Pemanfaatan Teknologi untuk menggambar fungsi	and computers			teknologi untuk menggambar grafik fungsi Tugas : Exercises 1.2, 1.3 and 1.4			
3	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah	1. Rates of change and tangents to curves	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami materi kemiringan sebuah grafik Mahasiswa menentukan	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penguasaan konsep Penugasan	%

	nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Limit dan kekontinuan.	2. Limit of a function and limit laws The precise definition of a limit			limit dari sebuah fungsi beserta hokum-hukumnya Mahasiswa dapat menganalisis keberadaan sebuah limit fungsi Tugas : Exercises 2.1, 2.2 and 2.3			
4	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola	1. One-sided limits	Ekspositori Problem Based	200'	Mahasiswa membuktikan limit satu arah	Kognitif Afektif	Partisipatif Penguasaan	%

	pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Limit dan kekontinuan.	2. Continuity Limits involving infinity : Asymptotes of Graphs	Learning Diskusi Project		dan menentukan keberadaan limitnya Mahasiswa mampu menentukan dan menganlisis fungsi yang kontinu dan tidak kontinu Mahasiswa dapat menentukan nilai limit fungsi hingga	Psikomotor (Unjuk kerja)	konsep Analisis Penugasan Quiz 2	

					maupun tak hingga. Tugas : Exercises 2.4, 2.5 and 2.6			
5	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-	1. Tangents and the derivatives at a point 2. The derivative as a function 3. Differentiation rules 4. The derivatives	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa dapat menentukan nilai tangen atau kemirungan sebuah dungsi dengan menentukan turunan fungsi Mahasiswa mampu	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan	%

	konsep pada materi Turunan	as a rate of change 5. Derivatives of trigonometric functions			menggunakan aturan-aturan dalam penurunan fungsi Mahasiswa mengaplikasikan turunan Mahasiswa menguasai konsep turunan dalam fungsi trigonometri			

					Exercises : 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, and 3.5			
6	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Turunan	1. The chain Rule 2. Implicit Differentiation 3. Related Rules 4. Linearization and Differentials	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami aturan Chain dalam turunan Mahasiswa menguasai konsep turunan pada fungsi implisit Mahasiswa memahami kelinearan sebuah fungsi	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penugasan Diskusi Quis 3	%

					Tugas : Exercises 3.6, 3.7, 3.8, 3.9			
7	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Aplikasi Turunan	1. Extreme values of functions 2. The mean value Theorem 3. Monotonic functions and the first derivatives Test 4. Concavity and curve Sketching	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami teorema nilai rata-rata Mahasiswa menentukan nilai ekstrim fungsi Mahasiswa dapat mengaplikasikan turunan Mahasiswa	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penugasan Diskusi Quis 4 **Project 1**	% **%**

		5. Applied optimization 6. Newtons's method Antidrivatives			memahami anti turunan Tugas : Exercises 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 and 4.7			
8	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan	1. Area and estimating with finite sums 2. Sigma notation and limits of finite sums 3. The definite	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200'	Mahasiswa memahami definisi dan konsep integral Mahasiswa memahami hubungan integral dengan sigma	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan	%

	mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada Integral	integral 4. The fundamental theorem of calculus			maupun limit Mahasiswa memahami aturan pada definite integral Mahasiswa mampu menggunakan teorema dasar kalkulus Tugas : exercises 5.1, 5.2, 5.3, 5.4			

9	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada Integral	1. Indefinite integrals and the substitution method 2. Substitution and area between curves	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami Integral substitusi Mahasiswa mengevalusi indefinite integrals Mhasiswa menentukan luas kurva dengan integral substitusi Tugas : Exercises 5.5,	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasn Quiz 5	%

					5.6 and Practice exercises chapter 5			
10	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi	1. Volumes using cross-sections 2. Volumes using cylindrical shells 3. Arc Length	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa meenggunakan cross section dan cylindrical shells untuk menentukan volume Mahasiswa menentukan Arc length sebuah fungsi Tugas : Exercises 6.1,	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan	%

	Pengaplikasian Integral				6.2, 6.3			
11	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Pengaplikasian Integral	1. Areas of surfaces of revolution 2. Work and fluid forces 3. Moments and centers of mass	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa mampu mengkonstruksikan pemahamannya tekait dengan integral yang aplikatif Tugas : Exercises 6.4, 6.5, and 6.6	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quiz 6	%

12	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Fungsi Transendental	1. Inverse functions and their derivatives 2. Natural Logarithms 3. Exponential Functions 4. Exponential Change and Separable Differential Equations	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan perhitungan pada invers dan turunan dari fungsi transcendental Mahasiswa mampu menguasai konsep pada fungsi eksponen dan persamaan differensialny	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan	%

					a Tugas : Exercises 7.1, 7.2, 7.3, and 7.4			
13	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-	1. Indeterminate forms and L'Hospital's Rule 2. Inverse Trigonometric Functions 3. Hyperbolic functions 4. Relative rates of growth	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200'	Mahasiswa mampu menganalisis dan melakukan perhitungan pada invers fungsi trigonometri dan Fungsi Hiperbolik Mahasiswa	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quiz 7	%

	konsep pada materi Fungsi Transendental				mampu menguasai konsep pada fungsi Transendental beserta aplikasinya Tugas : Exercises 7.5, 7.6, 7.7, and 7.8			
14	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam	1. Integration by parts 2. Trigonometric integrals 3. Trigonometr	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi	200’	Mahasiswa mampu melakukan pengintegralan dengan dengan teknik integral	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Penugasan	%

	memecah kan masalah nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Teknik Pengintegralan	ic substitutions	Project		seperti integral parsial dan substitusi pada fungsi umum dan trigonometri Tugas : Exercises 8.1, 8.2, and 8.3			
15	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah nyata serta fenomena	1. ntegration of rational functions by partials fractions 2. Integral tables and computer	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200'	Mahasiswa mampu menggunakan teknik pengintegralan pada fungsi rasional maupun fungsi	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi Penugasan Quiz 8	%

	spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada materi Teknik Pengintegralan	algebra systems 3. Numerical integration 4. Improper integrals			umum dengan menggunakan aplikasi komputer maupun berbasis website Tugas : Exercises 8.4, 8.5, 8.6 and 8.7			
16	Mahasiswa mampu menguasai konsep, prinsip, struktur, pola pikir keilmuan yang mendukung pembelajaran dalam memecah kan masalah	Review Materi Limit, Differensiasi dan Integral melalui projects	Ekspositori Problem Based Learning Diskusi Project	200’	Mahasiswa memahami dan menguasai materi Kalkulus dasar yang telah di pelajari	Kognitif Afektif Psikomotor (Unjuk kerja)	Partisipatif Diskusi **Project 2 (Final Project)**	% %

	nyata serta fenomena spesifik yang dihadapi dengan mendeskrepsikan, menganalisis konsep-konsep pada Kalkulus Dasar (Limit, Differensiasi, integral)				melalui memecahkan berbagai masalah yang berkaitan dengan Kalkulus Dasar			

Komponen Penilaian :

Tugas : 20%, Quis : 20%, Project 1: 25%, Final Project : 25%, Afektif : 10%

CONTOH RANCANGAN TUGAS MAHASISWA

<table>
<tr><td>MATA KULIAH</td><td>:……………………………………………………….</td></tr>
<tr><td>SEMESTER</td><td>:………………….. ………… sks : ………</td></tr>
<tr><td>MINGGU KE</td><td>:……………………………… Tugas ke :</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tujuan Tugas:
Uraian Tugas:
a. Objek Garapan
b. Yang harus dikerjakan dan batasan-batasan
c. Metode/cara pengerjaan, acuan yang digunakan
d. Deskripsi luaran tugas yang dikerjakan
Kriteri Penilaian:</td></tr>
</table>

PENILAIAN

Penilaian capaian pembelajaran dilakukan pada ranah sikap, pengetahuan dan keterampilan secara rinci dijelaskan sebagai berikut:

1. Penilaian ranah sikap dilakukan melalui observasi berdasarkan kedisiplinan mengumpulkan tugas dan hadir dikelas , penilaian diri, penilaian antar mahasiswa (mahasiswa menilai kinerja rekannya dalam satu bidang atau kelompok), dan penilaian aspek pribadi yang menekankan pada aspek beriman, berakhlak mulia, percaya diri, disiplin dan bertanggung jawab dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial, alam sekitar, serta dunia dan peradabannya.
2. Penilaian ranah pengetahuan melalui berbagai bentuk tes tulis dan tes lisan yang secara teknis dapat dilaksanakan secara langsung maupun tidak langsung. Secara langsung maksudnya adalah keaktifan langsung dikelas ketika tatap muka. Sedangkan secara tidak langsung, misalnya menggunakan lembar-lembar soal ujian tulis.
3. Penilaian ranah keterampilan melalui penilaian kinerja yang dapat diselenggarakan melalui projek yang memungkinkan mahasiswa untuk dapat meningkatkan kemampuan keterampilannya.

Contoh penilaian project mahasiswa yaitu berdasarkan Capaian belajar yang diukur:

- ✓ Kemampuan memilih artikel jurnal bereputasi dan mutakhir sesuai dengan tema dampak polusi industri;
- ✓ Kemampuan meringkas artikel jurnal dengan tepat dan benar.

Tabel 1. Penilaian Project

<table>
<tr><th rowspan="2">No</th><th rowspan="2">Aspek Penilaian Skor</th><th colspan="2">Artikel-1</th><th colspan="2">Artikel-2</th><th colspan="2">Artikel-3</th></tr>
<tr><th>Tinggi (6-10)</th><th>Rendah (1-5)</th><th>Tinggi (6-10)</th><th>Rendah (1-5)</th><th>Tinggi (6-10)</th><th>Rendah (1-5)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Artikel berasal dari journal terindek dalam kurun waktu 3 tahun tarakhir.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Artikel berkaitan dengan materi mata kuliah</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Ketepatan meringkas isi bagian-bagian penting dari abstrak artikel</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Ketepatan meringkas konsep pemikiran penting dalam artikel</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Ketepatan meringkas pembahasan hasil penelitian dalam artikel</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Ketepatan menggunakan simpulan hasil penelitian dalam artikel</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Ketepatan menuliskan project berupa tulisan baru berdasarkan artikel yang ada.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Jumlah skortiap ringkasan artikel</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Rata-rata skor yang diperoleh</td><td colspan="6"></td></tr>
</table>

PELAPORAN PENILAIAN

Pelaporan penilaian berupa kualifikasi keberhasilan mahasiswa dalam menempuh suatu mata kuliah yang dinyatakan dalam kisaran seperti pada table berikut.

Tabel 2. Kategori Penilaian

Rentang Skor	80,0-100	75,0-79,9	70,0-74,9	65,0-69,9	60,0-64,9	55,0- 59,9	50,0-54,9	45,0-49,9	<49,9
Nilai Huruf	A	A-	B+	B	B-	C+	C	D	E
Nilai Angka	4	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,0	0

Jakarta, 2 Februari 2022

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Stevi Natalia, M.Pd.

Disusun oleh,
Dosen Pengampu

Santri Chintia Purba, S.Pd., M.Sc.

KONTRAK PERKULIAHAN

Kontrak perkuliahan merupakan kesepakatan antara dosen pengampu mata kuliah dengan mahasiswa yang ditanda tangani oleh ketua kelas. Adapun kontrak perkuliahan di dalam mata kuliah Matematika Dasar Prodi pendidikan Matematika Semester Gasal TA 2021/2022 yaitu :

1. Setiap Mahasiswa memiliki BMP
2. Keterlambatan paling lama 10 menit.
3. Setiap tugas dikumpulkan ontime sesuai dengan deadline yang disepakati, konsekuensi telat pengurangan nilai -5 dihari yang sama, -10 lebih dari sehari.
4. Perkuliahan diawali dengan Doa yang dipimpin secara bergantian.
5. Setiap mahasiswa bersedia ditempatkan dikelompok yang disusun oleh dosen.
6. Evaluasi Pembelajaran dilakukan dengan Quis, Penugasan dan Project.
7. Perkuliahan online dilakukan dengan 2 sks dosen menjelaskan, 2 sks mahasiswa mandiri atau diskusi melalui BMP yang sudah disediakan.

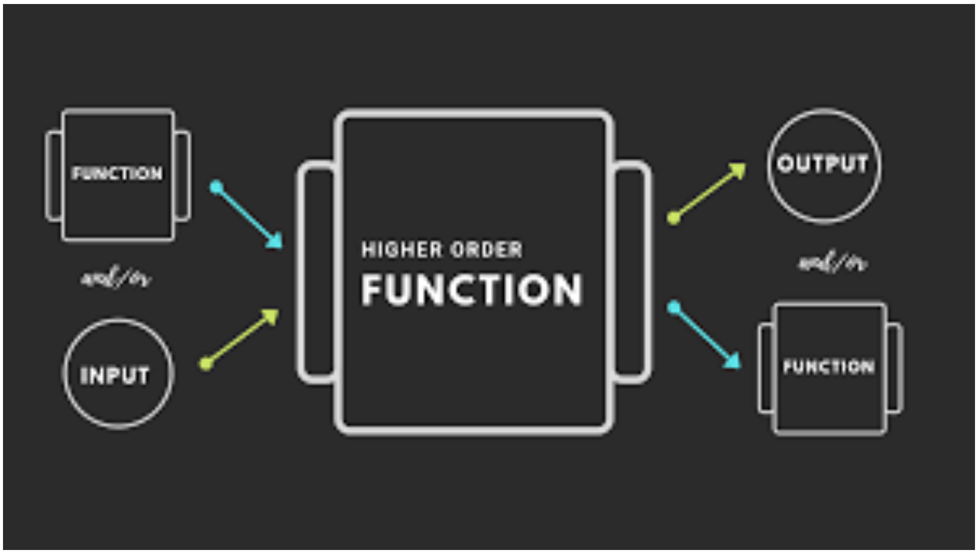
Demikianlah kontak perkuliahan ini disusun untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya. Untuk hal-hal kesepakatan lainnya dapat diatur kemudian sesuai dengan kebutuhan dan kondisi kelas.

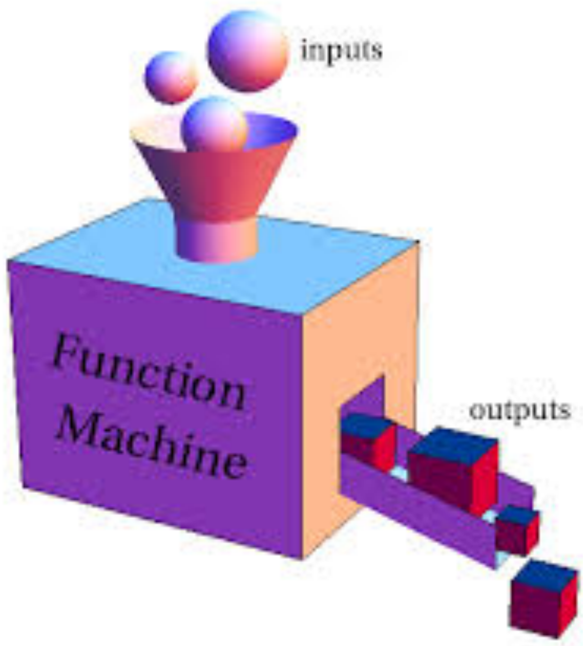
Disepakati oleh,

Dosen Pengampu Mata Kuliah	**Ketua Kelas**
Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc.	**Louisa Ayu**
NIP/NIDN : 191660/0330039402	**NIM : 2113150001**

MODUL 1

FUNGSI





MODUL 1

FUNGSI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Salah satu konsep dalam matematika yang paling penting adalah konsep fungsi. Dengan konsep fungsi, para matematikawan maupun para ahli di bidang yang lain dengan jelas dapat mengetahui apakah suatu struktur identik dengan struktur yang lain. Dan hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi dalam pengembangannya.

   Fungsi linear dan fungsi kuadrat merupakan salah satu fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan. Banyak masalah sehari-hari menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat.

   Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang dibayarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari-jarinya dan sebagainya.

   Pada modul ini akan dibahas terkait dengan fungsi, jenis-jenisnya dan berbagai macam bentuk penyelesaiannya.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Satu

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar dan kompetensi konsep dasar perkalian berulang dan penjumlahan berulang. Selain itu juga diperlukan pemahaman tentang persamaan dan pertidaksamaan linear yang telah dibahas di modul sebelumnya.

5. Kegunaan Modul Satu

   Kegunaan modul satu ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi fungsi dan berbagai bentuk persamaan fungsi. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada fungsi untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian fungsi, sifat fungsi yaitu surjektif, injektif dan bijektif, Grafik fungsi, Jenis-jenis fungsi seperti fungsi konstan, fungsi linear, fungsi identitas, fungsi kuadrat, fungsi tangga, fungsi mutlak, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi naik dan fungsi turun, fungsi berpangkat, fungsi polynomial, fungsi rasional, fungsi aljabar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma. Selanjutnya juga memuat tentang operasi pada fungsi dan fungsi komposisi, dan pergeseran grafik fungsi.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 1 : Menguasai konsep Fungsi dan jenis-jenisnya.

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Fungsi dan jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

1.1 Pengertian

Fungsi adalah sebuah alat untuk menggambarkan fakta yang ada dalam ben- tuk matematika. sebuah fungsi dapat direpresentasikan dengan persamaan, grafik, tabel, atau penjelasan verbal; dimana kesatu representasi tersebut kita gunakan pada bab ini.

Didalam kehidupan sehari-hari kita mengetahui bahwa bunga yang dibayarkan untuk investasi tunai tergantung pada lamanya investasi, percepatan sebuah mobil tergantung pada peningkatan kecepatan mobil dari waktu ke waktu, luas sebuah lingkaran tergantung pada panjang jari-jarinya dan sebagainya. Dalam hal ini, nilai dari satu variabel misalkan y bergantung pada nilai dari variabel lainnya yang bisa disebut sebagai x. Biasanya kita baca "y adalah sebuah fungsi dari x" yang dinotasikan dengan

$$y = f(x)$$

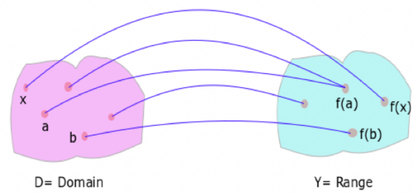
notasi diatas menunjukkan y sebagai sebuah fungsi dengan x sebagai variabel bebas ($Independent\ variable$) yang merepresentasikan nilai masukan ke f dan y adalah variabel terikat ($dependent\ variable$) yang merepresentasikan nilai keluaran dari f di x.

Definisi 1.

Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f(x) \in Y$.

Himpunan D disebut sebagai daerah asal atau domain dan setiap nilai $f(x)$ pada himpunan Y disebut sebagai daerah hasil atau range. Dalam hal ini daerah hasil mungkin tidka semua elemen pada himpunan Y . Sebuah fungsi dapat direpresentasikan seperti dua gambar berikut ini.

(a) Fungsi seperti sebuah mesin



(b) Fungsi sebagai Pemetaan dari D ke Y

Gambar 1 Definisi fungsi

Berikut ini contoh fungsi beserta dengan domain dan range nya

Fungsi	**Domain**	**Range**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1,1]$	$[0,1)$

Dari tabel diatas dapat kita ketahui bahwa

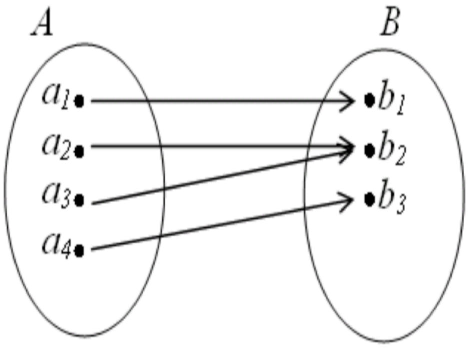
1. Fungsi $y = x^2$ menunjukkan bahwa pemetaan dari $x \in R$ adalah $y \in R$ sehingga domainnya adalah $(-\infty, \infty)$. Daerah hasil dari fungsi $y = x^2$ adalah $[0, \infty)$ karena pangkat dari bilangan riil adalah bilangan positif dan setiap bilangan positif adalah kuadrat dari akarnya sendiri ditulis dengan $y = (y)^2$ untuk $y \geq 0$.
2. Fungsi $y = \frac{1}{x}$ menggambarkan nilai $y \in R$ kecuali pada $x = 0$. Berdasarkan x konsistensi formula pada aritmatika, kita tidak bisa membagi bilangan dengan nol. Sehingga domain dari $y = \frac{1}{x}$ adalah semua bilangan riil kecuali nol dituliskan dengan $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Selanjutnya daerah hasil dari $y = \frac{1}{x}$ adalah semua bilangan riil bukan nol juga karena $y = \frac{1}{x}$. Dengan demikian Rangenya adalah $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
3. Fungsi $y = \sqrt{x}$ memberikan nilai $y \in R$ jika $x \geq 0$. Selanjutnya range dari $y = \sqrt{x}$ adalah $[0, \infty)$karena setiap bilangan positif merupakan beberapa akar dari bilangan (akar dari pangkat bilangan itu sendiri).
4. Pada fungsi $y = \sqrt{4 - x}$, nilai $4 - x$ tidak boleh bernilai negatif. Sehingga $4 - x \geq 0$ atau $x \leq 4$, dimana $y \in R$ untuk semua $x \leq 4$. Range dari $\sqrt{4 - x}$ adalah semua himpunan bilangan positif dituliskan dengan $[0, \infty)$.
5. Fungsi $y = \sqrt{1 - x^2}$ memberikan nilai $y \in R$ untuk x diantara -1 sampai 1. Selain itu maka nilai $1 - x^2$ akan bernilai imajiner. Sehingga daerah hasil atau range dari $\sqrt{1 - x^2}$ adalah $[0,1)$.

1.2 Sifat Fungsi

Secara umum fungsi mempunyai beberapa sifat yang berguna untuk menentukan syarat pada komposisi fungsi dan invers fungsi. Setidaknya ada tiga sifat fungsi dalam matematika antara lain yaitu fungsi pada atau surjektif (onto), fungsi satu-satu atau injektif dan fungsi satu-satu pada atau bijektif (koresponden).

1. Fungsi Surjektif (Pada)

   Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.



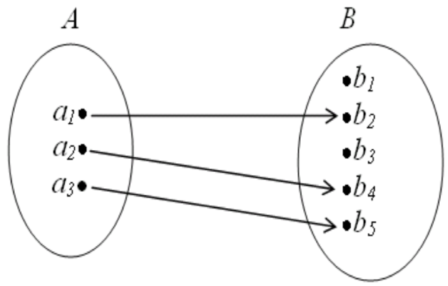
Gambar 2 Fungsi Surjektif

   Contoh :

   Misalnya $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan hasil pemetaan $f(A) = \{(1, c), (2, b), (3, a), (4, a)\}$. Sehingga dapat diperoleh bahwa daerah hasil atau range dari fungsi f adalah $R_f = \{a, b, c\}$ dan $R_f = B$. Jadi fungsi ini termasuk fungsi surjektif atau fungsi onto atau disebut juga dengan fungsi pada.

2. Fugsi Injektif (satu-satu)

   Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.



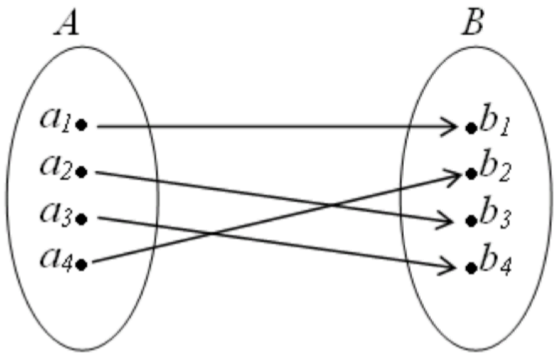
Gambar 3 Fungsi injektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, a), (2, d), (3, b)\}$. Dapat diketahui bahwa setiap anggota A yang berbeda memiliki peta yang berbeda, atau pasangan yang berbeda. Jadi fungsi f ini termasuk fungsi injektif atau fungsi satu-satu.

3. Fungsi Bijektif (Saru-satu Pada)

   Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.



Gambar 4 Fungsi bijektif

Contoh :

Misalnya $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dengan pemetaan pasangan terurut $f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$. Dapat diketahui bahwa fungsi f termasuk fungsi surjektif dan fungsi injektif. Fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

1.3 Grafik Fungsi

Grafik sebuah fungsi adalah sebuah representasi visual dari sifat sebuah fungsi pada diagram x- y. Grafik bisa membantu kita memahami aspek-aspek berbeda dari sebuah fungsi, yang bisa jadi sulit dipahami dengan hanya melihat fungsi itu sendiri.

Berikut ini langkah-langkah menggambar grafik fungsi:

1. Langkah pertama

   Buatlah terlebih dahulu analisis pendahuluan yang meliputi:

   - Menentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu-sumbu koordinat (jika koordinat itu gampang ditentukan)
     i. Titik potong dengan sumbu x, dengan mengambil syarat $y = 0$.
     ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil syarat $x = 0$.
   - Tentukan interval-interval saat fungsi itu nait dan saat fungsi itu turun.
   - Tentukan titik-titik stationer serta jenisnya : titik balik maksimum, titik balik minimum, atatu titik belok horizontal.
   - Tentukan nilai-nilai fungsi pada ujung-ujung interval. Jika kurva itu akan digambarkan untuk semua bilangan real, maka perlu ditentukan nilai-nilai y untuk nilai x yang besar positif dan untuk nilai x yang besar negative.
   - Tentukanlah beberapa titik tertentu untuk memperhalus denah kurva.
2. Langkah kedua

   Dari langkah pertama, titik-titik yang didapat kita sajikan dalam bidang kartesius.
3. Langkah ketiga

   Titik-titik yang telah disajikan dalam bidang kartesius pada langkah kedua, lalu kita hubungkan dengan mempertimbangkan naik atau turunnya fungsi.

Dengan demikian kita akan mendapat kurva $y = f(x)$.

Contoh :

Gambarlah denah kurva dari fungsi $f(x) = 4x - x^3$

Jawab :

Langkah pertama

1. Koordinat titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat.
   i. Titik potong dengan sumbu x, dengan engambil $y = 0$.
   $$4x - x^3 = 0$$
   $$x(4 - x^2) = 0$$
   $$x(2 + x)(2 - x) = 0$$
   $x_1 = 0$, atau $x_2 = -2$ atau $x_3 = 2$

   titik-titik potong dengan sumbu x adalah $(-2,0)$, $(0,0)$ dan $(2,0)$.
   ii. Titik potong dengan sumbu y, dengan mengambil $x = 0$ diperoleh :
   $$y = 4(0) - (0)^3 = 0$$
   titik potong sumbu y adalah $(0,0)$
2. Dari $f(x) = 4x - x^3$ maka turunan pertamanya adalah $f'(x) = 4 - 3x^2$ (Materi turunan dapat dilihat pada modul turunan)

   $f(x)$ naik bila $f'(x) > 0$

   $4 - 3x^2 > 0$

   $3x^2 < 4$

   $-\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}\sqrt{3}$

   $f(x)$ turun bila $f'(x) < 0$

   $4 - 3x^2 < 0$

   $3x^2 > 4$

   $x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ atau $x > \frac{2}{3}\sqrt{3}$
3. Nilai-nilai stationernya :

Untuk $x_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$. Dalam hal ini $f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik minimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif saat melewati $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Untuk $x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ maka $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = \frac{16}{9}\sqrt{3}$. Dalam hal ini $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{16}{9}\sqrt{3}$ merupakan nilai balik maksimum, alasannya $f'(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif saat melewati $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Sehingga titik balik maksimumnya $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimumnya $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$.

4. Untuk x besar maka $y = f(x) = 4x - x^3$ akrab dengan $-x^3$

   Jika x besar positif, maka y besar negatif

   Jika y besar negative, maka x besar positif

5. Ambil beberapa titik tertentu untuk memperbaiki denah kurva

   $x = -3$ maka $y = f(-3) = 4(-3) - (-3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-3,15)$.

   $x = -1$ maka $y = f(-1) = 4(-1) - (-1)^3 = -3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(-1,-3)$.

   $x = 1$ maka $y = f(1) = 4(1) - (1)^3 = 3$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(1,3)$.

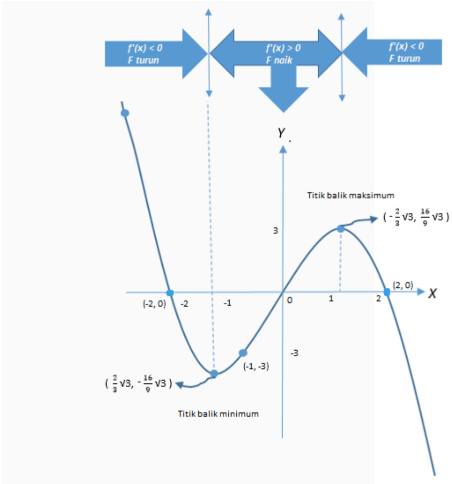
   $x = 3$ maka $y = f(3) = 4(3) - (3)^3 = 15$ sehingga diperoleh titik pada koordinat kartesius pada titik $(3,15)$.

Langkah kedua

Beberapa titik yang diperoleh pada langkah pertama diletakkan pada bidang kartesius.

Langkah ketiga

Titik-titik yang telah disajikan pada bidang kartesius itu dihubungkan untuk memperoleh denah kurva yang mulus ibarat pada gambar dibawah ini.



Gambar 5 Grafik fungsi

untuk memudahkan kita dalam menggambar grafik dari berbagai bentuk fungsi, maka dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa aplikasi yaitu seperti MathLab, Maple, Symbolab dan lain sebagainya.

Beberapa bentuk fungsi yang digambar menggunakan symbolab dapat kita lihat pada jenis-jenis fungsi berikut.

1.4 Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi Konstan (Fungsi Tetap)

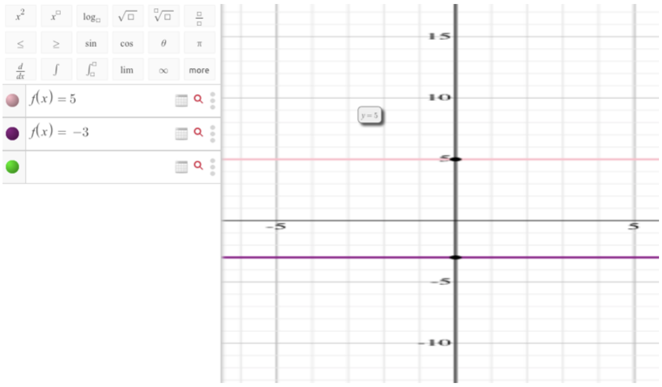
   Suatu fungsi $f: A \to B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.

   Contoh :

   $f(x) = 5$

   $f(x) = -3$

   yang direpresentasikan seperti pada gambar berikut.



Gambar 6 Fungsi konstan

2. Fungsi Linear

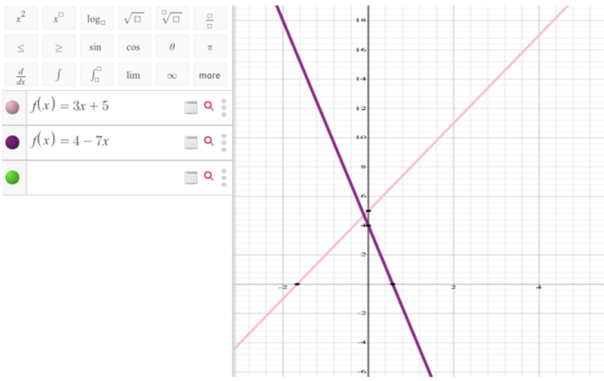
   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.

   Contoh :

   $f(x) = 3x + 5$

   $f(x) = 4 - 7x$

   yang digambarkan seperti pada grafik berikut ini



Gambar 7 Fungsi linear

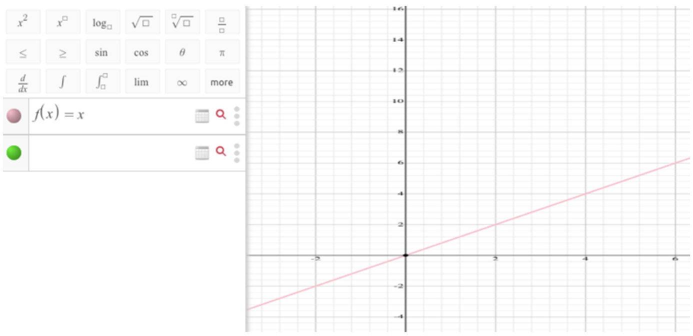
3. Fungsi Identitas

Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama.

Contoh :

$$f(x) = x$$

yang dapat digambarkan seperti grafik berikut ini.



Gambar 8 Fungsi identitas

4. Fungsi Kuadrat

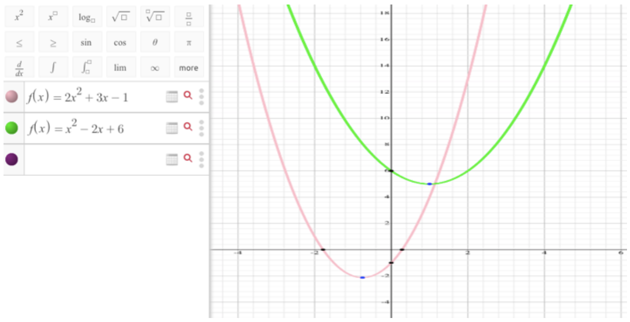
Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.

Contoh :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 6$$

yang dapat dilukiskan seperti grafik berikut ini.



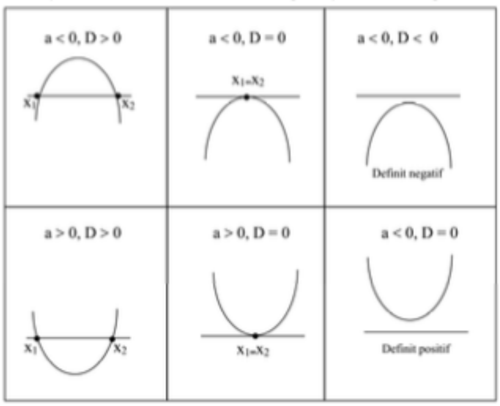
Gambar 9 Fungsi kuadrat

Pada fungsi kuadrat biasanya disebut dengan persamaan kuadrat ini dapat dilakukan perhitungan pada beberapa titik penting yaitu pada sumbu simetri fungsi yaitu dirumuskan dengan $x = -\frac{b}{2a}$.

Selanjutnya untuk menentukan titik puncak nya dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut:

$x = -\frac{b}{2a}$ dan $y = -\frac{D}{4a}$ dimana $D = b^2 - 4ac$.

jika ditinjau dari nilai a dan D maka grafik parabola yang terbentuk seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 10 Grafik parabola

5. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah)

   Suatu fungsi disebut sebagai fungsi tangga apabila grafik fungsi $f(x)$

berbentuk interval-interval yang sejajar. Fungsi batas bawah adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan kebawah yang dinotasikan dengan $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

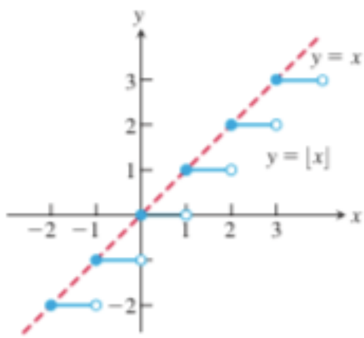
Fungsi batas atas adalah sebuah fungsi f apabila nilai pada sembarang bilangan x adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan bilangan x. Biasa disebut dengan fungsi yang mengalami pembulatan atas yang dinotasikan dengan $f(x) = \lceil x \rceil$.

Contoh :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

$$f(x) = \lceil x \rceil$$

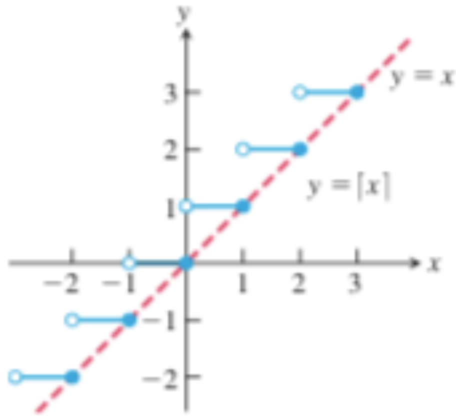
seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 11 Fungsi batas bawah

$\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$ $\lfloor 0.2 \rfloor = 2$

$\lfloor -1.2 \rfloor = -2$ $\lfloor -0.3 \rfloor = -1$ $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ $\lceil -2 \rceil = -2$



Gambar 12 Fungsi batas atas

$\lceil 2.4 \rceil = 3$ $\lceil 1.9 \rceil = 2$ $\lceil 0.2 \rceil = 1$

$\lceil -1.2 \rceil = -1$ $\lceil -0.3 \rceil = 0$ $\lceil 3.6 \rceil = 4$ $\lceil -2 \rceil = -2$

6. Fungsi Mutlak (modulus)

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi modulus (mutlak) apabila fungsi ini memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur harga mutlaknya.

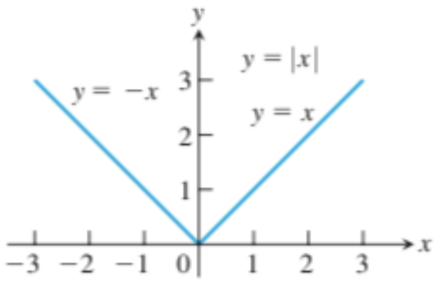
   $f: x \to |x|$ atau $f: x \to |ax + b|$

   $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.

   Contoh :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

   yang tampak seperti pada grafik berikut.



Gambar 13 Fungsi nilai mutalk

7. Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

   Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.

   Biasannya grafik fungsi genap adalah simetri pada sumbu y. Sedangkan grafik fungsi ganjil adalah simetri pada titik normal (0,0).

   Contoh :

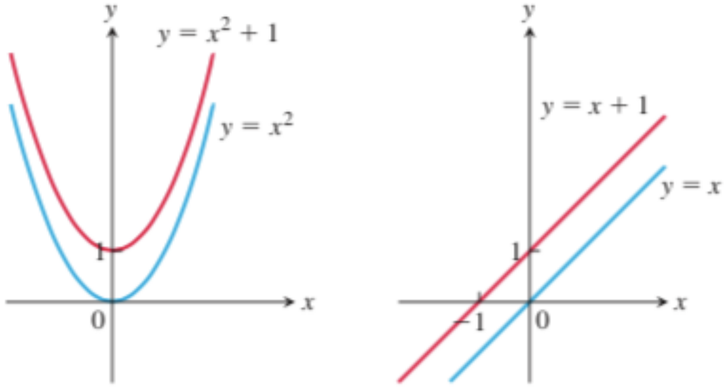
   $f(x) = x^2$ adalah Fungsi genap karena $(-x)^2 = x^2$ untuk semua x, yaitu simetri disumbu y.

   $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi genap $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ untuk semua x, yaitu simetri di sumbu y.

   $f(x) = x$ adalah fungsi ganjil $(-x) = -x$ untuk semua x, yaitu simetri di titik normal.

   $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Ganjil karena $f(-x) = -x + 1$ namun $-f(x) = -x - 1$. Sehingga $f(-x) \neq -f(x)$.

   $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bukan Genap karena $(-x) + 1 \neq x + 1$ untuk semua x.



Gambar 14 Fungsi ganjil dan genap

8. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Jika sebuah grafik fungsi menanjak atau naik dari kiri kekanan, kita sebut sebagai fungsi naik (increasing). Jika sebuah grafik dari fungsi menurun dari kiri ke kanan disebut fungsi turun (decreasing).

Misalnya f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval I dan diketahui x_1 dan x_2 berada pada interval I. Maka

i. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.

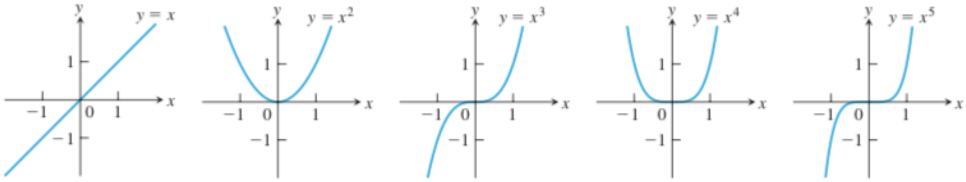
ii. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.

9. Fungsi Berpangkat

Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat. Berikut beberapa kasus fungsi berpangkat.

i. $a = n$, bilangan bulat positif

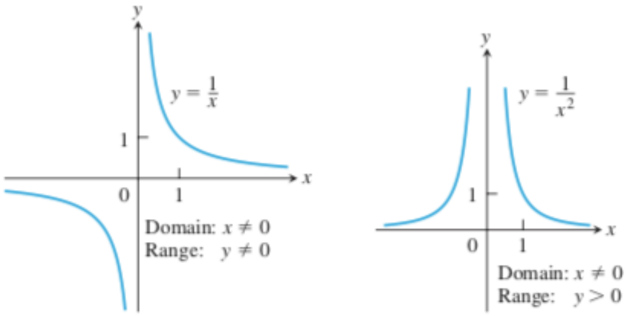
Grafik fungsi $f(x) = x^n$, untuk $n = 1,2,3,4,5$, dapat dilihat seperti pada gambar dibawah. Untuk semua fungsi yang didefinisikan, dapat kita perhatikan pola grafik yang terbentuk yaitu kurva yang terbentuk melandai mendekati sumbu x.



Gambar 15 Fungsi berpangkat

ii. $a = -1$ atau $a = -2$

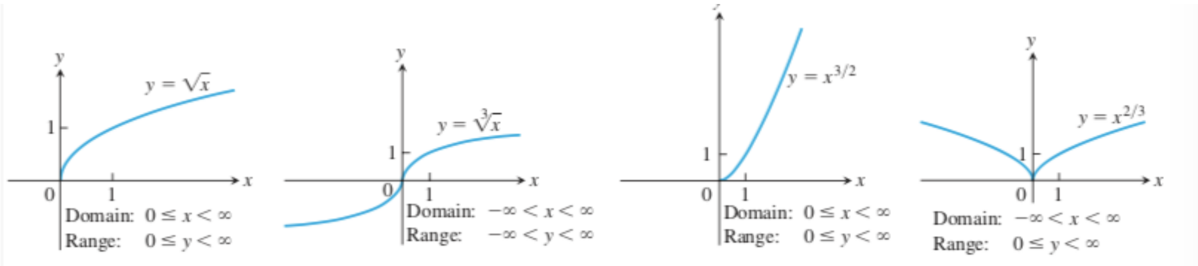
Grafik fungsi $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ dapat direpresentasikan seperti gambar berikut. Fungsi ini didefinisikan untuk semua $x \neq 0$



Gambar 16 Gambar berpangkat -1 dan -2

iii. $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$, dan $\frac{2}{3}$

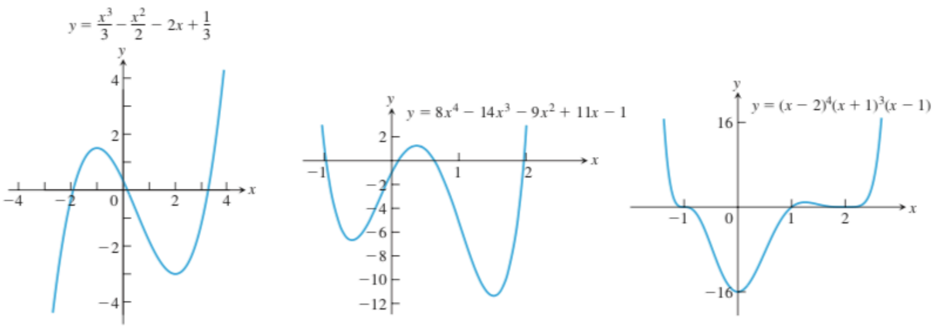
Fungsi $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ merupakan fungsi akar dan fungsi akar kubik.



Gambar 17 Fungsi berpangkat pecahan

10. Fungsi Polinomial (Suku Banyak)

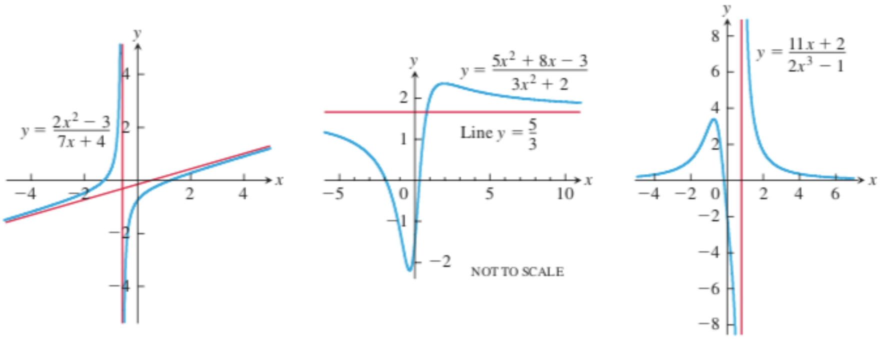
    Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta. Jika $a_n \neq 0$ dan $n > 0$, maka n disebut sebagai derajat polynomial. Fungsi linear dengan $m \neq 0$ disebut sebagai polynomial dengan derajat 1. Derajat dua disebut sebagai fungsi kuadrat dan derajat tiga disebut sabagai fungsi kubik.



Gambar 18 Fungsi polinomial

11. Fungsi Rasional

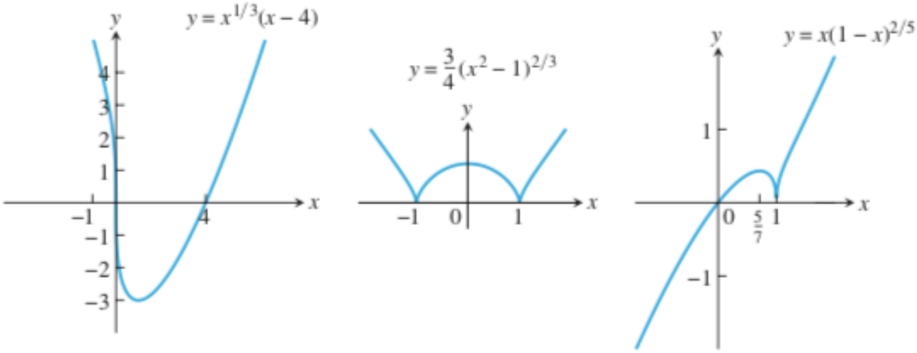
    Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Domain dari fungsi rasional adalah himpunan bilangan riil x dimana $q(x) \neq 0$. Berikut beberapa grafik fungsi rasional.



Gambar 19 Fungsi rasional

12. Fungsi Aljabar

    Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, pengurangan dan akar. Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi aljabar.

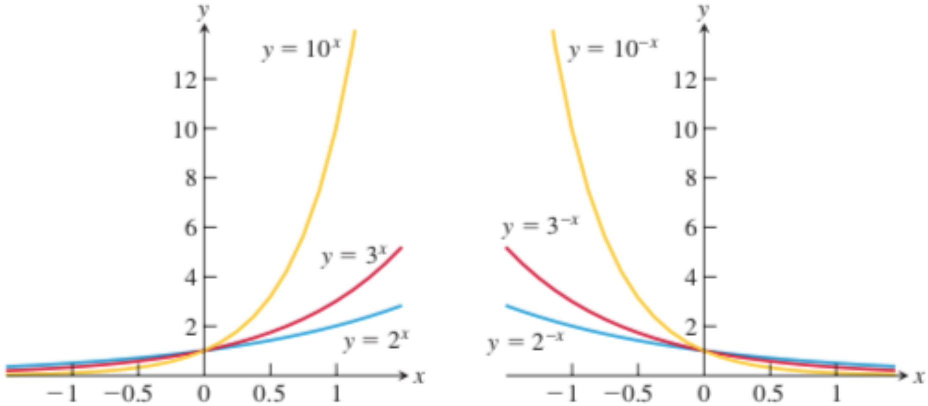


Gambar 20 Fungsi aljabar

13. Fungsi Eksponensial

    Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.

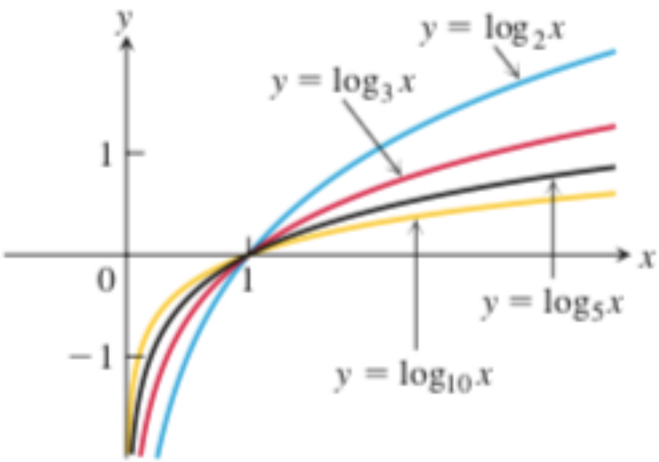
    Fungsi eksponensial memiliki domain $(-\infty, \infty)$ dan range $(0, \infty)$ sehingga fungsi eksponensial tidak pernah diasumsikan bernilai 0. Berikut ini beberapa contoh grafik fungsi eksponensial.



Gambar 21 Fungsi eksponensial

14. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif. Berikut ini beberapa grafik fungsi logaritma



Gambar 22 Fungsi logaritma

4. Rangkuman

1. Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.
2. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.
3. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.
4. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.
5. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.
6. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.
7. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.
8. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.
9. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah), $f(x) = \lfloor x \rfloor$ dan $f(x) = \lceil x \rceil$.
10. Fungsi Mutlak (modulus), $f: x \rightarrow |x|$ atau $f: x \rightarrow |ax + b|$ dimana $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.
11. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku

$f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.

12. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.
13. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.
14. Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat.
15. Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta.
16. Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
17. Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar.
18. Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.
19. Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif.

5. Latihan

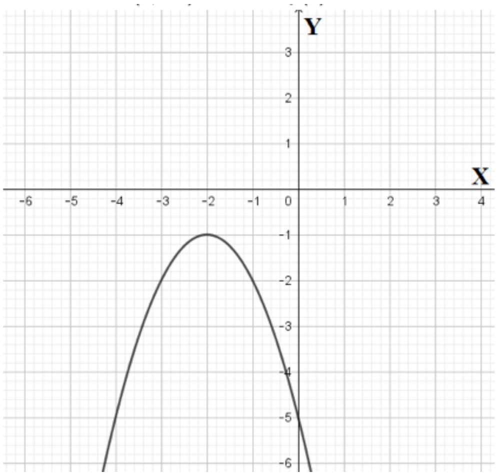
1. Diantara diagram panah fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif dan bijektif? Jelaskan!
2. Suatu fungsi $f: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 2$
   a. Tentukan $f(-1)$, $f(a)$ dan $f(1)$
   b. Tentukan a jika $f(a) = 23$
   c. Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 34?
3. Tentukanlah persamaan garis yang melalui
   a. Titik $M(1,2)$ dan $N(-1,6)$
   b. Titik $(-2,3)$ dan membentuk sudut $45°$ terhadap sumbu x positif.
4. Tentukan persamaan garis I yang melalui $R(3,1)$ dan tegak lurus garis AB dimana titik $A(2,3)$ dan $B(6,5)$.
5. Koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 + 2kx + k + 5$ adalah (m, m). Nilai $k + m =$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah domain dan range dari fungsi berikut
   a. $f(x) = x^3$
   b. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$
   c. $f(x) = \tan x$
   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

2. Fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(-1,3)$ dan titik baliknya sama dengan titik balik dari grafik $f(x) = x^2 + 4x + 3$ adalah
3. Jika grafik $f(x) = ax^2 + (2a + 6)x + 2a - 2$ menyinggung sumbu x, maka koordinat titik balik maksimumnya adalah

4. Bila m dan n merupakan akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 2x + 1 = 0$, carilah nilai dari $(1 + m^2 + m^3 + \cdots)(1 + n^2 + n^3 + \cdots)$
5. Jika gambar dibawah ini merupakan grafik fungsi kuadrat f dengan titik puncak $(-2, -1)$ dan melalui titik $(0, -5)$, maka nilai $f(2)$ adalah



7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 2 : Menguasai Konsep Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi Operasi Fungsi, Fungsi Komposisi dan Pergeseran Grafik Fungsi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

1.5 Operasi Pada Fungsi

Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f+g, f-g$ dan fg seperti

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Contoh :

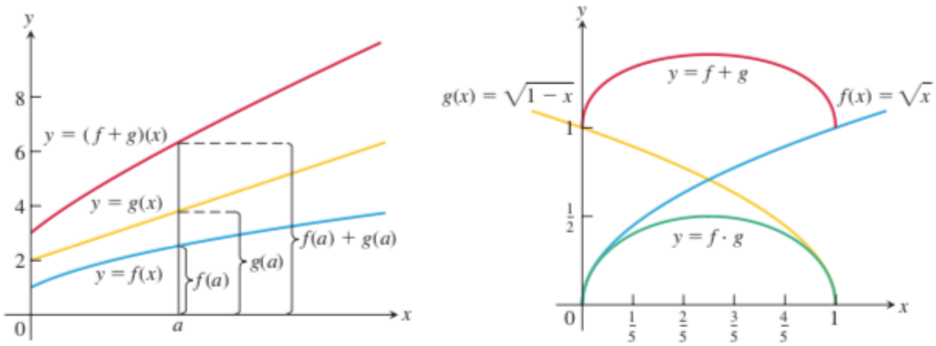
Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \sqrt{1-x}$ dengan $D(f) = [0, \infty)$ dan $D(g) = (-\infty, 1]$. Maka Domain dari fungsi tersebut dapat diperoleh secara umum

$[0, \infty) \cap (-\infty, 1]$

Fungsi yang terbentuk dengan menggunakan operasi aljabar adalah sebagai berikut:

Fungsi	**Rumus**	**Domain**
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$	$[0,1]$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}$	$[0,1]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt{x}$	$[0,1]$
$f.g$	$(f.g)(x) = f(x)g(x)$ $= \sqrt{x(1 - x)}$	$[0,1]$
f/g	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}$	$[0,1)$ kecuali $x = 1$
g/f	$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$	$(0,1]$ kecuali $x = 0$

Grafik pada operasi fungsi tersebut dapat digambarkan seperti pada grafik berikut ini.



Gambar 23 Operasi pada fungsi

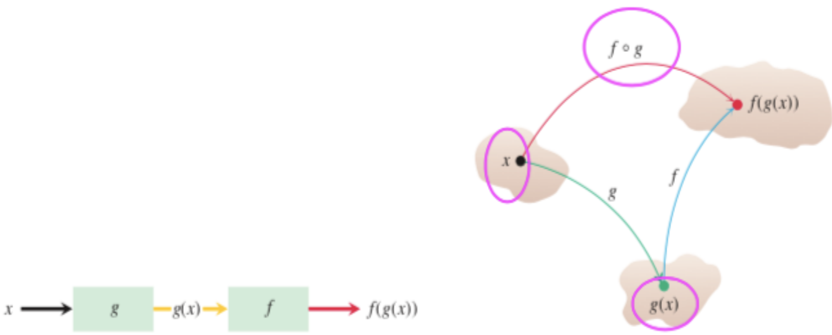
1.6 Fungsi Komposisi

Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.

Berdasarkan definisi diatas diperoleh bahwa $f \circ g$ dapat dibentuk ketika range dari g berada di domain f. Untuk menentukan $(f \circ g)(x)$, maka pertama ditentukan $g(x)$ dan kemudian menentukan $f\big(g(x)\big)$. Fungsi komposisi ini dapat di ilustrasikan seperti tampak pada diagram mesin berikut.



Gambar 24 Fungsi komposisi

Contoh :

Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x + 1$, maka

a. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$ dengan domain $[-1, \infty)$
b. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$ dengan domain $[0, \infty)$
c. $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$ dengan domain $[0, \infty)$
d. $(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$ dengan domain $[-\infty, \infty)$

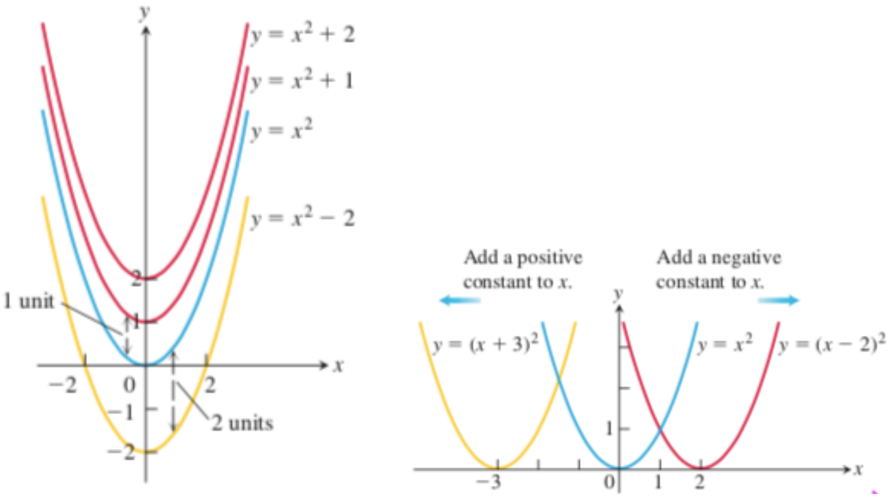
1.7 Pergeseran Grafik Fungsi

Pergeseran grafik sebuah fungsi dapat diperoleh dengan memasukkan beberapa variabel tertentu ke dalam fungsi yang ada. Pergeseran yang ada dibedakan menjadi dua yaitu pergeseran vertical dan pergeseran horizontal.

Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.

Contoh :

Diketahui $f(x) = x^2$ maka diperoleh pergeseran grafik ini untuk $y = x^2 + 1$ bergeser keatas 1 unit, $y = x^2 - 2$ bergeser kebawah 2 unit, $y = (x + 3)^2$ bergeser ke kiri 3 unit dan $y = (x - 2)^2$ seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 25 Pergeseran vertikal dan horizontal

Selain pergeseran Vertikal dan Horizontal, ada juga penskalaan pada grafik yang disebut dnegan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.

ii. $y = \frac{1}{c}f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.

iii. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.

iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

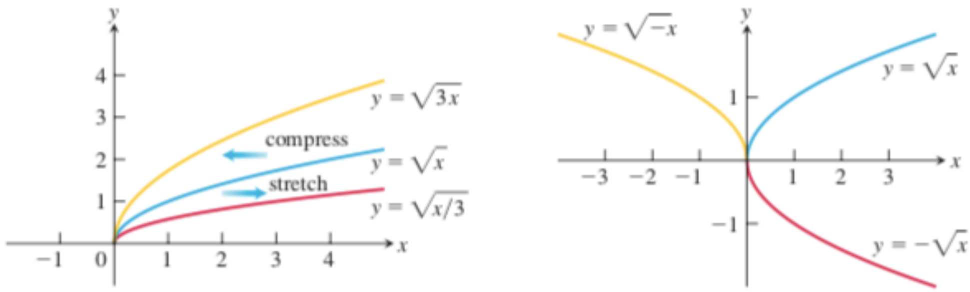
Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.

ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

Contoh :

Diketahui $y = \sqrt{x}$, maka diperoleh peregangan sebesar 3 secara vertikal jika dikalikan 3 yaitu $y = 3\sqrt{x}$ dan mengecil (terkompress) jika dikalikan dengan $\frac{1}{3}$ yaitu $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$. Selanjutnya akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebanyak 3 jika $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$. Kemudian disebut refleksi terhadap sumbu x jika grafik $y = -\sqrt{x}$ dan refleksi terhadap sumbu y jika $y = \sqrt{-x}$. Hal ini tampak pada gambar berikut ini.



Gambar 26 Kompres, stretch dan refleksi

4. Rangkuman

1. Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f + g$, $f - g$ dan fg seperti

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

   selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

2. Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f

komposisi g) didefiniskan dengan

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.

3. Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.
4. Penskalaan pada grafik yang disebut dengan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

   Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.
   ii. $y = \frac{1}{c}f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.
   iii. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.
   iv. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

   Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

   i. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.
   ii. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

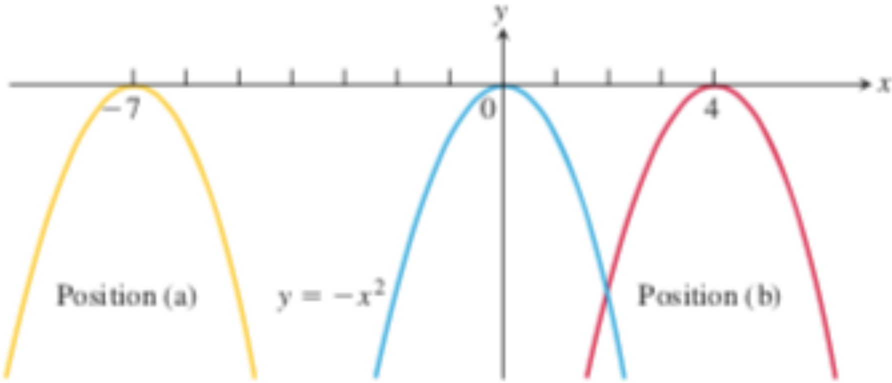
5. Latihan

1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $f + g$, dan $f \cdot g$
   a. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
   b. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
2. Jika $f(x) = x + 5$ dan $g(x) = x^2 - 3$, tentukanlah
   a. $f\big(g(0)\big)$
   b. $g\big(f(0)\big)$
   c. $f\big(g(x)\big)$
   d. $g\big(f(x)\big)$
   e. $f\big(f(-5)\big)$
   f. $g\big(g(2)\big)$
   g. $f\big(f(x)\big)$
   h. $g\big(g(x)\big)$
3. Misalkan $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x$
4. Perhatikanlah tabel berikut

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

   Tentukanlah nilai dari
   a. $f\big(g(-1)\big)$
   b. $g\big(f(0)\big)$
   c. $f\big(f(-1)\big)$
   d. $g\big(g(2)\big)$
   e. $g\big(f(-2)\big)$
   f. $f\big(g(1)\big)$

5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = -x^2$ yang bergeser secara horizontal. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b)



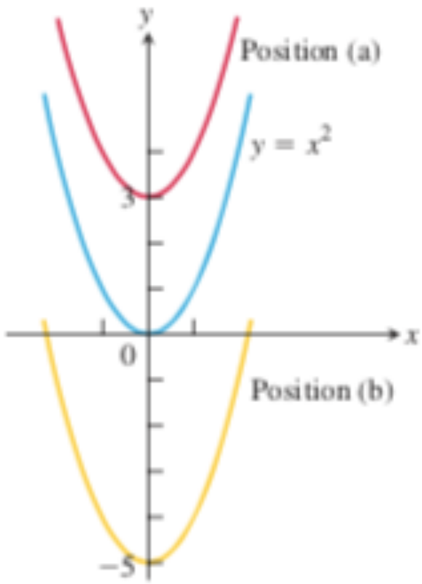
6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah domain dan range dari f, g, $\frac{f}{g}$, dan $\frac{g}{f}$
   a. $f(x) = 2, g(x) = x^2 + 1$
   b. $f(x) = 1, g(x) = 1 + \sqrt{x}$
2. Diketahui fungsi berikut

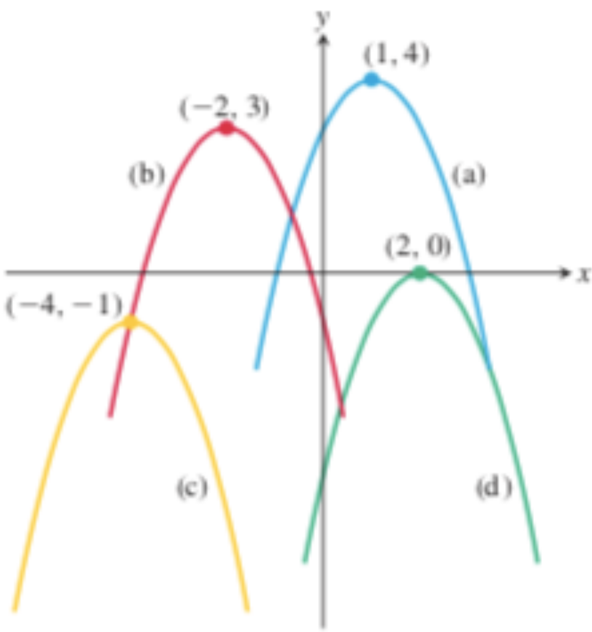
$$f(x) = x^2 + 2$$
$$g(x) = x - 2$$
$$h(x) = 2x - 5$$

   Tentukanlah
   a. $fogoh\ (x)$
   b. $gofoh\ (x)$
   c. $gohof\ (x)$
   d. $gogof\ (x)$
   e. $hohof\ (x)$
3. Misalkan $f(x) = 2x^3 - 4$. Tentukanlah fungsi g sehingga $(f \circ g)(x) = x + 2$

4. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a) dan (b).



5. Gambar dibawah ini adalah grafik dari $y = x^2$ yang bergeser. Tentukanlah persamaan fungsi dari posisi (a), (b), (c) dan (d).



7. **Umpan Balik**

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberikan kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul satu ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Fungsi. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari seperti pada soal latihan dan evaluasi pembelajaran.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Identitas	Kuadrat	Linear	Mutlak	Modulus
Polinomial	Eksponensial	Domain	Range	

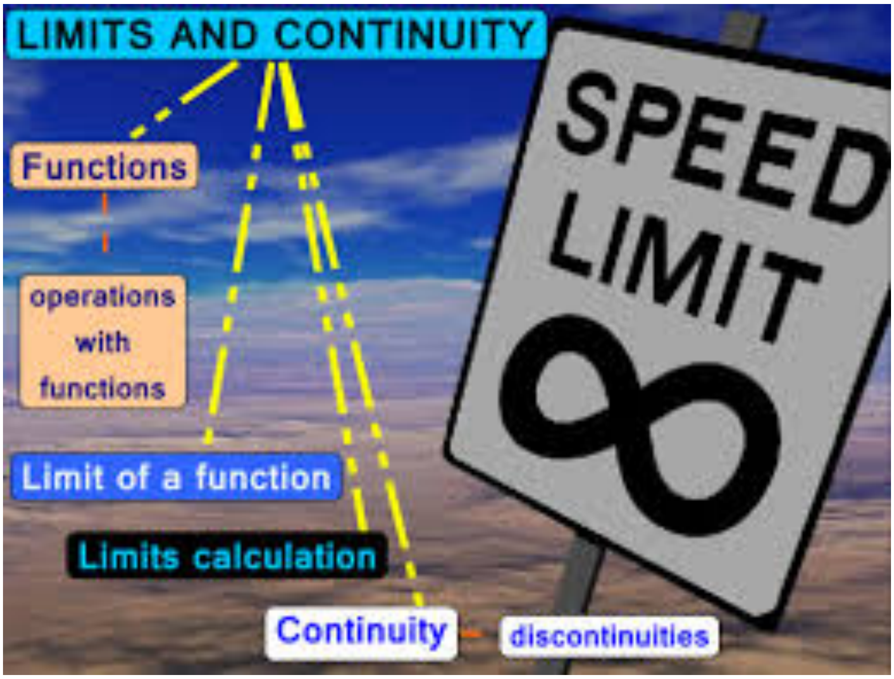
4. Referensi

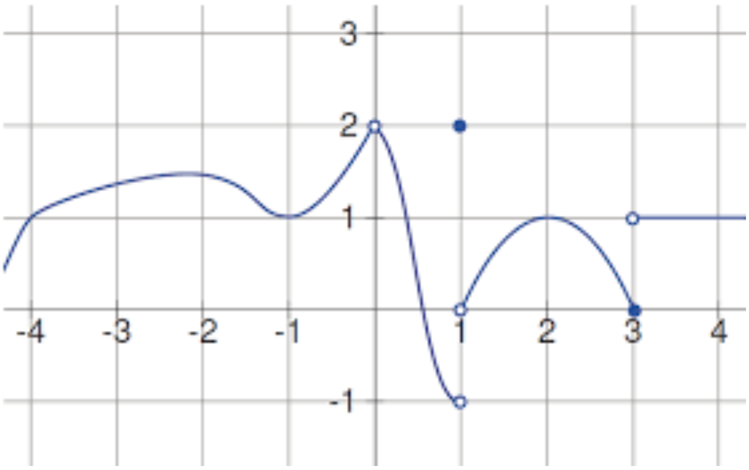
Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 2

LIMIT DAN KEKONTINUAN





MODUL 2

LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Limit merupakan suatu materi dasar yang digunakan dalam menentukan batas suatu fungsi tertentu. Limit banyak digunakan dalam menyelesaiakn berbagai permasalahan sehari-hari seperti dalam perusahaan memproduksi barang tertentu dan bagian kesehatan. Sering sekali limit menjadi materi yang sulit dimengerti oleh peserta didik, namun dengan adanya penjebaaran yang rinci melalui modul ini, diharapkan mahasiswa dapat menguasai materi yang ada hingga akhirnya dapat mengaplikasikannya dikemudian hari bahkan menyelesaikan berbagai permasalahan yang ada. Dalam modul ini akan membuat materi limit dari yang sangat dasar sekali dan modul ini dapat digunakan secara mandiri maupun berkelompok.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul dua

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai operasi trigonometri dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar lingkaran, fungsi, segitiga, phytagoras dan sudut-sudut berelasi.

5. Kegunaan Modul Dua

   Kegunaan modul Dua ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajara terkait dengan materi limit dan kekontinuan beserta aplikasinya. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada denganm maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertianlimit, definisi limit dengan epsilon delta, operasi limit, limit tak hingga dan asimtot limit.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

Minggu ke- 3: Menguasai konsep dasar limit dan kekontinuan beserta operasinya

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

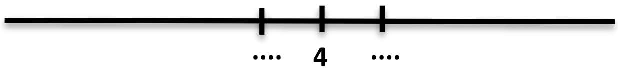
Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan trigonometri, identitasnya dan dalil-dalil segitiga. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan limit dan kekontinuan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

2.1 Apa itu Limit?

Secara etimologi, limit berarti batas. Didalam matematika, limit merupakan konsep dasar di dalam analisis dan kalkulus tentang kelakuan suatu fungsi mendekati titik masukan tertentu.

Misalkan kita memiliki garis bilangan berikut :



Pastinya terdapat bilangan yang tak terhingga banyaknya yang mendekati nilai 4 baik dari arah kiri maupun kanan.

Matematikawan abad ketujuh belas sangat tertarik mempelajari gerak benda-benda di dekat bumi, gerak planet dan bintang. Studi ini melibatkan kecepatan benda dana arah geraknya setiap saat, dan mereka mengetahui arah pada saat tertentu sepanjang garis yang bersinggungan dengan jalur gerak. Konsep batas adalah dasar untuk menemukan kecepatan benda yang bergerak dan garis singgung kurva. Dalam modul ini kita akan mengembangkan limit secara intuitif dan formal. Hal ini dilakukan dengan menggunakan batas untuk menggambarkan cara suatu fungsi bervariasi. Beberapa fungsi bervariasi. Fungsi dapat digambarkan yaitu dengan fungsi yang kontinu maupun fungsi yang tidak kontinu atau biasa disebut dengan fungsi yang melompat. Fungsi-fungsi yang akan dibahas bervariasi dan tidak menentu, atau cenderung meningkat atau cenderung menurun.

Limit muncul ketika menemukan laju perubahan sesaat dari suatu fungsi atau garis singgung kurva. Ini merupakan definisi informal limit yang menunjukkan bagaimana kita menghitung nilai limit.

2.2 Limit Fungsi

Suatu fungsi $f(x)$ dapat kita tentukan nilainya dengan mensubstitusikan nilai domainnya kepada fungsi yang ada. Namun pada beberapa fungsi tertentu, ada kondisi dimana kita tertarik untuk mengetahui nilai dari fungsi didekat titik tertentu c, namun tidak di c. Misalnya kita memiliki fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Maka kita dapat melihat bagaimana kondisi fungsi $f(x)$ tersebut disekitar $x = 1$, karena penyelesaian dari fungsi tersebut adalah $x \neq 1$ (karena penyebut tidak boleh bernilai 0). Maka untuk menyelesaikannya dapat kita sederhanakan terlebih dahulu menjadi

$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ untuk $x \neq 1$.

Dalam hal ini maka kita simpulkan bahwa fungsi $f(x)$ dapat terdefinisi kecuali di titik $x = 1$, sehingga biasa disebut dengan terdefinisi pada interval terbuka. Sehingga fungsi tersebut tidak kontinu di titik $x = 1$. Namun jika sembarang nilai $f(x)$ berada didekat L untuk semua nilai x yang mendekati nilai c, kita katakan bahwa nilai $f(x)$ pada batas L ketika x mendekati c, dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Sehingga pada fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dapat kita simpulkan bahwa

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ atau $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

2.3 Aturan Limit

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, *c* dan *k* adalah bilangan riil dan

   $\lim_{x \to c} f(x) = L, \lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

   a. Aturan penjumlahan

   $$\lim_{x \to c}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

   b. Aturan selisih

   $$\lim_{x \to c}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

   c. Aturan perkalian dengan konstanta

   $$\lim_{x \to c}\big(k.f(x)\big) = k.L$$

   d. Aturan pembagian

   $$\lim_{x \to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L.M$$

   e. Aturan pangkat

   $\lim_{x \to c}\big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

   f. Aturan akar

   $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

g. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

h. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

i. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

j. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

Contoh :

1. $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x - 3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x - \lim_{x\to c} 3 = c^3 + 4c - 3$

2. $\lim_{x\to c} \frac{x^4+x^2-1}{x^2+5} = \frac{\lim_{x\to c}(x^4+x^2-1)}{\lim_{x\to c}(x^2+5)}$

$$= \frac{\lim_{x\to c} x^4 + \lim_{x\to c} x^2 - \lim_{x\to c} 1}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5}$$

$$= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

3. $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2 - 3)}$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -2} 4x^2 - \lim_{x\to -2} 3}$$

$$= \sqrt{4(-2)^2} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{16 - 3}$$

$$= \sqrt{13}$$

2.4 Definisi Limit

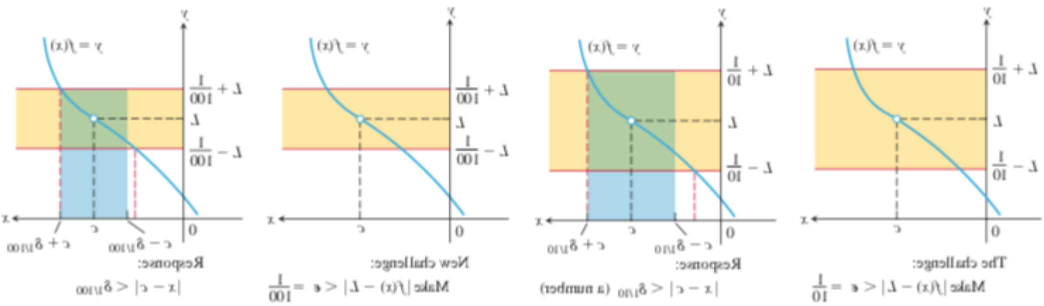
Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval terbuka c, kecuali di titik c. Maka nilai limit dari $f(x)$ dimana x mendekati c adalah L, yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat sembarang bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku,

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Definisi ini dapat kita lihat representasinya pada grafik berikut ini



Gambar 27 Definisi limit

Contoh :

Buktikanlah bahwa

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$$

Jawab :

Dari bentuk limit yang ada diketahui bahwa $c = 1$, $f(x) = 5x - 3$ dan $L = 2$. Misalkan $\epsilon > 0$, maka kita harus menemukan $\delta > 0$ sehingga jika $x \neq 1$ dan x berada disekitar δ dari $c = 1$, yaitu ketika

$$0 < |x - 1| < \delta$$

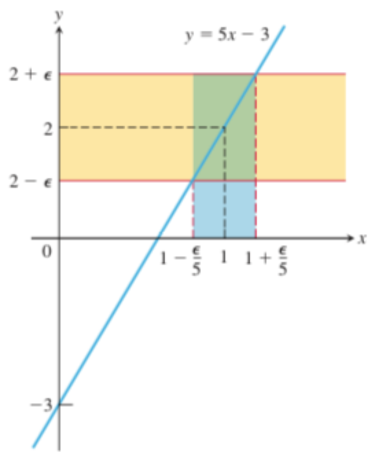
adalah benar bahwa $f(x)$ sekitar ϵ dari $L = 2$, seingga

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

Sebaliknya kita akan menemukan nilai δ melalui pertidaksamaan ϵ:

$$|(5x-3)-2| = |5x-5|$$
$$< \epsilon$$
$$5|x-1| < \epsilon$$
$$|x-1| < \frac{\epsilon}{5}$$

Selanjutnya kita ambil $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, (seperti tampak pada gambar dibawah ini).



Gambar 28 Contoh limit terdefinisi

Jika $0 < |x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$, maka

$$|(5x-3)-2| = |5x-5| = 5|x-1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

sehingga terbukti bahwa $\lim_{x \to 1}(5x-3) = 2$.

Untuk menemukan δ dimana diketahui f, L, c dan $\epsilon > 0$, dapat ditentukan dengan dua langkah berikut:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a, b) yang memuat c dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq c$.

2. Menentukan nilai $\delta > 0$ padainterval $(c-\delta, c+\delta)$ yang berpusat pada c di dalam interval (a,b). Pertidaksamaan $|f(x)-L| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq c$ pada interval δ.

Contoh:

Buktikanlah bahwa $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ jika

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

Jawab:

Untuk menyelesaikannya, dapat kita ikuti langkah-langkah diatas seperti:

1. Menyelesaikan pertidaksamaan $|f(x)-4| < \epsilon$ untuk menentukan interval terbuka (a,b) yang memuat $x = 2$ dan memenuhi pertidaksamaan untuk $x \neq 2$.

   Untuk $x \neq c = 2$, kita mempunyai $f(x) = x^2$, dan pertidaksamaan untuk menemukan penyelesaiannya adalah $|x^2 - 4| < \epsilon$.

$$|x^2 - 4| < \epsilon$$
$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$
$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$
$$\sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}$$

   jadi pertidaksamaan $|f(x)-4| < \epsilon$ akan terpenuhi untuk semua $x \neq 2$ di interval terbuka $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$

2. Menentukan nilai $\delta > 0$ yang berpusat pada interval $(2-\delta, 2+\delta)$ di dalam interval $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$.

   Kita ambil δ sebagai jarak dari $x = 2$ yang mendekati titik akhir $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$. Dengan kata lain, ambil $\delta = \min\left\{\left(2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\right)\right\}$. Jika δ memiliki bilangan tersebut atau yang lebih kecil dan bernilai positif, pertidaksamaan $0 < |x-2| < \delta$ akan otomatis berada pada x diantara $\sqrt{4-\epsilon}$ dan $\sqrt{4+\epsilon}$ untuk membuat $|f(x)-4| < \epsilon$. Untuk semua x,

$$0 < |x-2| < \delta \implies |f(x)-4| < \epsilon$$

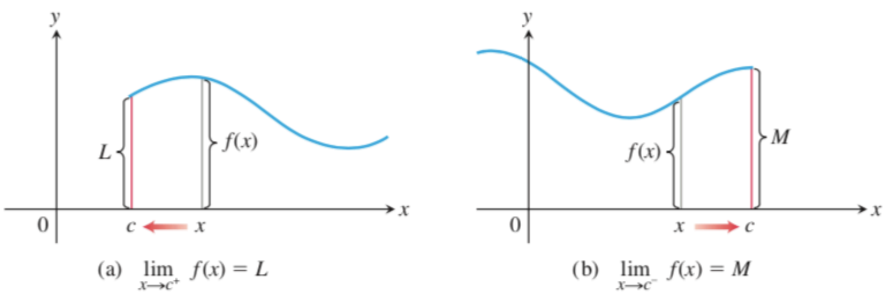
sehingga pembuktian kita sudah lengkap untuk $\epsilon < 4$.

2.5 Limit Satu Sisi

Untuk memiliki sebuah limit L diman x mendekati c, sebuah fungsi f haruslah terdefinisi dari dua arah c dan nilai dari $f(x)$ dari keuda arah tersebut haruslah L, f haruslah terdefinisi di beberapa interval terbuka disekitar c, tapi tidak tepat di c. Hal ini menyatakan bahwa limit adalah dua arah.

Jika f tidak memenuhi pada duarah di c, maka dapat dimungkinkan limit satu arah. Jika limit dari arah kanan maka disebut dengan limit kanan dan jika dari arah kiri disebut sebagai limit kiri.

Limit kanan biasanya dituliskan dengan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (c, b), x mendekati c dan $c < b$. Sedangkan limit kiri dituliskan dengan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$, dimana secara intuitif $f(x)$ terdefinisi pada interva (a, c), x mendekati c dan $a < c$. Ilustrasi dari definisi limit satu arah diatas dapat digambarkan seperti berikut:



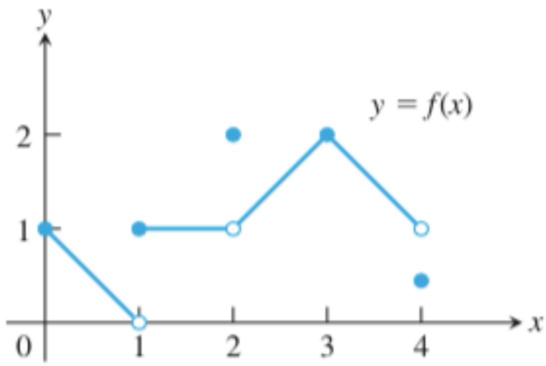
Gambar 29 Limit satu arah

Teorema 1

Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan} \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Perhatikan grafik berikut



Gambar 30 Ketidakkontinuan

Dari gambar diatas dapat kita peroleh bahwa :

1. Di titik $x = 0$

   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$dan $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada. Fungsi ini tidak terdefinisi dari arah kiri $x = 0$.

2. Di titik $x = 1$

   $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ walaupun $f(1) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada karena limit kanan dan limit kiri tidak sama.

3. Di titik $x = 2$

   $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, sehingga $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ walaupuan $f(2) = 2$.

4. Di titik $x = 3$

   $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 2.$

5. Di titik $x = 4$

   $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, walaupun $f(4) \neq 1$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ dan $\lim_{x \to 4} f(x)$ tidak ada. Fungsinya tidak terdefinisi dari arah kanan $x = 4$.

Berdasarkan hal diatas maka limit satu arah dapat didefinisikan dengan:

Fungsi $f(x)$ memiliki limit kanan di c dan dituliskan dengan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c < x < c + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Selanjutnya fungsi $f(x)$ memiliki limit kiri di c dan dituliskan dengan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$, jika untuk semua bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang bersesuaian sehingga untuk semua x yaitu $c - \delta < x < c \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Jawab:

Misalkan $\epsilon > 0$ dimana diketahui $c = 0$ dan $L = 0$, maka kita akan menentukan $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku

$0 < x < \delta \Longrightarrow \left|\sqrt{x} - 0\right| < \epsilon$ atau $0 < x < \delta \Longrightarrow \sqrt{x} < \epsilon$. Dengan menguadratkan kedua sisi dari pertidaksamaan diatas maka $x^2 < \epsilon$ jika $0 < x < \delta$.

Jika kita memilih $\delta = \epsilon^2$ maka diperoleh,

$0 < x < \delta = \epsilon^2 \Longrightarrow \sqrt{x} < \epsilon$ atau $0 < x < \epsilon^2 \Longrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$

sehingga berdasarkan definisi, makan di simpulkan terbukti untuk $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

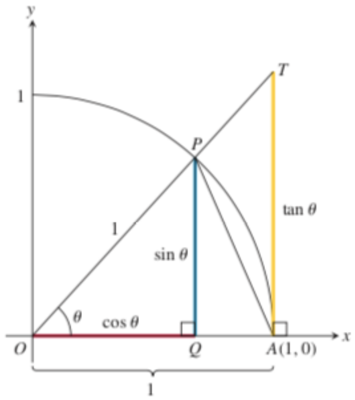
Teorema 2

Limit dari $\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini, maka kita perlu membuktikan bahwa nilai limit kiri dan kanannya bernilai 1.

1. Untuk membuktikan limit kanannya bernilai 1, kita mulai dengan nilai positif dari $\theta < \frac{\pi}{2}$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 31 Limit bernilai 1

Dari gambar diatas diperoleh

$$\text{Luas } \Delta OAP < Luas\ Juring\ OAP < Luas\ \Delta OAT$$

Hal ini dapat dinyatakan dengan

$$\text{Luas } \Delta OAP = \frac{1}{2}\ alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{Luas juring } \Delta OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Luas } \Delta OAT = \frac{1}{2}alas \times tinggi = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Sehingga,

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

Jika pertidaksamaan ini kita bagi dengan $\frac{1}{2}\sin\theta$ akan bernilai positif karena $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, yaitu:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

dengan mengambil kebaikan dari pertidaksamaan ini diperoleh bahwa

$$1 > \frac{\theta}{\sin\theta} > \frac{1}{\cos\theta}$$

Karena $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\theta = 1$ maka dengan menggunakan Teorema Sandwhich diperoleh

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

2. Untuk membuktikan limit kirinya kita akan menggunakan fungsi ganjil yaitu $\sin\theta$ dan θ. Sehingga, $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ adalah fungsi genap yaitu grafik yang simetrik pada sumbu y. Kesimetrian ini mengakibatkan limit kiri di 0 ada dan nilainya sama dengan limit kanan.

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Jadi berdasarkan pembuktian limit kiri dan limit kanan diatas, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Contoh :

1. Tentukanlah nilai limit dari :

   a. $\lim\limits_{p\to 0}\frac{coh\,p-1}{p} = 0$

   b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

   Jawab :

a. $\lim_{p\to 0} \frac{coh\, p-1}{p} = \lim_{p\to 0} -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p}$

misalkan $\theta = \frac{p}{2}$, maka

$$\lim_{p\to 0} -\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{p} = -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \ = -(1)(0) = 0$$

b. untuk menyelesaiakn persamaan ini, maka kita kalikan dengan $\frac{2}{5}$ yaitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{5}\right).\ \sin 2x}{\left(\frac{2}{5}\right).\ 5x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

misalkan $\theta = 2x$ maka dengan menggunakan teorema 2 diatas diperoleh hasilnya adalah $\frac{2}{5}$.

2. Tentukanlah nilai limit dari :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t}$$

Jawab:

Dengan menggunakan definisi dari $\tan t$ dan $\sec 2t$, kita memiliki

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t} = \frac{1}{3}(1)(1)(1) = \frac{1}{3}$$

2.6 Kekontinuan

Misalkan c adalah bilangan riil di sumbu x. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kanan di titik c jika $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu kiri di c jika $\lim_{c\to c^-} f(x) = f(c)$.

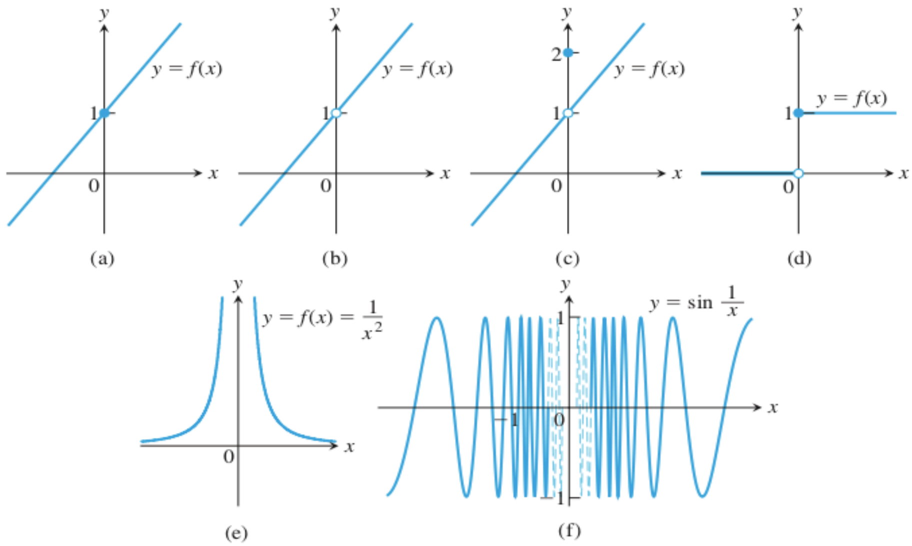
Dengan menggunakan teorema 7.1 secara langsung didapat bahwa fungsi f adalah kontinu di titik c dari domainnya jika dan hanya jika kontinu di kiri dan dikanan. Kita sebut sebuah fungsi adalah kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ jika kontinu kanan di a, kontinu kiri di b dan kontinu di seluruh titik interior dari intervalnya. Jika sebuah fungsi tidak kontinu di titik interior c dari domainnya, maka kita sebut f tidak kontinu di c, dan c adalah sebuah titik yang tidak kontinu dari fungsi f. Ingatlah bahwa fungsi f dapat dikatakan kontinu, kontinu kanan, kontinu kiri hanya di titik c dengan syarat $f(c)$ terdefinisi.

Dapat kita simpulkan kekontinuan di titik interior dengan menggunakan bentuk tes kontinu berikut:

Sebuah fungsi $f(x)$ adalah kontinu di titik $x = c$ jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi berikut:

1. $f(c)$ ada (${c}$ berada di domain f)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada (f memiliki sebuah limit ketika $x \to c$)
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya)

Perhatikan grafik berikut ini:



Gambar 32 Kekontinuan

Dari gambar diatas terdapat beberapa tipe dari ketidakkontinuan. Pada gambar (a) merupakan kontinu di $x = 0$, gambar (b) seharusnya kontinu jika $f(0) = 1$. Selanjutnya gambar (c) harusnya kontinu jika $f(0)$ bernilai 1 bukan 2. Ketidakkontinuan pada gambar (c) ini ditolak atau *removable*. Fungsi seperti ini memiliki nilai limit ketika $x \to 0$ dan kita dapat menghilangkan ketidakkontinuan dengan mengatur $f(0)$ sama dengan nilai limitnya.

Lebih jauh lagi pada gambar (d) melalui f sangat kompleks, yaitu $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada dan tidak ada kemungkinan mengubah nilai f menjadi 0. Sehingga pada kondisi ini disebut sebagai ketidakkontinuan yang lompat (*jump discontinuity*), yaitu limit satu sisinya ada tapi memiliki nilai yang berbeda. Fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pada gambar (e) memiliki ketidakkontinuan yang tak terbatas (*infinite discontinuity*). Fungsi di gambar (f) memiliki ketidakkontinuan yang berisolasi (*oscillating discontinuity*), yaitu pergerakan yang kesana kemari sangat banyak untuk memiliki nilai limit ketika $x \to 0$.

Sebuah fungsi dikatakan fungsi yang kontinu jika kontinu di setiap tidak dari domainnya. Hal ini kita sebut sebagai sifat dari fungsi. Sebuah fungsi selalu memiliki domain yang spesifik. Jika kita mengubah domain, maka kita mengubah fungsinya yang berarti juga memungkinkan untuk mengubah sifatnya.

Misalkan fungsi $y = \frac{1}{x}$ adalah fungsi yang kontinu karena kondisinya adalah kontinu disetiap titik dari domainnya. Fungsi ini tidak kontinu pada titik $x = 0$, karena tidak terdefinisi pada titik tersebut. Sehingga fungsi ini tidak kontinu di setiap titik yang mengandung $x = 0$.

Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

1. Operasi Penjumlahan

$$f+g$$

2. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f-g$$

3. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \qquad \text{untuk setiap nilai } k$$

4. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

5. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

6. Perpangkatan

$$f^n \qquad \text{untuk } n \text{ adalah bilangan bulat positif}$$

7. Bentuk Akar

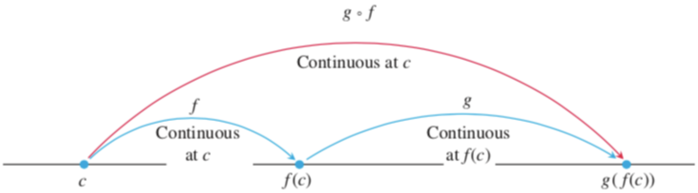
$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

Sifat-sifat ini dapat kita gunakan untuk membuktikan rumus limit. Salah satunya asalah sifat penjumlahan pada limit yaitu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c)+g(c)\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan ini, dapat kita simpulkan bahwa $f+g$ adalah kontinu.

Semua komposisi dari fungsi-fungsi yang kontinu adalah kontinu. Jika $f(x)$ adalah kontinu di $x=c$ dan $g(x)$ adalah kontinu di $x=f(c)$, maka $g \circ f$ adalah kontinu di $x=c$. Kondisi ini menyatakan nilai limitnya ketika $c \to c$ adalah $g\big(f(c)\big)$. Hal ini dapat digambarkan seperti pada gambar berikut ini



Gambar 33 Limit fungsi komposisi

Secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk teorema berikut:

Teorema 3

Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x \to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

Bukti :

Misalkan $\epsilon > 0$. Karena g adalah kontinu di b, maka terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga

$|g(y) - g(b)| < \epsilon$ dimana $0 < |y - b| < \delta_1$.

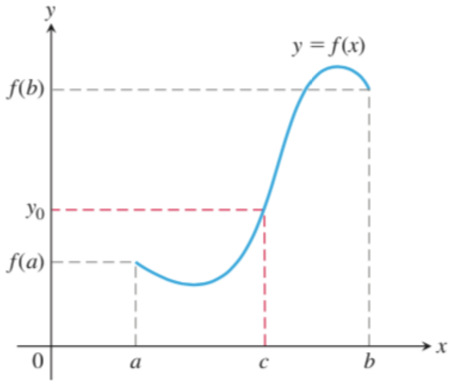
Karena $\lim_{x \to c} f(x) = b$, terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$.

Jika kita misalkan $y = f(x)$, maka kita memperoleh

$|y - b| < \delta_1$ dimana $0 < |x - c| < \delta$

dimana hal ini mengakibatkan $|g(y) - g(b)| = \big|g\big(f(x)\big) - g(b)\big| < \epsilon$ ketika $0 < |x - c| < \delta$. Sehingga berdasarkan definisi limit terbuktilah $\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b)$.

Jika f adalah sebuah fungsi yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, dan jika $y_0$adalah nilai diantara $f(a)$ dan $f(b)$, maka $y_0 = f(c)$ untuk c di $[a, b]$. Seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 34 Kontinu pada interval tertutup

4. **Rangkuman**

1. Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

2. Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

3. Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

4. Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, c dan k adalah bilangan riil dan $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

   i. Aturan penjumlahan

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

   ii. Aturan selisih

$$\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

   iii. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\lim_{x \to c} \big(k.f(x)\big) = k.L$$

iv. Aturan pembagian

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L.M$$

v. Aturan pangkat

$\lim_{x \to c} \big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

vi. Aturan akar

$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

vii. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

viii. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

ix. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

x. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

5. Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

6. Limit dari $\frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

7. Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

    1) Operasi Penjumlahan

    $$f + g$$

    2) Operasi Pengurangan (Selisih)

    $$f - g$$

    3) Perkalian dengan konstanta

    $$k \cdot f \text{ untuk setiap nilai } k$$

    4) Operasi Perkalian

    $$f \cdot g$$

    5) Operasi pembagian

    $$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

    6) Perpangkatan

    $$f^n \qquad \text{untuk } n \text{ adalah bilangan bulat positif}$$

    7) Bentuk Akar

    $\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

8. Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x \to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

5. Latihan

1. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada

    a. $lim \frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to 2$

    b. $lim \frac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$ ketika $x \to 0$ dan $x \to -1$

    c. $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2. Tentukanlah limit dari $g(x)$ ketika x mendekati nilai yang diketahui

   a. $\lim_{x\to 0^+} \left(4g(x)\right)^{\frac{1}{3}} = 2$

   b. $\lim_{x\to \sqrt{5}} \left(\frac{1}{x+g(x)}\right) = 2$

3. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

   a. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

   b. $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

   c. $\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

4. Gunakanlah $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini

   a. $\lim_{x\to 0} \frac{x\csc 2x}{\cos 5x}$

   b. $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$

   c. $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

5. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu

   a. $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

   b. $y = \frac{x+3}{\boldsymbol{x^2-3x-10}}$

   c. $y = \frac{\cos x}{\boldsymbol{x}}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   b. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan

pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

a. $f(x) = x^2 - 5, L = 11, c = 4, \epsilon = 1$

b. $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, c = 1, \epsilon = 0.05$

3. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.

a. $\lim_{x \to -2} f(x) = 1, jika\ f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

b. $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

4. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

a. $\lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$

b. $\lim_{h \to -2^+} (x + 3) \frac{|x+2|}{x+2}$

c. $\lim_{h \to -2^-} (x + 3) \frac{|x+2|}{x+2}$

5. Gunakanlah $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ untuk menentukan limit berikut ini

a. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

b. $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

c. $\lim_{y \to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetulnya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa yang menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke-4 : Menguasai Limit Tak Hingga dan asimtor

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan himpunan beserta jenis-jenisnya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Materi limit tak hingga. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skills.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

2.7 Limit Tak Hingga

1. **Limit berhingga dimana $x \to \pm\infty$**

   Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

   jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

   Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

   jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Contoh :

1. Buktikanlah bahwa

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Jawab :

a. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = \frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan bulat positif yang lebih besar. Jadi terbukti $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

b. Misalkan $\epsilon > 0$, kita akan menemukan bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

Hal ini terimplikasi jika $M = -\frac{1}{\epsilon}$ atau bilangan yang lebih kecil dari $-\frac{1}{\epsilon}$. Jadi terbukti $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. Tentukanlah nilai dari

a. $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$

Jawab:

a. $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$$
$$= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

2. Limit Tak Hingga Fungsi Rasional

Untuk menentukan limit dari fungsi rasional ketika $x \to \pm\infty$, terlebih dahulu kita membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi x. Hasil yang ada tergantung kepada derajat pada persamaan yang ada.

Contoh :

Tentukanlah limit dari

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1}$

Jawab :

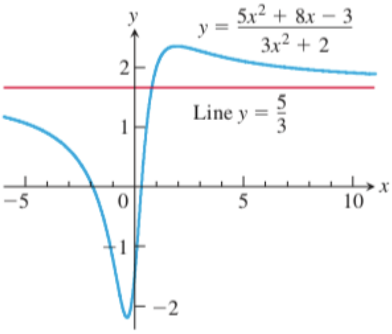
a. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$

3. Asimtot Horizontal

Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Misalkan $f(x) = \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ memiliki garis $y = \frac{5}{3}$ sebagai asimtot horizontal di kiri dan dikanan, karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3}$ dan $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}$. Hal ini terihat seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 35 Asimtot horizontal

Contoh :

1. Tentukanlah asimtot horizontal dari

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$$

Jawab :

Kita menentukan limit ketika $x \to \pm\infty$.

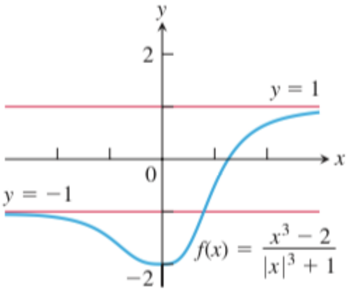
Untuk $x \geq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 1$$

Untuk $x < 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{(-x)^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{-1 + \frac{1}{x^3}} = -1$$

jadi asimtot horizontalnya adalah $y = -1$ dan $y = 1$, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 36 Contoh asimtot horizontal

2. Dengan menggunakan Teorema Sandwhich, tentukanlah asimtot horizontal dari

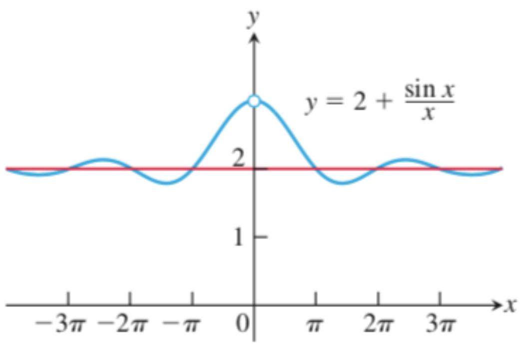
$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

Jawab:

Kita akan menentukannya dengan $x \to \pm\infty$. Karena $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ dan $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$, kita mempunyai $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ dengan menggunakan teorema sandwhich. Sehingga,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 + 0 = 2$$

dengan garis $y = 2$ adalah asimtot horizontal dari kurva kanan dan kiri. Contoh ini mengilustrasikan bahwa kurva yang ada mungkin berpotongan dengan salah satu asimtot horizontalnya beberapa kali.



Gambar 37 Asimtot horizontal berpotongan di beberapa titik

4. Asimtot Miring

Jika derajat pangkat pembilang fungsi rasional adalah lebih besar 1 dari derat pangkat penyebutnya, maka grafiknya memiliki asimtot miring. Untuk menemukan persamaannya kita membagikan pembilang dengan penyebutnya untuk mengekspresikan fungsi f seperti fungsi linear ditambah sisa pembagian dimana mendekati 0 ketika $x \to \pm\infty$.

Contoh :

Tentukanlah asimtot miring dari :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

Jawab :

Kita akan menyelesaikannya dengan $x \to \pm\infty$. Kita melakukan pembagian biasa yaitu $x^2 - 3$ membagi $2x - 4$ diperoleh:

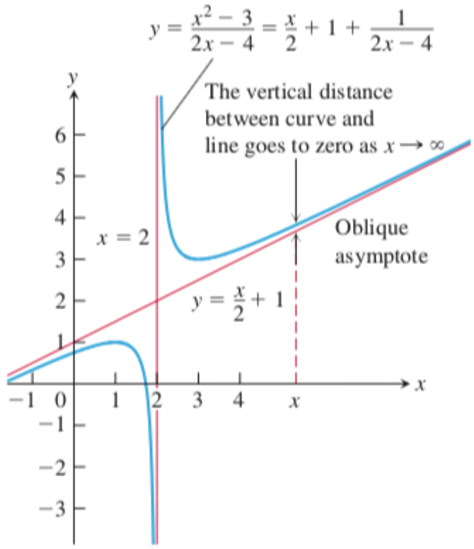
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2x - 4}\right)$$

$\frac{x}{2} + 1$ adalah sebagai linear $g(x)$ dan $\frac{1}{2x-4}$ sebagai sisa pembagian.

Ketika $x \to \pm\infty$, sisa pembagian membuat jarak vertikal antara f dan g, menuju nol, yang membuat garis miring

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

sebagai asimtot dari grafik f. Garis $y = g(x)$ adalah asimtot kiri dan kanan.



Gambar 38 Asimtot miring

5. Limit Tak Hingga

Ingat kembali tentang fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$. Ketika $x \to 0^+$, nilai f meningkat tanpa batas di setiap bilangan riil positif. Misalkan diberikan bilangan riil positif B, bagaimanapun besarnya, nilai dari f menjadi semakin besar. Jadi, f tidak memiliki limit ketika $x \to 0^+$. Berdasarkan hal ini dapat kita deskripsikan kebiasaan dari f dengan menyatakan $f(x)$ mendekati ∞ ketika $x \to 0^+$. Dituliskan dengan

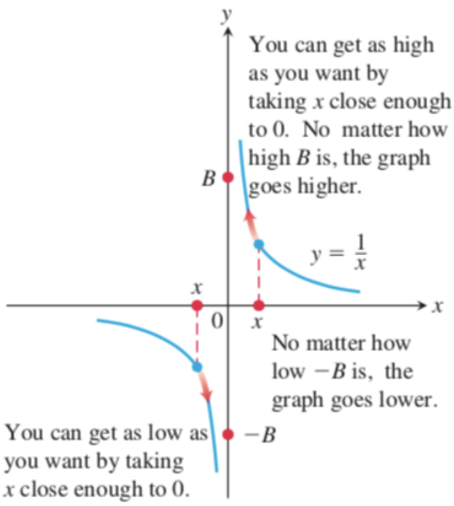
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil ∞, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan positif ketika $x \to 0^+$.

Selanjutnya, ketika $x \to 0^-$, nilai dari $f(x) = \frac{1}{x}$ menjadi besar dan negatif. Misalkan diberikan bilangan riil negatif $-B$, nilai dari f akan berada dibawah $-B$. Kita tuliskan dengan

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

persamaan ini tidak dikatakan bahwa limitnya ada, ataupun dikatakan ada bilangan riil $-\infty$, karena tidak ada nilai yang dimaksudkan. Sehingga kita katakan $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ tidak ada karena $\frac{1}{x}$ menjadi sangat besar dan negatif ketika $x \to 0^-$.



Gambar 39 Limit tangga

Contoh:

Tentukanlah nilai dari limit fungsi berikut:

a. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$

b. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$

c. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7}$

Jawab:

a. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

b. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$

c. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5-6x^4+1}{3x^2+x-7} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-6x^2+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2(x-3)+x^{-2}}{3+x^{-1}-7x^{-2}} = -\infty$

6. Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \implies f(x) > B$.

Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x-c| < \delta \implies f(x) < -B$

Contoh :

Buktikanlah bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Jawab:

Misalkan $B > 0$, kita akan mencari $\delta > 0$ sehingga diperoleh

$$0 < |x-0| < \delta$$

yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > B$.

Sekarang dimiliki

$$\frac{1}{x^2} > B \text{ jika dan hanya jika } x^2 < \frac{1}{B}$$

persamaan ini ekuivalen dengan

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$$

kita memilih $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ atau sebarang bilangan bulat negatif yang lebih kecil, sehingga kita peroleh bahwa

$|x| < \delta$ yang mengakibatkan $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B$

Sehingga melalui definisi terbukti bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

7. Asimtot Vertikal

Sebuah garis $x = a$ adalah vertikal asimtot dari grafik fungsi jika

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ atau $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

Contoh :

Tentukanlah asimtot horizontal dan asimtot vertikal dari

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

Jawab:

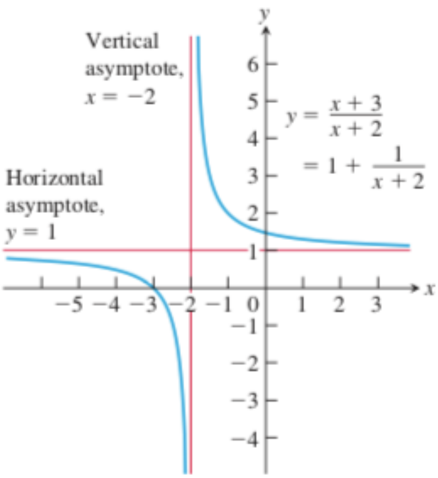
Dalam menyelesaikan ini kita akan menggunakan $x \to \pm\infty$ dan $x \to -2$ dimana penyebut akan menjadi nol.

Persamaan dari fungsi yang ada dapat kita ubah dengan membagikan pembilang dan penyebut sehingga menghasilkan siswa pembagian yaitu

$x + 3$ membagi $x + 2$ yaitu sama dengan

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

ketika $x \to \pm\infty$, kurva mendekati asimtot horizontal $y = 1$; ketika $x \to -2$ kurva mendekati asimtot vertikal $x = -2$. Kita dapat melihat bahwa persamaan ini adalah berasal dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ yaitu naik 1 unit secara vertikal dan bergeser ke kiri sebesar 2 unit, seperti tampak pada gambar dibawah ini. Sehingga asimtotnya seperti garis koordinat yaitu $y = 1$ dan $x = -2$.



Gambar 40 Asimtot horizontal dan vertikal

4. Rangkuman

1) Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

2) Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

3) Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

a. Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > B$.

b. Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < -B$

5. Latihan

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

   b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3}$

   c. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$

   d. $\lim_{x \to \infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   e. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$

   b. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$

   c. $y = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

   b. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

   c. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$

   d. $y = \sqrt{\frac{x^2+9}{9x^2+1}}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah limit dari

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{-5x-3}{2x+5}$

   b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-7x}{x+1}$

   c. $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\theta-1}{\theta}$

   d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

   e. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{12x^3+128}$

   f. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$

   g. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$

2. Tentukanlah asimtot vertikal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut

   a. $y = \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

   b. $f(x) = \frac{\cos 2x-1}{\sin x}$

   c. $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

3. Tentukanlah asimtot horizontal dengan menggunakan limit dari persamaan berikut
    a. $y = \frac{x^2+4}{x-3}$
    b. $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$
    c. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$
4. Tentukanlah asimtot miring dengan menggunakan limit dari persamaan berikut
    a. $y = x + x \sin \frac{1}{x}$
    b. $y = \sqrt{x^2 + 1}$
    c. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$
    d. $y = \frac{2x^{5/2}+2x-3}{\sqrt{x}+1}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul dua ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Kontinu	Limit	Asimtot	Epsilon	Delta
Diskontinu	Komposisi			

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 3

TURUNAN

MODUL 3

TURUNAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Turunan merupakan sebuah materi yang digunakan dalam menentukan berbagai perubahan suatu fungsi. Konsep ini banyak dimanfaatkan didalam produksi maupun dalam menentukan nilai maksimum maupun minimum sebauh grafik fungsi yangtersedia. Turunan ini dipelajar untuk meningkatkan kemampuan matematis mahasiswa dalam menyelesaikan berbagai persoalan nyata yang membutuhkan penyelesaian dengan turunan. Turunan ini juga banyak dibutuhkan oleh fisikawan dan berbagai lini kehidupan baik diperbankan maupun di perusahaan bagian produksi barag.

   Dalam modul ini mahasiswa akan mempelajari berbagai terori dan permasalahan yang ada pada turunan yaitu turunan dasar, turunan komposisi, turunan sebagai suatu perubahan, turunan fungsi trigonometri, turunan dengan menggunakan rumus chain dan turunan implisit baik turuan tingkat satu maupun hingga turunan tingkat tinggi yaitu turunan hingga penurunan ke-n.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Tiga

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai konsep penurunan dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar, fungsi, limit dan kekontinuan.

5. Kegunaan Modul Tiga

   Kegunaan modul Dua ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi turunan beserta aplikasinya. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada dengan maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Pengertian Turunan, Rumus Dasar turunan, turunan sebagai suatu perubahan, Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 5: Menguasai konsep dasar turunan, turunan fungsi sebagai sebuah tingkat perubahan

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan turunan dan rumus dasar penurunannya. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan turunan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

3.1 Pengertian

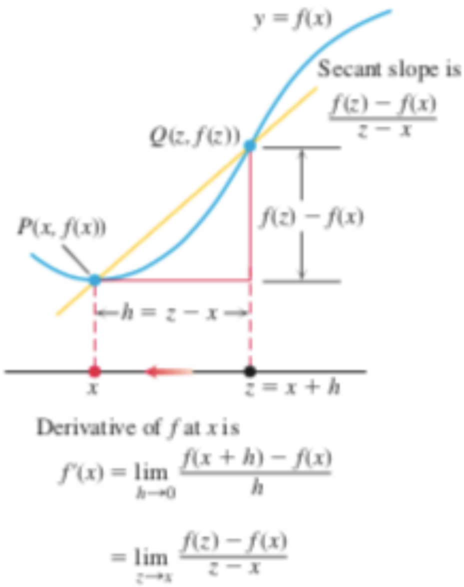
Pada modul sebelumnya kita sudah membahas tentang limit. Pada modul ini kita akan mempelajari tentang turunan dari sebuah fungsi $y = f(x)$ di titik $x = x_0$ yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hal ini terpenuhi jika nilai limitnya ada.

Jika kita tuliskan $z = x + h$ maka $h = z - x$ dan h mendekati 0 jika dan hanya jika z mendekati x. Maka definisi turunan diatas ekuivalen dengan rumus alternative berikut ini:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$



proses dari perhitungan turunan ini disebut sebagai differensiasi. Notasi dari differensiasi ini biasanya dituliskan dengan

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

ini juga merupakan salah satu bentuk lain dalam menuliskan turunan $f'(x)$.

Contoh :

1. Turunan dari $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Jawab :

Kita menggunakan definisi dari turunan, yaitu mewajibkan kita untuk menghitung $f(x+h)$ dan substrak $f(x)$ untuk memperoleh persamaan turunannya, yiatu diperoleh :

$f(x) = \frac{x}{x-1}$ dan $f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}$. Sehingga

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(x+h)}{(x+h)-1} - \frac{x}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2. Tentukanlah turunan dari $f(x) = \sqrt{x}$ untuk $x > 0$ dan tentukanlah garis tangennya di titik $x = 4$.

   Jawab:

   Pertama kita menggunakan rumus alternatif untuk menghitung f':

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Selanjutnya untuk menentukan gradien kurva di titik $x = 4$ adalah

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Tangen adalah sebuah garis yang melalui (4,2) dengan gradien $\frac{1}{4}$, diperoleh:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

Penulisan turunan dapat dinotasikan dalam berbagai bentuk turunan dari fungsi $y = f(x)$, dimana variabel independen adalah x dan variabel dependen adalah y. Berikut ini beberapa notasi umum yang biasa digunakan dalam penulisan turunan:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

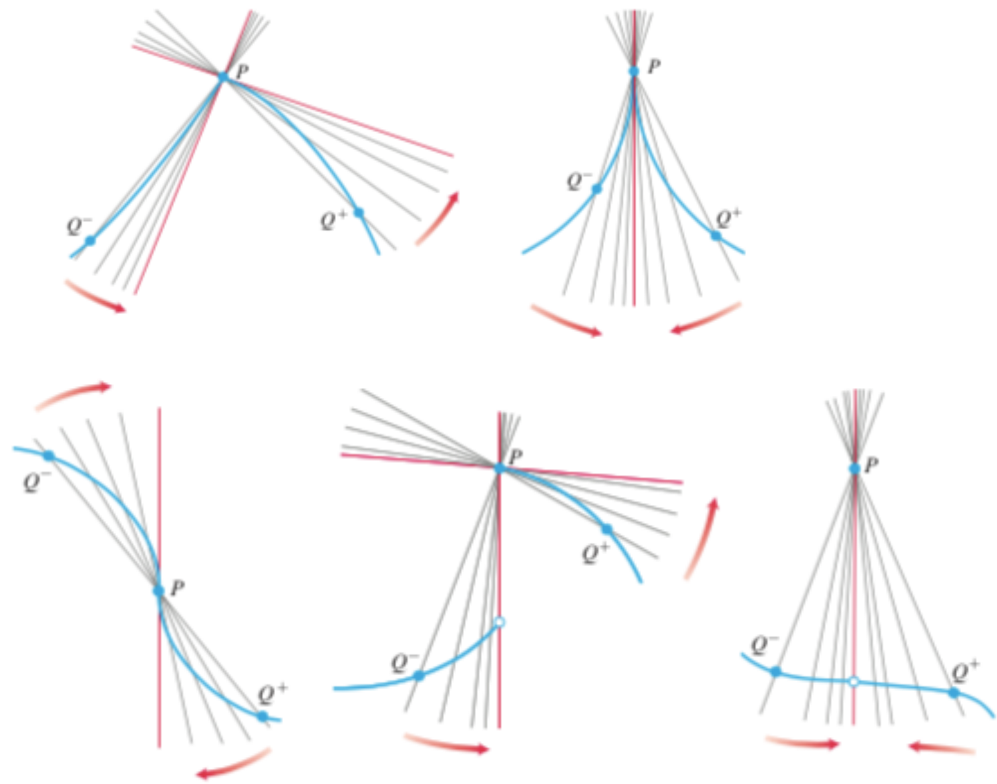
Sebuah fungsi $y = f(x)$ adalah terdifferensiasi pada interval terbuka (hingga atau tak hingga) jika memiliki turunan di setiap titik pada interval. Selanjutnya fungsi tersebut terdifferensiasi pada interval tertutup $[a, b]$ jika dapat diturunkan pada titik interior (a, b) dan jika memiliki limit kiri dan kanan seperti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(b)}{h}$$

adalah ada di setiap titik akhirnya.

Suatu fungsi memiliki turunan di titik x_0 jika gradien garis potong yang melalui $P(x_0, (x_0))$ dan titik terdekat Q pada grafik mendekati batas hingga saat Q mendekati P. Setiap kali garis potong gagal mengambil posisi pembatas atau menjadi vertikal saat Q mendekati P, turunannya tidak ada. Dengan demikian diferensiasi adalah kondisi "kelancaran" pada grafik . Suatu fungsi dapat gagal memiliki turunan di suatu titik karena berbagai alasan, termasuk keberadaan titik-titik di mana grafik memiliki :



Gambar 41 Arah turunan

Sebuah fungsi yang terdifferensiasi adalah fungsi yang kontinu. Hal ini disimpulkan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika f memiliki turunan di titik $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.

Bukti :

Diberikan $f'(c)$ ada, kita harus menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, atau ekuivalen dengan $\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c)$. Jika $h \neq 0$, maka

$$f(c + h) = f(c) + \big(f(c + h) - f(c)\big)$$

$$= f(c) + \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h$$

Sekarang ambil limit untuk $h \to 0$. Dengan teorema pada limit dan kekontinuan, maka

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$
$$= f(c) + f'(c)\cdot 0$$
$$= f(c) + 0$$
$$= f(c)$$

3.2 Rumus Turunan

Rumus-rumus pada turunan dapat kita temukan dan peroleh yaitu dengan menggunakan operasi aljabar pada setiap fungsi yang terdifferensiasi yaitu

1. Turunan dari fungsi konstanta adalah nol

   Jika f memiliki nilai konstanta $f(x) = c$, maka

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

   Bukti :

   Kita gunakan definisi dari turunan untuk $f(x) = c$, dimana output dari fungsi tersebut adalah nilai konstanta c. Di setiap titik dari x, kita temukan bahwa:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

   Contoh :

   Tentukanlah turunan dari $f(x) = 4$, dan $f(x) = 1$

   Jawab :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4) = 0$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

2. Turunan pada fungsi berpangkat positif

   Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Bukti:

Rumus $z^n - x^n = (z-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$

Dapat diverifikasi dengan mengalikasn sisi kanannya. Maka dari rumus alternative untuk definisi dari turunan, diperoleh :

$$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{z^n - x^n}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x}(z-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

$$= nx^{n-1}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari

a. x^5

b. $x^{\frac{2}{3}}$

Jawab :

a. $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$

b. $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

3. Turunan pada fungsi berpangkat bilangan riil

Jika n adalah bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

untuk semua x dimana pangkat x^n dan x^{n-1} terdefinisi.

Contoh :

Tentukanlah turunan dari:

a. $x^{\sqrt{2}}$

b. $\frac{1}{x^4}$

c. $x^{-\frac{4}{3}}$

d. $\sqrt{x^{2+\pi}}$

Jawab:

a. $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

c. $\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{4}{3}}\right) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$

d. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{2+\pi}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1+\frac{\pi}{2}}\right) = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)x^{1+\frac{\pi}{2}-1} = \frac{1}{2}(2+\pi)\sqrt{x^{\pi}}$

4. Turunan fungsi dengan perkalian konstanta

Jika dengan u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, dan c adalah sebuah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h) - cu(x)}{h}$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$= c\frac{du}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari :

a. $3x^4$

b. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$

c. $5\sqrt{x} + 2x$

Jawab:

a. $\frac{d}{dx}(3x^4) = 4 \cdot 3x^{4-1} = 12x^3$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}}$

c. $\frac{d}{dx}\left(5\sqrt{x} + 2x\right) = \frac{d}{dx}5\sqrt{x} + \frac{d}{dx}2x$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5x^{\frac{1}{2}-1} + 1 \cdot 2x^{1-1}$$

$$= \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2$$

5. Penjumlahan pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi terhadap x, maka penjumlahan $u + v$ adalah terdifferensiasi di setiap titik dimana u dan v keduanya terdifferensiasi. Untuk titik-titik tersebut berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Bukti:

Kita dapat menggunakan definisi dari turunan untuk $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari :

a. $y = x^3 - 3x + 5$

b. $y = x^5 + 4x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

Jawab:

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x + 5)$

$$= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(-3x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 3x^2 - 3$$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 + 4x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$

$$= \frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}x\right) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$= 5x^4 + 8x - \frac{3}{2}$$

6. Perkalian pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka perkalian u dan v adalah

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Bukti :

$$\frac{d}{dx}(uv)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[u(x+h)\ \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

ketika h mendekati nol, $u(x+h)$ mendekati $u(x)$ karena u terdifferensiasi di x dan kontinu di x. Sehinga,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan berikut ini:

a. $(x^2 - 3)(x^3 + 2x)$

b. $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)(2x + 3x^2)$

c. $(\sqrt{x} - 2x^2)\left(2x + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}} - \sqrt{x}\right)$

Jawab :

a. Misalkan $u = x^2 - 3$ dan $v = x^3 + 2x$, maka $\frac{dv}{dx} = 3x + 2$ dan $\frac{du}{dx} = 2x$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left((x^2 - 3)(x^3 + 2x)\right) = (x^2 - 3)(3x + 2) + (x^3 + 2x)(2x)$$

$$= (3x^3 + 2x^2 - 9x - 6) + (2x^4 + 4x^2)$$

$$= 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 9x - 6$$

b. Misalkan $u = \frac{1}{2}x - 5$ dan $v = 2x + 3x^2$, maka $\frac{dv}{dx} = 2 + 6x$ dan $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{2}x - 5\right)(2x + 3x^2)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - 5\right)(2 + 6x) + (2x + 3x^2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= x + 3x - 10 - 30x + x + \frac{3}{2}x^2$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 27x - 10$$

c. Misalkan $u = \sqrt{x} - 2x^2$ dan $v = 2x + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}} - \sqrt{x}$, maka $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4x$ dan $\frac{du}{dx} = 2 + \frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, sehingga

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{2}x - 5\right)(2x + 3x^2)\right)$$

$$= \left(\sqrt{x} - 2x^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 4x\right) + \left(2x + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{5}} - \sqrt{x}\right)\left(2 + \frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 4x\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}} + 8x^3 + 4x + \frac{6}{5}x^{\frac{2}{5}} - \sqrt{x} + 3x^{\frac{2}{5}} + \frac{9}{10}x^{-\frac{1}{5}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{10}}$$

$$- 2\sqrt{x} - \frac{9}{10}x^{-\frac{1}{10}} + \frac{1}{2}$$

7. Pembagian pada turunan

Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x dan jika $v(x) \neq 0$, maka pembagian u dan v adalah terdifferensiasi di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

atau dapat juga dinotasikan dengan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

ketika h mendekati nol, $u(x+h)$ mendekati $u(x)$ karena u terdifferensiasi di x dan kontinu di x. Sehinga,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Contoh :

Tentukanlah turunan dari $y = \frac{x^2-1}{x^3+1}$

Jawab:

Misalkan $u = x^2 - 1$ dan $v = x^3 + 1$ maka $\frac{du}{dx} = 2x$ dan $\frac{dv}{dx} = 3x^2$, sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3+1)(2x) - (x^2-1)(3x^2)}{(x^3+1\ )^2}$$

$$= \frac{2t^4 + 2t - 3t^4 + 3t^2}{(x^3+1\ )^2}$$

$$= \frac{-t^4 + 3t^2 + 2t}{(x^3+1\ )^2}$$

8. Turunan kedua atau turunan tingkat tinggi

Jika $y = f(x)$ adalah fungsi terdifferensiasi, maka turunan $f'(x)$ adalah juga sebuah fungsi. Jika f' juga terdifferensiasi,maka f' dapat kita turunkan lagi menjadi f''. Jadi $f'' = (f')'$. f'' kita sebut sebagai turunan kedua dari f karena ini adalah bentuk turunan dari turunan pertama. Turunan kedua ini dapat dituliskan dengan menggunakan beberapa bentuk yaitu:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)$$

demikian juga untuk turunan ketika, keempat dan seterusnya dapat dituliskan dengan

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, y'''' = y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}, \dots , y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^n y$

Contoh :

Tentukanlah turunan pertama hingga turunan kelima dari:

a. $y = x^6 - 2x^3 + 5x - 1$

b. $y = x^5 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Jawab :

a. Turunan tingkat dari $y = x^6 - 2x^3 + 5x - 1$ adalah

Turunan pertama

$$y' = 6x^5 - 6x^2 + 5$$

Turunan kedua

$$y'' = 30x^4 - 12x$$

Turunan ketiga

$$y''' = 120x^3 - 12$$

Turunan keempat

$$y^{(4)} = 360x^2$$

Turunan kelima

$$y^{(5)} = 720x$$

b. Turunan tingkat dari $y = x^5 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ adalah

Turunan pertama

$$y' = 5x^4 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

Turunan kedua

$$y'' = 20x^3 - \frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}} = 20x^3 - \frac{3}{8x^{\frac{3}{2}}}$$

Turunan ketiga

$$y''' = 60x^2 + \frac{9}{16}x^{-\frac{5}{2}}$$

Turunan keempat

$$y^{(4)} = 120x - \frac{45}{32}x^{-\frac{7}{2}}$$

Turunan kelima

$$y^{(5)} = 120 + \frac{315}{64}x^{-\frac{9}{2}}$$

3.3 Turunan Sebagai Tingkat Perubahan

Jika kita menginterpretasikan hasil bagi selisih $\frac{f(x+h)-(x)}{h}$ sebagai laju rata-rata perubahan dalam f selama interval dari x ke $x+h$, kita dapat menginterpretasikan limit ketika $h \to 0$ sebagai perubahan yang mana f berubah pada titik x.

Tingkat erubahan sesaat dari f terhadap x pada x_0 adalah turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dimana limitnya haruslah ada.

Kecepatan (kecepatan sesaat) adalah turunan dari posisi terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka kecepatan di waktu t adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{h}$$

Kecepatan ini dapat juga dituliskan dengan kelajuan yaitu

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Percepatan adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka percepatan di waktu t adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Loncatan adalah turunan dari percepatan terhadap waktu

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Contoh :

Ledakan sebuah dinamit menghempaskan batu berat tegak lurus dengan kecepatan $160\ kaki/detik$ (sekitar 109 mph), Mencapai ketinggian $s = 160t - 16t^2 kaki$ setelah t detik.

a. Berapa tinggi batu tersebut?

b. Berapakah kecepatan dan kelajuan batu ketika 256 kaki berada di atas permukaan tanah saat naik? Dalam perjalanan turun?
c. Berapa percepatan batu pada setiap waktu t selama penerbangannya (setelah ledakan)?
d. Kapan batu itu menyentuh tanah lagi?

Jawab:

a. Untuk setia t waktu selama pergerakan batu, kecepatannya adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}(160t - 16t^2)$$
$$= 160 - 32t \text{ kaki/detik}$$

kecepatan bernilai 0 ketika

$160 - 32t = 0$ atau $t = 5$ detik

tinggi batu ketika $t = 5$ detik adalah

$$s_{max} = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ kaki}$$

b. Untuk menentukan kecepatan batu di 256 kaki keatas dan turun kembali, maka kita pertama menentukan dua nilai dari t untuk

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$
$$16(t^2 - 10t + 16) = 0$$
$$(t - 2)(t - 8) = 0$$
$$t = 2 \text{ detik}, t = 8 \text{ detik}$$

batu berada 256 kaki diatas tanah ketika 2 detik setelah ledakan dan lagi 8 detik setelah ledakan. Kecepatan batu pada waktu yang sama adalah

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ kaki/detik}$$
$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ kaki/detik}$$

Jadi kelajuan baju adalah 96 kaki/detik. Karena $v(2) > 0$, batu bergerak keatas di $t = 2$ detik, lalu bergerak kebawah di $t = 8$ detik karena $v(8) < 0$.

c. Pada waktu selama ledakan, percepatan batu adalah konstan, yaitu

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ kaki/detik}^2$$

d. Batu akan menyentuh tanah di eaktu t positif yaitu untuk $s = 0$. Faktor persamaan $160t - 16t^2 = 0$ memberikan bahwa $16t(10 - t) = 0$, sehingga memiliki solusi $t = 0$ dan $t = 10$. Di titik $t = 0$, ledakan terjadi dan batu terlempar keatas. Batu kembali ke tanah setelah 10 detik kemudian.

4. Rangkuman

1) Turunan dari sebuah fungsi $y = f(x)$ di titik $x = x_0$ yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hal ini terpenuhi jika nilai limitnya ada.

2) Fungsi yang terdifferensiasi pada interval tertutup $[a, b]$ jika dapat diturunkan pada titik interior (a, b) dan jika memiliki limit kiri dan kanan seperti

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a + h) - f(b)}{h}$$

adalah ada di setiap titik akhirnya.

3) Jika f memiliki turunan di titik $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.

4) Jika f memiliki nilai konstanta $f(x) = c$, maka

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

5) Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

6) Jika n adalah bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

untuk semua x dimana pangkat x^n dan x^{n-1} terdefinisi

7) Jika dengan u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, dan c adalah sebuah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

8) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi terhadap x, maka penjumlahan $u + v$ adalah terdifferensiasi di setiap titik dimana u dan v keduanya terdifferensiasi. Untuk titik-titik tersebut berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

9) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka perkalian u dan v adalah

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

10) Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x dan jika $v(x) \neq 0$, maka pembagian u dan v adalah terdifferensiasi di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

11) Jika $y = f(x)$ adalah fungsi terdifferensiasi, maka turunan $f'(x)$ adalah juga sebuah fungsi. Jika f' juga terdifferensiasi,maka f' dapat kita turunkan lagi menjadi f''. Jadi $f'' = (f')'$. f'' kita sebut sebagai turunan kedua dari f karena ini adalah bentuk turunan dari turunan pertama.

12) Tingkat erubahan sesaat dari f terhadap x pada x_0 adalah turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dimana limitnya haruslah ada.

Kecepatan (kecepatan sesaat) adalah turunan dari posisi terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka kecepatan di waktu t adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{h}$$

Kecepatan ini dapat juga dituliskan dengan kelajuan yaitu

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Percepatan adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka percepatan di waktu t adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Loncatan adalah turunan dari percepatan terhadap waktu

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

5. Latihan

1) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari
   a. $f(x) = x^2 - 5x + 1$
   b. $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x$
   c. $y = \sqrt{x} - 3x + 6$
   d. $y = \sqrt{x} + x^2 - x^5$
2) Tentukanlah turunan kedua dari fungsi berikut ini
   a. $f(x) = \left(\sqrt{x} - 5\right)\left(\frac{1}{2}x - 3x^2\right)$
   b. $g(x) = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^5\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)$
   c. $y = \frac{3}{x+7}$

e. $y = \frac{(2x+3x^2)}{(x^2-5x)}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari

a. $y = 5\sqrt{x} - 3x^2 + 9$

b. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 6x^{\frac{2}{5}}$

c. $y = x^2 - x + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

d. $f(t) = t^2 - \frac{1}{5}t + \sqrt{t}$

e. $g(t) = \left(x^2 - 5x + \sqrt{x}\right)^5$

2) Tentukanlah turunan kedua dari fungsi berikut ini

a. $y = (2x^2 - 3x)\left(\frac{1}{2}x + 6\right)$

b. $y = \frac{\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$

c. $f(x) = \left(\sqrt{x} + 3x\right)^3\left(\sqrt{x} - 5x^2\right)$

d. $y = \left(\frac{1}{x+2}\right)^{2x}(2x^3 - 5x)^3$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dama menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 6: Menguasai konsep Turunan Fungsi Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstrultur yang berkaitan dengan turunan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Turunan Fungsi. Trigonometri, rumus Chain dan fungsi implisit. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

3.4 Turunan Fungsi Trigonometri

1. Turunan dari fungsi sinus

   Untuk menentukan turunan dari $f(x) = \sin x$, untuk x adalah radian, maka dapat digunakan limit dengan penjumlahan isudut rangkap seperti:

   $$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

   jika $f(x) = \sin x$, maka

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

2. Turunan dari fungsi Kosinus

Untuk menentukan turunan dari $f(x) = \cos x$, untuk x adalah radian, maka dapat digunakan limit dengan penjumlahan isudut rangkap seperti:

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

jika $f(x) = \cos x$, maka

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\,(x + h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x\,(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} \right) - \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

3. Turunan dari Fungsi dasar Trigonometri

Ingat bahwa $\sin x$ dan $\cos x$ adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, maka fungsi ini juga dapat dituliskan dengan rumus dasar trigonometri yaitu:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Dari rumus dasar trigonometri ini dituliskan setiap turunannya sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc x$$
$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Contoh:

1. $y = x^2 - \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - \sin x)$$
$$= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= 2x - \cos x$$

2. $y = \sin x \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$

dengan menggunakan rumus perkalian pada turunan, maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(\cos x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

3. $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$$

Dengan menggunakan rumus pembagian pada turunan diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x\,(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}$$

4. Tentukanlah turunan kedua dari $\sec x$

Jawab :

$y = \sec x$

$y' = \sec x \tan x$

maka turunan keduanya adalah

$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$

$$= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x)$$

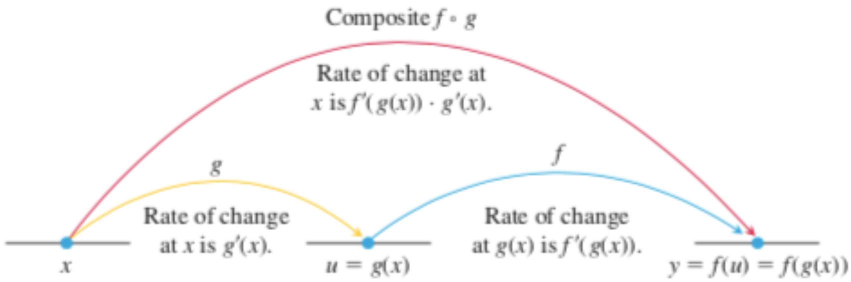
$$= \sec x\,(\sec^2 x) + \tan x\,(\sec x \tan x)$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

3.5 Rumus Chain

1. Turunan Fungsi Komposisi

Turunan dari fungsi komposisi $f(g(x))$ di x adalah turunan dari f terhadap $g(x)$ dikalikan dengan turunan dari g terhadap x. Hal ini disebut dengan rumus Chain, seperti tampak pada gambar berikut:



Rumus Chain dapat dituliskan dengan:

Jika $f(u)$ adalah terdifferensiasi di titik $u = g(x)$ dan $g(x)$ adalah terdifferensiasi di x, maka fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ adalah terdifferensiasi di x, dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pada notasi Leibniz dengan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka Rumus Chain dituliskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

diman $\frac{dy}{du}$ di evaluasi di $u = g(x)$.

Contoh :

Tentukanlah turunan dari

a. $y = (3x^2 + 1)^2$

b. $x(t) = \cos(t^2 + 1)$

Jawab:

a. Misalkan $y = f(u) = u^2$ dan $u = g(x) = 3x^2 + 1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = 2u$$

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= 2u \cdot 6x \\
&= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\
&= 36x^3 + 12x
\end{aligned}$$

b. Misalkan $x = \cos u$, dan $u = t^2 + 1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dx}{du} = -sin\, u$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\
&= -\sin u \cdot 2t \\
&= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\
&= -2t \sin(t^2 + 1)
\end{aligned}$$

2. Rumus Chain untuk Fungsi Berpangkat

Jika f terdifferensiasi dari u dan jika u adalah terdifferensiasi dari x, maka dengan mensubstitusi $y = f(u)$ ke rumus Chain, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

menjadi

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}$$

jika n adalah bilanga riil dan f adalah fungsi berpangkat, $f(u) = u^n$, maka turunan berpagkat menunjukkan bahwa $f'(u) = nu^{n-1}$. Jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, maka dengan menggunakan rumus Chain yang disebut dengan Rumus Chain berpangkat berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Contoh:

1) Tentukanlah turunan dari:
   a. $y = (5x^3 - x^4)^7$
   b. $y = \frac{1}{3x-2}$
   c. $y = \sin^5 x$
   d. $y = \cos^7 x$

Jawab:

a. Misalkan $u = 5x^3 - x^4$ dan $n = 7$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^7 = 7u^6 = 7(5x^3 - x^4)^6$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(15x^2 - 4x^4)$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)\\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^2)\\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^2)\end{aligned}$$

b. Misalkan $u = 3x - 2$ dan $n = -1$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^{-1} = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(3x-2)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x - 2) = 3$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{d}{dx}(3x-2)^{-1}$$

$$= -1(3x-2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x-2)$$

$$= -1(3x-2)^{-2}(3)$$

$$= -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

c. Misalkan $u = \sin x$ dan $n = 5$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^5 = 5u^4 = 5\sin^4 x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(\sin^5 x) = 5\sin^4 x\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= 5\sin^4 x\cos x$$

d. Misalkan $u = \cos x$ dan $n = 7$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^7 = 7u^6 = 7\cos^6 x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(\sin^5 x) = 7\cos^6 x\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 7\cos^6 x(-\sin x)$$

$$= -7\sin x\cos^6 x$$

2) Tentukanlah turunan dari fungsi trigonometri berikut:

a. $y = -10x + 3\cos x$

b. $f(x) = sinx\ tanx$

c. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

d. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

e. $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

f. $y = xe^{-x}\sec x$

g. $y = x^2 \cos x$

h. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + \frac{7}{e^x}$

i. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

j. $y = \frac{4}{x} + 6\sin x$

k. $y = x^2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x$

l. $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

m. $y = \frac{3}{x} + 5\sin x$

Jawab:

a. $y = -10x + 3\cos x$

$y' = -10.1\, x^{1-1} + 3\,(-\sin x)$

$y' = -10\, x^0 - 3\sin x$

$y' = -10 - 3\sin x$

b. $f(x) = sinx\ tanx$

Misalkan,

$\text{u} = \sin x\,, u' = \cos x$

$v = \tan x\,, v' = sec^2x$

$f'(x) = u'v + v'u$

$f'(x) = \cos x\tan x + sec^2xsin\ x$

$$f'(x) = \cos x\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{cos^2x}\sin x$$

$$f'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \sin x + \tan x \sec x$$

c. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

$$y = \frac{\cot x}{1+\cot x} = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Misalkan

$u = \cot x$ maka $u' = -\csc^2 x$

$v = 1 + \cot x$ maka $v' = -\csc^2 x$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y' = \frac{-\csc^2 x(1+\cot x) - (-\csc^2 x)\cot x}{(1+\cot x)^2}$$

$$y' = \frac{-\csc^2 x - \cot x . \csc^2 x + \csc^2 x \cot x}{(1+\cot x)^2}$$

$$y' = \frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

d. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

$u = \sqrt{x}$, $\quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = \sec x$, $\quad v' = \sec x \tan x$

$$y' = u'v + v'u$$

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\sec x) + (\sec x \tan x)\left(\sqrt{x}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} (\sec x) + \sqrt{x} \sec x \tan x$$

$$y' = \frac{\sqrt{x}}{2x} \sec x + \sqrt{x} \sec x \tan x$$

$$y' = \sqrt{x} \sec x \left(\frac{1}{2x} + \tan x \right)$$

e. $y = (\sin x + \cos x) \sec x$

$$y = (\sin x + \cos x) \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \sin x . \frac{1}{\cos x} + \cos x . \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$y = \tan x + 1$$

$$y' = \sec^2 x + 0$$

$$y' = \sec^2 x$$

f. $y = xe^{-x} \sec x$

$y' = u'v + v'u$

Misalkan :

$u = xe^{-x}$ maka $u' = u'v + v'u$

$u' = 1e^{-x} + (-e^{-x})x$

$u' = e^{-x} - xe^{-x}$

$v = \sec x$ maka $v' = \tan x \sec x$

$y' = u'v + v'u$

$y' = (e^{-x} - xe^{-x}) \sec x +$
$(\tan x \sec x) xe^{-x}$

$y' = e^{-x} \sec x - xe^{-x} \sec x +$

$xe^{-x} \tan x \sec x$

$y' = e^{-x} \sec x + xe^{-x} \sec x\,(-1 + \tan x)$

g. $y = x^2 \cos x$

$y = x^2 \cos x = u.v$

Misal. : $u = x^2, maka\ u' = 2x$

$v = \cos x\,, maka\ v' = -\sin x$

$y' = u'v + v'u$

$y' = 2x.\cos x + (-\sin x)\,x^2$

$y' = 2x \cos x - x^2 \sin x$

h. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + \frac{7}{e^x}$

$y = \csc x - 4x^{\frac{1}{2}} + 7e^{-x}$

$y' = -\csc x \cot x - 4.\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + (-1)7e^{-x}$

$y' = -\csc x \cot x - 2x^{-\frac{1}{2}} - 7e^{-x}$

$y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{7}{e^x}$

$y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{7}{e^x}$

$y' = -\csc x \cot x - \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{7}{e^x}$

i. $y = (\sec x + \tan x)\,(\sec x - \tan x)$

$y = \sec^2 x - \sec x \tan x +$

$\sec x \tan x - \tan^2 x$

$y = \sec^2 x - \tan^2 x$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$$y' = 0$$

j. $y = \frac{4}{x} + 6 \sin x$

$y = 4\,x^{-1} + 6 \sin x$

$y' = -4x^{-1-1} + 6 \cos x$

$y' = -4\,x^{-2} + 6 \cos x$

$y' = -\frac{4}{x^2} + 6 \cos x$

k. $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

- Pertama cari $y' = x^2 \cos x$

  $y' = x^2 \cos x$

  $y' = u'v + v'u$

Misalkan :

$u = x^2$ maka$u' = 2x$

$v = \cos x$ maka $v' = -\sin x$

$y' = u'v + v'u$

$y' = 2x.\cos x + (-\sin x)x^2$

$y' = 2x \cos x - x^2 \sin x$

- Kedua, cari $y' = 2x \sin x$

  $y' = 2x \sin x$

  $y' = u'v + v'u$

Misalkan :

$u = 2x$ maka$u' = 2$

$v = \sin x$ maka $v' = \cos x$

$y' = u'v + v'u$

$y' = 2 . \sin x + \cos x . 2x$

$y' = 2 \sin x + 2x \cos x$

- Subs. Nilai y' yang diketahui ke persamaan awal

$y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

$y' = 2x \cos x - x^2 \sin x -$

$(2 \sin x + 2x \cos x) - 2 (-\sin x)$

$y' = 2x \cos x - x^2 \sin^2 x - 2 \sin x -$

$2x \cos x + 2 \sin x$

$y' = -x^2 \sin x$

1. $y = \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Misalkan

$u = \cos x$ maka $u' = -\sin x$

$v = 1 + \sin x$ maka $v' = \cos x$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y' = \frac{-\sin x (1 + \sin x) - \cos x . \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

m. $y = \frac{3}{x} + 5\sin x$

$$y = 3x^{-1} + 5\sin x$$

$$y' = -1\times 3x^{-1-1} + 5\sin x$$

$$y' = -3x^{-2} + 5\cos x$$

$$y' = \frac{-3}{x^2} + 5\cos x$$

3.6 Turunan Implisit

1. Definisi Fungsi Implisit dan Turunannya

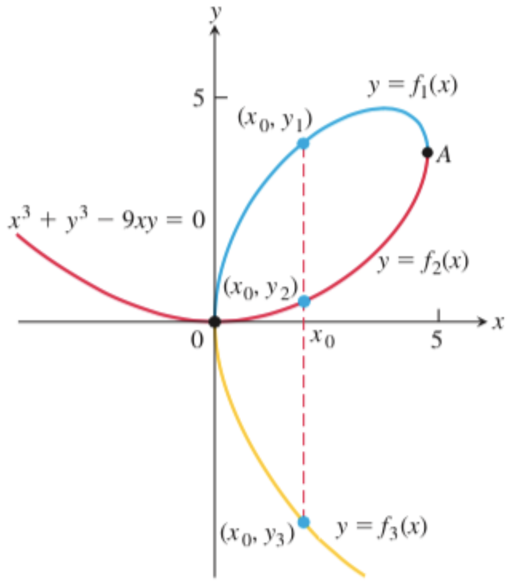
   Fungsi yang biasa kita sering gunakan adalah fungsi implisit yang biasa dituliskan dengan $y = f(x)$ yaitu bahwa variabel y di ekspresikan oleh x.

   Bentuk lain dari fungsi diekspresikan dengan fungsi implisit. Beberapa bentuk fungsi implisit yaitu:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^3 + xy + y^3 - 10 = 0$$

   Berikut ini bentuk grafik dari fungsi implisit:



Gambar 42 Fungsi implisit

Turunan dari fungsi-fungsi berikut ini dapat dilakukan dengan menentukan $\frac{dy}{dx}$ yaitu dengan turunan implisit.

Turunan dari fungsi implisit ini dapat digunakan untuk menentukan gradien dan garis tangennya.

Contoh :

1) Tentukanlah turunan dari $y^2 = x$

   Jawab :

   Persamaan $y^2 = x$ mendefiniskan dua fungsi terdifferensiasi dari x, yaitu $y_1 = \sqrt{x}$ dan $y_2 = \sqrt{x}$. Dari persamaan ini dapat menentukan setiap turunannya untuk $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   dan

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

misalnya kita hanya memiliki fungsi $y^2 = x$, selanjutnya tentukan nilai $\frac{dy}{dx}$.

Untuk menentukannya, kita perlu menyederhanakan $y^2 = x$ terhadap x, misalkan $y = f(x)$ sebagai fungsi yang terdifferensiasi dari x:

$$y^2 = x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

rumus ini memberikan turunan dari kedua solusi eksplisit $y_1 = \sqrt{x}$ dan $y_2 = -\sqrt{x}$.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dan

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Tentukanlah turunan dari
   a. $x^2y + xy^2 = 6$
   b. $2xy + y^2 = x + y$
   c. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

   Jawab :

   a. $x^2y + xy^2 = 6$

   $$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}(6)$$

   $$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0$$

   $$y' = \frac{-2xy - y^2}{2xy + x^2}$$

$$= \frac{-xy - y^2}{xy + x^2}$$

b. $2xy + y^2 = x + y$

$$\frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y)$$

$$2(y + xy') + 2yy' = 1 + y'$$

$$2y + 2xy' + 2yy' = 1 + y'$$

$$2xy' + 2yy' - y' = 1 - 2y$$

$$y'(2x + 2y - 1) = 1 - 2y$$

$$y' = \frac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$$

c. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$2yy' = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2}$$

$$2yy' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

d. $x = \tan y$

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\tan y)$$

$$1 = sec^2 yy'$$

$$y' = \frac{1}{sec^2 y}$$

e. $x + \tan(xy) = 0$

$$\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(\tan(xy)) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$1 + x\, sec^2(xy)y' + y\, sec^2(xy) = 0$$

$$y' = \frac{-1 + y\, sec^2(xy)}{x\, sec^2(xy)}$$

f. $\theta^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{2}} = 1$

$$\frac{d}{dx}\left(\theta^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(r^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}r' = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\theta^{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{r^{2}}r' = 0$$

$$\frac{1}{2\theta^{2}} + \frac{1}{2r^{2}}r' = 0$$

$$r' = -\frac{\frac{1}{2\theta^{2}}}{\frac{1}{2r^{2}}}$$

$$r' = -\frac{r^{\frac{1}{2}}}{\theta^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$$

g. $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$

$$\frac{d}{dx}(\sin(r\theta)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos(r\theta)\,(\theta r' + r) = 0$$

$$\theta r' + r = 0$$

$$r' = -\frac{r}{\theta}$$

2. Turunan Bertingkat Fungsi Implisit

Turunan bertingkat hingga turunan ke-n dapat ditentukan dengan menurunkan fungsi yang sudah diturunkan ke $n-1$ kali penurunan. Konsep penurunan dapat dilakukan dengan menggunakan rumus pada turunan pertama secara umum baik dalam operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

Contoh:

Tentukanlah turunan kedua dari:

a. $x^2 + y^2 = 1$

b. $y^2 = x^2 + 2x$

Jawab:

a. $x^2 + y^2 = 1$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{d}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = \frac{-y - xy'}{(y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{(y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + \frac{x^2}{y}}{(y)^2} = \frac{-\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

b. $y^2 = x^2 + 2x$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2x)$$

$$2yy' = 2x + 2$$

$$y' = \frac{2x + 2}{2y} = \frac{2(x + 1)}{2y} = \frac{x + 1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x + 1}{y}\right) = \frac{y - y'(x + 1)}{(y)^2} = \frac{y - xy' - y'}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - x\left(\frac{x+1}{y}\right) - \left(\frac{x+1}{y}\right)}{y^2} = \frac{y - \frac{x+x}{y} - \frac{x+1}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\underline{\frac{y - x^2 - x - x - 1}{y}}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - x^2 - 2x - 1}{y} \times \frac{1}{y^2} = \frac{y - x^2 - 2x - 1}{y^3}$$

3. Garis Tangen dan Garis Normal

Garis tangen merupakan persamaan garis linear sisi miring dari fungsi implisit yang kita miliki. Sedangkan garis normal adalah garis linear yang tegak lurus dengan garis tangen. Untuk menentukan garis tangen dan garis normal pada fungsi implisit, dapat kita tentukan dengan menggunakan turunan pertamanya. Setiap fungsi implisit yang diturunkan sekali, yaitu $\frac{dy}{dx}$ menjadi kunci untuk menentukan persamaan garis tangen maupun garis normal pada titik tertentu dari fungsi implisit yang kita miliki.

Contoh:

1) Tentukan garis kemiringan dan garis normal pada kurva $x^2 + xy - y^2 = 1$, pada titik (2,3) !

Jawab:

$x^2 + xy - y^2 = 1$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy - \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1$$

$$2x + y + \frac{dy}{dx}x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}x - 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y}$$

Masukkan titik (2,3) pada $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 2y} = \frac{-2.2 - 3}{2 - 2.3} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4} = m = gradien$$

Persamaan garis kemiringan dicari menggunakan persamaan:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{7}{4}(x - 2)$$

$$y - 3 = \left(\frac{7}{4}x - \frac{7}{2}\right)$$

$$y - 3 = \frac{7}{4}x - \frac{7}{2} + 3$$

$$y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$$

Persamaan garis normal dicari menggunakan persamaan:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dimana $m \; x \; m_1 = -1$, jadi $\frac{7}{4} \; x \; m_1 = -1 \rightarrow m_1 = -\frac{4}{7}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -\frac{4}{7}(x - 2)$$

$$y - 3 = \left(-\frac{4}{7}x + \frac{8}{7}\right)$$

$$y - 3 = -\frac{4}{7}x + \frac{8}{7} + 3$$

$$y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$$

2) Tentukan Pararel tangents 2 point dari curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ memotong sumbu X

   Jawab:

   Memotong sumbu x, maka y = 0

   $$x^2 + xy + y^2 = 7$$

   $$x^2 + x(0) + 0^2 = 7$$

   $$x^2 = 7$$

   $$x = \pm\sqrt{7}$$

   Point 1 = $\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$

   Point 2 = $\left(\sqrt{7},\ 0\right)$

   $$x^2 + xy + y^2 = 7$$

   $$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}7$$

   $$2x + y + \frac{dy}{dx}x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

   $$\frac{dy}{dx}(x + 2y) + 2x + y = 0$$

   $$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y$$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

   Point 1 = $\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = \frac{-2x\left(-\sqrt{7}\right) - 0}{\sqrt{7} + 0} = -2$$

Point 2 = $\left(\sqrt{7},\ 0\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = \frac{-2x\left(\sqrt{7}\right) - 0}{\sqrt{7} + 0} = -2$$

Terbukti bahwa titik-titik tersebut sejajar, dimana nilai kemiringannya sama.

3) Tentukan nilai kemiringan, jika diketahui kurva $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ pada 4 titik yaitu (-3,2), (3,2), (-3,-2), (3,-2) !

Jawab:

$$y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$$

$$\frac{d}{dx}y^4 - \frac{d}{dx}4y^2 = \frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}9x^2$$

$$\frac{dy}{dx}4y^3 - \frac{dy}{dx}8y = 4x^3 - 18x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 18x}{4y^3 - 8y} = \frac{2(2x^3 - 9x)}{2(2y^3 - 4y)} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)}$$

Titik (-3,2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(-3)^3 - 9(-3))}{(2.2^3 - 4.2)} = \frac{-27}{8}$$

Titik (3,2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(3)^3 - 9(3))}{(2.2^3 - 4.2)} = \frac{27}{8}$$

Titik (-3,-2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(-3)^3 - 9(-3))}{(2.(-2)^3 - 4.(-2))} = \frac{-27}{-8} = \frac{27}{8}$$

Titik (3,-2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 9x)}{(2y^3 - 4y)} = \frac{(2(3)^3 - 9(3))}{(2.(-2)^3 - 4.(-2))} = \frac{27}{-8}$$

Jadi, Titik (-3,2) & (3,-2) memiliki kemiringan yang sama sehingga garisnya sejajar

Titik (3,2) & (-3,-2) memiliki kemiringan yang sama sehingga garisnya sejajar

4) Tentukanlah garis normal ke kurva $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ di titik (1, 1) dan titik lain yang berpotongan dengan kurva tersebut?

Jawab:

- Fungsi tangen dari kurvanya

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}0$$

$$2x + 2\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = -2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x - 6y) = -2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x + y)}{-2(-x + 3y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + y)}{(-x + 3y)}$$

- Nilai tangen di titik (1, 1)

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{(x + y)}{(-x + 3y)} = \frac{1 + 1}{-1 + 3(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

- nilai normal yang berpotongan

  $m \times m_t = -1$

  $1 \times m_t = -1$

  $m_t = -1$

  garis normal di titik (1, 1)

  $y - y_1 = m_t(x - x_1)$

  $y - 1 = -1(x - 1)$

  $y - 1 = -x + 1$

  $y = -x + 2$

- menentukan fungsi kuadrat dengan mensubstitusi garis normal

  $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$

  $x^2 + 2x(-x + 2) - 3(-x + 2)^2 = 0$

  $x^2 - 2x^2 + 4x - 3(x^2 - 4x + 4) = 0$

  $x^2 - 2x^2 + 4x - 3x^2 + 12x - 12 = 0$

  $-4x^2 + 16x - 12 = 0$

  dibagi dengan -4

  $x^2 - 4x + 3 = 0$

  $(x - 3)(x - 1) = 0$

  akar-akar fungsi kuadrat

$x - 3 = 0$

$x = 3$

dan

$x - 1 = 0$

$x = 1$

- Substitusi $x = 3$ ke garis normal $y = -x + 2$ untuk menemukan titik potong lainnya

  $y = -x + 2$

  $y = -3 + 2$

  $y = -1$

Jadi, titik potong lainnya adalah $(3, -1)$

4. Rangkuman

1. Turunan dari $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$
2. Turunan dari $f(x) = \cos x$ adalah $f'^{(x)} = -\sin x$
3. Rumus dasar trigonometri ini dituliskan setiap turunannya sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

4. Rumus Chain dapat dituliskan dengan:

Jika $f(u)$ adalah terdifferensiasi di titik $u = g(x)$ dan $g(x)$ adalah terdifferensiasi di x, maka fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ adalah terdifferensiasi di x, dan

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Pada notasi Leibniz dengan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka Rumus Chain dituliskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

diman $\frac{dy}{du}$ di evaluasi di $u = g(x)$.

5. Latihan

1) Tentukanlah Turunan dari fungsi berikut ini:
   a) $\mathrm{y} = x^5 - 0{,}5x^2 + 0{,}25x$
   b) $y = \sqrt{x} + x^5 - \frac{1}{x+1}$
   c) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
   d) $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$
   e) $f(x) = 3\tan^3 x - \sec^3 x$
   f) $s = \cot^3\left(\frac{2}{t}\right)$
2) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari fungsi implisit berikut
   a) $\frac{1}{3}x^2 + 5x^2y - 6y + 3 = 0$
   b) $x^3 - 5xy + 6y^2 - 6 = 0$
   c) $\frac{x^3}{2} + xy^{\frac{2}{3}} + 6x + 5y = 0$
   d) $x^2 - \sqrt{xy} + 5y = 30$
   e) $\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 5x^2y^3 + 5\sqrt{xy} = 0$
3) Tentukanlah Garis tangen dan garis normal dari fungsi berikut
   a) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-5} + 6$ pada titik $\left(1, \frac{41}{6}\right)$
   b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$ pada titik $(0{,}30)$

4) Tentukanlah titik yang memenuhi dari fungsi $2x^3 - 3x^2 - 12x - y + 20 = 0$, garis tangennya adalah parallel dengan sumbu x.
5) Tentukanlah titik pada kurva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ dimana tangennya memenuhi:
   a) Tegak lurus dengan $y = 1 - \left(\frac{x}{24}\right)$
   b) Parallel dengan garis $y = \sqrt{2} - 12x$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah Turunan dari fungsi berikut ini:
   a) $s = \left(\frac{4t^3}{t+1}\right)^{-2}$
   b) $r = \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta - 1}\right)^2$
   c) $r = \left(\frac{1+\sin \square}{1-\cos \alpha}\right)^2$
   d) $y = \frac{5}{(5x^2 + \sin 2x^2)^{3/2}}$
   e) $y = (\sqrt{x} + 5x)(x^{2/3} + 5x^2)^3$
   f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{x^3}{5}\right)^2 (x + \sqrt{x})^3$
   g) $g(x) = (1 + 2x^2)^{\frac{3}{2}}(x - 5\sqrt{x})^3$
2) Tentukanlah turunan pertama dan kedua dari fungsi implisit berikut
   a) $x + y^2 + xy = 5$
   b) $x^2 + y^2 = 49$
   c) $\sqrt{x} + xy - y^2 = 20$
   d) $x^2 - 5xy + \sqrt{y} - 10 = 0$
   e) $x - y + 10x^2 + xy = 0$
3) Tentukanlah persamaan garis tangen dan garis normal dari kurva $y = 1 + \cos x$ di titik $\left(\frac{\pi}{2,1}\right)$.

4) Tentukanlah persamaan garis tangen dan garis normal pada kurva $x^2 + y^2 = 9$ pada titik $(1,2)$.
5) Buktikanlah bahwa setiap garis normal di setiap garis lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ melewati titik $(0,0)$.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C . PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul dua ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Turunan	Limit	Tangen	Normal	Kontinu
Diskontinu	Komposisi	Chain		

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 4

APLIKASI TURUNAN

MODUL 4

APLIKASI TURUNAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Aplikasi turunan dapat dipelajari untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam perusahaan, penelitian maupun permasalahan sehari-hari. Pada modul ini, mahasiswa akan mempelajari berbagai materi dalam menentukan nilai ekstrim hingga pada optimalisasi. Materi yang akan dipelajari yaitu Nilai Ekstrim Fungsi, Teorema Nilai Rata-rata, Fungsi Monoton dan Tes turunan Pertama, Gambar kurva lengkung, Aplikasi Optimalisasi, Metode Newton dan Anti Turunan.

   Pada materi nilai ekstim fungsi, mahasiswa akan menguasai berbagai fungsi yang memiliki nilai maksimum dan minimumnya. Selanjutnya mahasiswa juga akan melihat berbagai macam bentuk fungsi yang monoton, naik atau turun. Lebih jauh lagi, mahasiswa akan mempelajari berbagai macam tes pada turunan dan optimalisasi pada fungsi. Hal ini dapat digunakan untuk memprediksi berbagai kondisi masa depan dengan menggunakan data masa kini atau masa lampau. Bukan hanya itu saja, diakhir mahasiswa akan dituntun untuk memahami bentuk anti turunan yang menjadi dasar untuk mempelajari integral di modul berikutnya.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul empat

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai konsep penurunan dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar, fungsi, limit dan kekontinuan, dan Turunan

5. Kegunaan Modul Empat

   Kegunaan modul empat ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi aplikasi turunan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada dengan maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Nilai Ekstrim Fungsi, Teorema Nilai Rata-rata, Fungsi Monoton dan Tes turunan Pertama, Gambar kurva lengkung, Aplikasi Optimalisasi, Metode Newton dan Anti Turunan.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 7: Menguasai konsep Nilai Ekstrim Fungsi, Teorema Nilai Rata-rata, Fungsi Monoton dan Tes turunan Pertama, Gambar kurva lengkung

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Nilai Ekstrim Fungsi, Teorema Nilai Rata-rata, Fungsi Monoton dan Tes turunan Pertama, Gambar kurva lengkung. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

4.1. Nilai Ekstrim Fungsi

Misalkan f merupakan fungsi dengan domain D. Maka f memiliki nilai maksimum absolut di D pada titik c jika

$f(x) \leq f(c)$ untuk semua x di D

dan memiliki nilai minimum absolut di D pada titik c jika

$f(x) \geq f(c)$ untuk semua x di D.

Nilai maksimum dan nilai minimum disebut sebagai nilai ekstrim dari fungsi f.

Berikut ini contoh fungsi dengan nilai maksimum absolut maupun nilai minimum absolut:

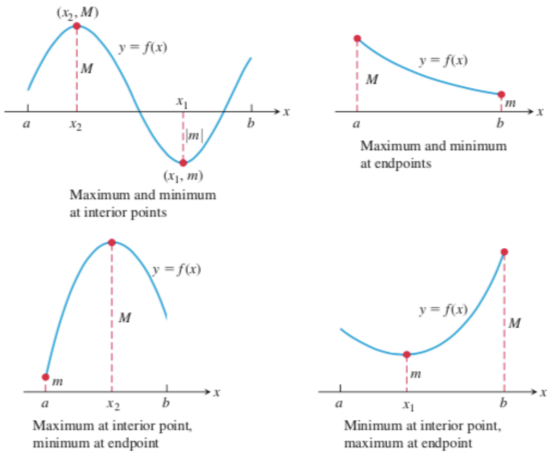
Fungsi	**Domain *D***	**Nilai Ekstrim di *D***
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Tidak ada maksimum absolut Minimum absolut dari 0 di $x = 0$
$y = x^2$	$[0,2]$	Maksimum absolut dari 4 di $x = 2$ Minimum absolut dari 0 di $x = 0$
$y = x^2$	$(0,2]$	Maksimum absolut dari 4 di $x = 2$ Tidak ada minimum absolut
$y = x^2$	$(0,2)$	Tidak ada nilai ekstrim

Hal ini dapat dituliskan dalam bentuk teorema seperti berikut:

Teorema Nilai Ekstrim

Jika f adalah kontinu di interval tertutup $[a, b]$, maka f memiliki nilai maksimum di M dan nilai minimum m di $[a, b]$. Terdapat x_1 dan x_2 di $[a, b]$ dengan $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk titik lain x di $[a, b]$.

Berikut ini gambar yang merepresentasikan teorema diatas:

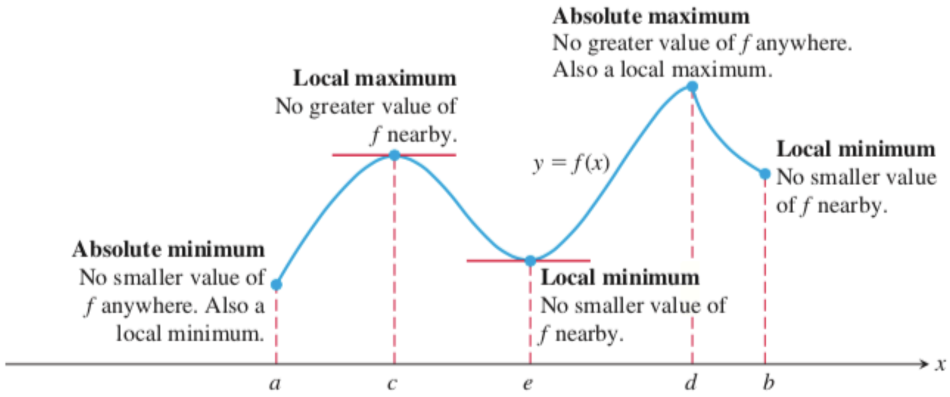


Gambar 43 Nilai ekstrim

Sebuah fungsi f memiliki nilai maksimum lokal di titik c di dalam domain D jika $f(x) \leq f(c)$ untuk semua $x \in D$ berada di beberapa interval terbuka yang memuat c.

Sebuah fungsi f memiliki nilai minimum lokal di titik c didalam domain D jika $f(x) \geq f(c)$ untuk semua $x \in D$ berada di beberapa interval terbuka yang memuat c.

Berikuti ini grafik fungsi yang merepresentasikan nilai relatif ekstrim fungsi:



Gambar 44 Nilai lokal ekstrim

Berikut ini salah satu teorema yang dapat digunakan untuk menentukan nilai ekstrim sebuah fungsi yang disebut dengan Teorem Pertama pada Turunan untuk Nilai lokal Ekstrim:

Jika f memiliki nilai maksimum atau nilai minimum di titik dalam c dati domainnya, dan jika f' adalah terdefinisi di c, maka $f'(c) = 0$.

Dua langkah untuk menentukan nilai ekstrim absolut dari fungsi kontinu f di interval tertutup berhingga adalah:

i. Evaluasi f di semua titik kritis dan titik akhir
ii. Ambillah nilai terbesar dan terkecilnya

Contoh :

1. Tentukanlah nilai maksimum absolut dan minimum absolut dari $f(x) = x^2$ pada titik $[-2,1]$.

   Jawab:

   Fungsi ini dapat diturunkan pada seluruh domain, jadi titik kritis hanya $f'(x) = 2x = 0$, disebut $x = 0$. Kemudian kita check nilai fungsi tersebut di titik $x = 0$ dan dititik akhir $x = -2$ dan $x = 1$.

Nilai titik kritis

$$f(0) = 0$$

Nilai titik akhir

$$f(-2) = 4$$

$$f(1) = 1$$

Fungsi ini memiliki nilai maksimum absolut dari 4 di $x = -2$ dan nilai minimum absolut dari 0 di $x = 0$.

2. Tentukanlah nilai maksimum absolut dan minimum absolut dari $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-2,3]$.

   Jawab:

   Kita mengevaluasi titik kritis dan titik akhir kemudian ambil nilai terbesar dan terkecilnya.

   Turunan pertamanya

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

   tidak memiliki nilai 0 namun tak terdefinisi di titik dalam $x = 0$. Nilai dari f di titik ktitis ini dan di titik akhir nya adalah:

   Nilai titik kritis

$$f(0) = 0$$

   Nilai titik akhir

$$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f(3) = (3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

   Jadi dapat kita simpulkan bahwa nilai maksimum absolut fungsi ini adalah $\sqrt[3]{9} \approx 2{,}08$ pada titik akhir $x = 3$. Nilai minimum absolut adalah 0, pada titik $x = 0$.

4.2. Teorema Nilai Rata-rata

Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan terdifferensiasi di setiap titik interior (a, b). Jika $f(a) = f(b)$, maka terdapat minimal satu bilangan c di (a, b) dimana $f'(c) = 0$.

Sebuah teorema nilai rata-rata yang pertama kali diutarakan oleh Joseph-Louis Lagrange, yang menyatakan bahwa terdapat titik dimana garis tangen parallel dengan sekan.

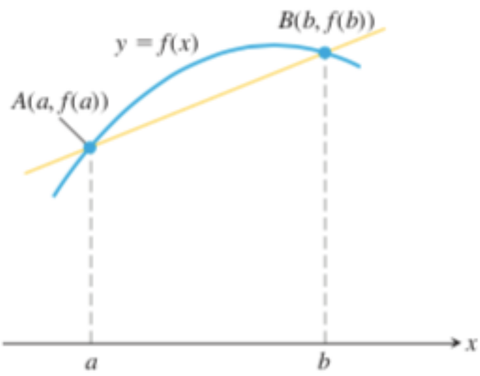
Teorema Nilai Rata-rata

Misalkan $y = f(x)$ adalah kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan terdifferensiasi pada interior interval (a, b). Maka terdapat minimal satu titik c di (a, b) dimana

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bukti:

Grafik f dapat digambarkan melalui titik $A(a, f(a)$ dan $B\big(b, f(b)\big)$, Seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 45 Grafik fungsi titik A dan B

Garis sekan adalah grafik dari fungsi

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

perbedaan secara vertikal diantara grafik f dan g di x adalah

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

fungsi h memenuhi hipotesis dari teorema Rolle di $[a, b]$. Ini kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b) karena f dan g juga terdifferensiasi. Lalu, $h(a) = h(b) = 0$ karena grafik dari f dan g keduanya melewati A dan B. Selanjutnya $h'(c) = 0$ pada beberapa titik $c \in (a, b)$. Inilah titik-titik yang kita ingginkan untuk persamaan selanjutnya.

Untuk memverifikasi fungsi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, kita turunkan kedua persamaan $h'(x)$ terhadap x dan kemudian dengan $x = c$ sehingga diperoleh:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Jadi sudah terbukti teorema rata-rata diatas.

Selanjutnya kita dapat memikirkan bilangan $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sebagai perubahan rata-rata di f pada $[a, b]$ dan $f'(c)$ sebagai perubahan sesaat. Pada Teorema nilai rata-rata diatas dapat kita katakan bahwa beberaa titik pada perubahan sesaat haruslah sama dengan perubahan rata-rata pada seluruh interval.

Jika $f'(x) = 0$ di titik x dari interval terbuka (a, b), maka $f(x) = C$ untuk semua $x \in (a, b)$, dimana C adalah konstanta.

Jika $f'(x) = g'(x)$ di setiap titik x dalam interval terbuka (a, b), maka terdapat sebuah konstanta C sehingga $f(x) = g(x) + C$ untuk semua $x \in (a, b)$. Jadi, $f - g$ adalah fungsi konstanta di (a, b).

4.3. Fungsi Monoton dan Tes turunan Pertama

Sebuah fungsi yang naik atau turun di sebuah interval disebut sebagai fungsi monotonic.

Misalkan bahwa f adalah kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b). Jika $f'(x) > 0$ di setiap titik $x \in (a, b)$, maka f adalah naik di $[a, b]$

Jika $f'(x) < 0$ di setiap titik $x \in (a, b)$, maka f adalah turun di $[a, b]$

Contoh:

Tentukanlah titik kritis dari $f(x) = x^3 - 12x - 5$ dan mengidentifikasi interval terbuka dimana f adalah naik dan f adalah turun.

Jawab:

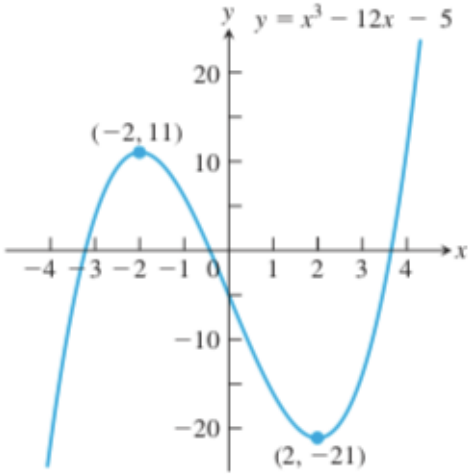
Fungsi f adalah kontinu disetiap titik dan terdifferensiasi. Turunan pertamanya:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x + 2)(x - 2)$$

Turunan pertama ini akan bernilai 0 ketika $x = -2$ dan $x = 2$. Titik kritis dapat dibagi kedalam daerah asal f untuk menentukan interval terbuka yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2,2)$ dan $(2, \infty)$ dimana f' bernilai positif atau negatif. Kita tentukan tanda dari f' di titik yang sesuai untuk membagi intervalnya kedalam beberapa bagian sesuai tandanya. Hasil tanda dari interval domainnya yaitu

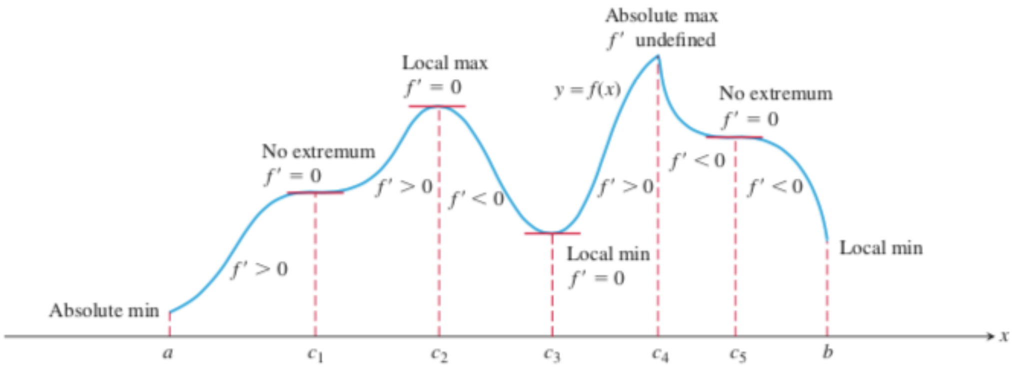
Interval	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Nilai f'	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Tanda f'	$+$	$-$	$+$
Sifat dari f	Naik	Turun	Naik

Bentuk dari fungsi ini dapat kita lihat pada grafik fungsi berikut:



Gambar 46 Nilai lokal ekstrim fungsi

Turunan pertama dapat digunakan sebagai tes untuk menentukan nilai lokal ekstrim. Perhatikan Gambar grafik fungsi f berikut



Gambar 47 Beberapa lokal ekstrim

Pada grafik diatas dapat kita ketahui bahwa fungsi tersebut ada fungsi naik dan fungsi turun pada beberapa titik. Dalam hal ini dapat kita ketahui bahwa ada titik-titik maksimum maupun titik-titik minimum yang disebut dengan lokal maksimum maupun lokal minimum.

Misalkan c adalah titik kritis dari fungsi kontinu f, dan f dapat terdifferensiasi di setiap titik di beberapa interval yang memuat c kecuali yang memungkin di c sendiri. Perpindahan interval ini yaitu dari kiri ke kanan berlaku,

1. Jika f' berubah dari negatif ke positif di c, maka f memiliki nilai minimum lokal di c
2. Jika f' berubah dari positif ke negatif di titik c, maka f memiliki nilai maksimum lokal di c.
3. Jika f' tidak mengalami perubahan tanda di c, maka f tidak memiliki nilai ekstrim di c.

Contoh :

Tentukanlah titik kritis dari

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-4) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$$

Kemudian identifikasilah interval terbuka yang ada dimana f naik dan turun. Tentukanlah fungsi local dan nilai absolut ekstrimnya.

Jawab:

Fungsi f adalah kontinu di semua x karena merupakan hasil perkalian dari dua buah fungsi $x^{\frac{1}{3}}$ dan $(x-4)$. Turunan pertamanya adalah:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)$$

$$= \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

f' akan bernilai 0 di $x = 1$ dan tidak terdefinisi di $x = 0$. Tidak terdapat titik akhir pada domain, jadi titik kritis $x = 0$ dan $x = 1$ yang memungkinkan untuk f memiliki nilai ekstrim.

Bagian dari titik kritis pada sumbu x pada interval terbuka dimana f' yang memungkinkan adalah negatif atau positif. Pola f' ini dapat kita gambarkan pada tabel berikut

Interval	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Tanda f'	$-$	$-$	$+$
Sifat	Turun	Turun	Naik

Berdasarkan teorema nilai rata-rata maka f turun di $(-\infty. \infty)$, turun di (0,1) dan naik di $(1, \infty)$. Tes turunan pertama untuk local ekstrim menjabarkan bahwa f tidak memiliki nilai ekstrim di $x = 0$ (f' tidak mengalami perubahan tanda) dan bahwa f memiliki minimum local di $x = 1$ (f' mengalami perubahan dari negatif ke positif).

Jadi, nilai lokal minimum adalah $f(1) = 1^{\frac{1}{3}}(1 - 4) = -3$. Ini juga merupakan nilai absolut minimum karena f adalah turun di $(-\infty, 1)$ dan Naiik di $(1, \infty)$. Ingat bahwa nilai $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, jadi f memiliki nilai tangen vertical di titik (0,0).

4.4. Gambar kurva lengkung

Grafik dari fungsi yang terdifferensiasi $y = f(x)$ adalah

i. Melengkung ke atas pada interval terbuka *I* jika f' adalah naik di *I*
ii. Melengkung ke bawah pada interval terbuka *I* jika f' adalah turun di *I*

Jika $y = f(x)$ memiliki turunan kedua, kita dapat menggunakan teorema nilai rata-rata ke fungsi turunan pertama. Kita dapat simpulkan bahwa f' naik jika $f'' > 0$ di *I*, dan turun jika $f'' < 0$.

Berikut ini Tes turunan kedua untuk Lengkungan:

Misalkan $y = f(x)$ dapat diturunkan dua kali pada interval I, berlaku:

1) Jika $f'' > 0$ di I, grafik dari f pada I adalah lengkung keatas
2) Jika $f'' < 0$ di I, grafik dari f pada I adalah lengkung kebawah.

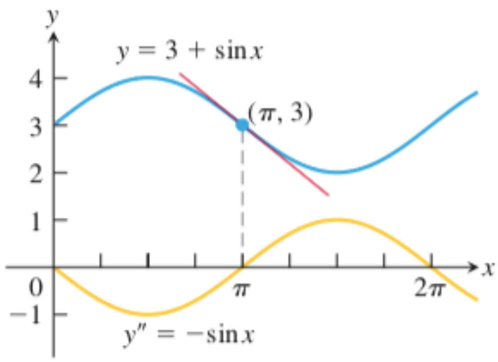
Contoh :

Tentukanlah lengkungan dari $y = 3 + \sin x$ di titik $[0,2\pi]$.

Jawab:

Turunan pertama dari $y = 3 + \sin x$ adalah $y' = \cos x$, dan turunan keduanya adalah $y'' = -\sin x$. Grafik dari $y = 3 + \sin x$ adalah lengkung kebawah di titik $(0, \pi)$, diamana $y'' = -\sin x$ adalah negative. Lalu mengalami lengkung keatas di $(\pi, 2\pi)$, dimana $y'' = -\sin x$ adalah positif.

Hal ini dapat digambarkan seperti pada grafik berikut.



Gambar 48 Kurva lengkung

sebuah titik $(c, f(c)$ disebut sebagai titik belok jika $(c, f(c))$ yang menjadi tempat garis singgung dari sebuah fungsi dan merupakan tempat perubahan kelengkungan.

Titik belok $(c, f(c))$ ada jika $f''(c) = 0$ atau $f''(c)$ tidak ada.

Selanjutnya untuk menentukan nilai lokal ekstrim dapat dilakukan dengan dengan menggunakan Tes tutunan kedua untuk ekstrim lokal yaitu:

Misalkan f'' adalah fungsi kontinu di interval terbuka yang memuat $x = c$.

1) Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) < 0$, maka f memiliki maksimum lokal di $x = c$.
2) Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) > 0$, maka f memiliki minimum lokal di $x = c$.
3) Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) = 0$, maka tesnya gagal. Fungsi f mungkin memiliki maksimum lokal, lokal minimum atau tidak keduanya.

Prinsip kelengkungan ini dapat kita gunakan untuk menggambar berbagai bentuk fungsi dengan membuat sketsanya. Berikut ini angkah-langkah yang dapat kita gunakan untuk menggambar grafik $y = f(x)$:

1) Mengidentifikasi domain dari f dan setiap kurva simetris yang memungkinkan
2) Menentukan turunan pertama dan keduanya
3) Menentukan titik kritis f, jika ada, dan mengidentifikasi setiap sifat fungsi dari interval domainnya.
4) Menentukan posisi kurva naik atau turun
5) Menentukan titik belok, jika ada dan menghitung kelengkungan dari kurva.
6) Mengidentifikasi asimtot jika ada
7) Memastikan titik kunci misalnya seperti titik ekstrim maupun titik belok yang ada, kemudian menggambarnya dengan menarik garis.

4. Rangkuman

1) Misalkan f merupakan fungsi dengan domain D. Maka f memiliki nilai maksimum absolut di D pada titik c jika

   $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x di D

   dan memiliki nilai minimum absolut di D pada titik c jika

   $f(x) \geq f(c)$ untuk semua x di D.

2) Nilai maksimum dan nilai minimum disebut sebagai nilai ekstrim dari fungsi f.

   Jika f adalah kontinu di interval tertutup $[a, b]$, maka f memiliki nilai maksimum di M dan nilai minimum m di $[a, b]$. Terdapat x_1 dan x_2 di $[a, b]$ dengan $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk titik lain x di $[a, b]$.

3) Sebuah fungsi f memiliki nilai maksimum lokal di titik c di dalam domain D jika $f(x) \leq f(c)$ untuk semua $x \in D$ berada di beberapa interval terbuka yang memuat c.

4) Sebuah fungsi f memiliki nilai minimum lokal di titik c didalam domain D jika $f(x) \geq f(c)$ untuk semua $x \in D$ berada di beberapa interval terbuka yang memuat c.

5) Misalkan $y = f(x)$ adalah kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan terdifferensiasi pada interior interval (a, b). Maka terdapat minimal satu titik c di (a, b) dimana

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

6) Misalkan bahwa f adalah kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b). Jika $f'(x) > 0$ di setiap titik $x \in (a, b)$, maka f adalah naik di $[a, b]$. Jika $f'(x) < 0$ di setiap titik $x \in (a, b)$, maka f adalah turun di $[a, b]$.

5. Latihan

1) Tentukanlah nilai maksimum absolut dan minimum absolut dari setiap fungsi berikut. Kemudian gambarlah grafik fungsinya dengan menunjukkan nilai absolut ekstrim:
   a. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 1$
   b. $g(x) = \sec x, -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
2) Tentukanlah titik kritis dari setiap fungsi berikut
   a. $y = \frac{x^2}{x-2}$
   b. $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$
3) Tentukanlah nilai ekstrim (absolut dan lokal) dari fungsi berikut
   a. $y = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 4)$
   b. $g(x) = \frac{x}{x+1}$
4) Misalkan $f(-1) = 3$ dan $f'(x) = 0$ untuk semua x. Haruskah $f(x) = 3$ untuk semua x? Jelaskan!
5) Gambarlah grafik fungsi berikut dengan menggunakan langkah-langkah menggambar grafik dengan menggunakan turunan pertama, turunan kedua dan nilai ekstrim
   a. $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$
   b. $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah nilai maksimum absolut dan minimum absolut dari setiap fungsi berikut. Kemudian gambarlah grafik fungsinya dengan menunjukkan nilai absolut ekstrim:
   a. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, -2 \leq x \leq 3$
   b. $g(\theta) = \tan \theta, -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

2) Tentukanlah titik kritis dari setiap fungsi berikut

   a. $y = x^2 - 6x + 7$

   b. $f(x) = x^2 - 32\sqrt{x}$

3) Gambarlah grafik dari fungsi yang terdifferensiasi $y = f(x)$ yang memiliki

   a. Lokal minimum di (1,1) dan maksimum lokal di (3,3)

   b. Maksimum lokal di (1,1) dan minimum lokal (3,3)

   c. Maksimum lokal di (1,1) dan (3,3)

   d. Minimum lokal di (1,1) dan (3,3)

4) Identifikasilah setiap koordinat dari ekstrim lokal dan ekstrim absolut dan titik belok dari fungsi berikut, kemudian gambarlah fungsinya.

   a. $y = 6 - x - x^2$

   b. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

   c. $y = \cos x + \sqrt{3}\sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$

5) Gambarlah grafik fungsi berikut dengan menggunakan langkah-langkah menggambar grafik dengan menggunakan turunan pertama, turunan kedua dan nilai ekstrim

   a. $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

   b. $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom *feedback* yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 8: Menguasai konsep Aplikasi Optimalisasi, Metode Newton dan Anti Turunan.

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

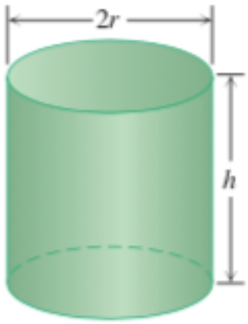
Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Aplikasi Optimalisasi, Metode Newton dan Anti Turunan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

4.5 Aplikasi Optimalisasi

Dalam bagian ini, kita akan mempelajari berbagai aplikasi dari turunan diberbagai bidang baik itu di fisika, matematika, ekonomi dan lainnya. Berikut ini conntoh-contoh yang dapat kita pelajari:

1. Anda diminta untuk merancang kaleng satu liter yang berbentuk seperti silinder melingkar siku-siku (Seperti gambar dibawah). Berapakah tinggi dan jari-jarinya yang akan menggunakan bahan paling sedikit?



Gambar 49 Optimalisasi

Jawab:

Volume yang memungkinkan alah satu liter. Jika r dan h dalam ukuran centimeter, maka volumenya dalam bentuk centimeter kubik yaitu:

$$\pi r^2 h = 1000$$

Luas permukaan yang memungkinkan adalah $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Untuk menginterpretasikan bahan yang paling sedikit digunakan, pertama kita sebaiknya menghiraukan ketebalan dari bahannya. Selanjutnya kita hanya menghitung nilai r dan h untuk membuat luas permukaan yang memungkinkan untuk memuat $\pi r^2 h = 1000cm^3$. Untuk menentukan nilainya maka bentuk volume ini dapat kita ubah menjadi:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

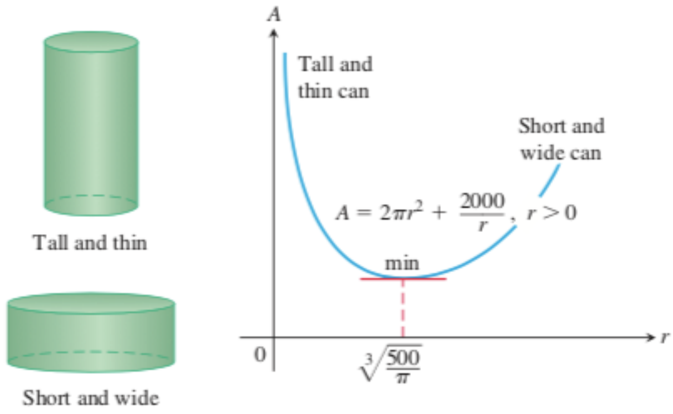
sehingga

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Tujuan kita adalah untuk menemukan nilai $r > 0$ yang meminimalisir nilai A. Gambar berikut ini memberikan beberapa bentuk pilihan yaitu:



Gambar 50 Optimalisasi tabung

Karena A adalah terdifferensiasi di $r > 0$, pada interval tanpa titik akhir, hal ini dapat menunjukkan bahwa nilai minimum yang ada hanya ketika turunan pertama bernilai 0:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$4\pi r^3 = 2000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$$

Selanjutnya turunan kedua menunjukkan

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

adalah bernilai positif melalui domain dari A. Grafik yang ada melengkung ke atas dan nilai dari A di $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ adalah minimum absolut.

Jadi nilai yang memenuhi untuk h adalah

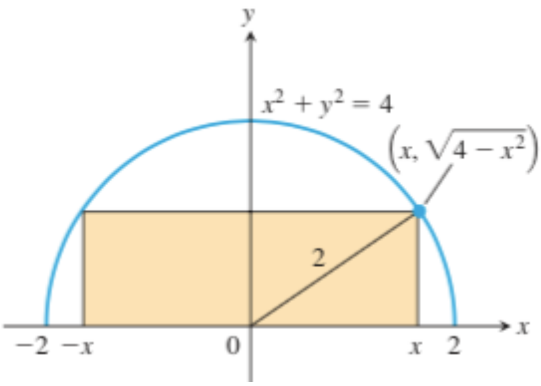
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa satu liter yang ada dapat menggunakan bahan paling sedikit dengan tinggi silinder dua kali jari-jari, yaitu $r = 5{,}42\ cm$ dan $h = 10{,}84\ cm$.

2. Sebuah persegi panjang harus dibuat dalam setengah lingkaran dengan jari-jari 2. Berapakah luas terluas yang dapat dimiliki persegi panjang itu?

   Jawab:

   Misalkan $\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right)$ merupakan titik perpotongan sisi persegi panjang dengan lingkaran seperti pada gambar dibawah ini:



Gambar 51 Grafik fungsi optimalisasi

   panjang sisi, tinggi dan luas daerah persegi panjang dapat dituliskan dengan persamaan variabel x yaitu

   Panjang : $2x$

   Tinggi : $\sqrt{4 - x^2}$

   Luas : $2x\sqrt{4 - x^2}$

   Nilai x yang memenuhi adalah di interval $0 \le x \le 2$, dimana posisi yang memungkinkan untuk persegi panjang.

   Tujuan kita adalah untuk menemukan maksimum absolut dari fungsi yaitu:

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

pada domain [0,2].

Turunannya adalah

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

ini tidak terdefinisi ketika $x = 2$ dan sama dengan 0 ketika

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4-x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $x = \sqrt{2}$ dan $x = -\sqrt{2}$, hanya $x = \sqrt{2}$ yang berada di dalam domain A dan membuat titik kritis. Jadi nilai A di titik akhir dan di titik kritis adalah

Di titik kritis : $A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$

Di titik akhir : $A(0) = 0, A(2) = 0$

Jadi luas maksimum adalah 4 ketika persegi panjang memiliki tinggi $\sqrt{2}$ dan panjang $2\sqrt{2}$.

Selanjutnya akan dijabarkan contoh aplikasi turunan di bidang ekonomi. Namun dalam bidang ekonomi ini, perlu kita memisalkan beberapa hal yaitu

$r(x)$: Pendapatan dari penjualan x barang

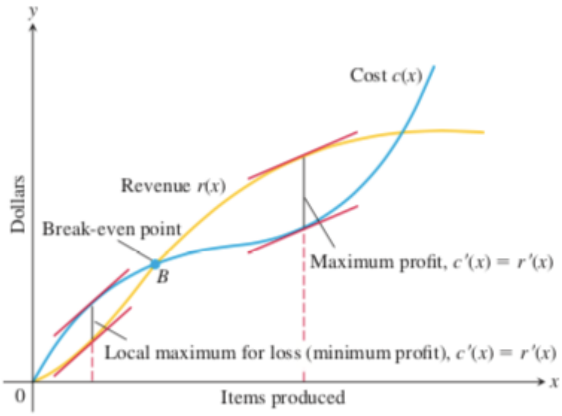
$c(x)$: biaya produksi barang x

$p(x) = r(x) - c(x)$: keuntungan dari memproduksi dan menjual x barang.

Dalam bidang ekonomi biasa disebut dengan marginal pendapatan, marginal pengeluaran dan marginal untung untuk menyebutkan $r'(x)$, $c'(x)$ dan $p'(x)$ secara berturut-turut dari setiap fungsinya.

Jika $r(x)$ dan $c(x)$ terdifferensiasi untuk x dalam selang waktu kemungkinan produksi tertentu, dan jika $p(x) = r(x) - c(x)$ mempunyai nilai maksimum disana, maka ini terjadi pada titik kritis dari $p(x)$ atau titik akhir interval. Jika terjadi pada titik kritis, maka $p'(x) = r'^{(x)} - c'(x) = 0$ dan kita lihat bahwa $r'^{(x)} = c'(x)$. Dalam istilah ekonomi, persamaan ini berarti:

Pada tigkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimal, marginal pendapatan sama dengan marginal pengeluaran. Hal ini dapat digambarkan pada contoh berikut:



Gambar 52 Tingkat produksi

Contoh :

Misalkan $r(x) = 9x$ dan $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ dimana x merepresentasikan setiap produksi satu juta MP3 Players. Adakah level produksi untuk menghasilkan keuntungan maksimu? Jika ya, apakah itu?

Jawab:

Jika $r(x) = 9x$ dan $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ maka $r'(x) = 9$ dan $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$

Mislakan $r'(x) = c'(x)$

$$3x^2 - 12x + 15 = 9$$

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

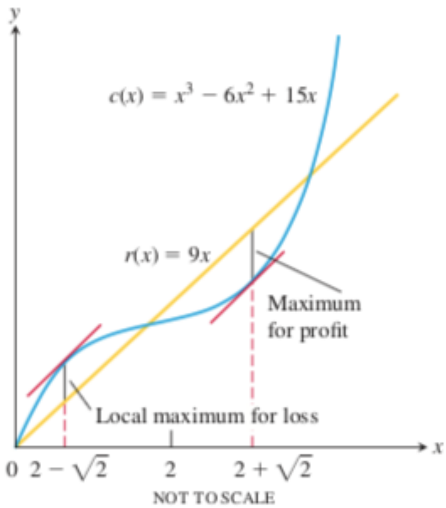
Nilai x yang memenuhi untuk persamaan kuadrat ini adalah

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$$

jadi produksi yang memungkinkan untuk keuntungan maksimum adalah $x \approx 0.586$ juta MP3 players atau $x \approx 3.414$ juta.

Dengan memperhatikan turunan kedua dari $p(x) = r(x) - c(x)$ adalah $p''(x) = -c''(x)$ karena $r''(x)$ adalah 0 dimanapun. Jadi, $p''(x) = 6(2 - x)$, yang adalah negatif di $x = 2 + \sqrt{2}$ dan positif di $x = 2 - \sqrt{2}$. Berdasarkan tes turunan kedua, keuntungan maksimum berada pada $x = 3{,}414$ dan kerukian maksimum ketika $x = 0.586$.



Gambar 53 Maksimum Fungsi

4.6 Metode Newton

Metode Newton dapat dilakukan dengan menggunakan dua tahap yaitu

1) Menmpertimbangkan aproksimasi pertama untuk menjadi solusi dari persamaan $f(x) = 0$. Sebuah grafik dari $y = f(x)$ dapat membantu.
2) Gunakanlah aproksimasi pertama untuk menemukan yang kedua, yang kedu untuk menemukan yang ketiga dan seterusnya, dengan menggunakan rumus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Contoh :

Tentukanlah akar-akar positif dari persamaan

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

Jawab:

Dengan $f(x) = x^2 - 2$ dan $f'(x) = 2x$, maka

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x^2 - 2}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

persamaan ini dapat digunakan untuk menemukan aproksimasi yang kita butuhkan. Dengan memulai $x_0 = 1$, kita mendapatkan hasil seperti pada tabel berikut ini.

	Error	Digit angka yang benar
$x_0 = 1$	$-0{,}41421$	1
$x_1 = 1{,}5$	$0{,}08579$	1
$x_2 = 1{,}41667$	$0{,}00246$	3
$x_3 = 1{,}41422$	$0{,}00001$	5

4.7 Anti Turunan

Sebuah fungsi F adalah anti turunan dari f di interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in I$.

Contoh :

Tentukanlah anti turunan dari

a. $f(x) = 2$
b. $g(x) = \cos x$
c. $h(x) = \sec^2 x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Jawab:

Untuk menyelesaikan ini, maka kita dapat memikirkan langkah secara berbalik, yaitu dengan memikirkan fungsi apa yang memiliki turunan seperti fungsi yang kita miliki. Maka diperoleh

a. $F(x) = x^2$
b. $G(x) = \sin x$
c. $H(x) = \tan x + \sqrt{x}$

Namun pada contoh ini dapat kita temukan juga fungsi lain yang memungkinkan untuk menghasilkan fungsi yang diketahui yaitu misalkan untuk $f(x) = 2x$ mama $F(x) = x^2 + 3$ atau dengan konstanta yang lainnya.

Maka untuk menemukan nilai konstanta yang tepat, maka dapat kita gunakan teorema beriku

Jika F adalah anti turunan dari f di interval I, maka anti turunan secara umum dari f di I adalah

$$F(x) + C$$

dimana C adalah sembarang konstanta.

Contoh :

Tentukanlah anti turunan dari $f(x) = 3x^2$ yang memenuhi $F(1) = -1$

Jawab:

Karena turunan x^3 adalah $3x^2$, anti turunan secara umum adalah

$$F(x) = x^3 + C$$

kondisi $F(1) = -1$ memberikan arah yang spesifik untuk nilai C. Substitusikan $x = 1$ ke $F(x) = x^3 + C$ yaitu

$$F(1) = (1)^3 + C = 1 + C$$

Karena $F(1) = -1$, jadi $1 + C = -1$ sehingga $C = -1$. Jadi disimpulkan bahwa $F(x) = x^3 - 2$ adalah anti turunan yang memenuhi $F(1) = -1$.

Berikut ini rumus anti turunan untuk k bilangan konstanta bukan nol

Fungsi	**Anti Turunan**
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$
$\sin kx$	$-\frac{1}{k} \cos kx + C$
$\cos kx$	$\frac{1}{k} \sin kx + C$
$\sec^2 kx$	$\frac{1}{k} \tan kx + C$
$\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k} \cot kx + C$
$\sec kc \tan kx$	$\frac{1}{k} \sec kx + C$
$\csc kx \cot kx$	$-\frac{1}{k} \csc kx + C$

4. Rangkuman

1) Metode Newton dapat dilakukan dengan menggunakan dua tahap yaitu
   i. Mempertimbangkan aproksimasi pertama untuk menjadi solusi dari persamaan $f(x) = 0$. Sebuah grafik dari $y = f(x)$ dapat membantu.
   ii. Gunakanlah aproksimasi pertama untuk menemukan yang kedua, yang kedu untuk menemukan yang ketiga dan seterusnya, dengan menggunakan rumus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2) Sebuah fungsi F adalah anti turunan dari f di interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in I$.

5. Latihan

1) Use the sign pattern for the derivative

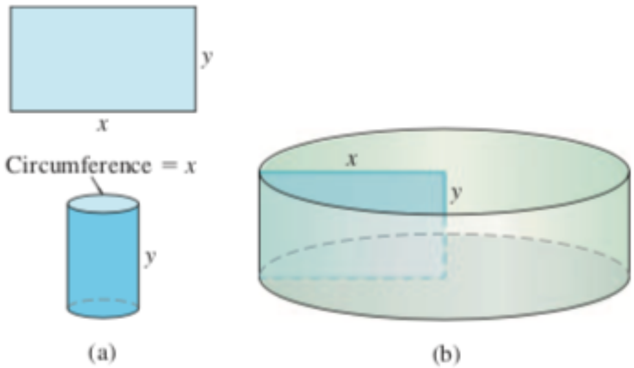
$$\frac{df}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

   to identify the points where f has local maximum and minimum values
2) Sebuah persegi panjang memiliki alasnya pada sumbu x dan dua simpul atasnya pada parabola $y = 12 - x^2$. Berapakah luas terluas yang dapat dimiliki persegi panjang itu, dan berapakah ukurannya?

3) You are designing a rectangular poster to contain 50 in^2 of printing with a 4-in. margin at the top and bot- tom and a 2-in. margin at each side. What overall dimensions will minimize the amount of paper used?

4) Compare the answers to the following two construction problems.
   a. A rectangular sheet of perimeter 36 cm and dimensions *x* cm by *y* cm is to be rolled into a cylinder as shown in part (a) of the figure. What values of *x* and *y* give the largest volume?

b. The same sheet is to be revolved about one of the sides of length y to sweep out the cylinder as shown in part (b) of the figure. What values of x and y give the largest volume?



5) Use Newton's method to estimate the solutions of the equation $x^2 + x - 1 = 0$. Start with $x_0 = -1$ for the left-hand solution and with $x_0 = 1$ for the solution on the right. Then, in each case, find x_2.

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Misalkan turunan pertama dari $y = f(x)$ adalah

$$y' = 6(x+1)(x-2)^2$$

Pada titik apakah grafik f memiliki nilai maksimum lokal, minimum lokal atau titik balik?

2) A $1125\ \mathrm{ft}^3$ open-top rectangular tank with a square base x ft on a side and y ft deep is to be built with its top flush with the ground to catch runoff water. The costs associated with the tank involve not only the material from which the tank is made but also an excavation charge proportional to the product xy.

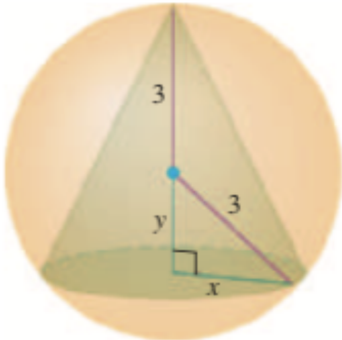
a. If the total cost is

$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$$

what values of x and y will minimize it?

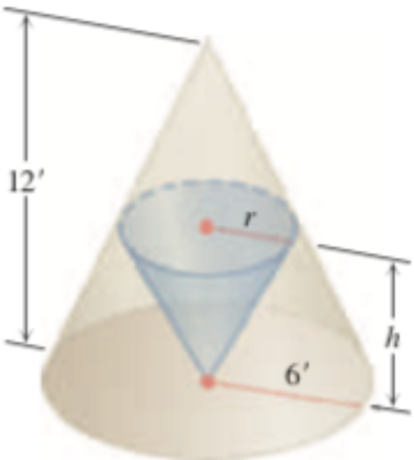
b. Give a possible scenario for the cost function in part (a)

3) Find the volume of the largest right circular cone that can be inscribed in a sphere of radius 3.



4) Use Newton's method to estimate the one real solution of $x^3 + 3x + 1 = 0$. Start with $x_0 = 0$ and then find x_2.

5) The figure here shows two right circular cones, one upside down inside the other. The two bases are parallel, and the vertex of the smaller cone lies at the center of the larger cone's base. What values of *r* and *h* will give the smaller cone the largest possible volume?



7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom *feedback* yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul Empat ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Aplikasi Turunan dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Kontinu Limit Asimtot Epsilon Delta

   Diskontinu Komposisi

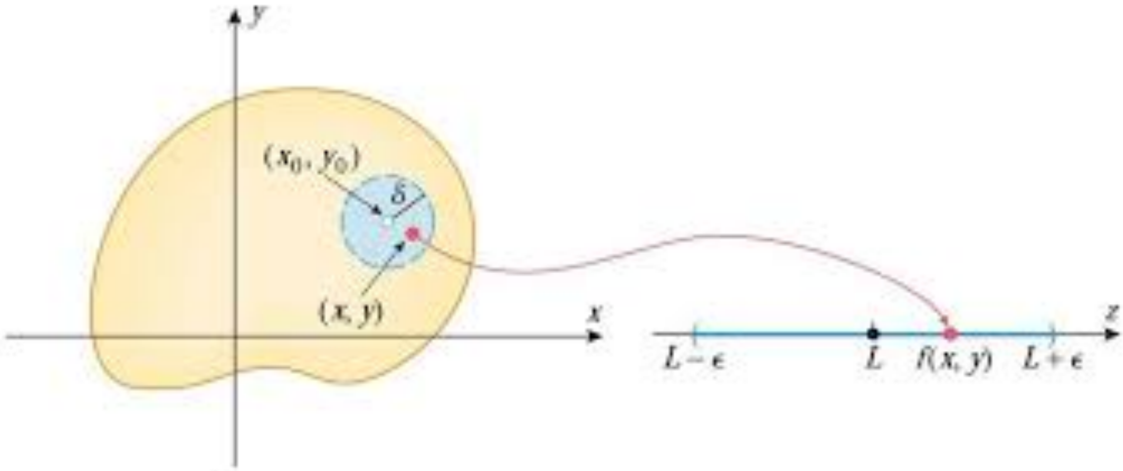
4. Referensi

   Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 5

FUNGSI, LIMIT, TURUNAN DAN APLIKASI TURUNAN



MODUL 5

FUNGSI, LIMIT, TURUNAN DAN APLIKASI TURUNAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Modul ini berisi tentang rangkuman materi fungsi, limit dan kekontinuan, turunan dan aplikasi turunan. Materi ini dijabarkan kembali untuk mempersiapkan mahasiswa menyelesaikan Project maupun mempersiapkan Ujian Tengah Semester. Selain memuat rangkuman Fungsi, Limit, Turunan dan Aplikasi Turunan, modul ini juga memuat berbagai bentuk soal yang menjadi gambaran soal ujian bagi mahasiswa.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul lima

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai konsep penurunan dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar, fungsi, limit dan kekontinuan, Turunan dan Aplikasinya.

5. Kegunaan Modul Lima

   Kegunaan modul empat ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi aplikasi turunan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada dengan maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Fungsi, Limit, Turunan dan Aplikasi Turunan

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 9: Menguasai konsep Fungsi, Limit, Turunan dan Aplikasi Turunan

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Fungsi, Limit, Turunan dan Aplikasi Turunan. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

5.1 Rangkuman Modul 1

1) Rangkuman 1

1. Sebuah fungsi f dari himpunan D ke sebuah himpunan Y adalah sebuah pemetaan $x \in D$ tepat satu elemen pada $f\ (x) \in Y$.
2. Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika daerah hasil (range) f sama dengan himpunan B atau biasa ditulis dengan $R_f = B$.
3. Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

4. Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.
5. Suatu fungsi $f: A \to B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut sebagai fungsi konstan atau tetap apabila untuk setiap anggota domain fungsi delalu berlaku $f(x) = c$, dimana c bilangan konstan.
6. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.
7. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.
8. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi kuadrat apablia fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana $a \neq 0$ dan $a, b,$ dan c adalah bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.
9. Fungsi Tangga (Fungsi Batas atas dan Fungsi Batas Bawah), $f(x) = \lfloor x \rfloor$ dan $f(x) = \lceil x \rceil$.
10. Fungsi Mutlak (modulus), $f: x \to |x|$ atau $f: x \to |ax + b|$ dimana $f(x) = |x|$ artinya $f(x) = -x$ jika $x < 0$ dan $f(x) = x$ jika $x \geq 0$.
11. Suatu fungsi $f(x)$ disebut sabagi fungsi ganjil apabila berlaku $f(-x) = -f(x)$ dan disebut sebagai fungsi genap apabila berlaku $f(-x) = f(x)$. Jika $f(-x) \neq -f(x)$ maka fungsi ini bukan genap dan bukan ganjil.
12. Jika $f(x_2) > f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi naik pada interval I.
13. Jika $f(x_2) < f(x_1)$ dimana $x_1 < x_2$, maka f disebut sebagai fungsi turun pada interval I.
14. Sebuah fungsi $f(x) = x^n$, dimana a adalah sebuah konstanta disebut sebagai fungsi berpangkat.

15. Sebuah fungsi p disebut sebagai Polinomial jika $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ dimana n adalah bilangan bulat positif dan bilangan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta.
16. Fungsi Rasional adalah Perbandingan fungsi polynomial yang dituliskan dnegan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
17. Fungsi Aljabar merupakan fungsi yang dikonstruksi dari polynomial dengan menggunakan operasi aljabar.
18. Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang dibentuk dari $f(x) = a^x$ dimana basis $a > 0$ merupakan konstanta positif dan $a \neq 1$.
19. Fungsi logaritma dinotasikan dengan $f(x) = \log_a x$, dimana basis $a \neq 1$ merupakan konstanta positif.

2) Rangkuman 2

1. Jika f dan g merupakan fungsi, maka untuk setiap $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ didefinisikan $f + g, f - g$ dan fg seperti

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

selanjutnya untuk semua $x \in D(f) \cap x \in D(g)$ dimana $g(x) \neq 0$, maka dapat didefinisikan $\frac{f}{g}$ dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

2. Jika f dan g merupakan fungsi, fungsi komposisi $f \circ g$ (dibaca f komposisi g) didefiniskan dengan

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

domain dari $f \circ g$ memuat bilangan x di domain g dimana $g(x)$ berada pada domain f.

3. Pergeseran Vertikal dirumuskan dengan $y = f(x) + k$, grafik f

bergeser sebanyak k satuan (unit) ke atas jika $k > 0$ dan bergeser kebawah sebanyak $|k|$ satuan (unit) jika $k < 0$. Sedangkan pergeseran secara Horizontal dirumuskan dengan $y = f(x + h)$, yaitu grafik f bergeser sebanyak h satuan (unit) ke kiri jika $h > 0$ dan bergeser ke kanan sebanyak $|h|$ satuan (unit) jika $h < 0$.

4. Penskalaan pada grafik yang disebut dengan Skala Vertikal, Skala Horizontal dan Rumus Refleksi, yaitu

   Untuk $c > 1$, skala grafik yang terbentuk adalah

   a. $y = cf(x)$, Grafik akan meregang secara vertical dengan sebesar c.
   b. $y = \frac{1}{c}f(x)$, Grafik akan mengecil (terkompres) secara vertical dengan sebesar c.
   c. $y = f(cx)$ Grafik akan mengecil (terkompres) secara horizontal sebesar c.
   d. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ Grafik akan meregang secara horizontal sebesar c.

   Untuk $c > 1$, refleksi grafik yang terbentuk adalah

   a. $y = -f(x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu x.
   b. $y = f(-x)$, Refleksi grafik f yang terbentuk adalah terhadap sumbu y.

5.2 Rangkuman Modul 2

1) Rangkuman 1

1) Jika f adalah fungsi identitas $f(x) = x$, maka untuk semua nilai c, berlaku
2) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$

3) Jika f adalah fungsi konstan $f(x) = k$, maka untuk semua nilai c, berlaku

4) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$

5) Jika f adalah fungsi lompat maka fungsi tersebut tidak memiliki nilai limit karena nilai lompatan dari nilai x. Contohnya $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

6) Aturan-aturan limit lainnya yaitu jika L, M, *c* dan *k* adalah bilangan riil dan $\lim_{x \to c} f(x) = L, \lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

   i. Aturan penjumlahan

   $$\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

   ii. Aturan selisih

   $$\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

   iii. Aturan perkalian dengan konstanta

   $$\lim_{x \to c} \big(k. f(x)\big) = k. L$$

   iv. Aturan pembagian

   $$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L. M$$

   v. Aturan pangkat

   $\lim_{x \to c} \big(f(x)\big)^n = L^n$, dimana n bilangan bulat positif

   vi. Aturan akar

   $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, dimana n bilangan bulat positif

   vii. Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, maka

   $$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

   viii. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dimana $Q(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

ix. Jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk x di beberapa interval terbuka yang memuat c, kecuali di $x = c$. Selanjutnya jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

x. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x di inteval terbuka yang memuat c, kecuali di titik $x = c$ dan limit dari f dan g ada ketika x mendekati c, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

7) Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit ketika x mendekati c jika dan hanya jika memiliki limit kanan dan limit kiri dimana keduanya bernilai sama,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L, \text{dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

8) Limit dari $\frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ dimana $0 \to 0$, dengan θ dalam radians.

9) Jika fungsi f dan g aadalah kontinu di $x = c$, maka berikut ini beberapa sifat fungsi kontinu yang dijabarkan dengan kombinasi secara aljabar:

a. Operasi Penjumlahan

$$f + g$$

b. Operasi Pengurangan (Selisih)

$$f - g$$

c. Perkalian dengan konstanta

$$k \cdot f \text{ untuk setiap nilai } k$$

d. Operasi Perkalian

$$f \cdot g$$

e. Operasi pembagian

$$\frac{f}{g} \quad \text{untuk } g(c) \neq 0$$

f. Perpangkatan

$$f^n \qquad \text{untuk } n \text{ adalah bilangan bulat positif}$$

g. Bentuk Akar

$\sqrt[n]{f}$ untuk interval terbuka yang memuat c, dimana n adalah bilangan bulat positif.

10) Jika g adalah kontinu di titik b dan $\lim_{x \to c} f(x) = b$, maka

$$\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

2. Rangkuman 2

1) Limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan M sehingga untuk semua x berlaku

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Selanjutnya limit $f(x)$ memiliki nilai limit L ketika x medekati negatif tak hingga yang dituliskan dengan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

jika untuk semua $\epsilon > 0$, terdapat bilangan N sehingga untuk semua x berlaku

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

2) Sebuah garis $y = b$ adalah asimtot horizontal dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3) Limit Tak Hingga yang terdefinisi ϵ dan δ

a) Fungsi $f(x)$ mendekati tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap bilang riil positif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > B$.

b) Fungsi $f(x)$ mendekati negatif tak terhingga ketika x mendekati c dan dituliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk setiap bilang riil negatif B terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x berlaku $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < -B$

5.3 Rangkuman Modul 3

1) Rangkuman 1

1. Turunan dari sebuah fungsi $y = f(x)$ di titik $x = x_0$ yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

hal ini terpenuhi jika nilai limitnya ada.

2. Fungsi yang terdifferensiasi pada interval tertutup $[a, b]$ jika dapat diturunkan pada titik interior (a, b) dan jika memiliki limit kiri dan kanan seperti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(b)}{h}$$

adalah ada di setiap titik akhirnya.

3. Jika f memiliki turunan di titik $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.
4. Jika f memiliki nilai konstanta $f(x) = c$, maka

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

5. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

6. Jika n adalah bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

untuk semua x dimana pangkat x^n dan x^{n-1} terdefinisi

7. Jika dengan u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x, dan c adalah sebuah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

8. Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi terhadap x, maka penjumlahan $u + v$ adalah terdifferensiasi di setiap titik dimana u dan v keduanya terdifferensiasi. Untuk titik-titik tersebut berlaku:

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

9. Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka perkalian u dan v adalah

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

10. Jika u dan v adalah fungsi yang terdifferensiasi di x dan jika $v(x) \neq 0$, maka pembagian u dan v adalah terdifferensiasi di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

11. Jika $y = f(x)$ adalah fungsi terdifferensiasi, maka turunan $f'(x)$ adalah juga sebuah fungsi. Jika f' juga terdifferensiasi,maka f' dapat kita turunkan lagi menjadi f''. Jadi $f'' = (f')'$. f'' kita sebut sebagai turunan kedua dari f karena ini adalah bentuk turunan dari turunan pertama.

12. Tingkat erubahan sesaat dari f terhadap x pada x_0 adalah turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dimana limitnya haruslah ada.

13. Kecepatan (kecepatan sesaat) adalah turunan dari posisi terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka kecepatan di waktu t adalah

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{h}$$

Kecepatan ini dapat juga dituliskan dengan kelajuan yaitu

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

14. Percepatan adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu. Jika posisi di waktu t adalah $s = f(t)$, maka percepatan di waktu t adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Loncatan adalah turunan dari percepatan terhadap waktu

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}$$

2) Rangkuman 2

1) Turunan dari $f(x) = \sin x$ adalah $f'^{(x)} = \cos x$
2) Turunan dari $f(x) = \cos x$ adalah $f'^{(x)} = -\sin x$
3) Rumus dasar trigonometri ini dituliskan setiap turunannya sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

4) Rumus Chain dapat dituliskan dengan:

   Jika $f(u)$ adalah terdifferensiasi di titik $u = g(x)$ dan $g(x)$ adalah terdifferensiasi di x, maka fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ adalah terdifferensiasi di x, dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

   Pada notasi Leibniz dengan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka Rumus Chain dituliskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

   diman $\frac{dy}{du}$ di evaluasi di $u = g(x)$.

5.4 Rangkuman Modul 4

1) Rangkuman 1

1. Misalkan f merupakan fungsi dengan domain D. Maka f memiliki nilai maksimum absolut di D pada titik c jika
   i. $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x di D
   ii. dan memiliki nilai minimum absolut di D pada titik c jika
   iii. $f(x) \geq f(c)$ untuk semua x di D.
2. Nilai maksimum dan nilai minimum disebut sebagai nilai ekstrim dari fungsi f.
3. Jika f adalah kontinu di interval tertutup $[a, b]$, maka f memiliki nilai maksimum di M dan nilai minimum m di $[a, b]$. Terdapat x_1 dan x_2 di

$[a, b]$ dengan $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk titik lain x di $[a, b]$.

4. Sebuah fungsi f memiliki nilai maksimum lokal di titik c di dalam domain D jika $f(x) \leq f(c)$ untuk semua $x \in D$ berada di beberapa interval terbuka yang memuat c.
5. Sebuah fungsi f memiliki nilai minimum lokal di titik c didalam domain D jika $f(x) \geq f(c)$ untuk semua $x \in D$ berada di beberapa interval terbuka yang memuat c.
6. Misalkan $y = f(x)$ adalah kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan terdifferensiasi pada interior interval (a, b). Maka terdapat minimal satu titik c di (a, b) dimana
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
7. Misalkan bahwa f adalah kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b). Jika $f'(x) > 0$ di setiap titik $x \in (a, b)$, maka f adalah naik di $[a, b]$. Jika $f'(x) < 0$ di setiap titik $x \in (a, b)$, maka f adalah turun di $[a, b]$.

2) Rangkuman 2

1) Metode Newton dapat dilakukan dengan menggunakan dua tahap yaitu
   i. Mempertimbangkan aproksimasi pertama untuk menjadi solusi dari persamaan $f(x) = 0$. Sebuah grafik dari $y = f(x)$ dapat membantu.
   ii. Gunakanlah aproksimasi pertama untuk menemukan yang kedua, yang kedu untuk menemukan yang ketiga dan seterusnya, dengan menggunakan rumus
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

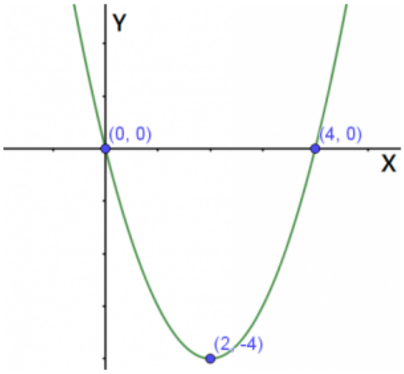
2) Sebuah fungsi F adalah anti turunan dari f di interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in I$.

4. Rangkuman

Modul ini tidak memiliki rangkuman khusus lagi karena merupakan rangkuman dari modul 1 hingga modul 4 yang menjadi bahan bagi mahasiswa untuk mempersiapkan Ujian Tengah Semester (UTS).

5. Latihan

1. Persamaan grafik parabola dibawah ini adalah



2. Jika f adalah fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(1{,}0)$, $(4{,}0)$, dan $(0, -4)$ maka nilai dari $f(7) =$
3. Diketahui fungsi $f(x) = (a+1)x^2 - 2ax + (a-2)$ definit negative. Nilai a yang memenuhi adalah
4. Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + 6x + a$ mempunyai sumbu simetri $x = 3$, maka nilai maksimum fungsi tersebut adalah
5. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 7x + 2 = 0$ adalah r dan s. Tentukan hasil dari $\frac{r}{(r^2+1)^2} + \frac{s}{(s^2+1)^2}$
6. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ dan bilangan L, c dan $\epsilon > 0$. Dalam kasus ini diberikan sebuah interval tertutup di c dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ yang memenuhi. Kemudian

Tentukanlah nilai untuk $\delta > 0$ sehingga untuk semua x memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ dan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

a. $f(x) = x + 1, L = 5, c = 4, \epsilon = 0.01$

b. $f(x) = \sqrt{x + 1}, L = 1, c = 0, \epsilon = 0.1$

c. $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, c = 4, \epsilon = 0.05$

7. Buktikanlah limit berikut ini dengan menggunakan ϵ dan δ.

a. $\lim_{x \to 3}(3x - 7) = 2$

b. $\lim_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$

8. Tentukanlah limit kiri maupun limit kanan berikut ini

a. $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

b. $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

c. $\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

9. Identifikasilah setiap koordinat dari ekstrim lokal dan ekstrim absolut dan titik belok dari fungsi berikut, kemudian gambarlah fungsinya.

a. $y = x(6 - 2x)^2$

b. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

c. $y = \sin x \cos x, 0 \leq x \leq \pi$

10. Gambarlah grafik fungsi berikut dengan menggunakan langkah-langkah menggambar grafik dengan menggunakan turunan pertama, turunan kedua dan nilai ekstrim

a. $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

b. $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$

11. Find the domain and range of the following functions

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

c. $f(x) = \tan x$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

12. Prove this following fomulas

a. $\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$

b. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

c. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

d. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

e. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$

13. Explain $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ why does not exist

14. Prove the statements using $\epsilon - \delta$ defnition of limit:

a. $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, if a > 0

b. $\lim_{x \to -2} x^2 = 4$

c. $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

d. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

15. Find all values of x at which the tangent line to the given curve $y = \frac{x+3}{x+2}$ is perpendicular to the line $y = x$.

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + x + p$ menyinggung garis $3x + y = 1$ dengan $p > 0$, maka nilai p yang memenuhi adalah
2. Grafik fungsi $f(x) = mx^2 + (2m-1)x + m + 3$ seluruhnya diatas sumbu x. interval nilai m yang memenuhi adalah

3. Jika p dan q merupakan akar-akar persamaan $x^2 - x + 1 = 0$, nilai dari $p^{2017} + q^{2017}$ adalah
4. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$, maka hasil dari $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 + x_2$ adalah
5. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$, carilah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{x_1^2-1}{2x_1}$ dan $\frac{2x_2}{x_2^2-1}$.
6. Tentukanlah nilai dari limit berikut atau jelaskanlah mengapa limitnya tidak ada
   a. $\lim\limits_{x \to 64} \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$
   b. $\lim\limits_{x \to \pi} \sin\left(\frac{x}{2} + \sin x\right)$
   c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin x}$
7. Tentukanlah limit dari $g(x)$ ketika x mendekati nilai yang diketahui
   a. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{3x^2+1}{g(x)}\right) = \infty$
   b. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{5-x^2}{\sqrt{g(x)}}\right) = 0$
8. Tentukanlah titik-titik dimana fungsi berikut ini akan kontinu
   a. $y = \frac{x \tan x}{\boldsymbol{x^2+1}}$
   b. $y = \frac{\boldsymbol{\sqrt{x^4+1}}}{\boldsymbol{1+sin^2x}}$
   c. $y = (2 - x)^{\boldsymbol{1/5}}$
9. Tentukanlah nilai ekstrim (absolut dan lokal) dari fungsi berikut
   a. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
   b. $y = x^2\sqrt{3 - x}$
10. Misalkan $f'(x) = 2x$ untuk semua x. Tentukanlah $f(2)$ jika
   a. $f(0) = 0$
   b. $f(1) = 0$
   c. $f(-2) = 3$

11. Use logarithmic differentiation to find $\frac{d}{dx}[(x^2+1)^{\sin x}]$
12. Use implicit differentiation to find $\frac{d^2y}{dx^2}$ if $4x^2 - 2y^2 = 9$
13. Use the implicit differentiation to find $\frac{dy}{dx}$ for the Folium of Descartes $x^3 + y^3 = 3xy$. Then find an equation for the tangent line to the Folium of Descartes at the point $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
14. Find the relative extrema of $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$
15. Find the absolute maximum and minimum values of the function $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ on the interval [1,5] and determine where these values occur.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom *feedback* yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul Enam ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Estimasi dengan Fungsi, Limit, Turunan dan Aplikasi

Turunan secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Fungsi   Limit   Turunan   Asimtot   Rata-rata

   Maksimum   Minimum

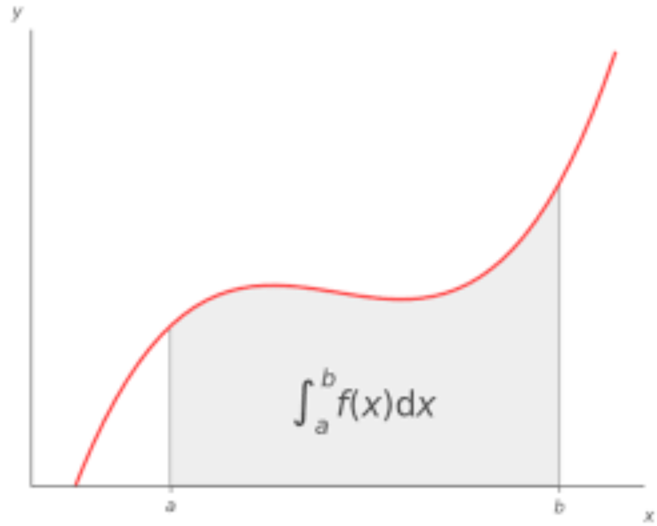
4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 6

INTEGRAL



$$\int x^n \, dx$$

MODUL 6

INTEGRAL

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Integral merupakan bagian dari anti turunan yang sudah dipelajari pada modul empat sebelumnya. Integral biasa disebut dengan anti turunan. Integral adalah sebuah konsep penjumlahan secara berkesinambungan dalam matematika. Integral ini dikembangkan menyusul dikembangkannya berbagai masalah yang muncul pada differensiasi, yaitu matematikawan ditantang untuk menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi differensiasi. Integral ini dibedakan menjadi dua, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Dalam modul ini mahasiswa akan mempelajari dasar integral hingga berbagai bentuk kompleksnya. Materi yang akan dipelajari dalam modul ini adalah Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu, Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul enam

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Mahasiswa diharpkan dapat melakukan berbagai konsep penurunan dan menggunakan konsep-konsep yang ada guna memberikan solusi atas setiap permasalahan yang ada.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang operasi matematika, operasi aljabar, fungsi, limit dan kekontinuan, dan Turunan

5. Kegunaan Modul Enam

   Kegunaan modul empat ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan materi aplikasi turunan. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi yang ada dengan maksimal.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu, Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 10: Menguasai konsep Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

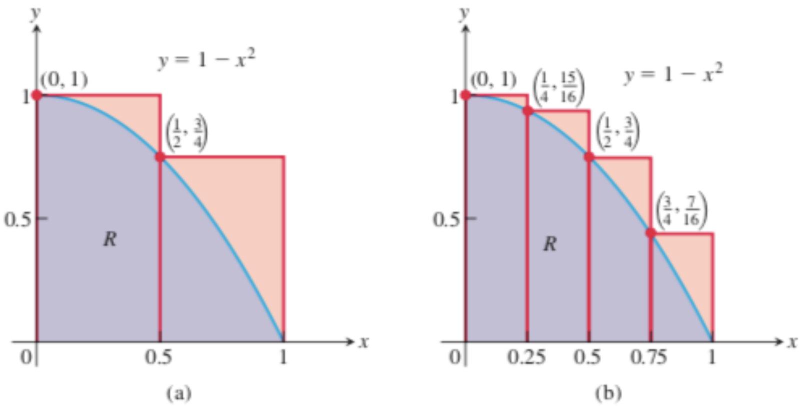
Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

6.1 Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga

Luas daerah suatu bidang datar maupun bangun ruang biasanya dihitung dengan memperhatikan bentuknya hingga dapat menentukan rumus yang tepat untuk menghitung luasnya. Namun pada sebarang bentuk, kita memerlukan pendekatan lain untuk menentukannya.

Misalkan kita ingin menghitung luas daerah R yang berada diatas sumbu x dan dibawah grafik $y = 1 - x^2$, dan diantara garis vertikal $x = 0$ dan $x = 1$. Maka untuk ini tidak ada rumus sederhana secara geometri untuk menghitung luasnya, sehingga kita dapat lakukan pembagian grafiknya dalam bentuk beberapa bagian persegi panjang seperti gambar berikut:



Gambar 54 Partisi grafik dua dan empat bagian

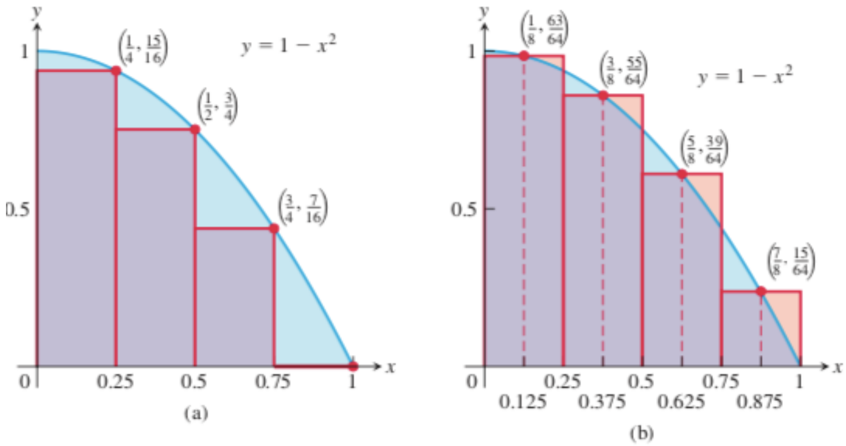
Pada gambar diatas bagian (a) dapat kita perhatikan bahwa grafiknya dibagi menjadi 2 buah persegi panjang dengan lebar sebesar $\frac{1}{2}$. Maka luas yang terbentuk dengan melakukan pendekatan membagi dua grafik tersebut seperti pada gambar (a) adalah

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Sedangkan pada gambar bagian (b) kita membagi lebarnya menjadi empat bagian sehingga lebar setiap persegi panjangnya sebesar $\frac{1}{4}$. Maka luas daerah yang mendekati luas grafik sebenarnya pastilah lebih baik menggunakan bagian (b), yaitu dengan luas sebesar:

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$

Luas daerah yang kita hitung diatas adalah luas daerah grafik dengan menggunakan aproksimasi dimana luas yang sebenarnya tetaplah lebih kecil. Misalkan kita menggunakan prinsip yang sama namun menggunakan tinggi persegi panjang sebagai titik tengah setiap persegi panjang, seperti tampak pada gambar berikut:



Gambar 55 Partisi grafik 4 bagian dengan batas atas dan tengah

Luas daerah yang memungkinkan dibentuk seperti gambar ini adalah dengan menempatkan persegi di dalam grafik (gambar (a)) dan menempatkan persegi ditengah (Gambar (b)).

Perhitungan luas yang memungkinkan pada gambar (a) adalah

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0{,}53125$$

Dimana luas daerah ini pastilah lebih kecil dari luas daerah yang sebenarnya, karena persegi panjang yang terbentuk adalah di dalam grafik. Jadi Luas daerah yang sebenarnya pastilah diantara 0,53125 dan 0,78125, yang dapat dituliskan dengan:

$$0{,}53125 < A < 0{,}78125$$

Jadi berdasarkan nilai yang sudah ada ini, kita sebuk sebagai aproksimasi bawah dan aproksimasi tinggi, dimana error yang ada yaitu $0{,}78125 - 0{,}53125 = 0{,}25$.

Selanjutnya pada gambar (b) diatas dengan menggunakan tinggi sebagai titik tengah maka luasnya adalah

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}671875$$

Dalam hal ini kita dapat mengeneralisir bahwa pada interval $[a, b]$ pada fungsi f dapat kita bagi kedalam n subinterval yang sama yaitu dengan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Fungsi f dapat kita evaluasi di setiap titik subinterval : c_1 di subinterval pertama, c_2 di subinterval kedua dan seterusnya.

Sehingga didapatkan penjumlahan berhingga dengan bentuk berikut

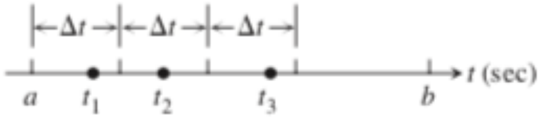
$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$$

Dengan menambahkan persegi panjang yang semakin banyak dan kecil, maka nilai aproksimasi yang didapat akan semakin baik dan luas daerah akan mendekati luas yang sebenarnya.

Hal semacam ini dapat juga kita temukan dalam menentukan jarak perjalanan kendaraan. Misalkan kita memiliki fungsi kecepatan yaitu $v(t)$ dari sebuah mobil, tanpa mengubah arah, maka kita ingin mengetahui seberapa jauh perjalanan mobil tersebut pada selang waktu $t = a$ dan $t = b$. Posisi fungsi $s(t)$ dari mobil memiliki turunan yaitu $v(t)$. Jika kita menemukan anti turunan $F(t)$ dari $v(t)$ maka kita dapat menentukan fungsi posisi dari mobil yaitu $s(t)$ dengan merumuskan $s(t) = F(t) + C$. Jarak perjalanan yang ditempuh dapat dihitung dengan melihat perubahan posisi $s(b) - s(a) = F(b) - F(a)$. Jika diketahui fungsi kecepatan dengan melihatnya dari beberapa waktu pada speedometer mobil, maka kita dapat memformulasikannya untuk menentukan anti turunan untuk kecepatan. Jadi,pada kondisi ini kita dapat membagi interval waktu $[a, b]$ kedalam waktu yang lebih singkat. Kemudian kita dapat menemukan aproksimasi jarak di setiap subintervalnya dengan menggunakan rumus :

$$Jarak = Kecepatan \times waktu$$

Bentuk yang mungkin terbentuk adalah sebagai berikut:



t_i merupakan subinterval yang mungkin terjadi dari setiap pembagian interval waktu yang ada. Jadi penjumlaha dari setiap bagian jarak di setiap subinterval waktu merupakan jarak seluruh perjalanan mobil, dengan n adala jumlah total subinterval yaitu:

$$D \approx v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \cdots + v(t_n)\Delta t$$

Ingat bahwa jarak tidak bernah bernilai negatif, maka total jarak yang mungkin terjadi dapat juga dituliskan dengan :

$$|v(t_1)|\Delta t + |v(t_2)|\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\Delta t$$

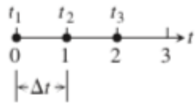
Contoh :

Diketahui bahwa fungsi kecepatan sebuah proyektil ditembakkan lurus $f(t) = 160 - 9.8t$ m/detik. Gunakanlah penjumlahan untuk mendeskripsikan seberapa jauh kenaikan proyektil selama 3 detik pertama. Seberapa dekatkah nilai yang diperoleh dengan nilai sebenarnya 435,9m?

Jawab:

Ingat bahwa $f(t)$ adalah menurun, maka pilihlah titik akhir kiri untuk menentukan estimasi jumlah batas atas; pilihlah titik akhir kanan untuk menentukan estimasi jumlah batas bawah.

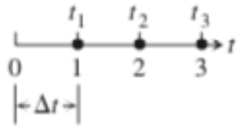
1. 3 buah subinterval dengan panjang 1, dimana f dihitung pada titik akhir kiri untuk mendapatkan jumlah batas atas:



untuk f di $t = 0, 1,$ dan 2, diperoleh

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$
$$= [160 - 9{,}8(0)](1) + [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1)$$
$$= 450{,}6$$

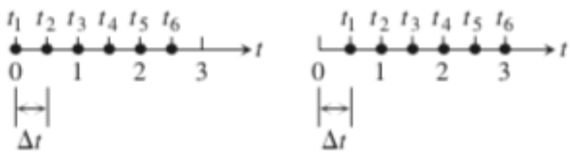
2. Tiga subinterval dengan panjang 1, f dihitung di titik akhir kanan untuk menentukan jumlah batas bawah:



untuk f di $t = 0, 1,$ dan 2, diperoleh

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$
$$= [160 - 9{,}8(1)](1) + [160 - 9{,}8(2)](1) + [160 - 9{,}8(3)](1)$$
$$= 421{,}2$$

3. Dengan menggunakan enam subinterval dengan panjang $\frac{1}{2}$, didapat



Jadi berdasarkan perhitungan diatas, maka nilai titik akhir kiri memiliki nilai yang lebih dekat dengan nilai sebenarnya yaitu 435,9 dari atas dan titik akhir kanan dengan batas bawah dari bawah. Jadi eror yang paling kecil adalah:

$$Eror = |nilai\ sebenarnya - nilai\ hitung|$$
$$= |435{,}9 - 435{,}67| = 0{,}23$$

dengan persentasi eror sebesar

$$Persentasi\ Eror = \frac{0{,}23}{435{,}9} \approx 0{,}05\%$$

Sehingga disimpulkan bahwa proyektil naik sebesar 436m selama 3 detik penerbangan.

6.2 Notasi Sigma dan Limit Sigma

Notasi sigma Σ berasal dari huruf Yunani yaitu untuk huruf S. Notasi sigma dituliskan untuk menyederhanakan perkalian berulang dengan pola tertentu seperti bentuk berikut:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\mathrm{k}} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Contoh :

i. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} \mathrm{k}^2$

dan

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i)$$

ii. Ubahlah bentuk penjumlahan $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ kedalam bentuk notasi sigma

Jawab :

Untuk k $= 0$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4}(2k + 1)$

Untuk k $= 1$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5}(2k - 1)$

Untuk k $= 2$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6}(2k - 3)$

Untuk k $= -3$: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1}(2k + 7)$

Ketika kita memiliki bentuk

$$\sum_{k=1}^{3}(k + k^2)$$

maka dapat kita ubah menjadi seperti :

$$\sum_{k=1}^{3}(k+k^2) = (1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)$$

$$= (1+2+3)+(1^2+2^2+3^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2$$

bentuk ini mengilustrasikan aturan umum pada penjumlahan berhingga

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Berikut ini beberapa Operasi aljabar pada penjumlahan berhingga

1. Aturan penjumlahan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2. Aturan pengurangan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

3. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

4. Aturan nilai Konstan

$$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$

Rumus penjumlahan dari bilangan kuadrat dan bilangan kubik dalam notasi sigma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Bentuk sigma ini dapat kita hitung nilai limitnya untuk menentukan aproksimasi luas daerah pada kurva tertentu. Hal ini dapat kita perhatikan pada contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai limit dari penjumlahan aproksimasi batas bawah untuk luas daerah dibawah grafik $y = 1 - x^2$ dan diatas interval $[0,1]$ di sumbu x dengan menggunakan lebar persegi panjang yang mendekati nol dan bilangan yang mendekati tak hingga.

Jawab:

Kita dapat menghitung batas bawah penjumlahannya dengan menggunakan n persegi panjang dengan lebar yang sama yaitu $\Delta x = \frac{1-0}{n}$ dan kemudian dilanjutkan dengan $n \to \infty$. Kita dapat memulai membagi $[0,1]$ menjadi subinterval lebar sebanyak n:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]$$

setiap subinterval memiliki lebar $1/n$. Fungsi $1 - x^2$ menurun di $[0,1]$ dan nilai terkecil dalam subinterval ada di titik akhir subinterval. Jadi batas bawah penjumlahan dikonstruksikan dengan persegi panjang yang tingginya pada subinterval $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ adalah $f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2$, diperoleh:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \left[f\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

Persamaan ini dapat disederhanakan dalam notasi sigma seperti:

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right) \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

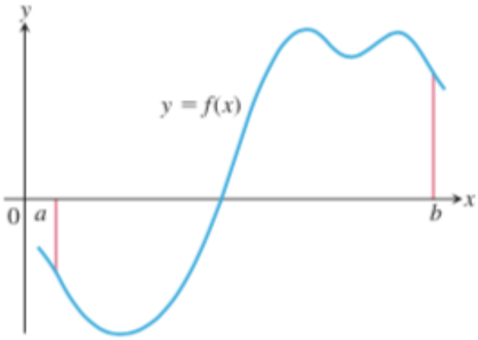
Selanjutnya untuk menentukan aproksimasi yang mendekati nilai sebenarnya, maka kita hitung nilai limit dari fungsi yang kita miliki ketika $n \to \infty$. Batas bawah yang kita temukan konvergen ketika bilangan dari subinterval naik dan lebar subinterval mendekati nol:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa batas bawah penjumlahan aproksimasinya adalah konvergen ke $\frac{2}{3}$.

Teori limit dari aproksimasi berhingga dikemukakan oleh Matematikawan Jerman bernama Bernhard Riemann. Notasi penjumlahan Riemann yang digunakan untuk definisi integral tentu.

Misalkan kita memiliki fungsi f terdefinisi pada interval tertutup seperti tampak pada gambar berikut ini



Gambar 56 Fungsi pada interval tertutup

misalkan kita membagi interval $[a, b]$ menjadi sebanyak $n - 1$ titik yaitu $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\}$ diantara a dan b memenuhi

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

untuk membuat notasinya konsisten, kita misalkan $a = x_0$ dan $b = x_n$, sehingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Misalkan

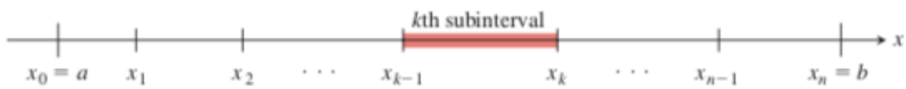
$$P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

adalah partisi dari $[a, b]$.

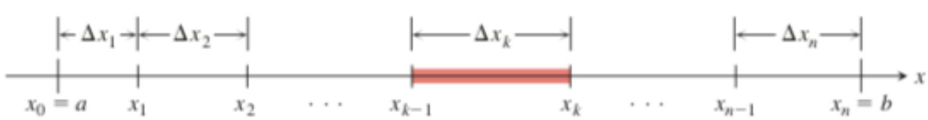
Partisi P membagi $[a, b]$ menjadi n subinterval tertutup

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

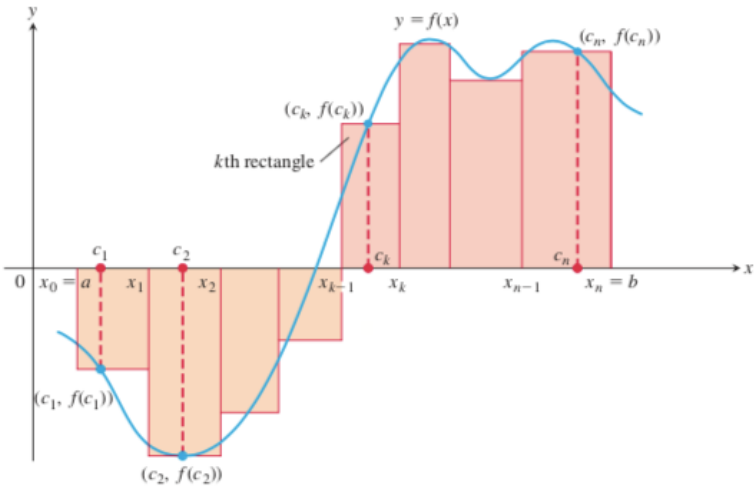
subinterval ini dilukiskan seperti berikut



lebar dari subinterval pertama $[x_0, x_1]$ dinotasikan dengan Δx_1, dan subinterval yang ke-k dinotasikan dengan $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Jika untuk semua n subinterval memiliki lebar yang sama, maka secara umum lebar $\Delta x = (b - a)/n$.



dengan menggunakan fungsi tertentu, maka persegi panjang yang terbentuk dari sebuah grafik dapat berada dibawah atau diatas sumbu x tergantung pada $f(c_k)$ adalah positif atau negatif atau di sumbu x jika $f(c_k) = 0$



Gambar 57 Fungsi dengan subinterval

setiap subinterval adalah hasil perkalian dari $f(c_k) \cdot \Delta x_k$, nilainya bisa positi, negatif atau nol tergantung pada tanda dari $f(c_k)$. Ketika $f(c_k) > 0$, perkalian $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ adalah luas dari persegi panjang dengan tinggi $f(c_k)$ dan lebar Δx_k. Ketika $f(c_k) < 0$, perkalian $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ adalah bilangan negatif. Jadi jumlah semua perkaliannya adalah merupakan Penjumlahan Riemann yaitu

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

perlu diingat bahwa norm dari partisi P ditulis dengan $\|P\|$ yang adalah lebar subinterval terbesar. Jika $\|P\|$ bilangan yang kecil, maka semua subinterval di partisi P adalah kecil.

6.3 Integral Tentu

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang terdifinisii di interval tertutup $[a, b]$. Sebarang bilang J disebut sebagai integral tentu dari f pada $[a, b]$ dan J adalah limit dari penjumlahan Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ jika kondisi berikut terpenuhi:

Misalkan diberikan $\epsilon > 0$ dan terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ dari $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ dan setia pilihan c_k di $[x_k, x_{k-1}]$, diperoleh:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J\right| < \epsilon$$

Jika nilai limitnya ada, integral tentu dapat dituliskan dengan

$$J = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Dari sini diperoleh definisi integral tentu yaitu

$$\int_a^b f(x)dx$$

ketika definisi integral tentu ini terpenuhi, kita dapat menyebut penjumlahan Riemann di $[a,]$ adalah konvergen ke integral tentu $J = \int_a^b f(x)dx$ dan bahwa f teintegralkan di $[a, b]$.

Untuk kondisi subinterval yang sama besar dengan $\Delta x = (b - a)/n$, maka berlaku bentuk penjumlahan Riemann berikut:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

dimana c_k adalah subinterval ke-k. Limit dari penjumlahan Riemann ketika $n \to \infty$ ada dan sama dengan J, maka rumus untuk integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval $[a, b]$ atau jika f memiliki loncatan ketidakkontinuan yang berhingga, maka integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ ada dan f dapat diintegralkan di $[a, b]$.

Berikut ini beberapa sifat integral tentu untuk f dan g dapat diintegralkan pada interval $[a, b]$

i. Urutan integral

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

ii. Integral bernilai 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

iii. Perkalian dengan konstanta

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

iv. Penjumlahan dan pengurangan

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

v. Sifat penjumlahan interval terurut

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

vi. Pertidaksamaan maksimum dan minimum

Jika f memiliki nilai maksimum $\max f$ dan nilai minimum $\min f$ di $[a,b]$, maka

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \max f \cdot (b-a)$$

vii. Dominasi

$$f(x) \ge g(x) \text{ di } [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \ge 0 \text{ di } [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

Jika $y = f(x)$ adalah bukan negatif dan terintegralkan di interval tertutup $[a,b]$, maka luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada $[a,b]$ adalah integral dari f dengan batas a ke b.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

selanjutnya untuk integral $f(x) = x$ pada interval tertutup $[a,b]$, $0 < a < b$, berlaku:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Jadi integral dari $f(x) = x$ adalah

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, a < b$$

Kemudian untuk integral fungsi sederhana lainnya dengan menggunakan penjumlahan Riemann adalah

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \qquad c \text{ adalah konstanta}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, a < b$$

Pada luas daerah fungsi dengan menggunakan pendekatan persegi panjang, maka dapat ditentukan dengan menghitung rata-rata luas daerah dibawah grafik $y = f(x)$ dibagi $b - a$. Jika f terintegralkan di $[a, b]$, maka nilai rata-rata di $[a, b]$ dapat dinotasikan dengan integral yang dituliskan dengan

$$Rata - rata = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

4. Rangkuman

1. Dalam hal ini kita dapat mengeneralisir bahwa pada interval $[a, b]$ pada fungsi f dapat kita bagi kedalam n subinterval yang sama yaitu dengan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Fungsi f dapat kita evaluasi di setiap titik subinterval : c_1 di subinterval pertama, c_2 di subinterval kedua dan seterusnya.

   Sehingga didapatkan penjumlahan berhingga dengan bentuk berikut

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$$

Dengan menambahkan persegi panjang yang semakin banyak dan kecil, maka nilai aproksimasi yang didapat akan semakin baik dan luas daerah akan mendekati luas yang sebenarnya.

2. Bentuk ini mengilustrasikan aturan umum pada penjumlahan berhingga

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

3. Berikut ini beberapa Operasi aljabar pada penjumlahan berhingga
   i. Aturan penjumlahan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   ii. Aturan pengurangan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   iii. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   iv. Aturan nilai Konstan

$$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$

4. Rumus penjumlahan dari bilangan kuadrat dan bilangan kubik dalam notasi sigma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5. Penjumlahan Riemann yaitu

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

6. Limit dari penjumlahan Riemann ketika $n \to \infty$ ada dan sama dengan J, maka rumus untuk integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

7. Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval $[a, b]$ atau jika f memiliki loncatan ketidakkontinuan yang berhingga, maka integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ ada dan f dapat diintegralkan di $[a, b]$.
8. Berikut ini beberapa sifat integral tentu untuk f dan g dapat diintegralkan pada interval $[a, b]$:
   i. Urutan integral

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

   ii. Integral bernilai 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

   iii. Perkalian dengan konstanta

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

   iv. Penjumlahan dan pengurangan

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

   v. Sifat penjumlahan interval terurut

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

vi. Pertidaksamaan maksimum dan minimum

Jika f memiliki nilai maksimum $\max f$ dan nilai minimum $\min f$ di $[a, b]$, maka

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \max f \cdot (b-a)$$

vii. Dominasi

$$f(x) \ge g(x) \text{ di } [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \ge 0 \text{ di } [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

5. Latihan

1. Express the following limit as a definite integral

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$$

2. Evaluate
   a. $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$
   b. $\int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x \; dx$
   c. $\int_{-1}^{1} 2x \sin(1-x^2) \; dx$
   d. $\int \sqrt{t}\sin(2t^{3/2}) \; dt$
3. Find the number b such that the line $y = b$ divides the region bounded by the curve $y = x^2$ and $y = 4$ into two regions with equal area.
4. Find the exact arc length of $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 1$ from $x = 0$ to $x = 1$.
5. Find the area of the surface that is generated by revolving the portion of

the curve $y = x^2$ between $x = 1$ and $x = 2$ about the y-axis.

6. Evaluasi Pembelajaran

Selesaikanlah integral berikut

1. $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1} dx =$
2. $\int \frac{1}{6+x-x^2} dx =$
3. $\int \frac{4x+5}{x^2+4x+5} dx =$
4. $\int \frac{x^3-4x^2+6}{x^2-4x+4} dx$
5. $\int \frac{12\,(x-1)}{(x+1)(x^2-4)} dx =$
6. $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16+5)} dx =$
7. $\int \frac{\mathbf{x^3-7x^2+8x+3}}{\mathbf{x^2-7x+12}}\ \mathbf{dx}$
8. $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$
9. $\int_{(x+1)^2}^{x+2x\sqrt{x}} \frac{8}{2x^2-12x+10} dx =$
10. $\int_{\sin\frac{1}{2}\pi}^{\sin\pi} \frac{3}{7x^2-5x-18} dx =$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom *feedback* yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 11: Menguasai konsep Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

6.4 Teorema Fundamental Kalkulus

Teorema fundamental kalkulus dimulai dengan menggunakan teorema nilai rata-rata pada integra; tentu seperti yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya. Teorema nilai rata-rata untuk integral tentu yaitu:

Jika f adalah fungsi kontinu di $[a, b]$, maka di titik c dalam $[a, b]$ berlaku

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Dengan menggunakan prinsip ini, maka ada beberapa bagian teorema fundamental pada kalkulus seperti berikut:

1) Teorema fundamental bagian pertama

Jika $f(t)$ adalah fungsi integral pada integral tentu di interval I, maka integral dari setiap bilangan $a \in I$ ke bilangan lain $x \in I$ didefinisikan sebagai sebuah fungsi baru F yang memiliki nilai di x yaitu

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$$

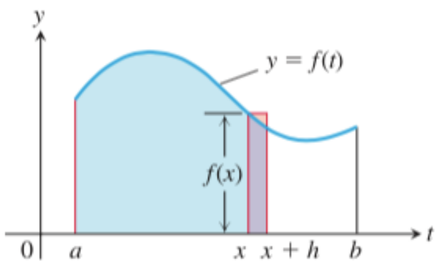
jika f adalah fungsi kontinu, maka teorema fundamental bahwa F adalah terdifferensiasi di x dimana turunannya adalah f sendiri. Pada setiap nilai x, berlaku:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

jika $f \geq 0$ di $[a, b]$, maka perhitungan $F'(x)$ dari definisi turunannya menyatakan bahwa limit ketika $h \to 0$ dengan persamaan

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

untuk $h > 0$, penyebut diperoleh dengan substrasi dua daerah, sehingga luas dibawah grafik f dari x ke $x + h$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 58 Luas dibawah grafik

jika h kecil, luas daerahnya akan mendekati luas daerah dengan tinggi $f(x)$ dan lebar h, seperti pada gambar diatas. Sehingga di dapat

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$$

Dengan membagi kedua sisinya dengan h dan $h \to 0$, maka diperoleh

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa Teorema fundamental kalkulus yang pertama yaitu:

Jika f adalah kontinu di $[a, b]$, maka $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ adalah kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b) dan turunannya adalah $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Bukti:

Untukmembuktikan teorema ini, kita gunakan definisi turunan secara umum pada fungsi $F(x)$, ketika x dan $x + h$ ada di (a, b). Yaitu dengan persamaan

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

dan menunjukkan bahwa limit untuk $h \to 0$ adalah bilangan $f(x)$ untuk x di (a, b). Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema rata-rata untuk integral tentu, maka untuk titik c pada interval berlaku

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

untuk $h \to 0$, $x + h$ mendekati x, yang membuat c mendekati x juga. Karena f adalah kontinu di x, $f(c)$ mendekati $f(x)$:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

sehingga disimpulkan

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c)$$

$$= f(x)$$

2) Teorema fundamental bagian kedua

   Jika f kontinu di $[a, b]$ dan F adalah anti turunan dari f di $[a, b]$, maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

   Bukti:

   Latihan mahasiswa

Jika F adalah anti turunan dari f, maka $F' = f$. Persamaannya dapat dituliskan dalam bentuk teorema yang disebut dengan teorema perubahan yaitu:

Perubahan pada fungsi differensial $F(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$ integral dari tingkat perubahan:

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} F'(x)dx$$

Selanjutnya berikut ini hubungan integral dan turunan

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{b} f(t)dt = f(x)$$

dengan mengubah variabel b ke x, dan x ke t maka:

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

6.5 Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi

Integral tak tentu dinotasikan sebagai anti turunan F dari f, yaitu:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

dimana C adalah sebarang konstanta.

Salah satu metode menentukan integral tentu adalah dengan menggunakan metode substitusi. Metode substitusi dilakukan dengan langkah balikan dari aturan Chain. Aturan Chain yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}$$

dari sisi yang berbeda maka dapat diubah menjadi

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Jadi aturan substitusi untuk integral tak tentu dapat dituliskan dengan:

Jika $u = g(x)$ adalah fungsi yang terdifferensiasi pada interval I, dan f kontinu I, maka

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du$$

Bukti:

Latihan Mahasiswa

Contoh :

1) Tentukanlah integral dari

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1)\,dx$$

Jawab:

Misalkan $u = x^3 + x$, maka

$$du = \frac{du}{dx}dx = (3x^2 + 1)dx$$

dengan substitusi diperoleh:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1)\, dx = \int u^5 du$$

$$= \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{(x^3 + x)^6}{6} + C$$

2) Tentukanlah integral dari

$$\int \cos(7\theta + 3)\, d\theta$$

Jawab:

Misalkan $u = 7\theta + 3$ maka $du = 7d\theta$. Diperoleh:

$$\int \cos(7\theta + 3)\, d\theta = \frac{1}{7}\int \cos(7\theta + 3) \cdot 7\, d\theta$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos u\ du$$

$$= \frac{1}{7}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7\theta + 3) + C$$

3) Tentukanlah integral dari

$$\int x\sqrt{2x + 1}\ dx$$

Jawab:

Misalkan $u = 2x + 1$ maka $du = 2dx$, sehingga

$$\sqrt{2x + 1}dx = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, du$$

jika $u = 2x + 1$ maka $x = \frac{u-1}{2}$, diperoleh

$$x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}(u-1)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$

sehingga bentuk integral menjadi:

$$\int x\sqrt{2x+1}\ dx = \frac{1}{4}\int (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u-1)u^{1/2}\ du$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)\ du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

6.6 Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva

Jika g' adalah fungsi kontinu si interval $[a, b]$ dan f kontinu di $g(x) = u$, maka

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

jika f dan g adalah kontinu dengan $f(x) \geq g(x)$ melalui $[a, b]$, maka luas dari daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dari a ke b adalah integral dari $f - g$ dengan batas a ke b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Contoh:

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 2 - x^2$ dan $y = -x$.

Jawab:

Untuk menentukan luas daerahnya, maka pertama sekali perlu kita tentukan batas interval untuk x yaitu

$$2 - x^2 = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$x = -1$ atau $x = 2$

Jadi batas daerahnya adalah $a = -1$ dan $b = 2$

Sehingga luas yang terbentuk adalah

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\ dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\ dx$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

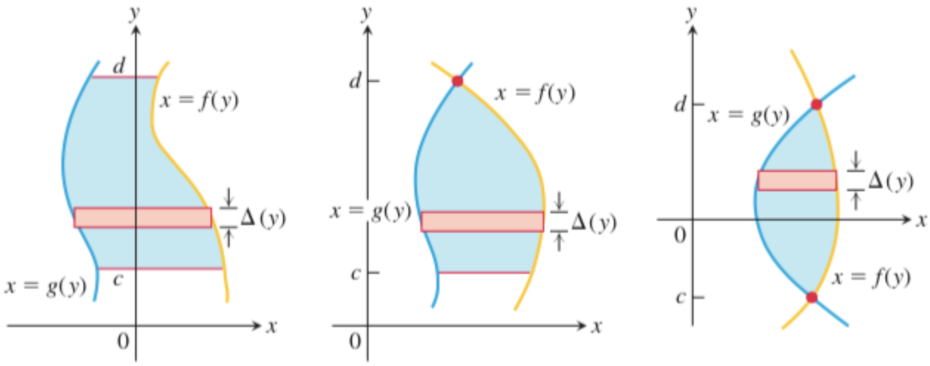
$$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

Bentuk integral tidak selamanya diintegralkan pada sumbu x, namun dapat juga diintegralkan pada sumbu y. Pada tahap dan proses pengerjaannya sama dengan sumbu x. Sehingga untuk rumus menentukan luas daerah dengan pengintegralan terhadap sumbu y diformulasikan seperti berikut ini.

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\ dy$$

dengan bentuk grafik dan luas daerah seperti berikut:



Gambar 59 Grafik luas daerah

4. Rangkuman

1. Jika f adalah kontinu di $[a,b]$, maka $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ adalah kontinu di $[a,b]$ dan terdifferensiasi di (a,b) dan turunannya adalah $f(x)$:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

2. Perubahan pada fungsi differensial $F(x)$ pada interval $a\leq x\leq b$ integral dari tingkat perubahan:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx$$

3. Integral tak tentu dinotasikan sebagai anti turunan F dari f, yaitu:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

$$\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

4. Jika f dan g adalah kontinu dengan $f(x)\geq g(x)$ melalui $[a,b]$, maka luas dari daerah yang dibatasi kurva $y=f(x)$ dan $y=g(x)$ dari a ke b adalah integral dari $f-g$ dengan batas a ke b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

5. Rumus menentukan luas daerah dengan pengintegralan terhadap sumbu y diformulasikan seperti berikut ini.

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

5 Latihan

Tentukanlah integral dari:

(a) $\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right)dx$

(b) $\int_0^{\pi} (1 + \cos x)dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sec x + \tan x)^2 dx$

(d) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t + 1)(t^2 + 4)dt$

(e) $\int_1^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}} ds$

(g) $\int \sec^2(3x + 2)\, dx$

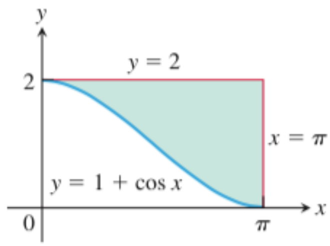
(h) $\int 3y\sqrt{7 - 3y^2} dy$

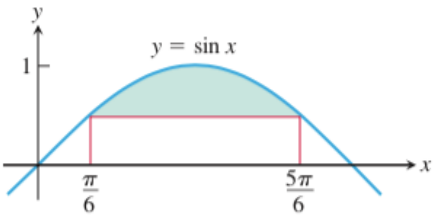
(i) $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}} dr$

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva berikut

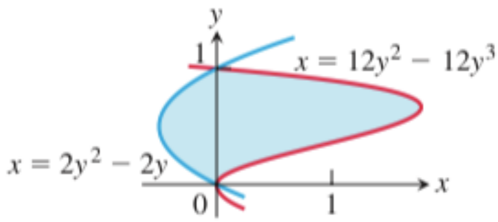
1. $y = -x^2 - 2x, -3 \leq x \leq 2$
2. $x = y^2$ dan $x = y + 2$
3. $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ dan $y = x$
4. $x^3 - y = 0$ dan $3x^2 - y = 4$

5. gambar berikut





6. gambar berikut



6. Evaluasi Pembelajaran

Tentukanlah integral dari:

1) $\int_1^4 \left(3x^2 - \frac{x^3}{4}\right) dx$
2) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{s^2+\sqrt{s}}{x^2} ds$
3) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x + \sec x)^2 dx$
4) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cos x^2 \, dx$
5) $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}} dz$

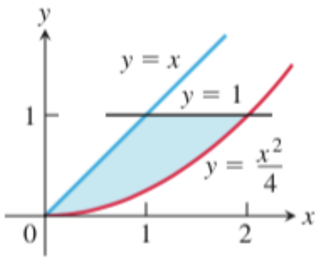
Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva berikut

1) $y = x^{\frac{1}{3}} - x, -1 \leq x \leq 8$
2) $x - y^2 = 0$ dan $x + 2y^2 = 3$

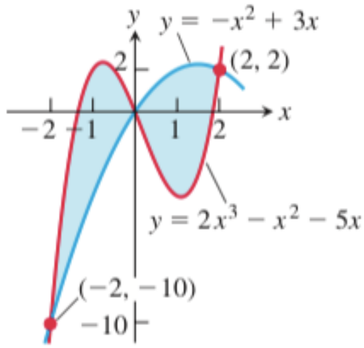
3) $x + y^2 = 3$ dan $4x + y^2 = 0$

4) $y = \sec^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ dan $y = x^{\frac{1}{3}}, -1 \leq x \leq 1$

5) gambar berikut



6) gambar berikut



7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom *feedback* yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C . PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul Enam ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Estimasi dengan Penjumlahan Berhingga, Notasi Sigma dan Limit Sigma, Integral Tentu, Teorema Fundamental Kalkulus, Integral Tak Tentu dan Metode Substitusi dan Integral Substitusi dan Luas daerah diantara Kurva secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Integral Sigma Substitusi Limit

   Estimasi

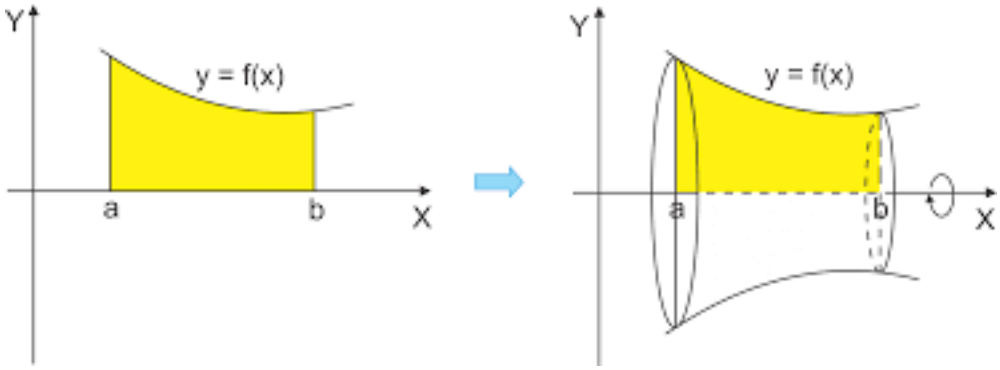
4. Referensi

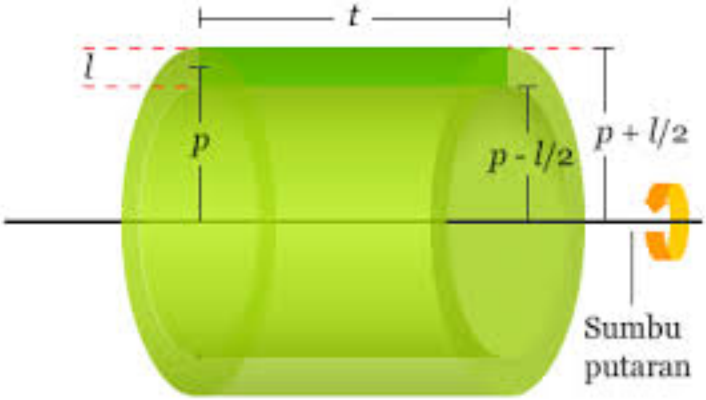
   Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

   Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 7

APLIKASI INTEGRAL TENTU





MODUL 7

APLIKASI INTEGRAL TENTU

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Modul ini memuat penjabaran tentang aplikasi ientgral tentu. Materi pokok yang akan dijabarkan yaitu Volume menggunakan persilangan, Volume menggunakan kulit Silinder (*Cylindrical Shells*), Panjang busur, Luas Permukaan Dengan rotasi, Gaya kerja dan Fluida, Momen dan Pusat Massa.

   Setiap materi dijabarkan dengan detail dengan menggunakan bahasa yang mudah dimengerti sehingga setiap mahasiswa dapat memahami dengan mudah. Modul ini di desain dengan menggunakan contoh soal, latihan dan evaluasi pembelajaran yang membantu dan memfasilitasi mahasiswa menguasai berbagai bentuk aplikasi integral tentu.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Tujuh

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral.

5. Kegunaan Modul Tujuh

   Kegunaan modul tujuh ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan Aplikasi Integral Tentu. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai aplikasi integral tentu untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : Volume menggunakan persilangan, Volume menggunakan kulit Silinder (*Cylindrical Shells*), Panjang busur, Luas Permukaan Dengan rotasi, Gaya kerja dan Fluida, Momen dan Pusat Massa

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 12 : Menguasai konsep Volume menggunakan persilangan, Volume menggunakan kulit Silinder (*Cylindrical Shells*), Panjang busur

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

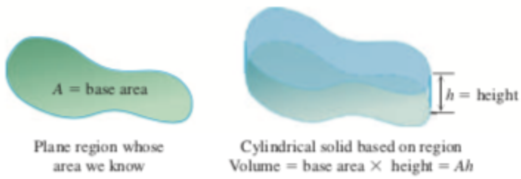
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Volume menggunakan persilangan, Volume menggunakan kulit Silinder (*Cylindrical Shells*), Panjang busur. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Volume menggunakan persilangan, Volume menggunakan kulit Silinder (*Cylindrical Shells*), Panjang busur. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

7.1 Volume menggunakan persilangan

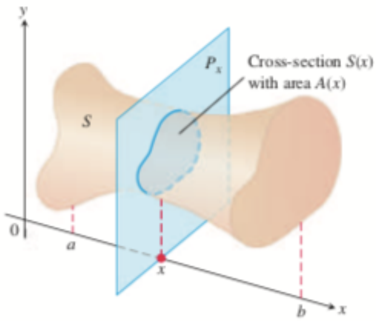
Volume suatu benda dapat ditentukan dengan mengalikan luas alas benda tersebut dengan tingginya, yang dituliskan dengan:

$$Volume = Luas \times tinggi$$



Gambar 60 Daerah persilangan

Persilangan dari bidang dengan ruang tertentu, dapat menjadi dasar untuk menghitung volume dari bangun ruang yang terbentuk. Persilangan yang terbentuk seperti gambar berikut:

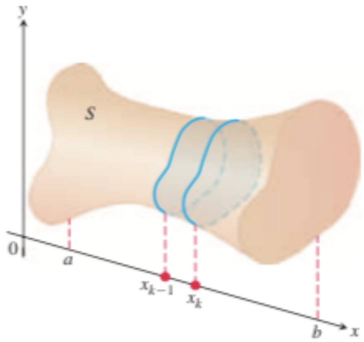


Gambar 61 Persilangan ruang

Bentuk bangun ruang maupun benda-benda yang bervolume lainnya dapat ditentukan volumenya dengan melihat fungsi yang terbentuk dan perpotongan yang ada. Jika perpotongan bidang S di titik x pada interval $[a, b]$ adalah daerah $S(x)$ dari Luas $A(x)$, dan A merupakan fungsi kontinu di x, maka dapat didefinisikan dan dihitung volume dari bangun S dengan menggunakan integral tentu dari $A(x)$. Perhitungan yang dapat kita gunakan salah satunya adalah metode mengiris (*method of slicing*).

1. Mengiris bidang secara parallel (*Slicing by Parallel planes*)

   Misalkan kita memiliki benda seperti gambar berikut:



Gambar 62 Pengirisan ruang

berdasarkan gambar diatas, maka kita dapat membagi interval $[a, b]$ menjadi subinterval dengan lebar Δx_k dan mengiris benda tersebut seperti potongan roti dengan garis yang tega lurus dengan sumbu x di setiap partisinya $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Bidang P_{x_k}, tegak lurus dengan sumbu x disetiap titik partisi, mengiris S menjadi tipis. Maka aproksimasi bidang irisan antara x_{k-1} dan bidang x_k dengan seperti luas alas yang berbentuk seperti bulatan $A(x_k)$ dan tinggi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Volume V_k dari silinder yang terbentuk yaitu $A(x_k) \cdot \Delta x_k$, dimana volumenya mendekati irisan seperti berikut:

$$Volume\ benda\ irisan\ ke - k \approx V_k = A(x_k) \cdot \Delta x_k$$

Volume V dari seluruh benda padat S diaproksimasi dengan menggunakan penjumlahan dari volume silinder yaitu:

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k) \cdot \Delta x_k$$

Dengan menggunakan partisi dari $[a, b]$ menuju nol dan sebanyak n subinterval sebesar $\|P\| \to 0$ diperoleh

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b A_x\, dx$$

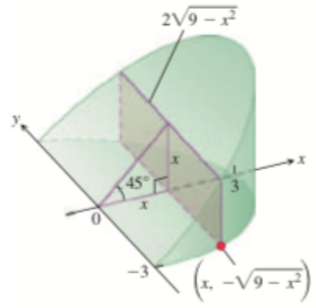
secara umum dapat dituliskan seperti definisi volume berikut.

Volume dari benda padat dengan teknik integral melalui metode persilangan pada luas $A(x)$ dari $x = a$ ke $x = b$ adalah integral dari a ke b:

$$V = \int_a^b A_x \, dx$$

Contoh:

Sebuah ganjal dibentuk oleh dua buah lingkaran dengan jari-jari 3 tampak seperti pada gambar berikut.



Gambar 63 Silinder terpotong

Bidang pertama yang terbentuk adalah tegak lurus terhadap sumbu x dari silinder. Bidang yang kedua bersilangan dengan bidang pertama dengan sudut 45° di titik pusat silinder. Tentukanlah Volume ganjal tersebut.

Jawab:

Dasar ganjal seperti pada gambar berupa semi lingkaran dengan $x \geq 0$ yang dipotong dari lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dengan sudut 45° ketika beririsan dengan sumbu y. Untuk setiap x pada interval $[0,3]$, nilai y di dalam semi lingkaran dengan dasar $y = -\sqrt{9-x^2}$ ke $y = \sqrt{9-x^2}$. Ketika kita iris ganjal dengan bidang yang tegak lurus terhadap sumbu x, diperoleh persilangan di x dimana persegi panjang dengan tinggi x dan lebar diperpanjang hinggs dasar semi lngkaran.

Luas dari bagian persilangannya adalah

$$A(x) = tinggi \cdot lebar$$
$$= (x)\left(\sqrt{9 - x^2}\right)$$
$$= 2x\sqrt{9 - x^2}$$

Persegi panjang yang terbentuk dari $x = 0$ sampai $x = 3$, sehingga

$$V = \int_a^b A_x \, dx$$
$$= \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2} \, dx$$
$$= -\frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2}\Big]_0^3$$
$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$
$$= 18$$

2. Rotasi benda Padat : Metode Kaset (*Solids Revolution: The disk Method*)

Volume benda dengan menggunakan metode kaset adalah dilakukan dengan melakukan rotasi terhadap sumbu x yaitu:

$$V = \int_a^b A_x \, dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 \, dx$$

Contoh:

Menghitung volume benda dengan menggunakan metode kaset juga dapat dilakukan dengan konsep rotasi terhadap sumbu y yaitu:

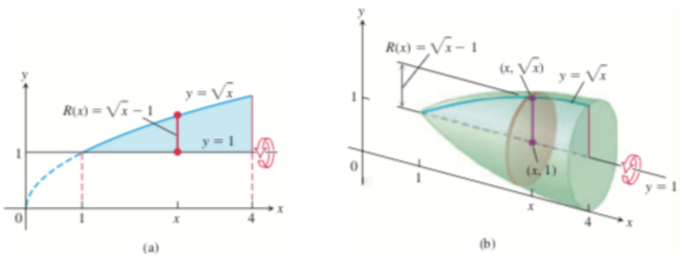
$$V = \int_c^d A_y \, dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2 \, dy$$

Contoh:

1) Tentukanlah volume dari benda padat dengan daerah yang dibatasi $y = \sqrt{x}$ dan garis $y = 1$, $x = 4$ terhadap $y = 1$.

Jawab:

Gambar yang terbentuk dari fungsi yang diberikan adalah seperti dibawah ini:



Gambar 64 Volume dari grafik fungsi diputar sumbu x

Volume dari benda tersebut adalah

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2\, dx$$

$$= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx$$

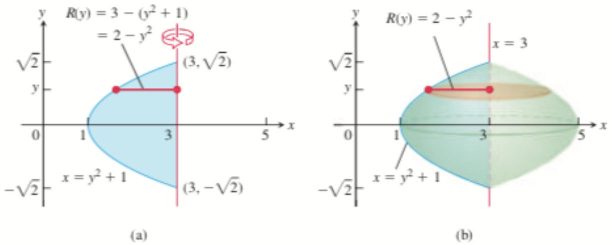
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x\right]_1^4$$

$$= \frac{7\pi}{6}$$

2) Tentukanlah volume dari benda yang dibentuk terhadap sumbu y dan kurvanya $x = y^2 + 1$ dan garis $x = 3$ terhadap garis $x = 3$

Jawab:

Gambar yang terbentuk dari fungsi diatas adalah



Gambar 65 Volume grafik fungsi diputas sumbu y

Dengan melihat persilangan yang tegak lurus dengan garis $x = 3$ dengan koordinat y dari $y = -\sqrt{2}$ ke $y = \sqrt{2}$. Volumenya adalah

$$V = \int_c^d \pi[R(y)]^2\, dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2)]^2\, dy$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\, dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$

3. Rotasi benda Padat : Metode Pencuci (*Solids revolution: The washer method*)

   Metode pencuci (Washer) dilakukan untuk menentukan volume benda dengan menggunakan jari-jari luar dan jari-jari dalam benda tersebut. Jari-jari luar yaitu $R(x)$ dan jari-jari dalam $r(x)$.

   Luasnya dirumuskan dengan

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

Sehingga volume benda dengan menggunakan metode Washer dengan rotasi terhadap sumbu x adalah

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

Volume benda dengan menggunakan metode Washer dengan rotasi terhadap sumbu y adalah

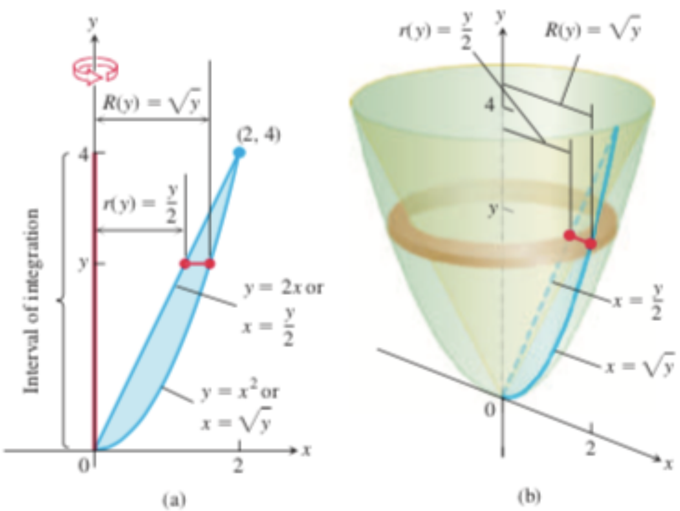
$$V = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,dy$$

Contoh:

Daerah yang dibatasi parabola $y = x^2$ dan garis $y = 2x$ di kuadran pertama diputar pada sumbu y. Tentukanlah volume yang terbentuk dari pemutaran garis tersebut!

Jawab:

Gambar yang terbentuk dari fungsi diatas adalah seperti berikut



Gambar 66 Rotasi parabola

garis linear dan garis parabola beririsan di $y = 0$ dan $y = 4$, jadi batas integral $c = 0$ dan $d = 4$. Kita lakukan integral untuk menemukan volumenya seperti berikut:

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy$$

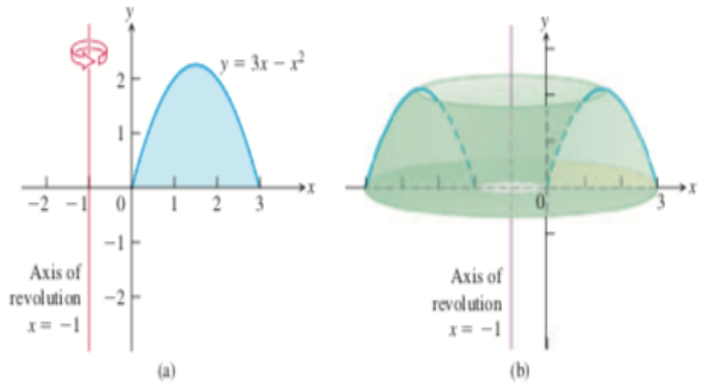
$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

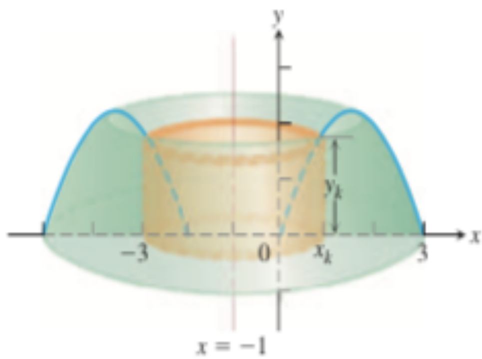
7.2 Volume menggunakan kulit Silinder (*Cylindrical Shells*)

Menentukan volume benda dapat dilakukan dengan mengiris silinder yang terbentuk sehingga ditemukan persamaan maupun fungsi yang membentuk sebuah benda atau bangun ruang tersebut. Misalkan kita memiliki kurva yang dibatasi oleh parabola $y = f(x) = 3x - x^2$ diputas secara vertikal pada garis $x = -1$, maka untuk menentukan volumenya dapat dilakukan dengan metode *slicing with cylinder*. Pertama kita menggambar grafik dan bagun ruang yang terbentuk seperti gambar berikut dengan memutasnya pada gari $x = -1$



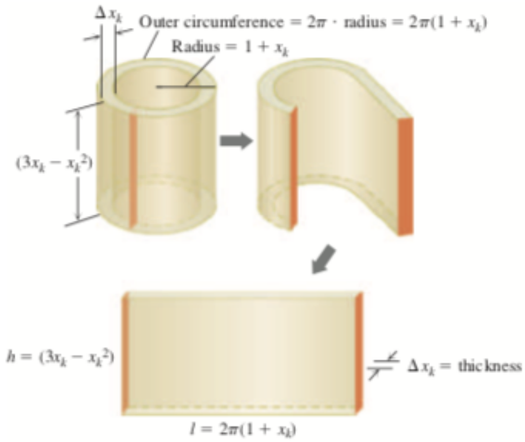
Gambar 67 Perpotongan bangun ruang dengan subinterval

setiap irisan yang dipotong pada subinterval sepanjang sumbu x dengan lebar Δx_k. Jari-jarinya mendekati $(1 + x_k)$ dan tinggi mendekati $3x_k - x_k^2$. Jika dilakukan pendekatan silinder maka gambar yang terbentuk menjadi :



Gambar 68 Silinder

keliling dari silinder paling luar yaitu silinder ke-k adalah $2\pi \cdot jari - jari = 2\pi(1 + x_k)$, dan jika dibentangkan maka silinder tersebut akan membentuk persegi panjang.



Gambar 69 Volume silinder dengan persegi panjang

Selanjutnya volume dari benda ini akan mendekati sebuah volume persegi panjang, luas dari persegi panjang dikalikan dengan ketebalannya

$$\Delta V_k = keliling \times Tinggi \times ketebalan$$

$$= 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x_k$$

dengan menjumlahkan semua volume ΔV_k dengan cylindrical shells masing-masing pada interval [0,3] dengan menggunakan penjumlahan Riemann yaitu:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k)^2 \Delta x_k$$

dengan menggunakan limit untuk $\Delta V_k \to 0$ dan $n \to \infty$ maka volumenya dengan menggunakan integral yaitu

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k)^2 \Delta x_k$$

$$= \int_0^3 2\pi(x + 1)(3x - x^2)dx$$

$$= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)dx$$

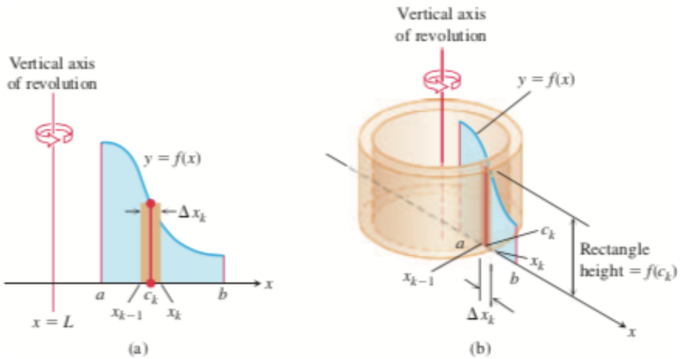
$$= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3$$

$$= \frac{45\pi}{2}$$

Dengan menggunakan metode kulit (*Shell*), maka volume dari benda yang terbentuk dapat ditentukan dengan menjumlahkan irisan setiap bagian-bagiannya, yaitu

$$\Delta V_k = 2\pi \times rata-rata\ jari-jari\ kulit \times ketebalan$$

$$= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k$$



Gambar 70 Volume dengan metode kulit

dengan melakukan penjumlahan Riemann, maka

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

$$= \int_a^b 2\pi(jari-jari\ kulit)(tinggi\ kulit)dx$$

$$= \int_{a}^{b} 2\pi(x - L)f(x)dx$$

Dengan menggunakan metode Shell ini yaitu rotasi terhadap garis vertikal $x = L$, fungsi kontinu $y = f(x) \geq 0, L \leq a \leq x \leq b$, dituliskan dengan

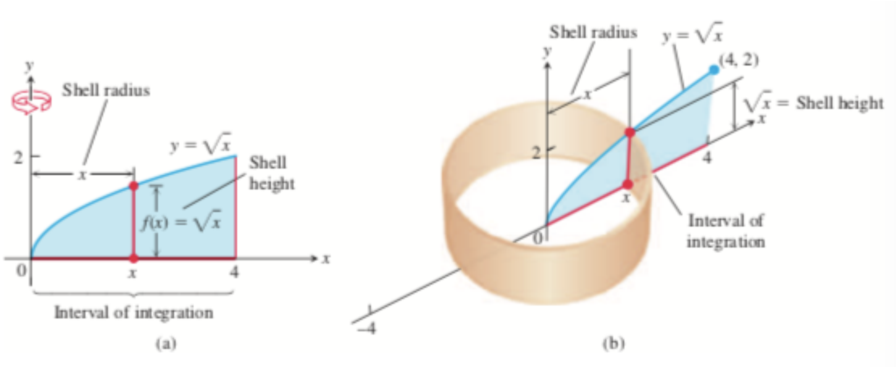
$$V = \int_{a}^{b} 2\pi(jari - jari\ kulit)(tinggi\ kulit)dx$$

Contoh :

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x dan garis $x = 4$ diputas pada sumbu y. Tentukanlah volume yang terbentuk!

Jawab:

Untuk menentukan volumenya, terlebih dahulu kita gambar bentuk dari kurva dan bangun yang terbentuk, seperti pada gambar berikut:



Gambar 71 Silinder diputar sumbu y

Ketebalan kulitnya adalah x, limit dari integral untuk $a = 0$ dan $b = 4$, maka volumenya adalah

$$V = \int_{a}^{b} 2\pi(jari - jari\ kulit)(tinggi\ kulit)dx$$

$$= \int_{0}^{4} 2\pi(x)(\sqrt{x})dx$$

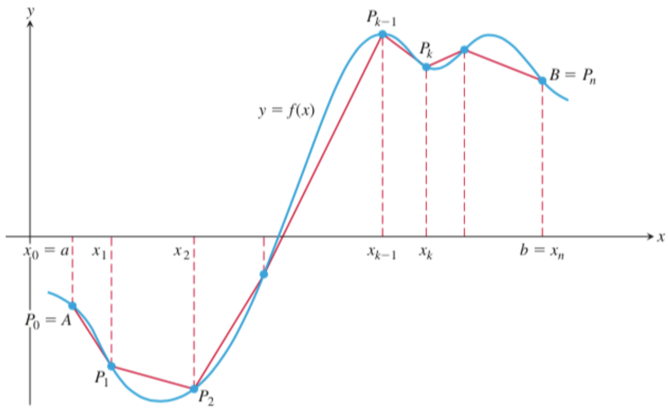
$$= 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{128\pi}{5}$$

7.3 Panjang busur

Panjang dari kurva $y = f(x)$ dari $x = a$ sampai $x = b$ dapat ditentukan dengan mempartisi intervalnya menjadi beberapa subinterval. Misalkan kita memiliki fungsi yang turunannya kontinu disetiap titik $[a, b]$. Fungsi dengan grafik yang halus yaitu yang tidak mengalami naik turun a yang drastis disebut sebagai kurva halus sehingga interval kurvanya menjadi bagian partisi, seperti pada gambar berikut.



Gambar 72 Panjang busur

Partisi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval yaitu $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Jika $y_k = f(x_k)$, maka titik $P_k(x_k, y_k)$ berada di kurva. Selanjutnya titik P_{k-1} dan P_k dihubungkan dengan garis lurus. Jika $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dan $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, maka panjang garis yang menghubungkan titi P adalah

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

total panjang kurvanya dapat dihitung dengan menjumlahkan setiap panjang dari partisinya yaitu

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

berdasarkan teorema nilai rata-rata, terdapat titik c_k dengan $x_{k-1} < c_k < x_k$, sehingga

$$\Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

Dengan mensubstitusikan Δy_k, maka

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\ \Delta x_k$$

karena $\sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}$ adalah kontinu di $[a, b]$, liit dari penjumlahan Riemann menjadi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} L_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\ dx$$

Jadi, jika f' adalah kontinu di $[a, b]$, maka panjang kurva atau biasa disebut dengan panjang busur dari kurva $y = f(x)$ dari titik $A = \big(a, f(a)\big)$ ke titik $B = \big(b, f(b)\big)$ adalah nilai integral dari

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

jika g' adalah fungsi kontinu di $[c, d]$, panjang kurva $x = g(y)$ dari $A = (g(c), c)$ ke $B = (g(d), d)$ adalah

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\ dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

jika $y = f(x)$ dan jika f' adalah kontinu di $[a, b]$, dengan menggunakan teorema fundamental kalkulus maka fungsi yang didefinisikan

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\ dt$$

Fungsi $s(x)$ adalah kontinu dan mengukur panjang kurva $y = f(x)$ dari titik $P_0\big(a, f(a)\big)$ ke titik $Q\big(x, f(x)\big)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Fungsi s disebut fungsi panjang busur untuk $y = f(x)$. Dengan teorema fundamental, fungsi s adalah terdifferensiasi di (a, b) dan

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

maka differensiasi dari panjang busur adalah

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

atau dapat dituliskan dengan

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Contoh:

Tentukanlah panjang dari kurva $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ dari $x = 0$ sampai $x = 2$!

Jawab:

Turunannya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

tidak terdefinisi di titik $x = 0$. Maka peru kita modifikasi fungsinya menjadi

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{2}$$

$$x = 2y^{\frac{3}{2}}$$

Dengan batas $y = 0$ ke $y = 1$

turunannya menjadi

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{\frac{1}{2}}$$

adalah kontinu di [0,1].

Sehingga dapat diperoleh panjang kurvanya yaitu:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\ dy$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + 9y)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

$$\approx 2.27$$

4. Rangkuman

1) Volume V dari seluruh benda padat S diaproksimasi dengan menggunakan penjumlahan dari volume silinder yaitu:

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k) \cdot \Delta x_k$$

2) Volume dari benda padat dengan teknik integral melalui metode persilangan pada luas $A(x)$ dari $x = a$ ke $x = b$ adalah integral dari a ke b:

$$V = \int_a^b A_x\, dx$$

3) Volume benda dengan menggunakan metode kaset adalah dilakukan dengan melakukan rotasi terhadap sumbu x yaitu:

$$V = \int_a^b A_x \, dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 \, dx$$

4) Volume benda dengan menggunakan metode Washer dengan rotasi terhadap sumbu x adalah

$$V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2) \, dx$$

2) Dengan menggunakan metode Shell yaitu rotasi terhadap garis vertikal $x = L$, fungsi kontinu $y = f(x) \geq 0, L \leq a \leq x \leq b$, dituliskan dengan

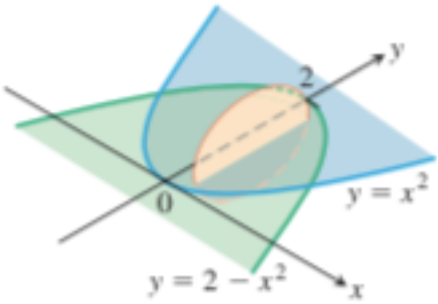
$$V = \int_a^b 2\pi(jari - jari\ kulit)(tinggi\ kulit)dx$$

3) Jika f' adalah kontinu di $[a, b]$, maka panjang kurva atau biasa disebut dengan panjang busur dari kurva $y = f(x)$ dari titik $A = \big(a, f(a)\big)$ ke titik $B = \big(b, f(b)\big)$ adalah nilai integral dari

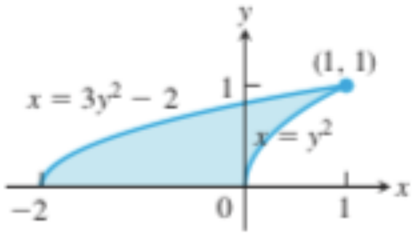
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

5. Latihan

1) Benda padat terletak di antara bidang yang tegak lurus sumbu x di $x = -1$ dan $x = 1$. Penampang melintang yang tegak lurus sumbu x adalah piringan bundar yang diameternya membentang dari parabola $y = x^2$ ke parabola $y = 2 - x^2$. Tentukanlah volumenya!



2) Tentukan volume benda padat yang dihasilkan dengan memutar daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = 1$ pada
   a. Garis $y = 1$
   b. Garis $y = 2$
   c. Garis $y = -1$
3) Daerah yang ditunjukkan di sini harus diputar terhadap sumbu x untuk menghasilkan benda padat. Manakah dari metode (disk, washer, shell) yang dapat Anda gunakan untuk menemukan volume padatan? Berapa banyak integral yang diperlukan dalam setiap kasus? Menjelaskan.



Pada latihan No. 4) dan 5), lakukan hal berikut.

a. Tentukan integral untuk panjang kurva.

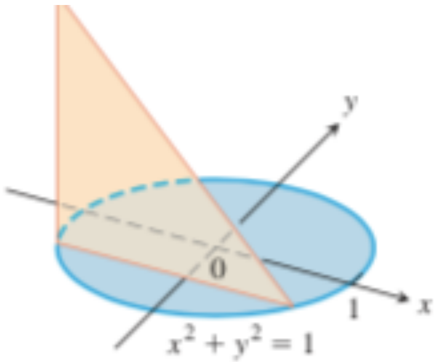
b. Grafik kurva untuk melihat seperti apa bentuknya.

c. Gunakan evaluator integral dari grafik atau komputer Anda untuk menemukan panjang kurva secara numerik.

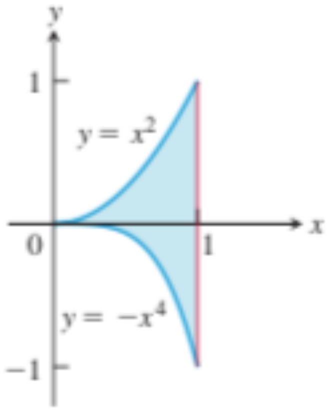
4) $y = x^2, -1 \le x \le 2$
5) $x = \sin y\,, 0 \le y \le \pi$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Alas benda padat adalah piringan $x^2 + y^2 \leq 1$. Penampang melintang bidang-bidang yang tegak lurus terhadap sumbu y antara $y = -1$ dan $y = 1$ adalah segitiga siku-siku sama kaki dengan satu kaki di piringan. Tentukanlah volumenya!



2) Dengan integrasi, cari volume benda yang dihasilkan dengan memutar daerah segitiga dengan simpul (0, 0), (b, 0), (0, h) pada
   a. Sumbu x
   b. Sumbu y
3) Daerah yang ditunjukkan di sini berevolusi terhadap sumbunya untuk menghasilkan benda padat. Manakah dari metode (disk, washer, shell) yang dapat Anda gunakan untuk menemukan volume padatan? Berapa banyak integral yang diperlukan dalam setiap kasus? Berikan alasan untuk jawaban Anda.



4) Tentukan integral untuk panjang kurva $y = \sin x - x\cos x, 0 \leq x \leq \pi$ selanjutnya gambar grafik kurva tersebut untuk melihat seperti apa bentuknya.
5) Tentukan fungsi panjang busur untuk grafik $(x) = 2x^{3/2}$ menggunakan $(0,0)$ sebagai titik awalnya. Berapa panjang kurva dari $(0,0)$ ke $(1,2)$?

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 13 : Menguasai konsep Luas Permukaan Dengan rotasi, Gaya kerja dan Fluida, Momen dan Pusat Massa

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

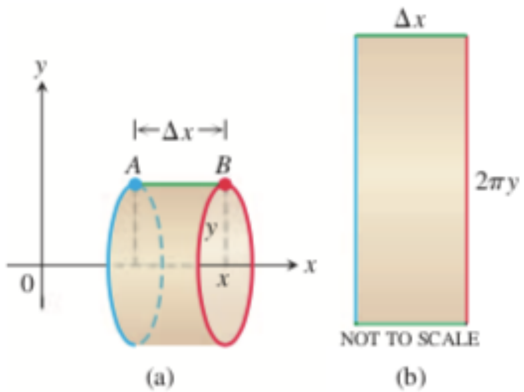
   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Luas Permukaan Dengan rotasi, Gaya kerja dan Fluida, Momen dan Pusat Massa. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Luas Permukaan Dengan rotasi, Gaya kerja dan Fluida, Momen dan Pusat Massa. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

7.4 Luas Permukaan Dengan rotasi

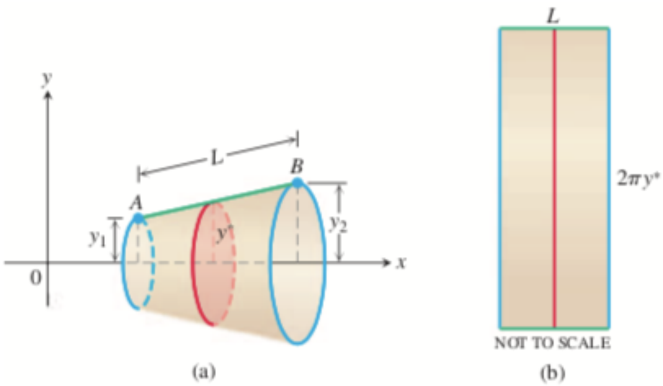
Jika kita memutar daerah pada bidang yang dibatasi oleh grafik fungsi selama interval, itu menyapu padatan revolusi, seperti yang kita lihat sebelumnya dalam modul ini. Namun, jika kita hanya memutar kurva pembatas itu sendiri, itu tidak menyapu volume interior apa pun, melainkan permukaan yang mengelilingi benda padat dan membentuk bagian dari batasnya. Sama seperti kita tertarik untuk mendefinisikan dan menemukan panjang kurva di bagian terakhir, kita sekarang tertarik untuk mendefinisikan dan menemukan luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar kurva di sekitar sumbu.

Sebelum mempertimbangkan kurva umum, kita mulai dengan memutar segmen garis horizontal dan miring terhadap sumbu x. Jika kita memutar ruas garis horizontal AB yang panjangnya x terhadap sumbu x, kita menghasilkan sebuah silinder dengan luas permukaan $2\pi y\Delta x$. Luas ini sama dengan luas persegi panjang dengan panjang sisi x dan $2\pi y$. Panjang $2\pi y$ adalah keliling lingkaran berjari-jari y yang dihasilkan dengan memutar titik (x, y) pada garis AB terhadap sumbu x. Seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 73 Rotasi pada sumbu x

Misalkan ruas garis AB memiliki panjang L dan lebih miring daripada mendatar. Sekarang ketika AB diputar terhadap sumbu x, menghasilkan frustum kerucut. Dari geometri klasik, luas permukaan frustum ini adalah $2\pi y^* L$, di mana $y^* = (y_1 + y_2)/2$ adalah 12 tinggi rata-rata segmen miring AB di atas sumbu x. Luas permukaan ini sama dengan persegi panjang dengan panjang sisi L dan $2\pi y^*$, seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 74 Rotasi pada sumbu x dengan fungsi terdifferensiasi

Jika fungsi $f(x) \geq 0$ adalah terdifferensiasi kontinu di $[a, b]$, luas permukaan yang memutar grafik $y = f(x)$ sekitar sumbu x adalah

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Jika $x = g(y) \geq 0$ adalah turunan yang kontinu di $[c, d]$, luas permukaan yang memutar grafik $x = g(y)$ pada sumbu y adalah

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_a^b 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

7.5 Gaya kerja dan Fluida

Ketika sebuah benda bergerak sejauh d sepanjang garis lurus sebagai akibat dari gaya yang besarnya konstan F dalam arah gerak, kita mendefinisikan pekerjaan W yang dilakukan oleh gaya pada objek dengan rumus

$W = Fd$ (Rumus gaya konstan untuk usaha)

Dari Persamaan ini kita melihat bahwa satuan kerja dalam sistem apapun adalah satuan gaya dikalikan dengan satuan jarak. Dalam satuan SI (SI adalah singkatan dari Sistem Internasional), satuan gaya adalah newton, satuan jarak adalah meter, dan satuan kerja adalah newton-meter ($N \cdot m$). Kombinasi ini begitu sering muncul sehingga memiliki nama khusus, joule. Dalam sistem Inggris, satuan kerja adalah foot-pound, satuan yang kadang-kadang digunakan dalam aplikasi.

Usaha yang dilakukan oleh gaya variabel $F(x)$ dalam menggerakkan sebuah benda sepanjang sumbu x dari $x = a$ ke $x = b$ adalah

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

Dalam fluida yang diam, tekanan p pada kedalaman h adalah massa jenis fluida w kali h:

$$p = wh$$

Jika F, p, dan A adalah gaya, tekanan, dan luas total, maka

$F = Total\ gaya$

$F = gaya\ per\ satuan\ luas \times luas$

$F = tekanan \times luas = pA$

$F = whA$

Misalkan sebuah pelat yang terendam secara vertikal dalam fluida dengan massa jenis w berjalan dari $y = a$ ke $y = b$ pada sumbu y. Misalkan $L(y)$ adalah panjang jalur horizontal yang diukur dari kiri ke kanan sepanjang permukaan pelat pada level y. Maka gaya yang diberikan oleh fluida terhadap salah satu sisi pelat adalah

$$F = \int_a^b w \cdot (kedalaman) \cdot L(y) dy$$

7.6 Momen dan Pusat Massa

Momen, Massa, dan Pusat Massa Lempeng Tipis yang Meliputi Daerah pada Bidang xy.

Momen pada sumbu x

$$M_x = \int \tilde{y}\ dm$$

Momen pada sumbu y

$$M_y = \int \tilde{x}\ dm$$

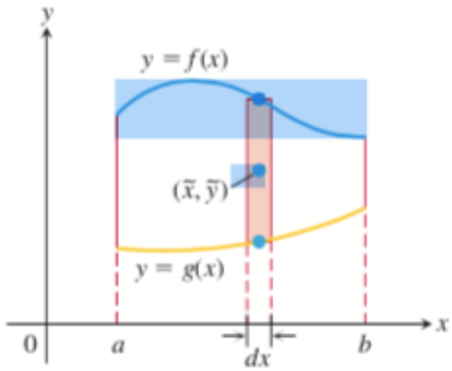
Massa

$$M = \int dm$$

Pusat massa

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_y}{M}$$

Pelat yang Dibatasi oleh Dua Kurva, Misalkan sebuah pelat menutupi daerah yang terletak di antara dua kurva $y = g(x)$ dan $y = (x)$, di mana $f(x) \geq g(x)$ dan $a \leq x \leq b$. Garis vertikal tipikal, seperti gambar berikut memiliki



Gambar 75 Gris vertikal tipikal

Pusat massa : $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]\right)$

Panjang : $f(x) - g(x)$

Lebar : dx

Luas : $dA = [f(x) - g(x)]dx$

Massa : $dm = \delta\, dA = \delta[f(x) - g(x)]dx$

Momen pelat pada sumbu y adalah

$$M_y = \int x\ dm = \int_a^b x\delta[f(x) - g(x)]dx$$

Momen pelat pada sumbu x adalah

$$M_x = \int y\ dm = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x) + g(x)] \cdot \delta[f(x) - g(x)]dx$$

$$M_x = \int_a^b \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]dx$$

Sehingga momen diberikan dengan rumus berikut

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_{a}^{b} \delta x[f(x) - g(x)]dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_{a}^{b} \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]dx$$

Gaya fluida dengan massa jenis w terhadap satu sisi pelat vertikal datar yang terendam adalah hasil kali w, jarak h dari pusat massa pelat ke permukaan fluida, dan luas pelat:

$$F = w\bar{h}A$$

Teorema Pappus untuk Volume Jika suatu daerah bidang diputar satu kali terhadap sebuah garis pada bidang yang tidak memotong bagian dalam daerah tersebut, maka volume benda padat yang dihasilkannya sama dengan luas daerah tersebut dikalikan jarak yang ditempuh oleh pusat massa daerah tersebut selama revolusi. Jika r adalah jarak dari sumbu revolusi ke pusat massa, maka

$$V = 2\pi\rho A$$

Teorema Pappus untuk Luas Permukaan Jika sebuah busur pada kurva bidang licin diputar satu kali terhadap sebuah garis pada bidang yang tidak memotong bagian dalam busur tersebut, maka luas permukaan yang dihasilkan oleh busur tersebut sama dengan panjang L busur dikalikan jarak yang ditempuh oleh pusat busur selama revolusi. Jika r adalah jarak dari sumbu revolusi ke pusat massa, maka

$$S = 2prL$$

4. Rangkuman

1) Jika fungsi $f(x) \geq 0$ adalah terdifferensiasi kontinu di $[a, b]$, luas permukaan yang memutar grafik $y = f(x)$ sekitar sumbu x adalah

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

2) Usaha yang dilakukan oleh gaya variabel $F(x)$ dalam menggerakkan sebuah benda sepanjang sumbu x dari $x = a$ ke $x = b$ adalah

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

3) Gaya yang diberikan oleh fluida terhadap salah satu sisi pelat adalah

$$F = \int_a^b w \cdot (kedalaman) \cdot L(y) dy$$

4) Momen, Massa, dan Pusat Massa Lempeng Tipis yang Meliputi Daerah pada Bidang xy.

Momen pada sumbu x

$$M_x = \int \tilde{y}\ dm$$

Momen pada sumbu y

$$M_y = \int \tilde{x}\ dm$$

Massa

$$M = \int dm$$

Pusat massa

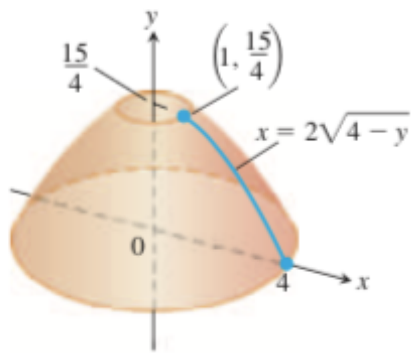
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_y}{M}$$

5) Gaya fluida dengan massa jenis w terhadap satu sisi pelat vertikal datar yang terendam adalah hasil kali w, jarak h dari pusat massa pelat ke permukaan fluida, dan luas pelat:

$$F = w\bar{h}A$$

5. Latihan

1) Tentukanlah luas permukaan dari fungsi berikut pada batas dan sumbu seperti berikut:
   a. $y = \sqrt{x}, \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{15}{4}$, sumbu x
   b. $x = \frac{1}{3}y^3, 0 \leq y \leq 1,$ sumbu y
2) Tentukanlah Luas permukaan dari $x = 2\sqrt{4-y}, 0 \leq y \leq \frac{15}{4}$ pada sumbu y



3) Sebuah gaya 2 N akan meregangkan karet gelang 2 cm (0,02 m). Dengan asumsi bahwa Hukum Hooke berlaku, seberapa jauh gaya 4-N akan meregangkan karet gelang? Berapa usaha yang diperlukan untuk meregangkan karet gelang sejauh ini?
4) Tentukan pusat massa pelat tipis dengan kerapatan konstan δ yang menutupi daerah berikut
   a. dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = 4$
   b. dibatasi oleh parabola $x = y^2 - y$ dan garis $y = x$

5) Temukan pusat massa pelat tipis yang dibatasi oleh grafik fungsi yang diberikan dengan $\delta = 1$ dan M = luas daerah yang dicakup oleh pelat

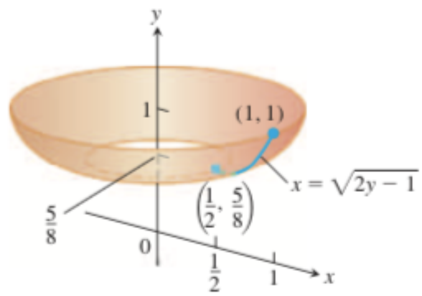
   a. $g(x) = x^2$ dan $f(x) = x + 6$
   b. $g(x) = x^2(x+1), f(x) = 2$ dan $x = 0$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) Tentukanlah luas permukaan dari fungsi berikut pada batas dan sumbu seperti berikut:

   a. $x = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}, 1 \leq y \leq 3,$ sumbu y
   b. $y = \sqrt{2x - x^2}, 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5,$ sumbu x

2) Tentukanlah Luas permukaan dari $x = 2\sqrt{2y - 1}, \frac{5}{8} \leq y \leq 1$ pada sumbu y



3) Timbangan kamar mandi dikompresi 1/16 inci ketika orang dengan berat 150 pon berdiri di atasnya. Dengan asumsi bahwa timbangan berperilaku seperti pegas yang mematuhi Hukum Hooke, berapa berat seseorang yang menekan timbangan 1/8 inci? Berapa usaha yang dilakukan untuk menekan timbangan 1/8 inci?

4) Tentukan pusat massa pelat tipis dengan kerapatan konstan δ yang menutupi daerah berikut

   a. dibatasi oleh sumbu y dan kurva $x = y - y^3, 0 \leq y \leq 1$
   b. dibatasi oleh parabola $y = x - x^2$ dan garis $y = -x$

5) Temukan pusat massa pelat tipis yang dibatasi oleh grafik fungsi yang diberikan dengan $\delta = 1$ dan M = luas daerah yang dicakup oleh pelat
   a. $g(x) = x^2$ dan $f(x) = x + 6$
   b. $g(x) = x^2(x + 1), f(x) = 2$ dan $x = 0$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul tujuh ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi Limit tak hingga dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Turunan Orde Limit Tangen Normal

Kontinu Diskontinu Differensial

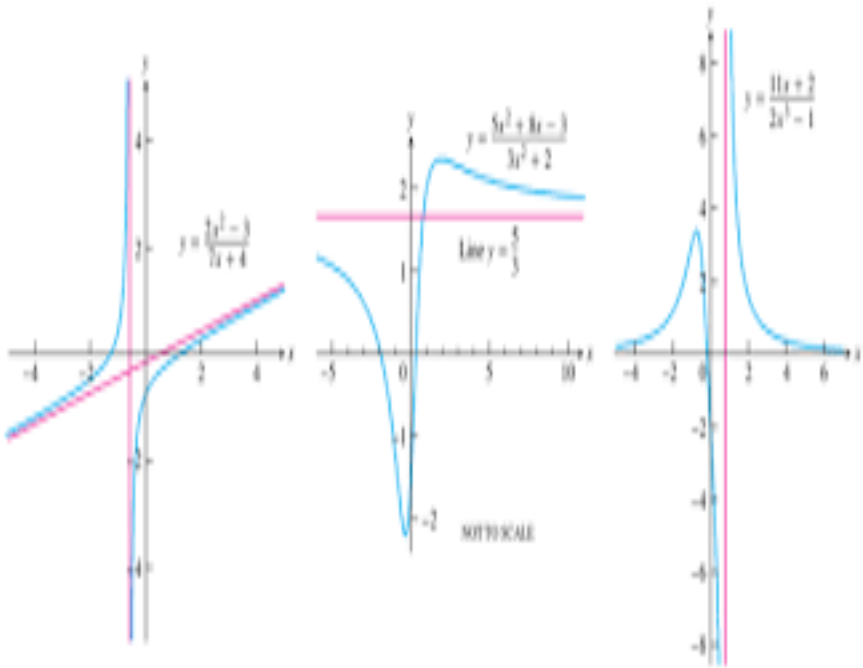
4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

Amir,MF, Prasojo,B.H. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: UMSIDA Press.

MODUL 8

FUNGSI TRANSENDENTAL



(a) (b) (c)

MODUL 8

FUNGSI TRANSENDENTAL

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Fungsi transendental menjadi salah satu bagian penting didalam kalkulus. Fungsi transendental merupakan fungsi yang memuat bilangan eksponen. Materi pokok yang akan dibahas disini yaitu Fungsi invers dan turunannya, logaritma natural, fungsi eksponen, perubahan eksponen dan persamaan differensial, fungsi invers trigonometri, Bentuk tak tentu dan aturan L'Hopital, Fungsi hiperbolik, dan Tingkat pertumbuhan relatif.

   Setap materi mengandung contoh, dan latihan yang menuntun siswa memahami materi baik secara mandiri maupun kelompok.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Delapan

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral.

5. Kegunaan Modul Delapan

   Kegunaan modul delapan ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan fungsi transendental. Modul ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai teknik integral untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup :. Fungsi invers dan turunannya, logaritma natural, fungsi eksponen, perubahan eksponen dan persamaan differensial, fungsi invers trigonometri, Bentuk tak tentu dan aturan L'Hopital, Fungsi hiperbolik, dan Tingkat pertumbuhan relatif.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 14 : Menguasai konsep Fungsi invers dan turunannya, logaritma natural, fungsi eksponen, perubahan eksponen dan persamaan differensial, fungsi invers trigonometri

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Fungsi invers dan turunannya, logaritma natural, fungsi eksponen, perubahan eksponen dan persamaan differensial, fungsi invers trigonometri. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Fungsi invers dan turunannya, logaritma natural, fungsi eksponen, perubahan eksponen dan persamaan differensial, fungsi invers trigonometri. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

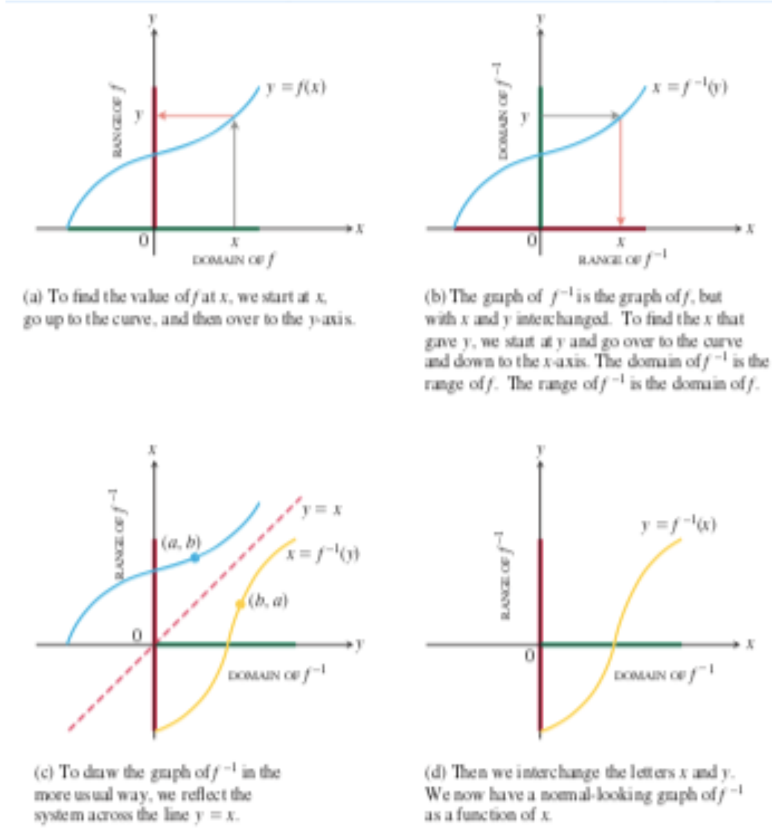
8.1 Fungsi invers dan turunannya

Sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi satu-satu pada domain D jika $f(x_1) \neq f(x_2)$ dimana $x_1 \neq x_2$ dalam D. Misalkan adalah fungsi satu-satu pada domain D dengan range R. Fungsi invers f^{-1} didefinisikan oleh

$$f^{-1}(b) = a \text{ jika } f(a) = b$$

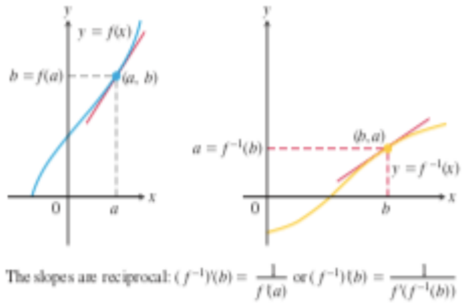
domain daru f^{-1} adalah R dan range dari f^{-1} adalah D

Grafik fungsi dan inversnya berhubungan erat. Untuk membaca nilai suatu fungsi dari grafiknya, kita mulai dari titik x pada sumbu x, menuju grafik secara vertikal, dan kemudian bergerak secara horizontal ke sumbu y untuk membaca nilai y. Fungsi invers dapat dibaca dari grafik dengan membalik proses ini. Mulailah dengan titik y pada sumbu y, arahkan secara horizontal ke grafik $y = f(x)$, lalu pindah secara vertikal ke sumbu x untuk membaca nilai $x = f^{-1}(y)$, seperti gambar berikut.



Gambar 76 Fungsi invers

Hubungan timbal balik antara kemiringan f dan f^{-1} berlaku untuk fungsi lain juga, tetapi kita harus berhati-hati untuk membandingkan kemiringan pada titik yang sesuai. Jika kemiringan $y = f(x)$ di titik $(a, f(a))$ adalah $f'(a)$ dan $f'(a) \neq 0$, maka kemiringan $y = f^{-1}(x)$ di titik $(f(a), a)$ adalah timbal balik $\frac{1}{f'(a)}$.



Gambar 77 Kemiringan fungsi

Jika kita menetapkan $b = f(a)$, maka

$$(f^{-1})(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$$

Jika $y = f(x)$ memiliki garis singgung horizontal di $(a, f(a))$, maka fungsi invers f^{-1} memiliki garis singgung vertikal di $(f(a), a)$, dan kemiringan tak hingga ini menyiratkan bahwa f^{-1} tidak terdiferensiasi pada $f(a)$. Teorema berikut memberikan kondisi di mana f^{-1} dapat terdiferensiasi dalam domainnya (yang sama dengan range).

Teorema aturan turunan pada invers

Jika f memiliki interval I sebagai domain dan $f'(x)$ ada dan tidak pernah nol pada I, maka f^{-1} terdiferensiasi pada setiap titik dalam domainnya (range f). Nilai $(f^{-1})'$ di titik b dalam domain f^{-1} adalah kebalikan dari nilai f' di titik $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$$

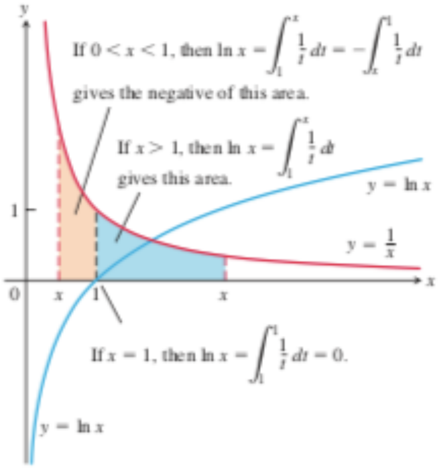
8.2 Logaritma Natural

Logaritma natural merupakan sebuah fungsi yang dinotasikan dengan

$$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt, \qquad x > 0$$

Secara geometris, jika $x > 1$, maka $ln\ x$ adalah luas daerah di bawah kurva $y = 1/t$ dari $t = 1$ sampai $t = x$. Untuk $0 < x < 1$, $ln\ x$ memberikan negatif dari luas di bawah kurva dari x ke 1, dan fungsi tidak didefinisikan untuk $x \leq 0$. Dari Aturan Interval Lebar Nol untuk integral tertentu, kita juga memiliki

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$$



Gambar 78 Logaritma natural

Bilangan e adalah angka dalam domain logaritma natural yang memenuhi

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Bilangan e sesuai dengan titik pada sumbu x yang luas di bawah grafik $y = 1/t$ dan di atas interval $[1, e]$ sama dengan luas persegi satuan. Artinya, luas daerah yang diarsir biru pada gambar diatas adalah 1 satuan persegi jika $x = e$. Pada bagian selanjutnya, kita akan melihat bahwa angka e dapat dihitung sebagai limit dan memiliki nilai numerik $e = 2{,}718281828459045$ hingga 15 tempat desimal.

Dengan menggunakan teorema fundamental kalkulus, dapat kita temukan turunan dari fungsi logaritma natural yaitu

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_{1}^{e}\frac{1}{t}dt = \frac{1}{x}$$

untuk nilai x positif, maka dimiliki

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Jika u adalah dungsi turunan dari x yang bernilai positif, maka $\ln u$ didefinisikan dengan menggunakan aturan Chain diperoleh bentuk

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0$$

berikut ini beberapa sifat logaritma natural, untuk semua $b > 0$ dan $x > 0$:

1. Aturan perkalian

$$\ln b \cdot x = \ln b + \ln x$$

2. Aturan pembagian

$$\ln\frac{b}{x} = \ln b - \ln x$$

3. Aturan kebalikan

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$$

4. Aturan pangkat

$$\ln x^r = r\ln x$$

Selanjutnya jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi bernilai tidak pernah nol, maka

$$\int\frac{1}{u}du = \ln|u| + C$$

Jika $u = f(x)$, maka $du = f'(x)dx$ dan

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

dimana $f(x)$ adalah fungsi yang terdifferensiasi dan tidak pernah nol.

Beberapa integral dari fungsi trigonometri yang menghasilkan logaritma natural yaitu

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln\frac{1}{|\cos x|} + C == \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

$$= -\ln|\csc x| + C$$

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\, dx = \int \csc x \frac{(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)} dx = \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx$$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = \ln|\csc x + \cot x| + C$$

8.3 Fungsi Eksponen

Setelah mengembangkan teori fungsi $ln\, x$, kita mempelajari inversnya, fungsi eksponensial $exp\, x = e^x$. Kita mempelajari sifat-sifatnya dan menghitung turunan dan integralnya. Kita membuktikan aturan pangkat untuk turunan yang melibatkan eksponen nyata umum. Diakhir, kita memperkenalkan fungsi eksponensial umum, sumbu, dan fungsi logaritma umum, $\log_a x$.

Untuk setiap bilangan riil x, didefinisikan fungsi eksponen natural menjadi $e^x = \exp x$.

Persamaan invers untuk e^x dan $\ln x$ dituliskan dengan

$$e^{\ln x} = x, \qquad \text{untuk semua } x > 0$$

$$\ln(e^x) = x, \qquad \text{untuk semua } x$$

contoh :

Tentukan nilai x dari persamaan $e^{2x-6} = 4$.

Jawab:

$$\ln e^{2x-6} = \ln 4$$

$$2x - 6 = \ln 4$$

$$2x = 6 + \ln 4$$

$$x = 3 + \frac{1}{2}\ln 4 = 3 + \ln 4^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 3 + \ln 2$$

Jika u adalah sebuah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka

$$\frac{d}{dx}e^{u} = e^{u}\frac{du}{dx}$$

Selanjutnya antu turunan dari fungsi eksponen

$$\int e^{u}\, du = e^{u} + C$$

Untuk semua bilangan $x, x_1,$ dan x_2, eksponen naturan e^{x}memenuhi aturan berikut:

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$
2. $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$
3. $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$
4. $(e^{x_1})^{r} = e^{rx_1}$, jika r rasional

Untuk setiap bilangan $a > 0$ dan x, fungsi eksponensial dengan basis a adalah

$$a^{x} = e^{x\ln a}$$

Untuk $x > 0$ dan bilangan riil n,

$$\frac{d}{dx}x^{n} = nx^{n-1}$$

Jika $x \leq 0$, maka rumus ini akan terpeuhi ketika turunan dari x^{n} dan x^{n-1} ada.

Bilangan e dapat dihitung seabagi limit yaitu:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

Jika $a > 0$ dan u adalah fungsi yang terdifferensiasi di x, maka a^u adalah fungsi terdifferensiasi di x dan

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

dalam hal ini dapat digeneralisasikan anti turunannya yaitu

$$\int a^u \; du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

untuk setiap bilangan positif $a \neq 1$ berlaku $\log_{\mathrm{a}} x$ sebagai fungsi invers dari a^x.

Persamaan invers untuk a^x dan $\log_a x$, yaitu

$$a^{\log_{\mathrm{a}} x} = x, \qquad x > 0$$

$$\log_a a^x = x, \qquad \text{untuk semua } x$$

Untuk bilangan $x > 0$ dan $y > 0$, berlaku beberaoa rumus dasar logaritma berikut:

1. Aturan perkalian

$$\log_{\mathrm{a}} x\,y = \log_{\mathrm{a}} x + \log_{\mathrm{a}} y$$

2. Aturan pembagian

$$\log_{\mathrm{a}} \frac{x}{y} = \log_{\mathrm{a}} x - \log_{\mathrm{a}} y$$

3. Aturan kebalikan

$$\log_{\mathrm{a}} \frac{1}{y} = -\log_{\mathrm{a}} y$$

4. Aturan pangkat

$$\log_{\mathrm{a}} x^y = y \log_{\mathrm{a}} x$$

jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi positif di x, maka

$$\frac{d}{dx}(\log_{\mathrm{a}} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) \ = \frac{1}{\ln u}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

8.4 Perubahan Eksponen dan Persamaan Differensial

Fungsi eksponensial meningkat atau menurun sangat cepat dengan perubahan variabel independen. Mereka menggambarkan pertumbuhan atau pembusukan dalam banyak situasi alami dan buatan manusia. Keragaman model berdasarkan fungsi-fungsi ini sebagian menjelaskan pentingnya mereka. Kita sekarang menyelidiki asumsi proporsionalitas dasar yang mengarah pada perubahan eksponensial tersebut.

Dalam pemodelan banyak situasi dunia nyata, kuantitas y meningkat atau menurun pada tingkat proporsional dengan ukurannya pada waktu tertentu t. Contoh besaran tersebut meliputi ukuran populasi, jumlah bahan radioaktif yang membusuk, dan perbedaan suhu antara benda panas dan media sekitarnya. Besaran seperti itu dikatakan mengalami perubahan eksponensial.

Jika jumlah yang ada pada waktu $t = 0$ disebut y_0, maka kita dapat menemukan y sebagai fungsi dari t dengan menyelesaikan masalah nilai awal berikut:

Persamaan differensial : $\frac{dy}{dt} = ky$

Kondisi inisial : $y = y_0$ ketika $t = 0$

Jika y positif dan meningkat, maka k positif, dan kita menggunakan Persamaan differensial untuk mengatakan bahwa laju pertumbuhan sebanding dengan apa yang telah diakumulasikan. Jika y positif dan menurun, maka k negatif, dan kita menggunakan Persamaan kondisi inisial untuk mengatakan bahwa laju peluruhan sebanding dengan jumlah yang masih tersisa.

Kita langsung melihat bahwa fungsi konstanta $y = 0$ adalah solusi Persamaan differensial jika $y_0 = 0$. Untuk mencari solusi bukan nol, kita bagi Persamaan differensial dengan y:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = k$$

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C}$$

$$|y| = e^{C}\cdot e^{kt}$$

$$y = \pm e^{C}e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

Selanjutnya solusi untuk masalah nilai inisial $\frac{dy}{dt} = ky, y(0) = y_0$ adalah $y = y_0e^{kt}$

Persamaan $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ adalah terpisah jika f dapat diekspresikan sebagai sebuah perkalian dari fungsi dari x dan fungsi dari y. Persamaan differensialnya dirumuskan dengan

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y)$$

Ketika kita menulis ulang persamaan ini dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

bentuk diferensialnya memungkinkan kita untuk mengumpulkan semua suku y dengan dy dan semua suku x dengan dx:

$$h(y)\,dy \;=\; g(x)\,dx$$

Sekarang kita cukup mengintegrasikan kedua sisi persamaan ini:

$$\int h(y)dy \;= \int g(x)dx$$

Setelah menyelesaikan integrasi, kita memperoleh solusi y yang didefinisikan secara implisit sebagai fungsi dari x.

Contoh :

Selesaikanlah persamaan differensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} = (1+y)e^{x}, \qquad y > -1$$

Jawab:

Karena $1 + y$ tidak pernah bernilai nol untuk $y > -1$, kita dapat menyelesaikan persamaan dengan memisahkan variabelnya

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y)e^x$$

$$dy = (1 + y)e^x dx$$

$$\frac{dy}{1 + y} = e^x dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y} = \int e^x dx$$

$$\ln(1 + y) = e^x + C$$

4. Rangkuman

1. Jika f memiliki interval I sebagai domain dan $f'(x)$ ada dan tidak pernah nol pada I, maka f^{-1} terdiferensiasi pada setiap titik dalam domainnya (range f). Nilai $(f^{-1})'$ di titik b dalam domain f^{-1} adalah kebalikan dari nilai f' di titik $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$$

2. Logaritma natural merupakan sebuah fungsi yang dinotasikan dengan

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \qquad x > 0$$

3. Jika u adalah dungsi turunan dari x yang bernilai positif, maka $\ln u$ didefinisikan dengan menggunakan aturan Chain diperoleh bentuk

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0$$

4. berikut ini beberapa sifat logaritma natural, untuk semua $b > 0$ dan $x > 0$:

   a. Aturan perkalian

$$\ln b \cdot x = \ln b + \ln x$$

b. Aturan pembagian

$$\ln \frac{b}{x} = \ln b - \ln x$$

c. Aturan kebalikan

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

d. Aturan pangkat

$$\ln x^r = r \ln x$$

5. Untuk setiap bilangan $a > 0$ dan x, fungsi eksponensial dengan basis a adalah

$$a^x = e^{x \ln a}$$

6. Untuk $x > 0$ dan bilangan riil n,

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

   Jika $x \leq 0$, maka rumus ini akan terpeuhi ketika turunan dari x^n dan x^{n-1} ada.

7. Jika y positif dan meningkat, maka k positif, dan kita menggunakan Persamaan differensial untuk mengatakan bahwa laju pertumbuhan sebanding dengan apa yang telah diakumulasikan. Jika y positif dan menurun, maka k negatif, dan kita menggunakan Persamaan kondisi inisial untuk mengatakan bahwa laju peluruhan sebanding dengan jumlah yang masih tersisa.

5. Latihan

1. Buktikanlah bahwa $\frac{d}{dx}x^n = x^{n-1}$
2. Misalkan jumlah minyak yang dipompa dari salah satu sumur ngarai di Whittier, California, berkurang dengan laju terus menerus sebesar 10% per tahun. Kapan output sumur akan turun menjadi seperlima dari nilai sekarang?
3. Pengolahan gula mentah memiliki tahapan yang disebut "inversi" yang mengubah struktur molekul gula. Setelah proses dimulai, laju perubahan jumlah gula mentah sebanding dengan jumlah gula mentah yang tersisa. Jika 1000 kg gula mentah berkurang menjadi 800 kg gula mentah selama 10 jam pertama, berapa banyak gula mentah yang tersisa setelah 14 jam berikutnya?
4. Tentukanlah integral berikut
   i. $\int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,dx$
   ii. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}$
   iii. $\int \frac{e^r}{1+e^r}\,dr$
   iv. $\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2x\, e^{x^2} \cos(e^{x^2})\,dx$
5. Tentukanlah turunan dari fungsi berikut ini
   i. $y = \ln(\ln(\ln x))$
   ii. $y = \frac{\ln x}{1+\ln x}$
   iii. $y = x^3 \log_{10} x$
   iv. $y = \log_3(1 + \theta \ln 3)$
   v. $y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah integral berikut
   i. $\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \tan \pi t \; dt$
   ii. $\int_2^4 7^{\cos t} \sin t \; dt$
2. Sebuah lukisan yang dikaitkan dengan Vermeer (1632-1675), yang seharusnya mengandung tidak lebih dari 96,2% karbon-14 aslinya, malah mengandung 99,5%. Tentukan berapa umur pemalsuan?
3. Misalkan bakteri dalam sebuah koloni dapat tumbuh tidak terkendali, menurut hukum perubahan eksponensial. Koloni dimulai dengan 1 bakteri dan berlipat ganda setiap setengah jam. Berapa banyak bakteri yang akan dikandung koloni pada akhir 24 jam? (Dalam kondisi laboratorium yang menguntungkan, jumlah bakteri kolera dapat berlipat ganda setiap 30 menit. Pada orang yang terinfeksi, banyak bakteri yang dihancurkan, tetapi contoh ini membantu menjelaskan mengapa seseorang yang merasa sehat di pagi hari bisa menjadi sakit parah di malam hari.)
4. Tentukanlah turunan dari fungsi berikut ini
   i. $y = \theta\,(\sin(\ln\theta) + \cos(\ln\theta))$
   ii. $y = \ln\sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$
   iii. $y = \log_2\left(8t^{\ln 2}\right)$
   iv. $y = t\log_3\left(e^{(\sin t)(\ln 3)}\right)$
   v. $y = \frac{\theta 5^\theta}{2-\log_5\theta}$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

Kegiatan Pembelajaran 2

1. **Judul Kegiatan Pembelajaran**

   Minggu ke- 15 : Menguasai konsep Bentuk tak tentu dan aturan L'Hopital, Fungsi hiperbolik, dan Tingkat pertumbuhan relatif.

2. **Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir**

   Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

   Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan Bentuk tak tentu dan aturan L'Hopital, Fungsi hiperbolik, dan Tingkat pertumbuhan relatif.. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan Bentuk tak tentu dan aturan L'Hopital, Fungsi hiperbolik, dan Tingkat pertumbuhan relatif.. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. **Uraian, Contoh dan Ilustrasi**

8.5 Bentuk tak tentu dan aturan L'Hopital

John (Johann) Bernoulli menemukan aturan menggunakan turunan untuk menghitung limit pecahan yang pembilang dan penyebutnya mendekati nol atau $+\infty$. Aturan tersebut sekarang dikenal sebagai Aturan L'Hôpital, setelah Guillaume de l'Hôpital. Dia adalah seorang bangsawan Prancis yang menulis teks pengantar kalkulus diferensial pertama, di mana aturan pertama kali muncul di media cetak. Batas yang melibatkan fungsi transendental sering memerlukan beberapa penggunaan aturan untuk perhitungannya.

Misalkan $f(a) = g(a) = 0$, bahwa f dan g dapat diturunkan pada selang terbuka I yang memuat a, dan $g'(x) \neq 0$ pada I jika $x \neq a$. Kemudian

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

denga mengasumsi limitnya ada.

Untuk menemukan

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

dengan Aturan l'Hôpital, kita terus mendiferensiasikan f dan g, selama kita masih mendapatkan bentuk 0/0 di $x = a$. Tetapi segera setelah salah satu turunan ini berbeda dari nol pada $x = a$, kita berhenti mendiferensiasikan. Aturan L'Hôpital tidak berlaku jika pembilang atau penyebutnya memiliki batas tak nol yang berhingga.

Jika $\lim_{x \to a} \ln f(x) = L$, maka $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} e^{\ln f(x)} = e^L$. Disini a mungkin bernilai berhingga atau tak hingga.

Contoh :

Gunakanlah aturan L'Hopital untuk menunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Jawab:

Misalkan $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, karena $\ln f(x) = \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln(1 + x)$

Aturan L'hopital mengakibatkan

$$\lim_{x \to 0^+} \ln f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1 + x}}{1}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

Maka, $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e$

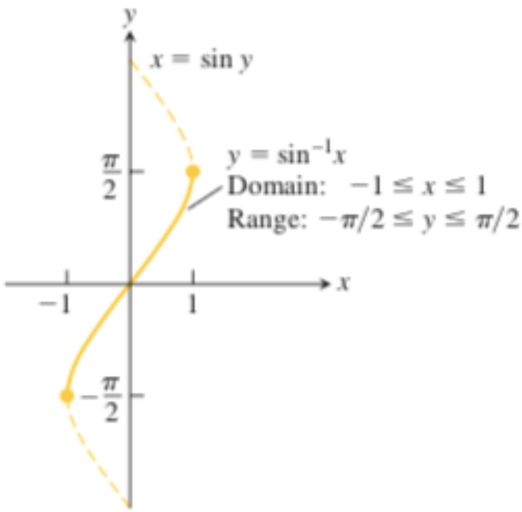
Teorema nilai rata-rata Cauchy: Misalkan fungsi f dan g kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial di seluruh (a, b) dan juga misalkan $g'(x) \neq 0$ di seluruh (a, b). Maka ada bilangan c di (a, b) di mana

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

8.6 Fungsi invers trigonometri

Fungsi trigonometri terbalik muncul ketika kita ingin menghitung sudut dari pengukuran sisi dalam segitiga. Mereka juga memberikan antiturunan yang berguna dan sering muncul dalam solusi persamaan diferensial. Bagian ini menunjukkan bagaimana fungsi-fungsi ini didefinisikan, digambarkan, dan dievaluasi, bagaimana turunannya dihitung, dan mengapa mereka muncul sebagai antiturunan penting.

Enam fungsi trigonometri dasar bersifat tidak satu-satu (nilainya berulang secara berkala). Namun, kita dapat membatasi domain mereka ke interval di mana mereka satu-satu. Fungsi sinus meningkat dari -1 pada $x = -\pi/2$ menjadi +1 pada $x = \pi/2$. Dengan membatasi domainnya pada interval $[-\pi/2, \pi/2]$ kita membuatnya satu-satu, sehingga memiliki invers $\sin^{-1} x$, seperti pada gambar dibawah Pembatasan domain serupa dapat diterapkan pada keenam fungsi trigonometri.



Gambar 79 Fungsi invers trigonometri

Karena fungsi-fungsi terbatas ini sekarang menjadi fungsi satu-satu, memiliki invers, yang dilambangkan dengan:

$$y = \sin^{-1} x\,, \qquad \text{atau} \quad y = \arcsin x$$

$$y = \cos^{-1} x\,, \qquad \text{atau} \quad y = \arccos x$$

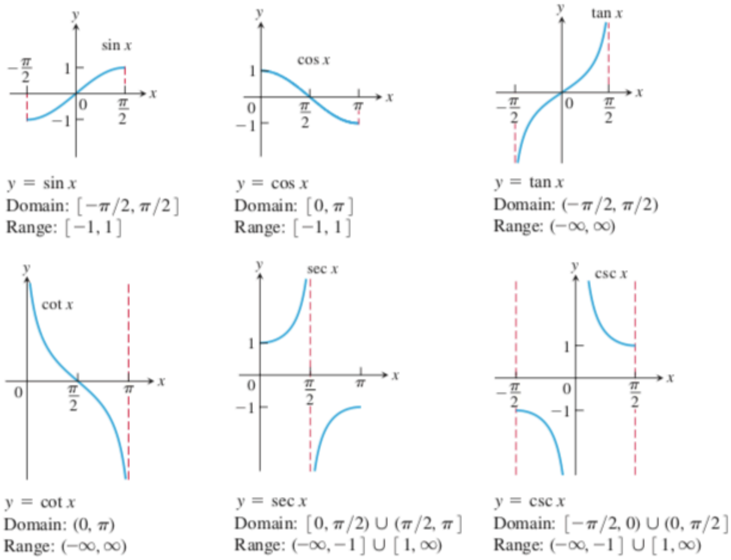
$$y = \tan^{-1} x\,, \qquad \text{atau} \quad y = \arctan x$$

$$y = \cot^{-1} x\,, \qquad \text{atau} \quad y = \operatorname{arccot} x$$

$$y = \sec^{-1} x\,, \qquad \text{atau} \quad y = \operatorname{arcsec} x$$

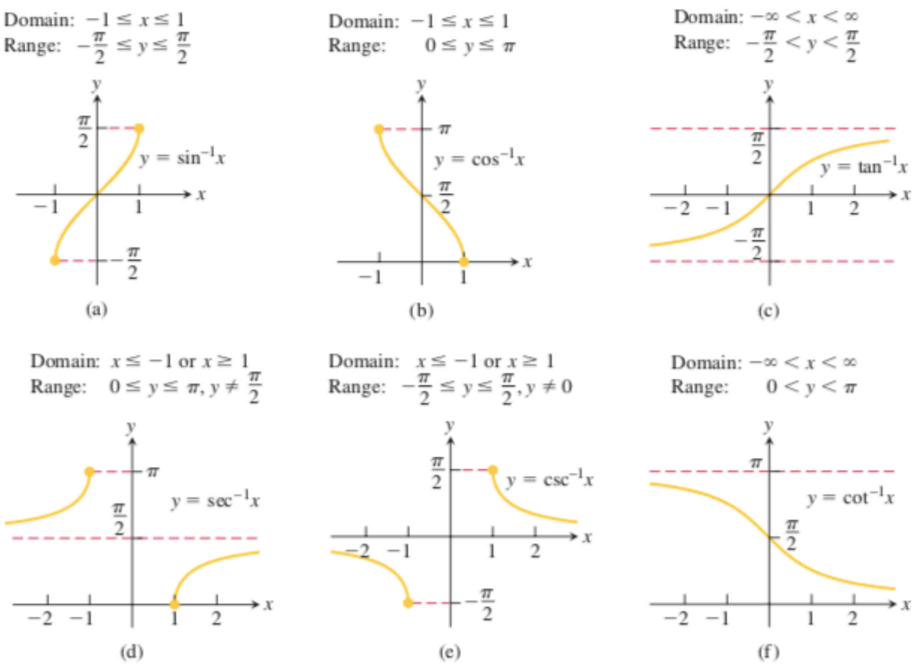
$$y = \csc^{-1} x\,, \qquad \text{atau} \quad y = \operatorname{arccsc} x$$

domain dari setiap rumus dasar trigonometri diatas yang membuat menjadi fungsi satu-satu, digambarkan sebagai berikut:



Gambar 80 Grafik fungsi 6 rumus dasar trigonometri

Selanjutnya, berikut ini gambar grafik keenam rumus dasar invers dari fungsi trigonometri



Gambar 81 Grafik fungsi invers trigonometri

didefinisikan setiap fungsi trigonometri beserta inversnya

$$y = sin^{-1} x \text{ adalah bilangan di } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{untuk } sin\, y = x$$

$$y = \cos^{-1} x \text{ adalah bilangan di } [0, \pi] \text{untuk } \cos y = x$$

$$y = \tan^{-1} x \text{ adalah bilangan di } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{untuk } \tan y = x$$

$$y = \cot^{-1} x \text{ adalah bilangan di } [0, \pi] \text{untuk } \cot y = x$$

$$y = \sec^{-1} x \text{ adalah bilangan di } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{untuk } \sec y = x$$

$$y = \csc^{-1} x \text{ adalah bilangan di } \left[\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{untuk } \csc y = x$$

Jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x dengan $|u| < 1$, dengan menggunakan rumus Chain maka diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, |u| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, |u| > 1$$

Selanjutnya, berikut ini rumus yang digunakan untuk mengevaluasi fungsi trigonometri untuk $a > 0$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad \text{valid untuk } u^2 < a^2$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{\mathrm{a}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad \text{valid untuk semua } u$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad \text{valid untuk } |u| > a > 0$$

8.7 Fungsi hiperbolik

Fungsi hiperbolik dibentuk dengan mengambil kombinasi dari dua fungsi eksponensial e^x dan e^{-x}. Fungsi hiperbolik menyederhanakan banyak ekspresi matematika dan sering terjadi dalam aplikasi matematika dan teknik. Pada bagian ini kita memberikan pengenalan singkat tentang fungsi-fungsi ini, grafiknya, turunannya, integralnya, dan fungsi kebalikannya.

Fungsi sinus hiperbolik dan kosinus hiperbolik didefinisikan oleh persamaan:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

turunan dari fungsi hiperbolik diantaranya adalah

$$\frac{d}{dx}(sinh\, u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(cosh\, u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

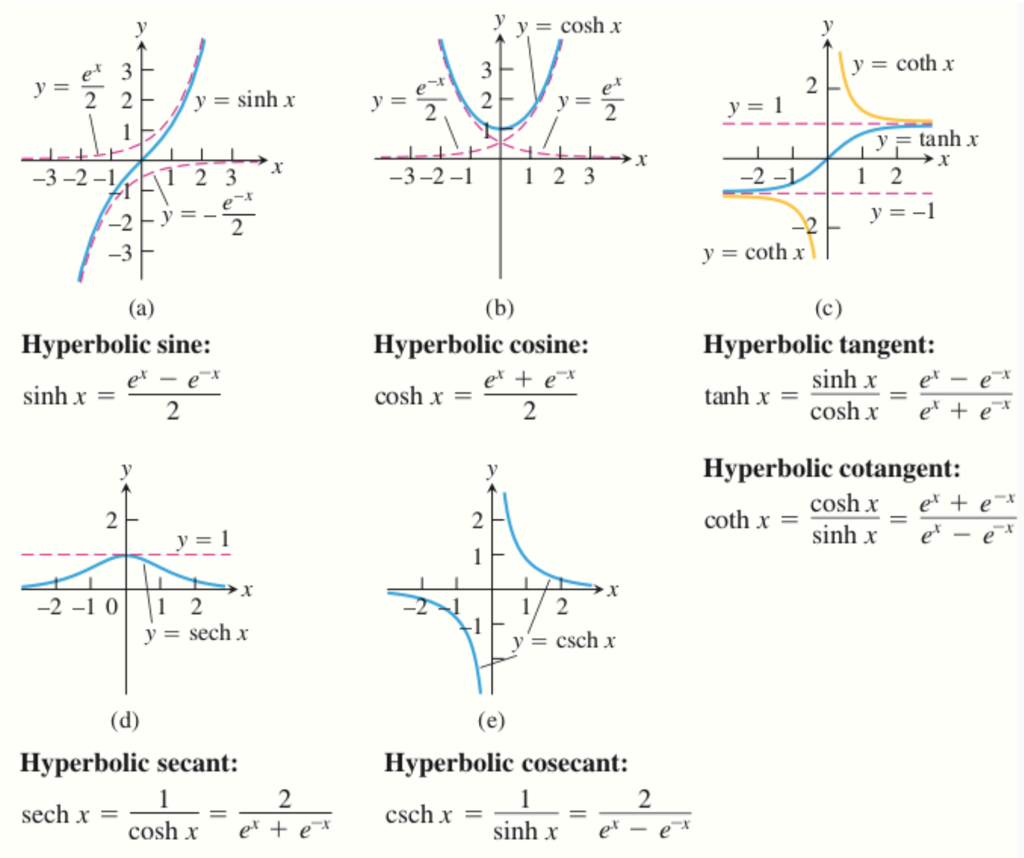
$$\frac{d}{dx}(tanh\, u) = \mathrm{sech}^2\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(coth\, u) = -\,\mathrm{csch}^2\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(sech\, u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(csch\, u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

berkut ini gambar grafik fungsi dasar fungsi hiperbolik :



Gambar 82 fungsi hiperbolik

Selanjutnya integral dari fungsi hiperbolik adalah

$$\int sinh\, u\, du = \cosh u + C$$

$$\int cosh\, u\, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = tanh\, u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \;\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -csch\, u + C$$

Contoh :

$$\frac{d}{dt}\left(\tanh\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$

$$\int_0^{\ln 2} 4e^x sinh\, x\, dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}dx$$

$$= \int_0^{\ln 2}(2e^x - 2)dx$$

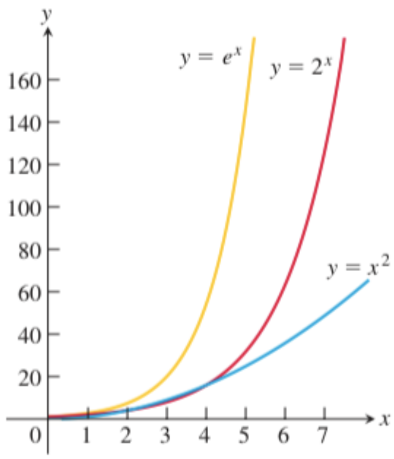
$$= [e^{2x} - 2x]_0^{\ln 2}$$

$$= \left(e^{2\ln 2} - 2\ln 2\right) - (1-0)$$

$$= 4 - 2\ln 2 - 1 \approx 1{,}6137$$

8.8 Tingkat pertumbuhan relatif

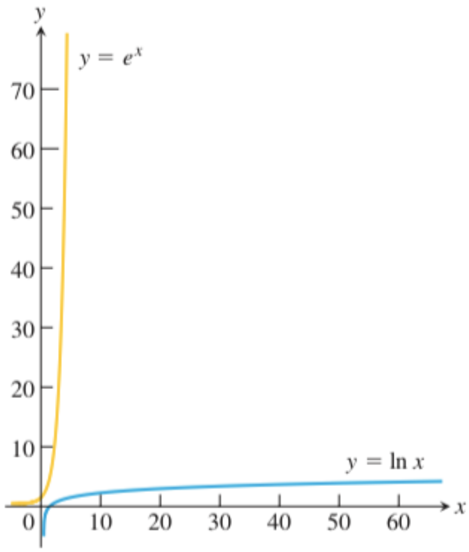
Anda mungkin telah memperhatikan bahwa fungsi eksponensial seperti 2^x dan e^x tampaknya tumbuh lebih cepat ketika x menjadi besar daripada polinomial dan fungsi rasional. Eksponensial ini tentu saja tumbuh lebih cepat daripada x itu sendiri, dan Anda dapat melihat 2^x lebih besar dari x^2 seiring dengan peningkatan x pada gambar berikut.



Gambar 83 Pertumbuhan relatif

Faktanya, karena $x \to \infty$, fungsi 2^x dan e^x tumbuh lebih cepat daripada pangkat x apa pun, bahkan $x^{1.000.000}$. Sebaliknya, fungsi logaritmik seperti $y = \log_2 x$ dan $y = \ln x$ tumbuh lebih lambat sebagai $x \to \infty$ daripada pangkat positif x.

Untuk mengetahui seberapa cepat nilai $y = e^x$ tumbuh dengan meningkatnya x, pikirkan grafik fungsi pada papan tulis besar, dengan sumbu yang diskalakan dalam sentimeter. Pada $x = 1cm$, grafiknya adalah $e^1 \approx 3cm$ di atas sumbu x. Pada $x = 6cm$, grafiknya adalah $e^6 \approx 403\ cm \approx 4\ m$ (akan menembus langit-langit jika belum). Pada $x = 10\ cm$, grafiknya adalah $e^{10} \approx 22.026\ cm \approx 220\ m$, lebih tinggi dari kebanyakan bangunan. Pada $x = 24\ cm$, grafiknya lebih dari setengah jalan ke bulan, dan pada $x = 43\ cm$ dari titik asalnya, grafiknya cukup tinggi untuk melewati bintang tetangga terdekat matahari, bintang katai merah Proxima Centauri. Sebaliknya, dengan sumbu yang diskalakan dalam sentimeter, Anda harus menempuh hampir 5 tahun cahaya pada sumbu x untuk menemukan titik di mana grafik $y = ln\,x$ genap $y = 43\ cm$. Hal ini terlihat pada gambar berikut ini:



Gambar 84 Fungsi eksponensial

Perbandingan penting dari fungsi eksponensial, polinomial, dan logaritma ini dapat dibuat tepat dengan mendefinisikan apa artinya fungsi $f(x)$ tumbuh lebih cepat daripada fungsi lain $g(x)$ sebagai $x \to \infty$.

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ positif untuk x yang cukup besar.

1. f tumbuh lebih cepat dari g saat $x \to \infty$ jika

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

   atau, ekuivalen, jika

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

   Kita juga mengatakan bahwa g tumbuh lebih lambat dari f sebagai $x \to \infty$.

2. f dan g tumbuh dengan laju yang sama ketika $x \to \infty$ jika

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

di mana L berhingga dan positif.

Suatu fungsi berorde lebih kecil dari g ketika $x \to \infty$ jika $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Kita menunjukkan ini dengan menulis $f = \circ\, (g)$ ("f adalah sedikit-oh dari g").

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ positif untuk x yang cukup besar. Maka f paling banyak orde g saat $x \to \infty$ jika ada bilangan bulat positif M dimana

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

untuk x cukup besar. Kita menunjukkan ini dengan menulis $f = O(g)$ ("f adalah besar-oh dari g").

4. Rangkuman

1. Misalkan $f(a) = g(a) = 0$, bahwa f dan g dapat diturunkan pada selang terbuka I yang memuat a, dan $g'(x) \neq 0$ pada I jika $x \neq a$. Kemudian

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

denga mengasumsi limitnya ada.

2. Jika $\lim_{x\to a} \ln f(x) = L$, maka $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$. Disini a mungkin bernilai berhingga atau tak hingga.
3. Teorema nilai rata-rata Cauchy: Misalkan fungsi f dan g kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial di seluruh (a,b) dan juga misalkan $g'(x) \neq 0$ di seluruh (a,b). Maka ada bilangan c di (a,b) di mana

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

4. Jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x dengan $|u| < 1$, dengan menggunakan rumus Chain maka diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, |u| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, |u| > 1$$

5. Turunan dari fungsi hiperbolik diantaranya adalah

$$\frac{d}{dx}(sinh\, u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(cosh\, u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(tanh\, u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(coth\, u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(sech\, u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(csch\, u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

6. Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ positif untuk x yang cukup besar.

   a. f tumbuh lebih cepat dari g saat $x \to \infty$ jika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

   atau, ekuivalen, jika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

   Kita juga mengatakan bahwa g tumbuh lebih lambat dari f sebagai $x \to \infty$.

   b. f dan g tumbuh dengan laju yang sama ketika $x \to \infty$ jika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

   di mana L berhingga dan positif.

5. Latihan

1) Tentukanlah nilai limit berikut:
   a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
   b. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3t^3+3}{4t^3-t+3}$
   c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$
   d. $\lim\limits_{x\to e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$
   e. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x}$
2) Tentukanlah nilai turunan berikut ini
   a. $y = \sec^{-1}\frac{1}{t},\ 0 < t < 1$
   b. $y = \ln(\tan^{-1} x)$
   c. $y = \sqrt{s^2 - 1} - \sec^{-1} s$
3) Tentukanlan integral berikut
   a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{1+(\sin\theta)^2}$

c. $\int \frac{e^x \sin^{-1} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

4) Tentukanlah invers fungsi hiperbolik dan logaritma natural dari bentuk integral berikut:

a. $\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$

b. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

5) Buktikanlah bahwa jika fungsi positif $f(x)$ dan $g(x)$ mengalami pertumbahan yang sama ketika $x \to \infty$, maka $f = O(g)$ dan $g = O(f)$.

6. Evaluasi Pembelajaran

1. Tentukanlah nilai limit berikut:

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

   b. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^t+t^2}{e^t-t}$

   d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right)$

   e. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{-1/x}}$

2. Tentukanlah nilai turunan berikut ini

   a. $y = \sin^{-1}(1-t)$

   b. $y = \ln(x^2+4) - x\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

   c. $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

3. Tentukanlan integral berikut

   a. $\int \frac{6\,dr}{\sqrt{4-(r+1)^2}}$

   b. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\csc^2 x\,dx}{1+(\cot x)^2}$

   c. $\int \frac{dy}{(\sin^{-1} y)\sqrt{1-y^2}}$

4. Tentukanlah invers fungsi hiperbolik dan logaritma natural dari bentuk integral berikut:

   a. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

   b. $\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

5. Buktikanlah bahwa $\sqrt{10x+1}$ dan $\sqrt{x+1}$ tumbuh dengan laju yang sama ketika $x \to \infty$ dengan menunjukkan bahwa keduanya tumbuh pada laju yang sama ketika $\sqrt{x}$ saat $x \to \infty$.

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

Modul delapan ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami materi fungsi transendental dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

Turunan	transendental	eksponen	natural
Logaritma	Kontinu	Diskontinu	Differensial

4. Referensi

Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

MODUL 9

INTEGRAL, APLIKASI INTEGRAL TENTU, DAN FUNGSI TRANSENDENTAL

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

   Modul bagian ini memuat rangkuman seluruh materi dari modul enam hingga delapan. Modul ini menjadi bahan bagi mahasiswa untuk mempersiapkan Ujian Akhir Semester (UAS) maupun project. Setiap rangkuman yang disusun membantu mahasiswa memahami setiap materi yang sudah dipelajari sebelumnya. Selanjutnya modul ini juga memuat berbagai soal yang dapat digunakan dan diselesaikan bahawa untuk mempersiapkan ujian semester maupun projectnya.

2. Capaian Pembelajaran Lulusan yang dibebankan ke modul Sembilan

   Sikap

   S1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius

   S2 : Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika.

   S6: Bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan.

   S8 : Menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik.

   S9 : Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri;

   S13 :Menginternalisasi nilai-nilai Kristiani: kasih, jujur, melayani, berbagi dan peduli, profesional, bertanggungjawab, rendah hati, disiplin, integritas.

S14 : Menginternalisasi kecerdasan emosional yang baik seperti tangguh, tidak mudah menyerah

Keterampilan Umum

KU1 : Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2 : Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KU3 : Mampu mengkaji implikasi pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora sesuai dengan keahliannya berdasarkan kaidah, tata cara dan etika ilmiah dalam rangka menghasilkan solusi, gagasan, desain atau kritik seni

KU11 : Mampu menggunakan teknologi informasi dalam memaksimalkan kinerjanya.

Keterampilan Khusus

KK1 : Mampu merencanakan, mengimplementasikan, mengevaluasi, dan melakukan diagnosa pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup.

KK3 : Mampu menyajikan pembelajaran matematika yang kontekstual dan relevan dengan perkembangan kebutuhan dalam pendidikan.

KK4 :Mampu melakukan pendampingan terhadap siswa dalam pembelajaran matematika

KK9 :Mampu menerapkan kemampuan berpikir matematis seperti kritis, logis, kreatif, analitis, dan sistematis dalam menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari

Pengetahuan

P2 : Memahami konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, matematika diskrit, aljabar, analisis, geometri, teori peluang dan statistika, prinsip-prinsip pemodelan matematika, program linear, persamaan diferensial, dan metode numerik yang mendukung pekerjaan dan pengembangan diri.

P3 : Memahami dan mengaplikasikan konsep teoritis matematika dalam menjawab permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari

P5 : Memahami pengetahuan faktual tentang fungsi dan manfaat teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi yang relevan untuk pembelajaran matematika

3. Kemampuan Akhir (KA) yang diharapkan

   Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis.

4. Prasyarat Kompetensi

   Memahami dasar matematika tentang fungsi, trigoometri, limit, turunan, deret dan dasar integral.

5. Kegunaan Modul Sembilan

   Kegunaan modul sembilan ini adalah untuk membantu mahasiswa memiliki sumber belajar terkait dengan teknik pengintegralan. Modul satu ini juga dapat digunakan secara mandiri dan kelompok untuk memahami setiap materi pada berbagai teknik integral untuk meningkatkan kemampuan berpikir mahasiswa.

6. Materi Pokok dan Sub Materi Pokok

   Materi pada modul ini mencakup : rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi, integral fungsi rasional, integral tabel, integral numerik dan peluang.

B. KEGIATAN PEMBELAJARAN

Kegiatan Pembelajaran 1

1. Judul Kegiatan Pembelajaran

Minggu ke- 16 : Menguasai konsep rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi

2. Kemampuan Akhir (KA) dan Sub Kemampuan Akhir

Kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang meliputi kemampuan pemahaman konsep, penalaran, komunikasi, pemecahan masalah dan kemampuan berpikir terstruktur dan berpikir kritis

Sub kemampuan Akhir : Kemampuan matematis yang terstruktur yang berkaitan dengan rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi. Mahasiswa mampu menyelesaikan berbagai bentuk permasalahan yang relevan dengan rumus dasar integral, integral parsial, integral trigonometri, integral substitusi. Mahasiswa dapat meningkatkan proses berpikirnya hingga pada *High Order Thinking Skill.*

3. Uraian, Contoh dan Ilustrasi

9.1 Rangkuman Modul 6

Rangkuman 1

4. Dalam hal ini kita dapat mengeneralisir bahwa pada interval $[a, b]$ pada fungsi f dapat kita bagi kedalam n subinterval yang sama yaitu dengan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Fungsi f dapat kita evaluasi di setiap titik subinterval : c_1 di subinterval pertama, c_2 di subinterval kedua dan seterusnya.
5. Sehingga didapatkan penjumlahan berhingga dengan bentuk berikut

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$$

Dengan menambahkan persegi panjang yang semakin banyak dan kecil, maka nilai aproksimasi yang didapat akan semakin baik dan luas daerah akan mendekati luas yang sebenarnya.

5. Bentuk ini mengilustrasikan aturan umum pada penjumlahan berhingga

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

6. Berikut ini beberapa Operasi aljabar pada penjumlahan berhingga
   i. Aturan penjumlahan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   ii. Aturan pengurangan

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   iii. Aturan perkalian dengan konstanta

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   iv. Aturan nilai Konstan

$$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$

7. Rumus penjumlahan dari bilangan kuadrat dan bilangan kubik dalam notasi sigma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

8. Penjumlahan Riemann yaitu

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

9. Limit dari penjumlahan Riemann ketika $n \to \infty$ ada dan sama dengan J, maka rumus untuk integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

10. Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval $[a, b]$ atau jika f memiliki loncatan ketidakkontinuan yang berhingga, maka integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ ada dan f dapat diintegralkan di $[a, b]$.
11. Berikut ini beberapa sifat integral tentu untuk f dan g dapat diintegralkan pada interval $[a, b]$:
    i. Urutan integral

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

    ii. Integral bernilai 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

    iii. Perkalian dengan konstanta

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

    iv. Penjumlahan dan pengurangan

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_{\square}^{b} g(x)dx$$

    v. Sifat penjumlahan interval terurut

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

vi. Pertidaksamaan maksimum dan minimum

Jika f memiliki nilai maksimum $\max f$ dan nilai minimum $\min f$ di $[a, b]$, maka

$$\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f \cdot (b-a)$$

vii. Dominasi

$$f(x) \geq g(x) \text{ di } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \geq 0 \text{ di } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Rangkuman 2

1. Jika f adalah kontinu di $[a, b]$, maka $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ adalah kontinu di $[a, b]$ dan terdifferensiasi di (a, b) dan turunannya adalah $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2. Perubahan pada fungsi differensial $F(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$ integral dari tingkat perubahan:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

3. Integral tak tentu dinotasikan sebagai anti turunan F dari f, yaitu:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

4. Jika f dan g adalah kontinu dengan $f(x) \geq g(x)$ melalui $[a, b]$, maka luas dari daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dari a ke b adalah integral dari $f - g$ dengan batas a ke b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

5. Rumus menentukan luas daerah dengan pengintegralan terhadap sumbu y diformulasikan seperti berikut ini.

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

9.2 Rangkuman modul 7

Rangkuman 1

1. Volume V dari seluruh benda padat S diaproksimasi dengan menggunakan penjumlahan dari volume silinder yaitu:

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k) \cdot \Delta x_k$$

2. Volume dari benda padat dengan teknik integral melalui metode persilangan pada luas $A(x)$ dari $x = a$ ke $x = b$ adalah integral dari a ke b:

$$V = \int_a^b A_x\, dx$$

3. Volume benda dengan menggunakan metode kaset adalah dilakukan dengan melakukan rotasi terhadap sumbu x yaitu:

$$V = \int_a^b A_x\, dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\, dx$$

4. Volume benda dengan menggunakan metode Washer dengan rotasi terhadap sumbu x adalah

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

5. Dengan menggunakan metode Shell yaitu rotasi terhadap garis vertikal $x = L$, fungsi kontinu $y = f(x) \geq 0, L \leq a \leq x \leq b$, dituliskan dengan

$$V = \int_a^b 2\pi(jari - jari\ kulit)(tinggi\ kulit)dx$$

6. Jika f' adalah kontinu di $[a, b]$, maka panjang kurva atau biasa disebut dengan panjang busur dari kurva $y = f(x)$ dari titik $A = \big(a, f(a)\big)$ ke titik $B = \big(b, f(b)\big)$ adalah nilai integral dari

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Ranguman 2

1) Jika fungsi $f(x) \geq 0$ adalah terdifferensiasi kontinu di $[a, b]$, luas permukaan yang memutar grafik $y = f(x)$ sekitar sumbu x adalah

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

2) Usaha yang dilakukan oleh gaya variabel $F(x)$ dalam menggerakkan sebuah benda sepanjang sumbu x dari $x = a$ ke $x = b$ adalah

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

3) Gaya yang diberikan oleh fluida terhadap salah satu sisi pelat adalah

$$F = \int_a^b w \cdot (kedalaman) \cdot L(y)dy$$

4) Momen, Massa, dan Pusat Massa Lempeng Tipis yang Meliputi Daerah pada Bidang xy.

Momen pada sumbu x

$$M_x = \int \tilde{y}\ dm$$

Momen pada sumbu y

$$M_y = \int \tilde{x}\ dm$$

Massa

$$M = \int dm$$

Pusat massa

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_y}{M}$$

5) Gaya fluida dengan massa jenis w terhadap satu sisi pelat vertikal datar yang terendam adalah hasil kali w, jarak h dari pusat massa pelat ke permukaan fluida, dan luas pelat:

$$F = w\bar{h}A$$

9.3 Rangkuman modul 8

Rangkuman 1

1. Jika f memiliki interval I sebagai domain dan $f'(x)$ ada dan tidak pernah nol pada I, maka f^{-1} terdiferensiasi pada setiap titik dalam domainnya (range f). Nilai $(f^{-1})'$ di titik b dalam domain f^{-1} adalah kebalikan dari nilai f' di titik $a\ = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

2. Logaritma natural merupakan sebuah fungsi yang dinotasikan dengan

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt\,, \qquad x > 0$$

3. Jika u adalah dungsi turunan dari x yang bernilai positif, maka $\ln u$ didefinisikan dengan menggunakan aturan Chain diperoleh bentuk $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx},\ u > 0$
4. Berikut ini beberapa sifat logaritma natural, untuk semua $b > 0$ dan $x > 0$:

a. Aturan perkalian

$$\ln b \cdot x = \ln b + \ln x$$

b. Aturan pembagian

$$\ln \frac{b}{x} = \ln b - \ln x$$

c. Aturan kebalikan

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

d. Aturan pangkat

$$\ln x^r = r \ln x$$

5. Untuk setiap bilangan $a > 0$ dan x, fungsi eksponensial dengan basis a adalah

$$a^x = e^{x \ln a}$$

6. Untuk $x > 0$ dan bilangan riil n,

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

Jika $x \leq 0$, maka rumus ini akan terpeuhi ketika turunan dari x^n dan x^{n-1} ada.

7. Jika y positif dan meningkat, maka k positif, dan kita menggunakan Persamaan differensial untuk mengatakan bahwa laju pertumbuhan sebanding dengan apa yang telah diakumulasikan. Jika y positif dan menurun, maka k negatif, dan kita menggunakan Persamaan kondisi inisial untuk mengatakan bahwa laju peluruhan sebanding dengan jumlah yang masih tersisa.

Rangkuman 2

1. Misalkan $f(a) = g(a) = 0$, bahwa f dan g dapat diturunkan pada selang terbuka I yang memuat a, dan $g'(x) \neq 0$ pada I jika $x \neq a$. Kemudian

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   denga mengasumsi limitnya ada.

2. Jika $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x) = L$, maka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$. Disini a mungkin bernilai berhingga atau tak hingga.
3. Teorema nilai rata-rata Cauchy: Misalkan fungsi f dan g kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial di seluruh (a,b) dan juga misalkan $g'(x) \neq 0$ di seluruh (a,b). Maka ada bilangan c di (a,b) di mana

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

4. Jika u adalah fungsi yang terdifferensiasi dari x dengan $|u| < 1$, dengan menggunakan rumus Chain maka diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, |u| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, |u| > 1$$

5. Turunan dari fungsi hiperbolik diantaranya adalah

$$\frac{d}{dx}(sinh\, u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(cosh\, u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(tanh\, u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(coth\, u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(sech\, u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(csch\, u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

6. Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ positif untuk x yang cukup besar.
   a. f tumbuh lebih cepat dari g saat $x \to \infty$ jika

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

   atau, ekuivalen, jika

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

   Kita juga mengatakan bahwa g tumbuh lebih lambat dari f sebagai $x \to \infty$.

b. f dan g tumbuh dengan laju yang sama ketika $x \to \infty$ jika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

di mana L berhingga dan positif.

4. Rangkuman

Modul ini tidak memiliki rangkuman khusus lagi karena merupakan rangkuman dari modul 1 hingga modul 4 yang menjadi bahan bagi mahasiswa untuk mempersiapkan Ujian Akhir Semester (UAS).

5. Latihan

1. $\int \frac{33}{6x^3-7x^2-3x}\, dx$
2. $\int \frac{4x^3-16x^2+20}{(x^2-4x+3)}\, dx$
3. $\int_{\cos\frac{1}{2}\pi}^{\cos\frac{1}{6}\pi} \boldsymbol{e^{2\theta}}\, d\theta =$
4. $\int_{\cot 15}^{\cot 75} \boldsymbol{e}^{\sin x} \cos x\ \, dx =$
5. $\int_{\frac{3}{4}\boldsymbol{\pi}}^{\boldsymbol{2\pi}} x.2^{x^2} dx =$
6. Evaluate the integral of $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$ in terms of
    a. Inverse hyperbolic functions
    b. Natural logarithms
7. Evaluate the following integrals
    a. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$
    b. $\int \sin 2x \cos 4x\ \, dx$
    c. $\int e^x \sec^3 e^x dx$

d. $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

e. $\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y} dy$

f. $\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\, dx$

8. The error function

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

important in probability and in the theories of heat flow and sig- nal transmission, must be evaluated numerically because there is no elementary expression for the antiderivative of e^{-t^2}.

a. Use Simpson's rule with n=10 to estimate *erf(1)*

b. In [0,1]

$$\left|\frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right)\right| \leq 12$$

Give an upper bound for the magnitude of the error of the estimate in part (a).

9. Express the following limit as a definite integral

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$$

10. Evaluate

e. $\int x^2\sqrt{x-1}\, dx$

f. $\int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x \ dx$

g. $\int_{-1}^{1} 2x \sin(1-x^2) \ dx$

h. $\int \sqrt{t} \sin(2t^{3/2}) \ dt$

11. Find the number b such that the line $y = b$ divides the region bounded by the curve $y = x^2$ and $y = 4$ into two regions with equal area.

12. Find the exact arc length of $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 1$ from $x = 0$ to $x = 1$.
13. Find the area of the surface that is generated by revolving the portion of the curve $y = x^2$ between $x = 1$ and $x = 2$ about the y-axis.
14. The base of solid S is a circular disk with radius r. Parallel cross-sections perpendicular to the base are squares. Find the volume of S.
15. Find the dy/dx of $y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t}\ dt$

6. Evaluasi Pembelajaran

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} ds$
2) $\int r^4 \left(7 - \frac{r^5}{10}\right)^3 dr$
3) $\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta \cos^3 \sqrt{\theta}}} d\theta$
4) Find the values of p for which each integral converges.
   a. $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$
   b. $\int_1^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$
5) A biologist models the time in minutes until a bee arrives at a flowering plant with an exponential distri- bution having a mean of 4 minutes. If 1000 flowers are in a field, how many can be expected to be pollinated within 5 minutes?
6) Evaluate the integral of $\int_1^8 \left(\frac{2}{3x} - \frac{8}{x^2}\right) dx$ and $\int_{-2}^2 \frac{3dt}{4+3t^2}$
7) Suppose that $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ and $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$. Find the value of
   a. $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$
   b. $\sum_{k=1}^{20} a_k + b_k$
   c. $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7}\right)$

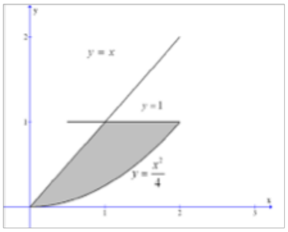
8) if $\int_0^2 f(x)dx = \pi$, $\int_0^2 7g(x)dx = 7$ and $\int_0^1 g(x)dx = 2$, find the values of tge following

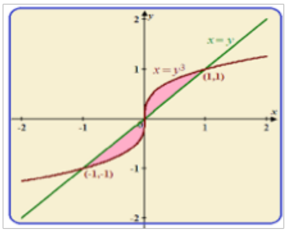
a. $\int_0^2 g(x)dx$

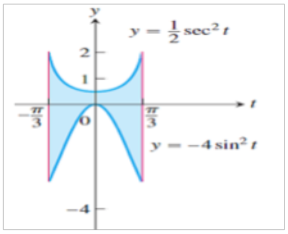
b. $\int_2^0 f(x)dx$

c. $\int_0^2 \big(g(x) - 3f(x)\big)\, dx$

9) Find the area of the following figure







10) Evaluate the integral of

a. $\int (2\theta + 1 + 2\cos(2\theta + 1))d\theta$

b. $\int \frac{(t+1)^2 - 1}{t^4} dt$

c. $\int_0^{\pi} \tan^2 \frac{\theta}{3} d\theta$

d. $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{u})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u}} du$

7. Umpan Balik

Umpan balik adalah tanggapan yang diberikan atas pesan yang disampaikan. Umpan balik adalah sebetunya proses komunikasi yang memberi penegasan atau konfirmasi maksud dari pemberi pesan yang sudah disampaikan. Dalam hal ini, umpan balik akan diberika kepada pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan setiap soal-soal yang diberikan. Umpan balik akan diberikan secara online melalui teams pada kolom feedback yang sudah ada yaitu memuat tentang jawaban maupun perbaikan dari setiap permasalahan yang diberikan.

C. PENUTUP

1. Rangkuman Modul

   Modul sembilan ini memuat rangkuman materi yang tercantum pada rangkuman kegiatan pembelajaran 1 dan 2. Modul ini menuntun mahasiswa memahami integral dan dungsi transendental dan aplikasinya secara mandiri maupun kelompok. Selanjutnya dilakukan assessment yaitu dengan melakukan Quis pada materi yang telah dipelajari.

2. Jawaban Evaluasi Pembelajaran

   Jawaban dari evaluasi tidak dicantumkan, dikarenakan setiap permasalahan dapat diselesaiakan dengan jawaban yang terbuka.

3. Daftar Istilah

   Turunan Orde Limit Tangen Normal

   Kontinu Diskontinu Differensial

4. Referensi

   Thomas, Weir and Hans. 2010. *Thomas' Calculus (Twelfth edition)*. Boston: Pearson.

BIOGRAFI PENULIS

Santri Chintia Purba, S.Pd.,M.Sc. adalah seorang dosen di Universitas Kristen Indonesia pada program studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Ia menyelesaikan pendidikan sarjananya di Universitas tempat ia bekerja sekarang dan menuntaskan studi magisternya di National Chung Cheng University.

Penulis lahir di tanjung saribu pada tanggal 30 Maret 1994. Buku ini merupakan buku ketiga yang ditulisnya dengan bentuk Buku Materi Pembelajaran (BMP) pada mata kuliah Kalkulus Dasar.

Penulis juga sudah menerbitkan dan menulis beberapa artikel yang terbit di jurnal internasional maupun nasional. Semangat menulis dilakoni sejak duduk di bangku kuliah dengan menulis di blog pribadi.

Dengan adanya karya tulisan seperti ini, diharpkan para pembaca dan memahaminya dan juga dapat mendukung perkembangan ilmu pengetahuan. Setiap karya yang dituliskan dapat diakses di blog penulis maupun di web jurnal yang tersedia. Kegigihan penulis juga dapat dilihat dengan keaktifannya dapat berbagai komunitas untuk meningkatkan kemampuan dan karakter yang berdampak.